UNIVERSITÄTS BIBLIOTHEK

universität wien

Rosenberg, Karl, 1861-1936

Ergänzungshefte zu den Aufgabensammlungen aus der Arithmetik und Geometrie.

2. Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung

Hölder-Pichler-Tempsky
Wien
1934

books2ebooks.eu

digitalisiert an der Universitätsbibliothek Wien

digitised at Vienna University Library

books2ebooks – Millions of books just a mouse click away!

European libraries are hosting millions of books from the 15th to the 20th century. All these books have now become available as eBooks – just a mouse click away. Search the online catalogue of a library from the eBooks on Demand (EOD) network and order the book as an eBook from all over the world – 24 hours a day, 7 days a week. The book will be digitised and made accessible to you as an eBook. Pay online with a credit card of your choice and build up your personal digital library!

What is an EOD eBook?

An EOD eBook is a digitised book delivered in the form of a PDF file. In the advanced version, the file contains the image of the scanned original book as well as the automatically recognised full text. Of course marks, notations and other notes in the margins present in the original volume will also appear in this file.

How to order an EOD eBook?

eod digital on request

Whereever you see this button, you can order eBooks directly from the online catalogue of a library. Just search the catalogue and select the book you need. A user friendly interface will guide you through the ordering process. You will receive a confirmation e-mail and you will be able to track your order at your personal tracing site.

How to buy an EOD eBook?

Once the book has been digitised and is ready for downloading you will have several payment options. The most convenient option is to use your credit card and pay via a secure transaction mode. After your payment has been received, you will be able to download the eBook.

Standard EOD eBook – How to use

You receive one single file in the form of a PDF file. You can browse, print and build up your own collection in a convenient manner.

Print

Print out the whole book or only some pages.

Browse

Use the PDF reader and enjoy browsing and zooming with your standard day-to-day-software. There is no need to install other software.

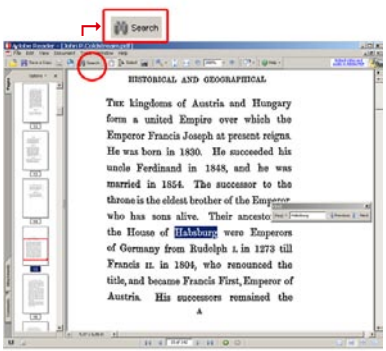
Build up your own collection

The whole book is comprised in one file. Take the book with you on your portable device and build up your personal digital library.

Advanced EOD eBook - How to use

Search & Find

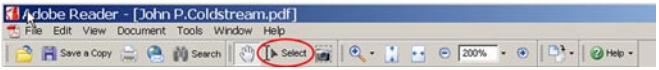
Print out the whole book or only some pages.



With the in-built search feature of your PDF reader, you can browse the book for individual words or part of a word.

Use the binocular symbol in the toolbar or the keyboard shortcut (Ctrl+F) to search for a certain word. “Habsburg” is being searched for in this example. The finding is highlighted.

Copy & Paste Text



Click on the "Select Tool" in the toolbar and select all the text you want to copy within the PDF file. Then open your word processor and paste the copied text there e.g. in Microsoft Word, click on the Edit menu or use the keyboard shortcut (Ctrl+V) in order to Paste the text into your document.

Copy & Paste Images

If you want to copy and paste an image, use the "Snapshot Tool" from the toolbar menu and paste the picture into the designated programme (e.g. word processor or an image processing programme).

Terms and Conditions

With the usage of the EOD service, you accept the Terms and Conditions. EOD provides access to digitized documents strictly for personal, non-commercial purposes.
Terms and Conditions in English: http://books2ebooks.eu/odm/html/ubw/en/agb.html
Terms and Conditions in German: http://books2ebooks.eu/odm/html/ubw/de/agb.html

More eBooks

More eBooks are available at http://books2ebooks.eu

I
528771
2.

Rosenberg

Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung

Ergänzungshefte zu den Aufgabensammlungen aus der Arithmetik und Geometrie
Von Dr. Karl Rosenberg

2. Heft

Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung

Von
Dr. Karl Rosenberg

Mit 24 in den Text gedruckten Figuren

Wien 1934
Hölder-Pichler-Tempsky A. G.

