Husserl, Edmund

Beiträge zur Theorie der Variationsrechnung

Wien
1882

books2ebooks – Millions of books just a mouse click away!

European libraries are hosting millions of books from the 15th to the 20th century. All these books have now become available as eBooks – just a mouse click away. Search the online catalogue of a library from the eBooks on Demand (EOD) network and order the book as an eBook from all over the world – 24 hours a day, 7 days a week. The book will be digitised and made accessible to you as an eBook. Pay online with a credit card of your choice and build up your personal digital library!

What is an EOD eBook?

An EOD eBook is a digitised book delivered in the form of a PDF file. In the advanced version, the file contains the image of the scanned original book as well as the automatically recognised full text. Of course marks, notations and other notes in the margins present in the original volume will also appear in this file.

How to order an EOD eBook?

eod digital on request

Whereever you see this button, you can order eBooks directly from the online catalogue of a library. Just search the catalogue and select the book you need. A user friendly interface will guide you through the ordering process. You will receive a confirmation e-mail and you will be able to track your order at your personal tracing site.

How to buy an EOD eBook?

Once the book has been digitised and is ready for downloading you will have several payment options. The most convenient option is to use your credit card and pay via a secure transaction mode. After your payment has been received, you will be able to download the eBook.

Standard EOD eBook – How to use

You receive one single file in the form of a PDF file. You can browse, print and build up your own collection in a convenient manner.

Print

Print out the whole book or only some pages.

Browse

Use the PDF reader and enjoy browsing and zooming with your standard day-to-day-software. There is no need to install other software.

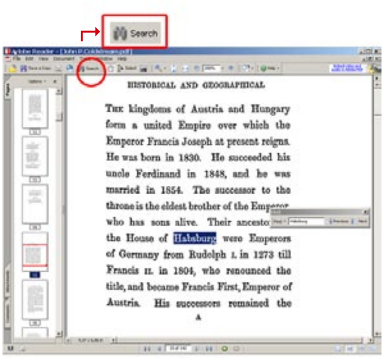
Build up your own collection

The whole book is comprised in one file. Take the book with you on your portable device and build up your personal digital library.

Advanced EOD eBook - How to use

Search & Find

Print out the whole book or only some pages.



With the in-built search feature of your PDF reader, you can browse the book for individual words or part of a word.
Use the binocular symbol in the toolbar or the keyboard shortcut (Ctrl+F) to search for a certain word. "Habsburg" is being searched for in this example. The finding is highlighted.

Copy & Paste Text

Click on the "Select Tool" in the toolbar and select all the text you want to copy within the PDF file. Then open your word processor and paste the copied text there e.g. in Microsoft Word, click on the Edit menu or use the keyboard shortcut (Ctrl+V) in order to Paste the text into your document.

Copy & Paste Images

If you want to copy and paste an image, use the "Snapshot Tool" from the toolbar menu and paste the picture into the designated programme (e.g. word processor or an image processing programme).

Terms and Conditions

With the usage of the EOD service, you accept the Terms and Conditions. EOD provides access to digitized documents strictly for personal, non-commercial purposes.
Terms and Conditions in English: http://books2ebooks.eu/odm/html/ubw/en/agb.html
Terms and Conditions in German: http://books2ebooks.eu/odm/html/ubw/de/agb.html

More eBooks

More eBooks are available at http://books2ebooks.eu

Herrn Prof. Dr. Weyr als Referenten,
Herrn Hofrath Prof. Dr. Königsberger
als ~~C~~Korreferenten

zu gefälliger Begutachtung

der z. Decan:

Wien 2/X 82

Büdinger

Beiträge zur Theorie der Variationsrechnung.

von

Edmund Husserl.

I. Bemerkungen zum einfachsten Problem in der allgemeinen Theorie der Variationsrechnung.

Im XVII^ten Bande des Crelle'schen Journals findet sich ein Brief Jacobi's an Schumacher abgedruckt, dessen Inhalt wol als eine der merkwürdigsten und genialsten Arbeiten des grossen Meisters bezeichnet werden darf.
Ein bislang ungelöstes Problem, an welchem, in seiner speciellsten Form schon, die Bemühungen der grössten Mathematiker, eines Legendre und Lagrange, gescheitert waren, erscheint mit einem Male vollständig gelöst.
In Beziehung auf die Aufgabe:

„Unter allen beliebigen Functionen y einer unabhängigen Veränderlichen x, diejenige zu finden, welche das vorgelegte Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y' \ldots y^{(n)})\, dx$$

zu einem Maximum oder Minimum macht",

lehrt die Euler-Lagrange'sche Theorie der Variationsrechnung, dass man diejenige Function y, welche mit x durch eine gewisse, leicht aufzustellende Differentialgleichung 2ter Ordnung verbunden ist, eine Lösung ergeben kann. Auf dieses Resultat führte die Betrachtung der „ersten Variation" des vorgelegten Integrals.

Es blieb aber nun die höchst schwierige Frage zu beantworten, ob die für die so definirte und mit Hülfe von den jeweilig vorgeschriebenen Grenzbedingungen eindeutig bestimmte Function, das Integral ein Maximum werde, oder ob ein Minimum, oder keines von beiden. Dies führte auf die Untersuchung des Vorzeichens der „zweiten Variation" des betrachteten Integrals. Den fruchtbaren Gedanken der Transformation der zweiten Variation in eine Form, welche unmittelbar das Vorzeichen derselben erkennen läßt, verdankt man Legendre. Derselbe behandelte das einfachste Problem, d.h. dasjenige, welches die Eigenthümlichkeit hat, daß die Function f unter dem Integralzeichen bloß den ersten Differentialquotienten der unbekannten Function y enthält, und aus der erkannten Möglichkeit einer Transformation für dasselbe schloss er voreilig ein Kriterium, welches nicht ausreicht. Tiefer drang Lagrange in das Wesen der Sache ein, indem er darlegte, dass die Transformation nur so lange ihre Giltigkeit behalten könne, als kein Glied des transformirten Ausdruckes unendlich wird. Dies zu entscheiden sei es aber notwendig die Transformation wirklich durchzuführen. Aber obgleich Lagrange den richtigen Weg einschlägt, vermag er doch nicht das erstrebte Ziel zu erreichen. Die Durchführung der Transformation für das einfachste Problem erfordert die Integration einer gewissen, nichtlinearen Differentialgleichung erster Ordnung. Alle Bemühungen Lagrange's diese zu lösen misslingen.

Weit schwieriger ist noch die Sache im allgemeineren Probleme, bei welchem die Transformation die

Lösung eines ganzen Systems Differentialgleichungen notwendig macht. Um so bewunderungswürdiger ist die obenerwähnte Mittheilung Jacobi's, welche die vollständigen — sowol notwendigen als ausreichenden — Kriterien für das allgemeine Problem enthält. Über die ausgedehnten Untersuchungen, welche zu den bedeutsamen Resultaten geführt, hielt Jacobi zurück, und so blieb für die nachfolgenden Mathematiker die schwierige Arbeit zu überwinden, aus den spärlichen Andeutungen, die der große Meister gegeben, die Transformation wirklich auszuführen und mit Hülfe derselben die vorliegenden Resultate zu verificiren. Erst durch die wichtigen Arbeiten von Hesse, Clebsch und A. Mayer erscheint die Theorie der zweiten Variation, sowol für das von Jacobi behandelte Problem, als auch für die allgemeinsten Probleme der Variationsrechnung, vollständig abgeschlossen.

Als der eigentliche Kernpunkt der

Jacobi'schen Entdeckungen ist die Erkenntniß der merkwürdigen Thatsache zu beziehen, daß die Transformationsdifferentialgleichungen von selbst integrirt sind, wenn die Differentialgleichung des Problems, d. h. diejenige, deren Integral allein das vorgelegte Problem zu lösen vermag, integrirt ist. Damit war nämlich die wirkliche Durchführbarkeit der Transformation für das allgemeine Problem, auf dem bereits von Lagrange genau vorgezeichneten Wege erwiesen.

Vermöge der Wichtigkeit dieser Entdeckungen, welche, ganz unvermittelt dastehend, fast an das Wunderbare streifen, dürfte vielleicht ein Versuch den ursprünglichen Gedankengang Jacobi's wiederaufzufinden, nicht ohne Interesse sein. Ohne Zweifel knüpfte Jacobi an das <u>einfachste</u> Problem – welches bis dahin allein ausführlich behandelt worden war – an und führte dieses einer vollständigen Lösung entgegen. Die Möglichkeit die hier gewonnenen Principien auf den allgemeinen Fall auszudehnen lag offenbar, so complicirt die zugehörigen Rechnungen – wenngleich sie keine transcendenten Operationen mehr erforderten – auch sein mochten.

Es läßt sich nun in der That ein höchst einfacher und naturgemäßer Weg aufzeigen, welcher mit Leichtigkeit von dem Punkte, an welchem Lagrange stehen bleiben mußte zu den Jacobi'schen Resultaten führt. Diesen darzulegen, ist der Zweck der folgenden Bemerkungen.

Es soll zunächst das Verfahren von Lagrange (théorie des fonct. anal. Chap. XII.) hier kurz dargestellt werden.