I
528.771/2

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
A.	Differentialrechnung	3
I.	Einleitung. Der Funktionsbegriff	3
II.	Der Begriff des Differentialquotienten	5
III.	Die Differentialquotienten der wichtigsten einfachen Funktionen	8
IV.	Höhere Ableitungen	16
V.	Die geometrische Bedeutung des ersten und zweiten Differentialquotienten	17
VI.	Anwendungen in der Physik	21
VII.	Ermittlung der Werte unbestimmter Formen	23
VIII.	Bestimmung größter und kleinster Werte bei arithmetischen, geometrischen und physikalischen Aufgaben	26
B.	Integralrechnung	47
I.	Das unbestimmte Integral	47
II.	Das bestimmte Integral	48
III.	Anwendungen in der Geometrie	50
	a) Flächenberechnungen (Komplanationen)	50
	b) Raumberechnungen (Kubaturen)	52
	c) Längenberechnungen (Rektifikationen)	54
	d) Oberflächenberechnungen (Komplanationen)	55
IV.	Anwendungen in der Physik	56
	Ergebnisse der Rechnungsaufgaben	59

Verlagsnummer 11.853

Alle Rechte vorbehalten

Druck von Adolf Holzhausens Nachfolger in Wien

A. Differentialrechnung.

I. Einleitung.

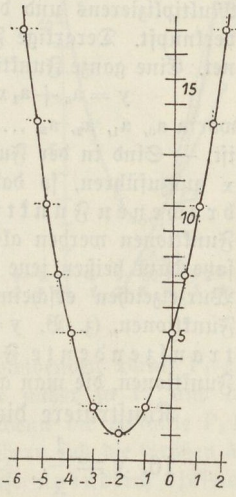
Der Funktionsbegriff.

1. Die Gleichung $y = x^2 + 4x + 5$ enthält außer den bestimmten Zahlen (4, 5) zwei Größen x und y, für die wir keinen bestimmten Wert angeben können, zwischen denen aber die Gleichung einen Zusammenhang insofern erkennen läßt, als zu einem beliebig gewählten Wert von x (z. B. -2) ein ganz bestimmter Wert von y (in diesem Falle der Wert 1) gehört. Da wir für x alle möglichen positiven und negativen, ganzen und gebrochenen Zahlen zwischen $+\infty$ und $-\infty$ wählen können, gibt es unendlich viele Wertepaare, die unsere Gleichung erfüllen. Einige dieser Wertepaare sind im folgenden zusammengestellt: **1**

x	0	$^1/_2$	1	$^3/_2$	2	3	...	-1	-2	-3	-4	$-4\,^1/_2$	-5	...
y	5	$7\,^1/_4$	10	$13\,^1/_4$	17	26	...	2	1	2	5	$7\,^1/_4$	10	...

Wir sagen in einem solchen Falle, es ist y eine Funktion der „unabhängigen Veränderlichen" x und bezeichnen daher y als die „abhängige Veränderliche". Tragen wir eine Reihe zusammengehöriger Wertepaare von x und y als Koordinaten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und verbinden die dadurch erhaltenen Punkte durch einen stetigen Linienzug, so gibt uns die so erhaltene „Funktionskurve" ein Bild des Verlaufes der Funktion. (Fig. 1.)

Fig. 1.



Wir erklären daher: Wenn die Werte einer veränderlichen Größe y den Werten einer anderen veränderlichen Größe x nach einem gewissen Gesetze zugeordnet sind, so nennen wir y eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen x.

Konstruiere die Funktionskurven der folgenden Funktionen:

2 2. $y = x^2 + 3$.

3 3. $y = \frac{x^2}{2} - 5$.

4 4. $y = x^2 - 3x + 4$.

5 5. $y = 2x^2 - 4x + 6$.

6 6. $y = -\frac{3}{2}x^2 + 2x - 8$.

7 7. $y = 3x^2 + x$.

8 8. $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - 1$.

9 9. $y = x^3 - 12x + 3$.

10 10. $y = 5x^3 - 15x + 4$.

11 11. $y = \frac{x^3}{2} + x^2$.

12 12. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$.

13 13. $6y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 6$.

14 14. $y = (x^2 - 2)^2$.

15 15. Was versteht man unter ganzen und was unter gebrochenen Funktionen? Welche Art von Funktionen bezeichnet man als rationale und welche als irrationale Funktionen?

Bei den in den vorstehenden Aufgaben betrachteten Funktionen erscheinen die Veränderlichen nur durch die Operationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und des Potenzierens mit ganzzahligen positiven Exponenten verknüpft. Derartige Funktionen werden als ganze Funktionen bezeichnet. Eine ganze Funktion des n-ten Grades hat somit die Form

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots + a_n - 1\, x^{n-1} + a_n x^n,$$

worin a_0, a_1, a_2, a_3, ... a_{n-1}, a_n konstante Größen sind und a_n nicht gleich Null ist. — Sind in der Funktionsgleichung auch Divisionen durch die Veränderliche x auszuführen, so daß diese im Nenner erscheint, so spricht man von gebrochenen Funktionen (vgl. Nr. **16**—**19**). — Die ganzen und gebrochenen Funktionen werden als rationale Funktionen bezeichnet. Im Gegensatze dazu heißen jene Funktionen, bei denen die Veränderliche x unter einem Wurzelzeichen erscheint, irrationale Funktionen. — Alle anderen Funktionen (z. B. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tang} x$, $y = \log x$ usw.) heißen transzendente Funktionen im Gegensatze zu allen vorhin definierten Funktionen, die man als algebraische Funktionen bezeichnet.

Konstruiere die Funktionskurven der nachfolgenden Funktionen:

16 16. $y = \frac{1}{x}$.

17. $y = x + \frac{4}{x}$. 17

18. $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2}$. 18

19. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$. 19

19a. $x^3 y = 3x^4 + 1$. 19a

II. Der Begriff des Differentialquotienten.

1. Es soll der Begriff des Differentialquotienten für eine ganze rationale Funktion (z. B. für $y = x^2 - 6x + 11$) entwickelt werden. 20

Wir konstruieren eine Reihe von Punkten der Funktionskurve, z. B. jene der Wertepaare

x	0	1	2	3	4	5	6		−1	−2	...
y	11	6	3	2	3	6	11		18	27	...

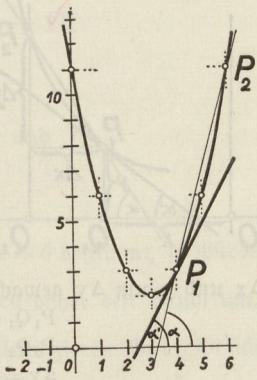
Die Funktionskurve ist eine Parabel. (Fig. 2.)

Wir legen durch einen ihrer Punkte, z. B. durch den Punkt P_1 (4, 3) irgendeine Gerade, die die Parabel in einem Punkte P_2 (6, 11) zum zweitenmal schneiden möge. Es schließt dann die Sekante P_1P_2 mit der Abszissenachse einen Winkel α ein. Um den Punkt P_1 in den Punkt P_2 überzuführen, müssen wir die Abszisse $x_1 = 4$ des Punktes P_1 um $(x_2 - x_1) = 2$ und die Ordinate $y_1 = 3$ des Punktes P_1 um $(y_2 - y_1) = 8$ wachsen lassen. Der Quotient $\frac{8}{2} = 4$ stellt die trigonometrische Tangente des Winkels α vor. Wir sagen dann, daß die Steigung der Sekante durch

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(in unserem besonderen Falle also durch $\operatorname{tang} \alpha = 4$) bestimmt ist.

Fig. 2.



Bezeichnen wir nun die Differenz $(y_2 - y_1)$ mit Δy, jene von $(x_2 - x_1)$ mit Δx, so gibt der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ die „Steigung" der Sekante P_1P_2 an.

Drehen wir nun die Sekante P_1P_2 um den festbleibenden Punkt P_1 als Achse im Sinne des Uhrzeigers, so rückt P_2 immer näher zu P_1 und die „Differenzen" Δy und Δx verkleinern sich fortgesetzt. Wenn die Sekante P_1P_2 sich der „Grenzlage" der Tangente in P_1 nähert, nähern sich die Größen Δy und Δx der „Grenze Null"; man bezeichnet dann diese unendlich kleinen

Veränderungen der Größen y und x als „Differentiale von y und x" und schreibt dafür dy und dx. Ihr Quotient, den man als Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet, gibt nach den obigen Ausführungen die Steigung der Tangente im Punkte (x, y) an.

Obwohl nun dx und dy unendlich kleine Werte sind, hat ihr Quotient, wie wir sofort sehen werden, zumeist einen ganz bestimmten Wert, den wir vorläufig für unseren besonderen Fall ermitteln wollen.

Wir bilden zunächst den Differenzenquotienten unserer Funktion $y = x^2 - 6x + 11$, indem wir y um Δy und x um Δx wachsen lassen. Es ergibt sich

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 - 6(x + \Delta x) + 11 \text{ oder}$$
$$y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 6x - 6\Delta x + 11;$$

ziehen wir davon die ursprüngliche Gleichung $y = x^2 - 6x + 11$ ab, so ergibt sich $\Delta y = 2x\Delta x - 6\Delta x + (\Delta x)^2$ oder durch Division durch Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 6 + \Delta x.$$

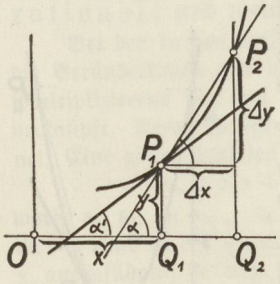
Nähern sich nun Δx und Δy dem Grenzwert oder „limes" Null, so wird

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = 2x - 6.$$

Für den besonderen Fall der Fig. 2 ist für $x = 4$ der Wert des Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = 8 - 6 = 2.$$

Fig. 3.



Somit ist die Steigung der Tangente (und damit auch jene des kleinen Kurvenstückes, das mit ihr zusammenfällt) für einen Punkt mit der Abszisse $x = 4$ durch tang $\alpha' = 2$ und $\sphericalangle \alpha' = 63^0\ 26'\ 6''$ gegeben.

Denselben Weg hat man nun einzuschlagen, um den Differentialquotienten für eine beliebige Funktion $y = f(x)$ zu bestimmen.