Ist vorgelegt das Integral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx$$

so lautet der Ausdruck für die zweite Variation:

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} 2\Phi_2\, dx,$$

wobei die Beziehung

1) $$\Phi_2 = \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z \frac{dz}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$$

und

$$z = \delta y$$

eingeführt wurde.

Wir zerlegen nun δ_2 in zwei Theile

$$\delta_2 = (I) + (II),$$

von denen der Erstere ein unveränderliches Zeichen bewahren, der Letztere einen vollständigen Differentialquotienten repräsentiren soll. Bezeichnen M, N, P vorderhand unbekannte Functionen, so schreiben wir:

2.)
$$\delta_2 = z^2 M + z\frac{dz}{dx}N + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 P \quad \ldots\ldots \quad (I)$$
$$\left.\begin{aligned} &+ z^2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - M\right) + z\frac{dz}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - N\right) \\ &\qquad + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} - P\right)\end{aligned}\right\} \ldots (II)$$

den Theil (II) identificiren wir mit

$$\frac{d}{dx}(\mu + z^2\nu)$$
$$= \frac{d\mu}{dx} + 2z\frac{dz}{dx}\nu + z^2\frac{d\nu}{dx},$$

wo μ, ν unbekannte Functionen darstellen, und durch die Vergleichung der Coefficienten der z-Größen folgt:

$$\frac{d\mu}{dx} = 0 \qquad \text{d.h. } \mu = \text{Const.}$$
$$\frac{d\nu}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - M$$
$$2\nu = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - N$$
$$0 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} - P$$

also:

$$3.)\quad \begin{cases} M = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{dv}{dx} \\ N = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - 2v \\ P = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \end{cases}$$

die Substitution dieser Ausdrücke in 2) ergiebt

$$\delta_2 = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{dv}{dx}\right) z^2 + z\frac{dz}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - 2v\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{d}{dx}\left(\mu + z^2 v\right)$$

$$4.)\quad = \left.\begin{matrix} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx} + z\frac{N}{2P}\right)^2 \\ + z^2\left(M - \frac{N^2}{4P}\right) \end{matrix}\right\} (I) \quad + \frac{d}{dx}\left(\mu + z^2 v\right),$$

worin der Übersichtlichkeit wegen die Zeichen M, N, P für die obenstehenden Ausdrücke 3) beibehalten sind. Soll nun der Theil (I) ein festes, d. h. beständig positives Vorzeichen bewahren für beliebige Variationen z, so sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$5.)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} > 0$$

$$M - \frac{N^2}{4P} \geq 0$$

für alle Werte von x im Intervall

zu erfüllen. – Die ersteren Bedingung ist die bereits von Legendre angegebene. – Dass dieselben auch dafür, dass $\delta^2 J$ beständig ein festes Zeichen besitze, notwendig und hinreichend sind, wäre leicht zu zeigen. –

Nur die zweite Bedingung, welche ausgeschrieben lautet:

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{dv}{dx}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - 2v\right)^2 \frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}} \geqq 0$$

enthält die Grösse v.

Definiren wir nun, was gestattet ist, diese Grösse durch die Differentialgleichung $M - \frac{N^2}{4P} = 0$ oder:

6.) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{dv}{dx}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - 2v\right)^2 = 0$$

dann reducirt sich der Ausdruck der zweiten Variation

7.) $$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx} + z\frac{N}{2P}\right)^2 + 2z^2\left(M - \frac{N^2}{4P}\right)\right\}dx + \left[z^2 v\right]_{x_0}^{x_1}$$

auf den einfacheren:

8.) $$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx} + z\frac{N}{2P}\right)^2 dx + \left[z^2 v\right]_{x_0}^{x_1}$$

und wir erschliessen den Satz:

Solange es möglich ist die Differentialgleichung 6.) so zu integriren, daß das Integral derselben zwischen den Grenzen x_0 und x_1 nicht unendlich wird, ist die Bedingung: $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} > 0$, für das Eintreten eines Minimums notwendig und ausreichend.

Denn für die in Betracht kommenden Variationen z verschwindet der Grenzwert $[z^2 v]_{x_0}^{x_1}$ identisch und kein Theil des transformirten Ausdrucks wird unendlich. —

Um nun von dem gefundenen Satze Nutzen zu ziehen, wird es notwendig die Differentialgleichung 6.) zu integriren. Hier geräth eben die Untersuchung Lagrange's in's Stocken. Die Theorie des Problems läßt sich nun in folgender Weise fortführen:

Der Ausdruck 8) darf nicht nur nicht ∞ werden, sondern auch nicht verschwinden; denn sonst würde die Betrachtung der 2ten Variation zur Herleitung von Kriterien nicht ausreichen und es ist leicht einzusehen, daß in den meisten Fällen dann weder ein Maximum noch ein Minimum eintreten könnte. — Es läßt sich aber unmittelbar eine specielle Variation angeben, für welche dieser ausgeschliessende Fall eintritt. Setzen wir nämlich für z irgend ein particuläres Integral $(z=\varpi)$ der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + z\,\frac{N}{2P} = 0$$

oder, was dasselbe ist von

9) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\,\frac{dz}{dx} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} - 2v\right) z = 0$$

dann wird

$$\delta^2 J = \left[\varpi^2 v\right]_{x_0}^{x_1}$$

und dieser Grenzwert ist Null, wenn die Differentialgleichung so integrirt werden kann, dass ϖ für $x = x_0$ und $x = x_1$ verschwindet. Es ist zu beachten, dass v ein Integral der Differentialgleichung 6.) ist und aus 9) folgt jetzt:

10.) $$2v = \frac{1}{\varpi}\,\frac{d\varpi}{dx}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}$$

Betrachten wir aber v als eine beliebige Grösse, indem wir auf die ursprüngliche Identität 7.):

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx} + z\,\frac{N}{2P}\right)^2 + 2z^2\left(M - \frac{N^2}{4P}\right)\right\} dx + \left[z^2 v\right]_{x_0}^{x_1}$$

zurückgehen, so folgt aus dieser,

daß die Substitution

$$z = \pi,$$

wo π irgend ein particuläres Integral der Differentialgleichung

11.) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx} + z\,\frac{N}{2P}\right)^2 + 2z^2\left(M - \frac{N^2}{4P}\right) = 0$$

bedeutet, $\delta^2 J$ auf den Grenzwert

$$\delta^2 J = \left[\pi^2 v\right]_{x_0}^{x_1}$$

reducirt, welcher wieder Null wird, sobald π so bestimmt werden kann, daß es an den Grenzen verschwindet.

Nun sehen wir aber unmittelbar, daß, wenn wir die bis nun beliebige Größe v so wählen, daß wir der Formel 10.) analog setzen:

12.) $$2v = \frac{1}{\pi}\,\frac{d\pi}{dx}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'},$$

das erste Glied in 11.) identisch verschwinden und daher auch

$$M - \frac{N^2}{4P} = 0,$$

oder was dasselbe:

6.) $$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{dv}{dx}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} - 2v\right)^2$$

sein müßte.

Mit anderen Worten:

Ist $z = \pi$ irgend ein particuläres Integral der Differentialgleichung 11.) – für welches sich demnach $\delta^2 J$ auf den Grenzwert reducirt — so ist mit demselben auch unmittelbar durch die Formel 12.) ein Integral der Transformationsdifferentialgleichung gegeben.

Substituiren wir den Ausdruck 12) in 11.) oder, was dasselbe, in 6.), so erhalten wir

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\frac{d^2\pi}{dx^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)\frac{d\pi}{dx} - \qquad 13.)$$
$$- 2\pi\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}\right)$$

Ist das allgemeine Integral dieser linearen Differentialgleichung 2.O.

$$\Pi = C_1\,\varphi_1(x) + C_2\,\varphi_2(x),$$

wo $C_1\,C_2$ willkürliche Constanten bedeuten, dann liefert der Ausdruck 12.) das allgemeine Integral der Transformationsdifferentialgleichung 6.), welche von I^{ter} Ordnung ist; offenbar vertritt das Verhältnis der Grössen C_1 und C_2 die Stelle einer willkürlichen Constanten in dem Integrale 12.)

Die Integration der Differentialgleichung 6.) ist somit zurückgeführt auf diejenige der linearen Differentialgleichung 13.)

Wir bemerkten früher, daß $\delta^2 J$ sich auf einen Grenzwert, eventuell auf Null, reducirt, sobald wir für die willkürliche Function z im Speciellen u einführen. Legen wir uns nun, abgesehen von der Transformation, die Frage vor, wann $\delta^2 J$ diese Eigenschaft besitzt, so können wir folgendermaßen verfahren:

Es ist

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} 2\Omega_2 \, dx$$

und da Ω_2 eine homogene Function 2. O. ist, so folgt bei Anwendung einer bekannten, und bei der ersten Variation üblichen Umformung:

14.) $$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} z\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega_2}{\partial z'}\right)dx + \left[z\frac{\partial \Omega_2}{\partial z'}\right]_{x_0}^{x_1}$$

und dieser Ausdruck reducirt sich auf den Grenzwert, sobald für z ein Integral der Gleichung

13a) $$\frac{\partial \Omega_2}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega_2}{\partial z'} = 0$$

angenommen wird.