In Fig. 3 soll die gezeichnete Kurve einen Teil des Verlaufes der Funktion $y = f(x)$ versinnlichen. Für den Punkt P_1 ist die Ordinate $y = f(x)$, für einen zweiten Punkt P_2 ist x um Δx und y um Δy gewachsen. Es ist also

$$P_1Q_1 = y = f(x),$$
$$P_2Q_2 = y + \Delta y = f(x + \Delta x), \text{ also}$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x); \text{ somit ist der Differenzenquotient}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Bei Annäherung von Δx und Δy an die Grenze Null geht

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

über in den Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}.$$

Der Differentialquotient der Funktion $y = f(x)$ ist selbst wieder eine Funktion der Veränderlichen x; man bezeichnet ihn auch als die (erste) abgeleitete Funktion von $y = f(x)$ und schreibt dafür auch abkürzungsweise $y' = f'(x)$.

2. Nach dem in Nr. 20 besprochenen Verfahren, für das sich später beträchtliche Vereinfachungen ergeben werden, soll die Funktion $y = x^2 - 2x + 4$ nach x differenziert werden. Auch ist die Funktionskurve der ursprünglichen und der abgeleiteten Funktion zu zeichnen. 21

Man bildet zunächst den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und bestimmt sodann seinen Grenzwert für $\Delta x = 0$.

Es ist $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 4$ und

$$y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x + 4;$$

subtrahiert man davon die ursprüngliche Gleichung $y = x^2 - 2x + 4$, so ergibt sich

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x \text{ und}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 2 + \Delta x;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = 2x - 2.$$

3. Ebenso wie Nr. 2 für $y = 5x^2 - 3x + 2$. 22

4. Ebenso für $y = -3x^2 + 4x - 8$. 23

5. Ebenso für $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$. 24

6. Ebenso für $y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 9x + 11$. 25

7. Ebenso für $y = \sqrt{x}$. 26

Es ist $y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$,

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} \text{ und}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x};$$

Würde hier unmittelbar der Grenzwert $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$ bestimmt, so würde man den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ erhalten. Wir formen daher den Bruch um, indem wir Zähler und Nenner mit $(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})$ multiplizieren. Es ergibt sich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Dann ist $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

8. Wie Nr. 7 für $y = 2\sqrt{x} - 5$. 27

III. Die Differentialquotienten der wichtigsten einfachen Funktionen.

28 1. Man kann eine konstante Größe, z. B. k, auch als eine Funktion $y = f(x)$ einer Größe x bezeichnen; sie besitzt in diesem Falle für jeden Wert von x den konstanten Wert k. Man bestimme den Differentialquotienten dieser konstanten Größe k nach x.

Aus $y + \Delta y = k$ folgt wegen $y = k$ unmittelbar, daß $\Delta y = 0$ und daher auch $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = 0$ ist. Der Differentialquotient einer konstanten Größe ist somit gleich Null. (Geometrische Bedeutung?)

29 2. Man bestimme den Differentialquotienten der linearen Funktionen a) $y = mx$ und b) $y = mx + b$!

a) Aus $y + \Delta y = m(x + \Delta x)$ folgt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$ und $\frac{dy}{dx} = m$. (Geometrische Bedeutung?)

b) Aus $y + \Delta y = mx + m\Delta x + b$ folgt wegen $y = mx + b$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m \text{ und } \frac{dy}{dx} = m.$$ (Geometrische Bedeutung?)

30 3. Man bestimme den Differentialquotienten einer Summe $y = m.u \pm n.v$, worin u und v Funktionen einer und derselben unabhängigen Veränderlichen x sind, z. B. $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$!

Es ist $y + \Delta y = m(u + \Delta u) \pm n(v + \Delta v)$. Ziehen wir davon die ursprüngliche Gleichung $y = mu \pm nv$ ab, so ergibt sich $\Delta y = m\Delta u \pm n\Delta v$ und daher auch $\lim_{\Delta x = 0 \to} \frac{\Delta y}{\Delta x} = m.\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm n.\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = m.\frac{du}{dx} \pm n.\frac{dv}{dx}$, d. h. der Differentialquotient einer Summe (Differenz) von Funktionen derselben unabhängigen Veränderlichen ist gleich der Summe (Differenz) der Differentialquotienten der einzelnen Funktionen.

31 4. Bestimme den Differentialquotienten des Produktes $y = u.v$ zweier Funktionen $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ derselben Veränderlichen x!

Es ist $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u.\Delta v$; zieht man davon $y = uv$ ab, so ergibt sich $\Delta y = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u.\Delta v$ und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u.\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Nähert sich Δx der Grenze Null, so ist $\Delta u.\frac{\Delta v}{\Delta x} = 0$, weil $\Delta u = 0$ wird und $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ einem endlichen Grenzwerte $\frac{dv}{dx} = v'$ zustrebt. Es ist also

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \text{ oder } y' = vu' + uv'.$$

5. Bestimme den Differentialquotienten eines Quotienten $y = \frac{u}{v}$ 32
zweier Funktionen $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ einer und derselben Veränderlichen x.

Es ist $y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$ und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{\Delta x \cdot v\,(v + \Delta v)}, \text{ und}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v + \Delta v)}, \text{ daher } \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \text{ oder } y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

6. Es soll der Differentialquotient einer Potenz, z. B. $y = x$, 33
$y = x^2, y = x^3, y = x^4, \ldots y = x^n$ bestimmt werden.

a) Für $y = x$ (d. i. $y = x^1$) ergibt sich $y + \Delta y = x + \Delta x$, daher $\frac{dy}{dx} = 1$.

b) Für $y = x^2$ findet man $y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$; subtrahiert man davon $y = x^2$ und dividiert durch Δx, so ergibt sich durch Übergang zur Grenze $\Delta x \longrightarrow 0$

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

c) Für $y = x^3$ ergibt sich ebenso

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, daher

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 \text{ und}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

d) Für $y = x^4$ können wir auch schreiben $y = x^3 \cdot x$ und nun dieses Produkt nach Nr. 31 differenzieren. Wir erhalten

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot 3x^2 + x^3 = 4x^3 \text{ usw.}$$

e) Die unter a) bis d) behandelten Fälle würden einer allgemeinen Regel folgen, die lauten würde

$$\frac{d\,(x)^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}.$$

Daß diese Regel zunächst für ganze positive Exponenten n gilt, läßt sich folgendermaßen allgemein beweisen. Es sei nachgewiesen, daß $\frac{d(x^n)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$ richtig sei. Dann folgt für $\frac{d(x^{n+1})}{dx} = \frac{d(x^n \cdot x)}{dx}$ nach Nr. 31,

$$\frac{d(x^{n+1})}{dx} = x \cdot n \cdot x^{n-1} + x^n = nx^n + x^n = (n + 1)\,x^n,$$

d. h.: gilt unsere Regel für x^n, so gilt sie auch für x^{n+1}, gilt sie für x^{n+1}, so gilt sie auch für x^{n+2} usw. Nun gilt sie bestimmt für $n = 4$ (nach d), also

auch für $n = 5$, daher auch für $n = 6$ usw., also für jeden ganzzahligen positiven Exponenten. [Beweis durch den Schluß von n auf $(n+1)$ oder Beweis durch vollständige mathematische Induktion.]

f) Der Satz gilt aber auch für eine ganze negative Zahl als Exponent. Denn es ist $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; dies gibt nach Nr. **32**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^n \cdot 0 - n x^{n-1} \cdot 1}{x^{2n}} = \frac{-n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{-n-1}.$$

g) Ist der Exponent ein gemeiner Bruch, z. B. $\frac{p}{q}$, bestehe also $y = x^{\frac{p}{q}}$, so ist $y^q = x^p$. Differenziert man auf beiden Seiten nach x, so ergibt sich $q \cdot y^{q-1} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot x^{p-1}$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{(x^{-\frac{p}{q}})^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q} \cdot x^{p-1-p+\frac{p}{q}}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}.$$

h) Endlich möge der Exponent noch ein negativer Bruch, z. B. $-\frac{p}{q}$, sein. Aus $y = x^{-\frac{p}{q}}$ ergibt sich $y^q = x^{-p}$ und wie unter g) $q y^{q-1} \cdot \frac{dy}{dx} = -p x^{-p-1}$, daher $\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q} \cdot \frac{x^{-p-1}}{(x^{\frac{p}{q}})^{q-1}} = -\frac{p}{q} \cdot x^{-p-1+p-\frac{p}{q}} = -\frac{p}{q} \cdot x^{-\frac{p}{q}-1}$.

34 **7. Es soll der Differentialquotient einer Funktion von einer Funktion gebildet werden.** Es sei z. B. $y = f(u)$, wobei $u = \varphi(x)$, also $y = f[\varphi(x)]$ ist.

Ändert man x in $x + \Delta x$, so ändert sich u um Δu und y um Δy. Es ist somit $y + \Delta y = f(u + \Delta u)$; wegen $y = f(u)$ ist $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$, daher

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Der erste Faktor — der Differenzenquotient $\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}$ — erscheint so gebildet, als ob u eine unabhängige Veränderliche wäre. Nähert sich Δx der Grenze Null, so nähert sich auch Δu dieser Grenze. Es ist folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Es sei z. B. $y = (3x^2 + 5x)^2$. Setzen wir $(3x^2 + 5x) = u$, so ist $y = u^2$, wobei u eine Funktion von x ist. Es ist dann nach der obigen Regel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u^2)}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ oder}$$

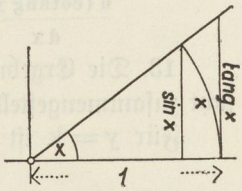
$$\frac{dy}{dx} = 2u \cdot (6x + 5) = 2(3x^2 + 5x)(6x + 5) = 36x^3 + 90x^2 + 50x.$$

Eine einfache Probe der Richtigkeit ergibt sich, wenn wir $y = (3x^2 + 5x)^2$ ausführen und das Ergebnis $y = 9x^4 + 30x^3 + 25x^2$ nach x differenzieren; es ergibt sich wie vorhin $\frac{dy}{dx} = 36x^3 + 90x^2 + 50x$.