Durch eine einfache Ausrechnung überzeugt man sich aber von der Identität dieser Differentialgleichung mit der linearen 13.)

die eigenthümliche Form 13a), in welche sich somit unsere Differentialgleichung 13.) setzen läßt, führt auf die Erkenntnis eines wichtigen Zusammenhanges derselben mit der Differentialgleichung des Problems,

15.) $$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

In der That, setzen wir

$$\delta v_1 = \delta f = z\frac{\partial f}{\partial y} + z'\frac{\partial f}{\partial y'},$$

so können wir die Letztere auch in der Form

$$\frac{\partial \delta v_1}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \delta v_1}{\partial z'} = 0$$

schreiben, und beachten wir, daß

$$\delta v_2 = \delta^2 f = \delta \delta v_1$$

ist, so sehen wir leicht ein, daß

$$\frac{\partial \delta v_2}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \delta v_2}{\partial z'} = \delta\left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \delta v_1}{\partial z'}\right)$$

$$= \delta\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

ist. Bezeichnen wir also

$$F(y, y') \equiv \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'},$$

so ist $\frac{\partial \delta v_2}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \delta v_2}{\partial z'}$ nichts Anderes als der Inbegriff der Glieder erster Dimension in der Entwicklung der Größe $F(y+z, y'+z')$ nach z, z'.

Sei nun

$$y = \varphi(x, c_1\, c_2)$$

das uns bekannte Integral der Differentialgleichung des Problems dann lässt sich unmittelbar eine Grösse z angeben, welche bewirkt dass

$$F(y, y') = F(y+z, y'+z') = 0,$$

also auch

16.) $$\delta F + \delta^2 F + \dots = 0$$

sei.

In der That, geben wir den Constanten $c_1\, c_2$ bestimmte, aber beliebige Werte, so genügt auch der Ausdruck

$$Y = \varphi(x, c_1+\varepsilon\delta_1, c_2+\varepsilon\delta_2)$$
$$= y + \varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c_1}\delta_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial c_2}\delta_2\right) + \dots$$

worin ε eine hinlänglich kleine Grösse, $\delta_1\, \delta_2$ ganz willkürliche Constanten bedeuten, der Differentialgleichung des Problems, und wir hätten somit zu obigem Zwecke nur zu setzen:

$$z = \varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c_1}\delta_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial c_2}\delta_2\right) + \dots$$

durch Substitution dieser Grösse wird also 16.) identisch erfüllt und gehen wir, nach Division durch

ε zur Grenze $\varepsilon = 0$ über, so folgt, daß der Ausdruck

$$17.)\quad z = \pi = \frac{\partial \varphi}{\partial c_1}\delta_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial c_2}\delta_2$$

die Differentialgleichung

$$\delta F = \delta\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \equiv \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega_2}{\partial z'} = 0.$$

befriedigt, und zwar stellt er das allgemeine Integral dar, wo $\delta_1 \delta_2$ willkürliche Constanten bedeuten.

So ist der Jacobi'sche Fundamentalsatz bewiesen, daß mit der Integration der Differentialgleichung des Problems auch diejenige der linearen Differentialgleichung 13a) geleistet sei.

Nach den vorhergehenden Untersuchungen ist nun auch klar, daß die Transformation ohne die Ausführung einer transcendenten Operation zu leisten ist.

[Anmerkung. Der obige Satz kann für die allgemeinsten Probleme der Variationsrechnung genau so bewiesen werden. Der Beweis, den Clebsch (Cr. J. LV) angegeben und der sich auch in der Abhandlung von A. Mayer Cr. 69

reproducirt findet, ist eine bloße Verification und läßt die Quelle des Satzes nicht hervortreten. Der obige, übrigens ganz naheliegende Beweis, dürfte daraus den Vorzug verdienen]

Es handelt sich nun darum, aus den gefundenen Sätzen die Schlußfolgerungen zu ziehen.

Die Giltigkeit der Transformation

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx} + z\,\frac{N}{2T}\right)^2 dx$$

erforderte, wie wir sahen, nur die Möglichkeit, die Transformationsdifferentialgleichung so zu integriren, daß das Integral v zwischen den Grenzen x_0 und x_1 nicht unendlich wird. Da nun das allgemeine Integral derselben

$$v = \frac{1}{2\Pi}\,\frac{d\Pi}{dx}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}$$

ist, worin Π die gegebene, zwei willkürliche Constanten $\gamma_1 \gamma_2$ enthaltende Function

$$\Pi = \frac{\partial \varphi}{\partial c_1}\gamma_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial c_2}\gamma_2$$

bedeutet, so kann jene Bedingung ausgesprochen werden, wie folgt:

Die Transformation gilt, so

lange und nur so lange, als es möglich ist den Ausdruck

$$\Pi = \frac{\partial \phi}{\partial c_1}\delta_1 + \frac{\partial \phi}{\partial c_2}\delta_2$$

derart zu particularisiren, daß derselbe nunmehr zwischen den Grenzen x_0 und x_1 nicht Null werden kann.

Denn ist $x = x'$ ein Nullwert für Π, so kann leicht bewiesen werden daß dann

$$\left[\frac{d\Pi}{dx}\right]_{x=x'} \gtrless 0$$

sei (cf. Hesse, Cr. J. LIV.) und somit würde V sicher an dieser Stelle ∞.

Wählen wir also die willkürlichen Constanten $\delta_1\,\delta_2$ so, daß Π für $x = x_0$ oder einen unendlich nahe vor x_0 gelegenen Wert $x = x_0 - \xi$ verschwindet, dann giebt der nächste Nullwert von Π, $x = x'$ die äußerste Grenze an, bis zu welcher x_1 liegen darf, damit die Transformation Giltigkeit besitzt.*

Dieser äußerste (und bereits auszuschließende) Grenzpunkt wird somit durch die nächst x_0 gelegene Wurzel der Gleichung

$$\Delta(x, x_0) \equiv \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \phi}{\partial c_1}\right)_{x_0}, & \left(\frac{\partial \phi}{\partial c_2}\right)_{x_0} \\ \frac{\partial \phi}{\partial c_1}, & \frac{\partial \phi}{\partial c_2} \end{vmatrix} = 0$$

*Auf eine vollständige und strenge Begründung dieses Schlusses kann ich, im Hinblick auf die weiterhin gegebene allgemeine Untersuchung, wol verzichten definirt.

Vergleichen wir aber dieses Resultat mit einer früheren Bemerkung, so ergiebt sich eine weitere Folgerung von größter Wichtigkeit.

Wenn nämlich π sich so particularisiren läßt, daß es für zwei Werte von x, z. B. $x = x_0$ und $x = x'$ verschwindet, dann hat die zweite Variation des zwischen x_0 und x' ausgedehnten Integrales J den Wert Null, sobald wir als specielle Variation, was zulässig ist, für z diesen particulären Wert π substituiren. Dieselbe Eigenschaft kommt der zweiten Variation des vorgelegten Integrals zu, wenn $x_1 > x'$ ist; denn wir brauchten ja nur

im Intervalle $x_0 \ldots x'$ zu setzen $z \equiv \pi$

" " $x' \ldots x_1$ " " $z \equiv 0$

Im Allgemeinen könnte dann unser Integral weder ein Maximum noch ein Minimum werden.

Bei festgehaltener unterer Grenze x_0, giebt es somit eine äußerste Grenzlage x' für die obere, x_1, über welche hinaus das vorgelegte Integral im Allgemeinen kein Extremum darbieten kann. Offenbar wird dieser Grenzpunkt gleichfalls durch die zunächst an x_0 liegende Wurzel der Gleichung

$$\Delta(x, x_0) = 0$$

definirt.

Halten wir demnach den Anfangspunkt der Integration fest, so gilt der Satz:

die äusserste Grenze, über welche hinaus im Allgemeinen kein Extremum stattfinden kann ist identisch mit der äussersten Grenze für die Giltigkeit der Transformation.

Daraus ergeben sich unmittelbar die vollständigen Jacobi'schen Kriterien.

— · —

Mit Hülfe der Lagrange'schen Transformation kann man auch das allgemeine Problem

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y\, y' \dots y^{(n)})\, dx = \text{Max.}$$

entsprechend behandeln.

II. Über die Herleitung der Kriterien aus der Clebsch-Jacobi'schen Transformation der zweiten Variation.

Als das allgemeinste Problem der Variationsrechnung kann bekanntlich das folgende betrachtet werden:

Man soll die den $m < n$ Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_m = 0$$

unterworfenen Variablen $y_1\, y_2 \ldots y_n$ als Functionen von x so bestimmen, daß das vorgelegte Integral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x\, y_1\, y_1' \ldots\ldots y_n\, y_n')\, dx$$

zu einem Maximum oder Minimum werde.

Damit diese Aufgabe möglich und bestimmt werde, ist es notwendig gewisse Grenzbedingungen festzusetzen. Wir nehmen an, daß die Grenzwerte der Variablen y_λ für $x = x_0$ und $x = x_1$ fest gegeben seien. Alle übrigen Fälle lassen sich auf diesen zurückführen.

die Lagrange'sche Methode der unbestimmten Multiplicatoren ermöglicht es, dieses Problem in gleicher Weise zu behandeln, als wie das allgemeinste des absoluten Maximums und Minimums. Man setzt

$$H = f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k ,$$

wo λ_k unbekannte Multiplicatoren darstellen, dann ergibt die Integration des simultanen Systems von $n+m$ Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung

$$1.)\qquad \frac{\partial H}{\partial y_h} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y_h'} = 0$$

$$\varphi_k = 0$$

die gesuchten Functionen $y_1 \dots y_n$ und die Multiplicatoren $\lambda_1 \dots \lambda_m$ als Functionen von x und von $2n$ willkürlichen Constanten, welche den vorgeschriebenen Grenzbedingungen gemäss zu bestimmen sind.

Wir denken uns diesen Theil der Aufgabe bereits absolvirt und das Resultat gegeben durch

$$2.)\qquad y_h = [y_h] \equiv \psi_h(x, c_1 \dots c_{2n})$$

$$\lambda_k = [\lambda_k] \equiv \chi_k(x, c_1 \dots c_{2n})$$

$h = 1 \dots n, \quad k = 1, 2 \dots m.$

die Substitution dieser Ausdrücke soll durch das Einschließen in eckige Klammern angedeutet werden.

Um nun zu entscheiden ob das Integral J für das so gefundene Functionensystem ein Maximum werde, oder ob ein Minimum, oder vielleicht keins von beiden, ist es notwendig das Vorzeichen der zweiten Variation zu untersuchen.

Setzen wir, in üblicher Bezeichnungsweise

3.) $$\delta^2 F = \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_h \partial y_i}\right] z_h z_i + 2\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_h \partial y'_i}\right] z_h z'_i + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'_h \partial y'_i}\right] z'_h z'_i \right\}$$

so haben wir

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} 2\,\delta^2 F\, dx\,,$$

und dieses Integral muss für alle willkürlichen Functionen z_h, welche nur den m Bedingungen

4.) $$\delta \varphi_k = \sum_{h=1}^{n} \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h}\right] z_h + \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_h}\right] z'_h \right\} = 0$$

$$k = 1\ 2 \ldots n$$

Genüge leisten, beständig ein festes Vorzeichen besitzen.

Wir können, und dies ist von Vortheil, an Stelle der Function $\delta^2 F$ einführen:

5) $F_2 \equiv \delta^2 F + \sum_k \mu_k \delta\varphi_k$,

welche Function nichts Anderes ist, als der Coefficient von $\frac{\varepsilon^2}{2}$ in der Entwickelung der Function

$$F(\dots y_h + \varepsilon \zeta_h \dots\dots \lambda_k + \varepsilon \mu_k \dots\dots).$$

Wir haben nun

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} 2 F_2 \, dx.$$

Die Form, in welcher die zweite Variation unmittelbar gegeben ist, läßt jedoch das Vorzeichen derselben nicht unmittelbar erkennen. Es entsteht somit für die Theorie die Aufgabe, wenn möglich $\delta^2 J$ so umzuformen, daß der neue Ausdruck dies Verlangen erfüllt. Durch die Verallgemeinerung der Jacobi'schen Fundamentalsätze, welche für das von einer unbekannten Function y abhängige Problem die Transformation ermöglicht hatten, gelang es Clebsch auch für das allgemeinste Problem der Variationsrechnung dieselbe durchzuführen. Das Resultat seiner Untersuchung soll nun kurz auseinandergesetzt werden.

Zu dieser Umformung werden die Lösungen eines gewissen Systems Differentialgleichungen benutzt, welche zu dem System der Differentialgleichungen des Problems (1.) in der Beziehung stehen, welche das Operationszeichen δ ausdrückt; also das System:

$$\delta\left(\frac{\partial F}{\partial y_h} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_h}\right) = 0 \qquad \delta\varphi_\kappa = 0$$

oder:

$$6.)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial F_2}{\partial u_h} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F_2}{\partial u'_h} = 0 \\ &\frac{\partial F_2}{\partial r_\kappa} = 0, \end{aligned}$$

wobei zur Unterscheidung diese speciellen Functionensysteme z_h, μ_κ durch u_h, r_κ bezeichnet wurden. Aus jener Beziehung schliesst man mit Leichtigkeit den wichtigen Satz, dass mit der Integration des ersten Systems (1.) auch unmittelbar diejenige des zweiten (6.) geleistet sei. Die allgem. Lösungen des Letzteren (6.) sind gegeben durch die Formeln

$$7.)\quad \begin{aligned} u_h &= \sum_{\lambda=1}^{2n} \gamma_\lambda \frac{\partial y_h}{\partial c_\lambda} & h=1\ldots n \\ r_\kappa &= \sum_{\lambda=1}^{2n} \gamma_\lambda \frac{\partial \lambda_\kappa}{\partial c_\lambda} & \kappa=1\ldots m \end{aligned}$$

in welchen $\xi_1 \dots \xi_{2n}$ die willkürlichen Constanten repräsentiren.

Für je zwei verschiedene Lösungssysteme $u_h \; v_k$ und $\bar{u}_h \; \bar{v}_k$ besteht die Beziehung

$$\sum_{h=1}^{n} \left\{ \bar{u}_h \frac{\partial \Phi_2}{\partial \frac{du_h}{dx}} - u_h \frac{\partial \Phi_2}{\partial \frac{d\bar{u}_h}{dx}} \right\} = \text{Const.}$$

Zum Zwecke der Transformation werden nun — und dies ist auf unendlich viele Weise möglich — n solche Systeme vollständiger Lösungen von 6.):

$$8.) \quad u_h^{\sigma} = \sum_{\lambda=1}^{2n} \frac{\partial \psi_h}{\partial c_\lambda} \delta_\lambda^{\sigma}$$

$$v_k^{\sigma} = \sum_{\lambda} \frac{\partial \chi_k}{\partial c_\lambda} \delta_\lambda^{\sigma}$$

ausgewählt, welche die Eigenschaft haben, daß sie die $\frac{n(n-1)}{2}$ # Bedingungen

$$9.) \quad \sum_{h=1}^{n} \left\{ u_h^{\sigma} \frac{\partial \Phi_2(u^{\rho}, v^{\rho})}{\partial \frac{du_h^{\rho}}{dx}} - u_h^{\rho} \frac{\partial \Phi_2(u^{\sigma}, v^{\sigma})}{\partial \frac{du_h^{\sigma}}{dx}} \right\} = 0$$

$$\sigma, \rho = 1 \, 2 \dots n$$

erfüllen.

Führt man für die $n+m$ willkürlichen Größen $z_h \; \mu_k$ lineare Verbindungen der so definirten Lösungssysteme 8.) ein:

$$10.) \quad z_h = \sum_{\sigma=1}^{n} g_\sigma u_h^{\sigma}$$

$$\mu_k = \sum_{\sigma=1}^{n} g_\sigma v_k^{\sigma},$$

\# von x unabhängigen

in welchen $g_1 \dots g_n$ neue willkürliche Functionen bedeuten, dann ergibt sich für Φ_2 eine identische Umformung, durch deren Integration

11.) $$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_h' \, \partial y_i'}\right] U_h U_i \, \frac{dx}{U^2}$$

folgt.

In dieser Formel bedeutet

12.) $$U_h \equiv \begin{vmatrix} \frac{dz_h}{dx} & \frac{du_h'}{dx} & \dots & \frac{du_h^n}{dx} \\ z_1 & u_1' & \dots & u_1^n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ z_n & u_n' & \dots & u_n^n \end{vmatrix}$$

und

13.) $$U \equiv \sum \pm \, u_1' \dots u_n^n \, . \text{ —}$$

Zu gleicher Zeit transformieren sich die Bedingungsgleichungen in

14.) $$\sum_{h=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h'}\right] U_h = 0$$

Aus dieser Umformung lassen sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß $\delta^2 J$ ein festes Vorzeichen bewahre, mit Leichtigkeit ableiten. Sie lauten:

Für alle Werte von x zwischen x_0 und x_1 muß die homogene Function 2. Ordnung:

$$\sum_{h,i} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_h' \, \partial y_i'}\right] U_h U_i \; ,$$

zwischen deren n willkürlichen Argumenten U_h die m linearen Bedingungsgleichungen

$$\sum_{h=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_h}\right]U_h = 0 \qquad k = 1 \dots m$$

bestehen, beständig ein festes Vorzeichen besitzen.

Damit ist die Aufgabe auf eine bekannte und gelöste der Algebra zurückgeführt.