8. Welchen Grenzwert nimmt der Bruch $\frac{\sin x}{x}$ an, wenn sich x der Null nähert? **35**

Aus Fig. 4 folgt, daß der im Bogenmaße gemessene Winkel x größer ist als sin x, aber kleiner als tang x, also

Fig. 4.



$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$ oder

$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x}$; multipliziert man mit sin x, so folgt

$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$

Nimmt x zur Grenze Null ab, so nähert sich cos x dem Grenzwert 1; es ist also

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

9. Bestimme den Differentialquotienten der Funktion $y = \sin x$! **36**

Es ist $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$ und wegen $y = \sin x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$ Nähert sich Δx (und daher auch $\frac{\Delta x}{2}$) der Grenze Null, so ergibt sich, da der rechts stehende Faktor nach Nr. 35 sich der Grenze 1 nähert,

$$\frac{\mathbf{d(\sin x)}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{\cos x.}$$

10. Bestimme den Differentialquotienten der Funktion $y = \cos x$! **37**

Aus $y = \cos x$ folgt $y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$, daher

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -2 \frac{\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}};$$ wie in Nr. 36 ergibt sich beim Übergang zur Grenze $\Delta x \longrightarrow 0$

$$\frac{\mathbf{d(\cos x)}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{-\sin x.}$$

11. Bestimme den Differentialquotienten der Funktion $y = \text{tang } x$! **38**

Es ist $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ und daher nach Nr. 32

$$\frac{\mathbf{d(tang\ x)}}{\mathbf{dx}} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

39 12. Bestimme den Differentialquotienten der Funktion $y = \text{cotang } x$!

Aus $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ ergibt sich

$$\frac{d\,(\text{cotang } x)}{dx} = \frac{-\sin x \,.\, \sin x - \cos x \,.\, \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

40 13. Die Ergebnisse der Nrn. 28—39 sind in der folgenden Übersicht zusammengestellt.

Für $y = k$ ist . . . . . $\frac{dy}{dx} = 0.$

Für $y = mx$ ist . . . . . $\frac{dy}{dx} = m.$

Für $y = mu \pm nv$, worin $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ ist . . . . . $\frac{dy}{dx} = m \,.\, \frac{du}{dx} \pm n \,.\, \frac{dv}{dx}.$

Für $y = u \,.\, v$, worin $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ ist . . . . . $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$

Für $y = \frac{u}{v}$, worin $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ ist . . . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$

Für $y = f(u)$, wobei $u = \varphi(x)$ ist . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \,.\, \frac{du}{dx}.$

Für $y = x^n$ ist . . . . . $\frac{dy}{dx} = n \,.\, x^{n-1}.$

Für $y = \sin x$ ist . . . . . $\frac{dy}{dx} = \cos x.$

Für $y = \cos x$ ist . . . . . $\frac{dy}{dx} = -\sin x.$

Für $y = \text{tang } x$ ist . . . . . $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

Für $y = \text{cotang } x$ ist . . . . . $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

Man bestimme die Differentialquotienten nachfolgender Funktionen:

41 14. $y = x^7$.

42 15. $y = x$.

43 16. $y = x^{-2}$.

44 17. $y = x^{\frac{1}{4}}$.

18. $y = 5x^9$. **45**

19. $y = \sqrt[4]{x^3} \left(= x^{\frac{3}{4}}\right)$. **46**

20. $y = -6x^{-4}$. **47**

21. $y = \sqrt[5]{\frac{1}{x^3}} \quad \left(= x^{-\frac{3}{5}}\right)$. **48**

22. $y = x^{-\frac{1}{3}}$. **49**

23. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$. **50**

24. $y = -\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} \left(= -x^{\frac{3}{5}}\right)$. **51**

25. $y = -\frac{1}{\sqrt[3]{x^{-5}}}$. **52**

26. $y = mx + n$. **53**

27. $y = 7mx^5$. **54**

28. $y = -\frac{4x^5}{mn}$. **55**

29. $y = m + 3nx + 5x^2$. **56**

30. $y = -\frac{25}{\sqrt[5]{x^2}}$. **57**

31. $y = x^2\sqrt{x^3}$. **58**

32. $y = \frac{\sqrt{x^3}}{x^3\sqrt[3]{x^2}}$. **59**

33. $y = x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$. **60**

34. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2\sqrt{x^3}}{a}}$. **61**

---

35. $y = (m^2 + x^2)(m^2 - x^2)$. **62**

36. $y = (x + 1)(x - 1)$. **63**

37. $y = (3 + 2x)(3 - 2x)$. **64**

38. $y = (1 - 3x)(1 + 2x)$. **65**

39. $y = (x^4 - x^2 + 1)(x^2 + 1)$. **66**

40. $y = (x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1)(x^2 + 1)$. **67**

---

41. $y = \frac{x+1}{x}$. **68**

69 42. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

70 43. $y = \frac{5}{x^3} + \frac{7}{x^2} + \frac{9}{x} + 1$.