Aber dieses Kriterium ist offenbar nur solange giltig, als die Transformation wirklich durchführbar ist. Um somit zu vollständigen Resultaten zu gelangen ist es notwendig, die Grenzen der Giltigkeit der Transformation zu erforschen und aus denselben Schlüsse zu ziehen, die eine einfache Anwendung zulassen. Es handelt sich also darum dasjenige hier zu leisten, was bei dem speciellen, in der Einleitung ausführlich behandelten Probleme, dem Übergange von dem unvollständigen Legendre'schen Kriterium zu dem, bereits von Lagrange erstrebten, aber erst von Jacobi erreichten vollständigen, entspricht. Es ergab sich dort das wichtige Resultat, daß die äußerste Grenze, über welche hinaus das vorgelegte Integral im Allgemeinen überhaupt kein Extrem darzubieten vermag, identisch sei mit der Grenze für die Giltigkeit der Lagrange'schen Transformation. Jacobi selbst hatte diesen Satz in seiner Notiz im XVII ten Bande des Crelle'schen Journals bereits für das allgemeine Problem einer unbekannten Function, jedoch ohne Beweis, aufgestellt. Hesse, welcher sich in seiner Arbeit (Cr. J. LIV.) die Aufgabe gestellt hatte die Rechnungen für dies Problem durchzuführen – deren er sich in der That in sehr eleganter Weise entledigt hatte – vermochte es, trotz augenscheinlicher Bemühungen, nicht, jene krönende Spitze der Jacobi'schen Untersuchungen, durch welche die Aufstellung vollständiger Kriterien überhaupt erst möglich wird, als das Resultat der Rechnung zu erweisen. Und diese Schwierigkeit war es, welche auch Clebsch bei seinen, auf das allgemeinste Problem der Variationsrechnung bezüglichen, Untersuchungen, nahe vor dem Ziele zum

Hülfsstande zwang.

Ganz so, wie bei dem speciellen, läßt sich auch beim allgemeinen Probleme von vornherein eine äußerste Grenze x' angeben, welche die obere Grenze x_1 nicht überschreiten, sie nicht einmal erreichen darf, da, wenn es überhaupt möglich sei, daß das vorgelegte Integral (im Allgemeinen) ein Extremum darbiete.

Da nämlich $2F_2$ eine homogene Function 2.O. der $z\, z'\, \mu$ ist, so ist

$$2F_2 = \sum_\lambda \left(\frac{\partial F_2}{\partial z_\lambda} z_\lambda + \frac{\partial F_2}{\partial z'_\lambda} z'_\lambda \right) + \sum_\kappa \frac{\partial F_2}{\partial \mu_\kappa} \mu_\kappa .$$

$$= \sum_\lambda \left(\frac{\partial F_2}{\partial z_\lambda} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F_2}{\partial z'_\lambda} \right) z_\lambda +$$

$$+ \frac{d}{dx} \sum_\lambda \frac{\partial F_2}{\partial z'_\lambda} z_\lambda + \sum_\kappa \frac{\partial F_2}{\partial \mu_\kappa} \mu_\kappa ,$$

also

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} \Big\{ \sum_\lambda \left(\frac{\partial F_2}{\partial z_\lambda} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F_2}{\partial z'_\lambda} \right) z_\lambda + \sum_\kappa \frac{\partial F_2}{\partial \mu_\kappa} \mu_\kappa \Big\} dx$$

$$+ \left[\sum \frac{\partial F_2}{\partial z'_\lambda} z_\lambda \right]_{x_0}^{x_1} .$$

Wir erkennen daraus unmittelbar, daß $\delta^2 J$ sich für jedes Lösungssystem der simultanen Differentialgleichungen

$$\text{A.)} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z_\lambda} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F_2}{\partial z'_\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \mu_\kappa} = 0$$

auf den Grenzwert reducirt. Das System A.) stimmt aber genau mit dem

verwandten System 6) überein, dessen Lösungen uns bekannt sind.
Wir schließen daher:

Jedesmal dann, wenn es möglich ist diese Lösungen

$$u_h = \sum \gamma_\lambda \frac{\partial \varphi_h}{\partial c_\lambda}$$

$$v_k = \sum \gamma_\lambda \frac{\partial \chi_k}{\partial c_\lambda}$$

so zu particularisiren, daß die u_h für $x = x_0$ und $x = x_1$ oder für einen vor x_1 gelegenen Wert $x = x'$ verschwinden, dann kann man auch specielle Variationen angeben, für welche

$$\delta J = 0$$

wird; diese sind im ersteren Falle:

$$z_h \equiv u_h \qquad \mu_k \equiv v_k\,,$$

im letzteren: $z_h \equiv 0$ $\mu_k \equiv 0$ im Intervalle $x' \ldots x_1$, und $z_h \equiv u_h$, und $\mu_k \equiv v_k$ im Intervalle $x_0 \ldots x'$.
Dann aber kann J im Allgemeinen weder ein Maximum, noch ein Minimum werden.

Man sieht also, daß jener äußerste Grenzpunkt x', welchen die obere Grenze x_1 nicht erreichen darf, definiert wird durch die nächst x_0 liegende Wurzel der Gleichung

$$15.)\quad \Delta(x, x_0) \equiv \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial c_1}\right)_{x_0} & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial c_{2n}}\right)_{x_0} \\ \frac{\partial \varphi_h}{\partial c_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_h}{\partial c_{2n}} \end{vmatrix} = 0$$

$$h = 1\,2 \ldots n$$

diese wichtige Thatsache muss als das von vornherein Gegebene, beachtet werden. Dass Hesse und Clebsch jene Schwierigkeit – welche, wie wir nachher sehen werden eigentlich keine besondere Schwierigkeit ist – nicht zu überwinden vermochten, hat, wie ich glaube darin seinen Grund, dass beide auf jene Thatsache und deren Stellung im Jacobi'schen Kriterium nicht genau geachtet, sondern allein von der Rechnung ausgehend, die schliesslich zu lösende Aufgabe nur als eine <u>Constantenbestimmung</u> betrachtet hatten.

Die Transformation von Clebsch gilt nämlich, wie man leicht einsieht, nur solange, als $U = \sum \pm U_1' \cdots U_n^{(n)}$ innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 nicht verschwindet. Die wirkliche Durchführbarkeit und Giltigkeit der Transformation erfordert mit anderen Worten die Möglichkeit, die Transformationsfunctionen $U_i^{(k)}$, oder vielmehr die $2n^2$ in denselben vorkommenden willkürlichen Constanten $c_i^{(k)}$ so zu bestimmen, dass, 1) die $\frac{n(n-1)}{2}$ von x unabhängigen Bedingungen 9) identisch erfüllt sind, 2) für keinen Werth von x im Intervall die Determinante U gleich Null sei.

Es scheint also notwendig zu sein, die allgemeinsten Werte der Constanten, welche die Bedingungen 9) befriedigen und für die U nicht identisch Null wird aufzusuchen und dann zu erforschen, ob unter den so bestimmten Systemen sich irgend welche finden, die auch der zweiten Bedingung Genüge leisten. Diesen Weg schlug in der That Clebsch ein und er hat, unter der Voraussetzung, daß die Integrationsconstanten $c_1 \dots c_{2n}$ canonische Constanten seien, die allgemeinsten Werte der f_a welche jene erstgenannte Forderung erfüllen, angegeben. Aber wegen der Complication der Ausdrücke war eine Untersuchung des letzten und wichtigsten Punktes unmöglich und so blieb das Problem selbst ungefördert.

Die vollständige Ausbildung der Theorie und die Aufstellung der endgültigen Kriterien verdankt man Herrn A. Mayer. Derselbe schlägt einen neuen, weit vortheilhafteren Weg ein, indem er eine ganz bestimmte specielle Constantenwahl trifft, durch deren Anwendung Alles zu erreichen ist.

Eine solche Methode hat, obgleich sie auf strengem Wege zu den Resultaten führt, doch gewisse Nachtheile. Die Aufstellung ganz specieller Constantenbestimmungen hat notwendiger Weise etwas Zufälliges, Willkürliches an sich und macht das Wesen der Sache nicht klar hervortreten.

Obgleich also zu den Resultaten nichts hinzuzufügen ist, so dürfte es vielleicht nicht ganz ohne Interesse sein, daß man durch ein allgemeines und naturgemäßes Verfahren, welches von allen Unbequemlichkeiten frei ist, von der Clebsch-Jacobi'schen Transformation zu den Kriterien gelangen kann.

Es wurde auseinandergesetzt, daß nur so lange als

$$U = \sum \pm u_1' \dots u_n^n$$

innerhalb der Grenzen x_0 und x_1 nicht verschwindet, die Transformation ihre Bedeutung behält. Soll dieselbe also überhaupt anwendbar sein, so

müssen die Constanten δ_α^σ so gewählt werden, daß Jenes nicht statthat.
Es ist daher auch klar, daß die zur Transformation eingeführten Functionen u_h^ϱ für keinen Wert von x im Intervalle gleichzeitig verschwinden dürfen.

Die allgemeine Form derselben ist:

$$u_h = \sum_{\alpha=1}^{2n} \frac{\partial y_h}{\partial c_\alpha}\,\delta_\alpha$$

Wir können auf unendlich viele Weise die $2n$ Constanten δ_α so wählen, daß für irgend einen Wert von x, $x = x_0$, die n Gleichungen

$$[u_h]_0 = \sum \left(\frac{\partial y_h}{\partial c_\alpha}\right)_0 \delta_\alpha = 0$$

erfüllt sind.

Vollführen wir dies auf n verschiedene Weisen und bezeichnen die n, so entstehenden u-Systeme durch: $u_1^\varrho \dots u_n^\varrho$ $(\varrho = 1\,2 \dots n)$, dann wird deren Determinante die Eigenschaft haben für $x = x_0$ zu verschwinden, und wir deuten dies an durch die Bezeichnung

$$U(x, x_0) = \sum \pm u_1^1 \dots u_n^n.$$

Es ist leicht einzusehen, daß diese Functionensysteme u_h^ϱ zur Transformation geeignet sind. Denn sie

erfüllen für's Erste die Bedingungs-
gleichungen:

$$\sum \left\{ u_k^\varrho \frac{\partial \delta b_i^\sigma}{\partial \frac{du_i^\sigma}{dx}} - u_i^\sigma \frac{\partial \delta b_i^\varrho}{\partial \frac{du_i^\varrho}{dx}} \right\} = 0$$

für $x = x_0$, und daher, weil diese von x unabhängig sind, identisch. Für's Zweite ist es einleuchtend, daß $U(x, x_0)$ nicht identisch Null sein kann, wie wir auch die Functionen u_k^ϱ aus der n fachen Willkür herausgreifen mögen. —

Es darf nun, falls die Transformation giltig sein soll $U(x, x_0)$ für keinen Werth von x zwischen x_0 und x_1 verschwinden.

Wir fragen zunächst, welche Beschaffenheit den Wurzeln der Gleichung

$$U(x, x_0) = 0$$

zukomme.

Ist $x = x_\pi$ irgend ein Werth, welcher $U(x, x_0)$ zu Null macht, dann ist es offenbar möglich constante Größen $g_1 \dots g_n$ so zu bestimmen, daß sie den n linearen Gleichungen

$$0 = g_1 [u_1^1]_{x=x_\pi} + g_2 [u_1^2]_{x=x_\pi} + \dots + g_n [u_1^n]_{x=x_\pi}$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$0 = g_1 [u_n^1]_{x=x_\pi} + g_2 [u_n^2]_{x=x_\pi} + \dots + g_n [u_n^n]_{x=x_\pi}$$

genügen. Die Größen

$$u_k = g_1 u_k' + \dots\dots + g_n u_k''$$

haben also die Eigenschaft für $x = x_\omega$ und für $x = x_\pi$ zu verschwinden. Dieselben constituiren ein neues System Integrale (in Verbindung mit entsprechenden v-Größen) der Differentialgleichungen 9) und besitzen gleichfalls die Form

$$u_k = \sum \frac{\partial \psi_k}{\partial c_\alpha} \bar{\gamma}_\alpha .$$

Die Gleichung

$$U(x_\pi, x_\omega) = 0$$

besagt also, daß ein System von Größen $\bar{\gamma}_1 \dots \bar{\gamma}_{2n}$ existirt, für welches

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial c_\alpha}\right)_\omega \bar{\gamma}_\alpha = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial c_\alpha}\right)_\pi \bar{\gamma}_\alpha = 0$$

gilt. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen dieser Gleichungen ist aber

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial c_1}\right)_\omega & \dots\dots\dots & \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial c_{2n}}\right)_\omega \\ \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial c_\alpha}\right)_\pi & \dots\dots\dots & \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial c_{2n}}\right)_\pi \end{vmatrix}_{k=1,2\dots n} = 0 ,$$

oder in unserer Bezeichnungsweise:

$$\Delta(x_\pi, x_\omega) = 0$$

Wir schließen demnach, daß sämmtliche Wurzeln der Gleichung

$$U(x, x_\omega) = 0$$

unter denen der Gleichung

$$\Delta(x, x_\infty) = 0$$

enthalten seien. —

Wir wissen von vornherein, daß die Gleichung

$$\Delta(x, x_0) = 0$$

den äußersten Grenzpunkt $x = x'$ definirt, welchen die obere Grenze x_1 nicht überschreiten u. nicht einmal erreichen darf, damit überhaupt ein Extrem möglich sei. Es ist somit nur unsere Aufgabe, zu beweisen, daß die Constantenbestimmung jederzeit bis x' hin gemacht werden könne, ohne daß U verschwindet.

Vermöge des oben bewiesenen Satzes ist dies ganz leicht durchzuführen.

Es bedeutete x_∞ stets einen ganz beliebigen Wert von x. Setzen wir

$$x_\infty = x_0 - \xi,$$

wo ξ eine sehr kleine Größe bedeutet und vollführen die Constantenbestimmung auf irgend eine Weise derart, daß U übergeht in $U(x, x_0 - \xi)$, dann gilt dieselbe sicher bis zum nächsten Wurzelwert x_ξ der Gleichung

$$U(x, x_0 - \xi) = 0.$$

Nach jenem Satze schließen wir aber daß auch $\Delta(x_\xi, x_0 - \xi) = 0$ sein müsse. Entwickeln wir nun, so folgt

$$0 = \Delta(x_\xi, x_0) - \xi \left(\frac{d\,\Delta(x_\xi, x)}{dx}\right)_{x=x_0} + \text{—}$$

lassen wir ξ immer kleiner werden so sehen wir unmittelbar, daß die Größe x_ξ mit Notwendigkeit in der Umgebung einer Wurzel $x = x_\pi$ der Gleichung

$$\Delta(x, x_0) = 0$$

liegen muß, so daß

$$x_\xi = x_\pi \pm \tau,$$

wo τ eine mit ξ unendlich klein werdende Größe bedeutet.

Die Transformation kann also (sicher) auf viele Weise so ausgeführt werden, daß ihre Giltigkeit von x_0 an bis in die ~~nächste~~, beliebig zu verkleinernde Umgebung der nächsten auf x_0 folgenden Wurzel x' der Gleichung

$$\Delta(x, x_0) = 0$$

reicht. Da nun dieselbe gilt nach dem Obigen sicher bis in die Nähe von $x = x_\pi$ und ist x_π etwa die zweitfolgende Wurzel jener Gleichung, so gilt die Umformung desto mehr noch bis x'. Daß übrigens x_π identisch mit x'

sein müsse folgt aus der Richelot'schen Bemerkung (cf. Cr. J. 69. p. 256), welche besagt, dass δJ nicht verschwinden kann so lange die Constanten allen Bedingungen gemäss bestimmbar sind. Daraus ersieht man, dass es keine Constantenbestimmung giebt, die über ein grösseres Intervall gilt, als das durch x_0 und x' begrenzte. Demnach kann auch x_1 nicht über x' hinaus liegen. —
Mit dem Beweise des Satzes, dass die Transformation zwischen x_0 und x' unter allen Umständen durchführbar ist, ist aber auch alles Erstrebte erreicht; denn nun folgen die notwendigen und zugleich ausreichenden Kriterien mit Leichtigkeit.

Diese Methode ist als die wahre Quelle aller möglichen speciellen Constantenbestimmungen zu betrachten.* Wir könnten jetzt solche in beliebig grosser Anzahl aufstellen, was jedoch für die Theorie ohne Belang ist. Als einfachstes Beispiel kann folgende Specialisirung dienen:

Wir wählen die Transformationsfunctionen u_h^{ϱ} derart, dass sie

* dass die Constantenbestimmung des Herrn A. Mayer ein specieller Fall dieser allgemeinen, und doch einfacheren, ist, sieht man leicht ein. cf. Cr. J. 69. p. 250 oben.

1) sämtlich für $x = x_\omega$ verschwinden
2) daß für einen beliebigen Wert des Intervalls, $x = x_\varpi$

$$u_1^1 = u_2^2 = \dots = u_n^n = 1$$

und alle übrigen Functionen gleich Null seien.

$U(x_\varpi, x_\omega)$ erhält dann den Wert 1, und somit ist diese Constantenwahl gestattet.

Die Constanten bestimmen sich vollständig durch die Gleichungen:

$$\sum \left[\frac{\partial \psi_h}{\partial c_\lambda}\right]_{x_\omega} \delta_\lambda^\varrho = 0$$

$$\sum \left[\frac{\partial \psi_h}{\partial c_\lambda}\right]_{x_\varpi} \delta_\lambda^\varrho = \delta_{h,\varrho},$$

wobei $\delta_{h\varrho} \equiv 0$ bedeutet, wenn $h \gtrless \varrho$
$\equiv 1$ " " $h = \varrho$

ist. Es folgt

$$\delta_\lambda^\varrho = \frac{1}{\Delta(x_\varpi, x_\omega)} \; \frac{\partial\, \Delta(x_\varpi, x_\omega)}{\partial \left[\dfrac{\partial \psi_\varrho}{\partial c_\lambda}\right]_{x_\varpi}}$$

und man überzeugt sich leicht, daß jetzt $U(x, x_\omega)$ sich transformiert in:

$$U(x, x_\omega) = \frac{\Delta(x, x_\omega)}{\Delta(x_\varpi, x_\omega)}$$

oder $= C \; \Delta(x, x_\omega)$

wenn C eine von 0 und ∞ verschiedene Constante bedeutet, wenn x_ϖ entsprechend gewählt ist.

III. Über die Grenze für das Bestehen eines Extremums.

Für die Integrale der aus dem Verschwinden der ersten Variation entspringenden Differentialgleichungen nimmt die vollständige Änderung ΔJ des vorgelegten Integrales die Form an:

$$\Delta J = \frac{1}{2!}\delta^2 J + \frac{1}{3!}\delta^3 J + \cdots$$

Für den Fall, daß keine speciellen Variationen ζ_h existiren, für welche $\delta^2 J$ verschwindet, hängt das Vorzeichen von ΔJ stets nur von demjenigen von $\delta^2 J$ ab und wir haben dann vollkommen sichere und ausreichende Kriterien.