71 44. $y = \frac{x^2-5}{x-1}$.

72 45. $y = \frac{1-3x^2}{3-x^2}$.

73 46. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

74 47. $y = \frac{3+2x}{3+2x+x^2}$.

75 48. $y = \frac{x^2-3x+5}{x^2-2}$.

76 49. $y = \frac{1+2x+x^2}{1-2x+x^2}$.

77 50. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

---

78 51. $y = (2x^2 - 3x + 4)^3$.

79 52. $y = (x+2)^3 (x-2)^2$.

80 53. $y = (m^2 - x^2)^4$.

81 54. $y = \sqrt{2mx - x^2}$.

82 55. $y = \sqrt[3]{2m + 3x}$.

83 56. $y = \sqrt{(x^2 + 2x - 6)^3}$.

84 57. $y = \sqrt{(a^2 - x^2)^3}$.

85 58. $y = ax - \sqrt[3]{(a+x)^2}$.

86 59. $y = \sqrt{2px}$.

87 60. $y = \frac{1}{x^2 - 3x}$.

88 61. $y = \frac{3}{(3 - \frac{x}{3})^3}$.

89 62. $y = \frac{1}{6(m - nx^2)^3}$.

63. $y = x^4 (5 - 2x^3)^2$. **90**

64. $y = x\sqrt{1 - x^2}$. **91**

65. $y = (3 + x)\sqrt{3 - x}$. **92**

66. $y = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{(1 - x)^2}$. **93**

67. $y = \left(\frac{m}{x} + \frac{x}{m}\right)^3$. **94**

68. $y = \frac{(2 + x^2)^3}{(1 - x^3)^2}$. **95**

69. $y = \frac{\sqrt{3 + 2x}}{x}$. **96**

70. $y = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. **97**

71. $y = x^3\sqrt{a^3 - x^3}$. **98**

72. $y = \sqrt[6]{\frac{1}{(1 - 3x^2)^3}}$. **99**

73. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(2 - x^3)^4}}$. **100**

74. $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^2$. **101**

---

75. $y = \cos mx$. **102**

76. $y = m \cos \frac{x}{m}$. **103**

77. $y = m \sin \frac{x}{m}$. **104**

78. $y = m \sin \frac{m}{x}$. **105**

79. $y = \sin (2x - m)$. **106**

80. $y = \cos (x^2 - m^2)$. **107**

81. $y = \operatorname{tang} (a + bx)$. **108**

82. $y = \operatorname{cotang} (a - x)$. **109**

83. $y = m \cos \frac{1}{x}$. **110**

84. $y = \sin \sqrt{\frac{1}{x}}$. **111**

112 85. $y = \text{tang}\, mx$.

113 86. $y = m \,\text{tang}\, \frac{x}{m}$.

114 87. $y = \sin^2 x$.

115 88. $y = \cos^2 (mx)$.

116 89. $y = \frac{1}{\sin x}$.

117 90. $y = \frac{1}{2} \cos x + \cos \frac{x}{2}$.

118 91. $y = \frac{1}{12} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin x$.

119 92. $y = \text{cotang}\, x - \text{tang}\, x$.

120 93. $y = 3 \cos x - 4 \cos^3 x$.

121 94. $y = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2}$.

122 95. $y = \frac{m \sin x}{1 + \cos x}$.

123 96. $y = \sin x \,.\, \sin (x - m)$.

124 97. $y = \cos x \,.\, \cos (x - m)$.

125 98. $y = \frac{1}{4} \text{tang}^4 x + \frac{1}{2} \text{tang}^2 x$.

IV. Höhere Ableitungen.

126 1. Die erste Ableitung $\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'$ einer Funktion $f(x)$ ist — wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde — wieder eine Funktion von x. Somit läßt sich auch für sie eine abgeleitete Funktion bestimmen, die man mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ oder mit $f''(x)$ oder y'' bezeichnet. Ebenso kann es eine dritte, vierte usw. Ableitung geben. Welche Ableitungen ergibt z. B. die Funktion $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$?

$y' = 3x^2 - 4x + 3$; $y'' = 6x - 4$; $y''' = 6$; $y^{IV} = 0$.

127 2. Bestimme die ersten zwei Ableitungen von $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$!

128 3. Wie Nr. 127 für $y = x + \frac{1}{x}$.