Sowie jedoch die obere Grenze x_1 des Integrals einen gewissen, durch die Gleichung

$$\Delta(x, x_0) = 0$$

definirten Grenzpunkt x' erreicht, oder überschreitet, dann kann man immer ein System specieller Variationen angeben, für welche

$$\delta^2 J = 0$$

wird. Da nun im Allgemeinen für den Punkt x' die 3te Variation nicht zugleich mit der zweiten verschwinden wird, so ist der Ausspruch gerechtfertigt, daß im Punkte x' die Maximal- resp. Minimaleigenschaft, im Allgemeinen, aufhört.

Besitzt jedoch für jene speciellen Variationen auch $\delta^3 J$ den Wert 0 und $\delta^4 J$ ein festes Vorzeichen, dann scheint es, als ob das Integral beliebig weit über den Punkt x' hinaus ein Extrem darbieten kann. #

\# Man könnte nun folgendermaßen calculiren:

Diese besonderen Fälle genauer zu untersuchen sei gewiß nicht ohne theoretischen Wert und eine einfache, leicht anwendbare Methode zur Aussonderung derselben müßte sogar von größtem Nutzen in praktischer Beziehung sein, da es bei einem speciell vorliegenden Problem so gut wie unmöglich sei, direct zu erkennen, ob jene beiden Bedingungen erfüllt seien oder nicht und man daher nie sicher wäre, ob nicht gerade ein solcher Ausnahmefall vorliege. —

In der That fehlt es nicht an Versuchen, die Aufgabe in dieser Form aufzunehmen. Für das einfachste Problem, bei welchem also das Integral

$$J = \int_{x_0}^{x'} f(x\,y,y')\,dx$$

zu behandeln ist, liegen umfangreiche Abhandlungen von G. Erdmann vor (Schlömilch's Zeitschrift XXII, XXIII, XXVI), welcher sogar auch den Fall, wo die sämmtlichen Variationen bis zu einer beliebigen Ordnung $2k-1$ verschwinden, in Betracht zieht. —

Aber diese Bemühungen werden gegenstandslos durch einen Satz, welchen mein hochverehrter Lehrer, Herr Weierstraß (in seinen Vorlesungen im Sommer d. J. 1879) streng bewiesen hat und welcher lautet:

Ist $x = x'$ jener besprochene Grenzpunkt, dann kann das Integral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x\,y\,y')\,dx$$

in keinem Falle ein Maximum oder Minimum werden, sobald

$$x_1 > x'$$

geworden ist.

Die Betrachtung der *zweiten* Variation reicht also bei *diesem* Problem *unter allen Umständen* zur Entscheidung der Frage, ob ein Maximum vorliege, oder ein Minimum, aus.

Es liegt nahe, zu vermuthen, daß der entsprechende Satz auch für die allgemeinen Probleme giltig sei. Indessen läßt der Beweis des Herrn Weierstraß eine Ausdehnung auf das allgemeinste Problem nicht zu. Derselbe beruht nämlich wesentlich auf folgendem, bereits von Hesse in seiner Arbeit angewandten Satze:

Verschwindet die Größe

$$\Delta(x, x_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial c_2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial c_1}\right)_{x_0} - \frac{\partial \varphi}{\partial c_1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial c_2}\right)_{x_0}$$

für $x = x'$, so ist

$$\left[\frac{d\,\Delta(x, x_0)}{dx}\right]_{x=x'}$$

von Null verschieden.

Dies gilt für jede Wurzel x' von $\Delta(x, x_0) = 0$, also auch für $x' = x_0$. Man sieht unmittelbar, daß der gleiche Satz im allgemeinen Probleme nicht stattfindet; denn es ist evident, daß die ersten $n-1$ Differentialquotienten der Determinante $\Delta(x, x_0)$ für $x = x_0$ identisch Null sind.

Unter der Voraussetzung, daß $\Delta(x, x_0)$ im Verschwinden* das Vorzeichen ändert ließe sich der Beweis

identischen Nullwert abgesehen,

des Herrn Weierstraß wol genau zu verallgemeinern; aber diese Voraussetzung – falls sie überhaupt richtig ist – allgemein zu beweisen, scheint sehr schwierig zu sein. Da ich dies nicht vermag will ich jenen Beweis hier nicht reproduciren, sondern einen Versuch mittheilen, auf einem ganz neuen Wege den wichtigen Satz zu beweisen.

Ich beschränke mich der Einfachheit halber auf das allgemeine Problem des absoluten Maximums, resp. Minimums.*

Dem Vorgange des Herrn Weierstraß folgend, will ich die zunächst an x_0 liegende Wurzel x' der Gleichung

$$\Delta(x, x_0) = 0$$

den zu x_0 conjugirten Wert (oder „Punkt"), beide zusammen wol auch „ein Paar conjugirter Werte (o. Punkte)" nennen.

Ich mache zunächst darauf aufmerksam, daß die Bedingungen, welche aus der Transformation abgeleitet wurden, auch den notwendig

* Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß die nachfolgenden Betrachtungen, nach Ausführung geringfügiger, von selbst sich darbietender Modificationen, für die allgemeinsten Probleme des relativen Max. ihre Giltigkeit beibehalten.

erfüllt sein müssen, wenn t_1 über den conjugirten Punkt t' hinausliegt. Denn zerlegen wir den Integrationsweg $t_0 t_1$ in mehrere Theile von solcher Beschaffenheit, daß keiner derselben ein Paar conjugirter Punkte mehr enthält, dann ist für jedes der entsprechenden Integrale die Transformation durchführbar und somit ist klar, daß wenn es überhaupt möglich sein soll, daß zwischen t_0 und t_1 ein Extrem stattfinde, die homogene Function 2. Ordnung der n willkürlichen Variabeln $u_1 \dots u_n$:

$$2W = \sum_{\lambda,\iota}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'_\lambda\, \partial y'_\iota}\right] u_\lambda u_\iota$$

für alle Werte von t zwischen t_0 und t_1 beständig ein festes Vorzeichen besitzen muß.* —

Bezeichnen wir der Bequemlichkeit halber das zwischen den Grenzen $t = t_\alpha$ und $t = t_\beta$ erstreckte Integral I durch

$$I_{\alpha\beta}$$

dann haben wir für beliebige Variationen z_λ die Formel:

* Dieselbe repräsentirt dann eine „definite Form", welche nur verschwindet, wenn alle Variabeln gleich Null sind.

$$\delta^2 J_{01} = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z'_h} \right) z_h \, dx$$
$$+ \left[\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z'_h} z_h \right]_{x_0}^{x_1}$$

Wir nehmen jetzt an die Strecke $\overline{x_0 x_1}$ enthalte den zu x_0 conjugirten Punkt x', aber keinen zweiten gleichartigen Punkt x'', welcher wiederum zu x' conjugirt wäre.

Wir bestimmen nun zwei Systeme Lösungen der Differentialgleichungen

I.) $$\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z'_h} = 0 ,$$

— sie seien

$$z_1 = u_1 , \ldots\ldots , z_n = u_n$$

$$z_1 = w_1 , \ldots\ldots , z_n = w_n \text{ —}$$

in solcher Weise, dass

1.) $[u_h]_{x=x_0} = 0 \qquad [u_h]_{x=x'} = 0$

2.) $[w_h]_{x=x_a} = [u_h]_{x=x_a} ; \quad [w_h]_{x=x_1} = 0$

ist, wo x_a einen beliebigen Wert von x im Intervall bezeichnet, welcher nur so angenommen werden soll, dass zwischen x_a und x_1 kein Paar conjugirter Punkte existirt. Dies vorausgesetzt, ist es gestattet, erfüllt sein müssen, wenn x_1 über den conjugirten Punkt x' hinaus liegt. Denn zerlegen wir den Integrationsweg $\overline{x_0 x_1}$ in mehrere Theile von solcher Beschaffenheit, daß keiner derselben ein Paar conjugirter Punkte mehr enthält, dann ist für jedes der entsprechenden Integrale die Transformation durchführbar und somit ist klar, daß wenn es überhaupt möglich sein soll, daß zwischen x_0 und x_1 ein Extrem stattfinde, die homogene Function 2. Ordnung der n willkürlichen Variabeln $u_1 \dots u_n$:

$$2W = \sum_{\lambda, i} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'_\lambda \, \partial y'_i}\right] u_\lambda u_i$$

für alle Werte von x zwischen x_0 und x_1 beständig ein festes Vorzeichen besitzen muß.*—

* Dieselbe repräsentirt dann eine „definite Form", welche nur verschwindet, wenn alle Variabeln gleich Null sind.

Bezeichnen wir der Bequemlichkeit halber das zwischen den Grenzen $x = x_\alpha$ und $x = x_\beta$ erstreckte Integral I durch

$$I_{\alpha\beta},$$

dann haben wir für beliebige Variationen z_λ die Formel:

$$\delta^2 J_{01} = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z'_h} \right) z_h \, dx$$
$$+ \left[\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z'_h} \, z_h \right]_{x_0}^{x_1}$$

Wir nehmen jetzt an, die Strecke $x_0 x_1$ enthalte den zu x_0 conjugirten Punkt x', aber keinen zweiten gleichartigen Punkt x'', welcher wiederum zu x' conjugirt wäre.

Wir bestimmen nun zwei Systeme Lösungen der Differentialgleichungen

I.) $$\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z'_h} = 0 ,$$

— sie seien

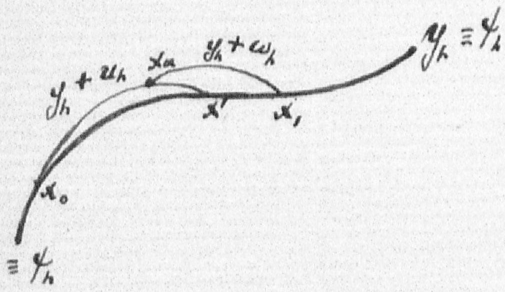
$$z_1 = u_1 , \ldots\ldots , z_n = u_n$$
$$z_1 = w_1 , \ldots\ldots , z_n = w_n$$ —

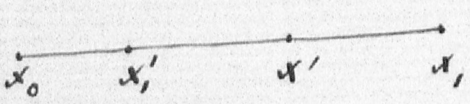
in solcher Weise, dass

1.) $[u_h]_{x=x_0} = 0 \qquad [u_h]_{x=x'} = 0$

2.) $[w_h]_{x=x_a} = [u_h]_{x=x_a} \; ; \quad [w_h]_{x=x_1} = 0$

ist, wo x_a einen beliebigen Wert von x im Intervall bezeichnet, welcher nur so angenommen werden soll, dass zwischen x_a und x_1 kein Paar conjugirter Punkte existirt. Dies vorausgesetzt, ist es gestattet,





das folgende System specieller Variationen einzuführen:

Wir setzen im Intervalle x_0 bis x_a

$$z_h \equiv u_h$$

und im Intervalle x_a bis x_1

$$z_h \equiv \omega_h$$

In der That ist nach Annahme

$$[z_h]_{x_0} = 0 \qquad [z_h]_{x_1} = 0;$$

In folge des Systems differentialgleichungen I.) erhält die zweite Variation die Form:

$$\delta^2 J_{01} = \delta^2 J_{0a} + \delta^2 J_{a1}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_h'} u_h - \frac{\partial \Omega_2}{\partial \omega_h'} \omega_h \right]_{x=x_a}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_h'} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial \omega_h'} \right) u_h \right]_{x=x_a}$$

Sei nun $x = x_1'$ der zu x_1 conjugierte Punkt, welcher zwischen x_0 und x' liegt, dann können wir x_a alle Werte von x zwischen $x_1' + \delta \ldots x_1$ geben,* und für jeden derselben gilt die oben abgeleitete Formel.

Wir setzen nun

$$3.) \quad f(x_a) = \sum_{h=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial u_h'} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial \omega_h'} \right) u_h \right]_{x=x_a}$$

und denken uns immer die Relationen 1) und 2) vorausgesetzt. —

* wo δ eine hinreichend kleine Größe bedeutet,

x_a continuirlich von $x_1' + \delta$ zu x_1 übergehend. Dabei wird sich, wie unmittelbar klar ist, auch die Function $f(x_a)$ stetig ändern, und die Differentiation ist gestattet. Es ist zu beachten, dass

$$\frac{d[u_h]_a}{dx_a} = \left[\frac{du_h}{dx}\right]_{x=x_a}$$

ist und wir haben daher:

$$\frac{df(x_a)}{dx_a} = \sum_{h=1}^{n} [u_h]_{x_a} \frac{d}{dx_a}\left[\frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial u_h'} - \frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial w_h'}\right]_{x_a} + \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{du_h}{dx}\right]_{x_a} \cdot \left[\frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial u_h'} - \frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial w_h'}\right]_{x_a}$$

daraus folgt:

$$\left[\frac{df(x_a)}{dx_a}\right]_{x_a=x'} = \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{du_h}{dx}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial u_h'} - \frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial w_h'}\right)\right]_{x=x'}$$

denn nach 1) ist

$$[u_h]_{x=x'} = 0 .$$

Berücksichtigen wir noch, dass allgemein für beliebige $z\, z'$

$$\frac{\partial \mathfrak{G}_2}{\partial z_h'} = \sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial y_h' \partial y_i'} z_i' + 2\frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial y_h' \partial y_i} z_i\right)$$

ist, so ergiebt sich mit Leichtigkeit

$$\left[\frac{df(x_a)}{dx_a}\right]_{x_a=x'} = \sum_{h=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial y_h' \partial y_i'} \frac{du_h}{dx}\left(\frac{du_i}{dx} - \frac{dw_i}{dx}\right)\right]_{x=x'}$$

Eine einfache Überlegung lehrt aber, dass

$$\left(\frac{dw_i}{dx}\right)_{x=x'} = 0$$

sein müssen.

In der That, für $x_a = x'$ könnten unsere Variationen

$z_h \equiv u_h$ im Intervalle $x_0 \dots x'$

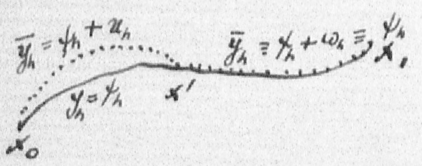
$z_h \equiv \omega_h$ " " $x' \dots x_1$,

und es soll

$$[\omega_h]_{x'} = [u_h]_{x'} = 0,$$

$$[\omega_h]_{x_1} = 0$$

sein. Da nun x' und x_1 kein Paar conjugirter Punkte sein können, so muss ω_h identisch Null sein, und daher ist auch $\frac{d\omega_h}{dx} \equiv 0$.



Wir haben daher:

$$\left[\frac{d f(x_a)}{dx_a}\right]_{x_a = x'} = \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_h' \partial y_i'} \frac{du_h}{dx} \frac{du_i}{dx}\right]_{x = x'}$$

und darin bedeuten u_h die durch die Gleichungen

$$[u_h]_{x_0} = \sum \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial c_\lambda}\right)_{x_0} \gamma_\lambda = 0$$

$$[u_h]_{x'} = \sum \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial c_\lambda}\right)_{x'} \gamma_\lambda = 0$$

fest bestimmten Functionen.

Es ist nun zu beachten, dass nicht sämmtliche Grössen

$$\frac{du_h}{dx} = \sum \psi'_{h\lambda}(x) \gamma_\lambda$$

– wobei der Bequemlichkeit wegen

$$\psi_{h\lambda}(x_0) \equiv \frac{\partial \psi_h}{\partial c_\lambda}$$

bezeichnet worden ist, —
für $x = x'$ verschwinden können.
Dies würde nämlich erfordern, daß
die Determinante

$$\left| \begin{matrix} \psi_{h1}(x) \ldots\ldots\ldots \psi_{h,2n}(x) \\ \psi'_{h1}(x) \ldots\ldots\ldots \psi'_{h,2n}(x) \end{matrix} \right|_{h=1,2\ldots n} \equiv D(x)$$

für $x = x'$ verschwinde.

Es läßt sich jedoch beweisen, daß
$D(x)$ für keinen in Betracht kommenden Werth von x gleich Null
werden kann. —

Setzen wir nun voraus, daß für
alle Werthe von x zwischen x_0 und x_1
die für das Eintreten eines Extremums nothwendigen Bedingungen erfüllt sind, dann besitzt also die Größe

$$\sum_{h,i} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_h \, \partial y'_i} \frac{du_h}{dx} \frac{du_i}{dx}$$

für $x = x'$ einen von Null verschiedenen Werth.

Somit haben wir das Resultat:

Es ist $\left[\frac{d f(x_a)}{dx_a}\right]_{x_a = x'} \gtrless 0$, während
doch gleichzeitig, wie 3.) lehrt,

$$f(x') = 0$$

ist. Die Function $f(x_a)$ wechselt
also beim Durchgange durch $x_a = x'$
ihr Vorzeichen.

die Bedeutung dieses Resultates ist leicht anzugeben:

$f(x_0)$ war nichts Anderes, als der Werth der zweiten Variation bei Annahme der durch die Formeln 1.) 2.) definirten speciellen Variationen. Wählen wir diese nun zuerst so, daß nach Substitution derselben $\delta^2 J$ den Werth erhält: $f(x'-\delta)$; und hierauf so, daß $\delta^2 J$ übergeht in $f(x'+\delta)$; dann besagt unser Resultat, daß diese beiden Werthe von $\delta^2 J$ entgegengesetztes Zeichen besitzen.

Dadurch ist aber bewiesen, daß in dem zum Anfangspunkte der Integration (x_0) conjugirten Punkte (x') die Maximaleigenschaft wirklich aufhört zu bestehen.

—·—

Ich fand noch einen zweiten Beweis für diesen Fundamentalsatz der Variationsrechnung, dessen Grundprincip von größter Einfachheit ist. Die strenge Begründung erfordert jedoch ausgedehntere Betrachtungen, deren Darlegung hier zu weit führen möchte.

—·—