4. Wie Nr. 127 für $y = 5x - \frac{1}{x^3}$. **129**

5. Ebenso für $y = x^4 - \frac{7}{3} m x^3 + 3 m^2 x^2 - 8 m^3 x + m^4$. **130**

6. Ebenso für $y = (x^2 + 1)(x^2 - x + 1)$. **131**

7. Ebenso für $y = \sqrt{a + bx}$. **132**

8. Ebenso für $y = \sqrt{2px}$. **133**

9. $y = \sqrt{m + x} + \sqrt{m - x}$. **134**

Bilde die vier ersten Ableitungen von:

10. $y = x^7$. **135**

11. $y = \sqrt{x}$. **136**

12. $y = \sin x$. **137**

13. $y = \cos x$. **138**

V. Die geometrische Bedeutung des ersten und zweiten Differentialquotienten.

1. Was ist über die geometrische Bedeutung des ersten Differentialquotienten einer Funktion $y = f(x)$ zu sagen? **139**

Über die geometrische Bedeutung des ersten Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ einer Funktion $y = f(x)$ oder ihrer ersten Abgeleiteten $y' = f'(x)$ wurde bereits in Nr. 20 gesprochen. Er stellt uns für jeden Wert der Abszisse x die Steigung der Funktionskurve, d. i. die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels des betreffenden Kurvenelementes vor.

Fig. 5.

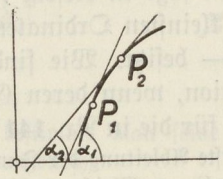
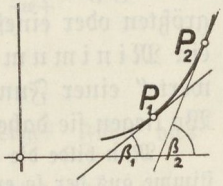


Fig. 6.



Indem man dies festhält, erkennt man, daß für das Steigen der Funktionswerte nach Fig. 5 und 6 das Vorzeichen des Differentialquotienten positiv, für das Fallen der Funktionswerte nach Fig. 7 und 8 dagegen negativ ist. In den Fällen Fig. 5 und 7 erscheint die Kurve, von der Abszissenachse gesehen, hohl (konkav), in den Fällen Fig. 6 und 8 dagegen erhaben (konvex).

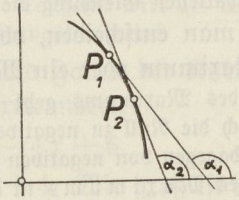


Fig. 7.

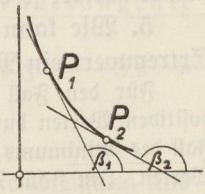


Fig. 8.

140 2. Welche geometrische Bedeutung hat der zweite Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ einer Funktion $y=f(x)$ oder ihre zweite Ableitung $y''=f''(x)$?

Der zweite Differentialquotient (die zweite Ableitung) einer Funktion $y=f(x)$ spielt gegenüber der ersten Abgeleiteten $f'(x)$ — die ja gleichfalls eine Funktion von x ist — genau dieselbe Rolle wie die erste Abgeleitete $y=f'(x)$ gegenüber der ursprünglichen Funktion $y=f(x)$. Er wird daher beim Fallen der Funktionskurve der ersten Abgeleiteten negativ, beim Steigen dagegen positiv sein.

141 3. Stelle die Funktion $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x+1$ sowie ihre erste und zweite Ableitung y' und y'' graphisch dar und prüfe an den betreffenden Funktionskurven die Ergebnisse der Nrn. **139** und **140**!

Die betreffenden Funktionskurven sind in den Fig. 9, 10 und 11 gezeichnet. In Fig. 9 wurden die Werte y für $x=0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots -1, -2, -3, -4, \ldots$, in Fig. 10 jene für $x=0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots -1, -2, -3, -4, \ldots$, in Fig 11 jene für $x=0, \frac{1}{2}, +4, -3, \ldots$ der Konstruktion zugrunde gelegt.

142 4. Wenn der erste Differentialquotient einer Funktion $y=f(x)$ für einen oder mehrere Werte von x den Wert „Null" besitzt, so bedeutet dies nach Nr. **139**, daß die Tangente der Funktionskurve an der betreffenden Stelle parallel zur Abszissenachse verläuft. (T_1 und T_2 in Fig. 9.) Man sagt in diesem Falle, daß die Kurve dort einen größten oder einen kleinsten Ordinatenwert — ein Maximum oder ein Minimum — besitzt. Wie findet man daher solche „Extremwerte" einer Funktion, wenn deren Gleichung $y=f(x)$ gegeben ist? Wo liegen sie daher für die in Nr. **141** gegebene Funktion?

Man bilde die erste Ableitung der Funktionen, setze sie gleich Null und bestimme aus der so erhaltenen Gleichung die Wurzelwerte.

143 5. Wie kann man entscheiden, ob ein nach Nr. **142** gefundener Extremwert ein Maximum oder ein Minimum ist?

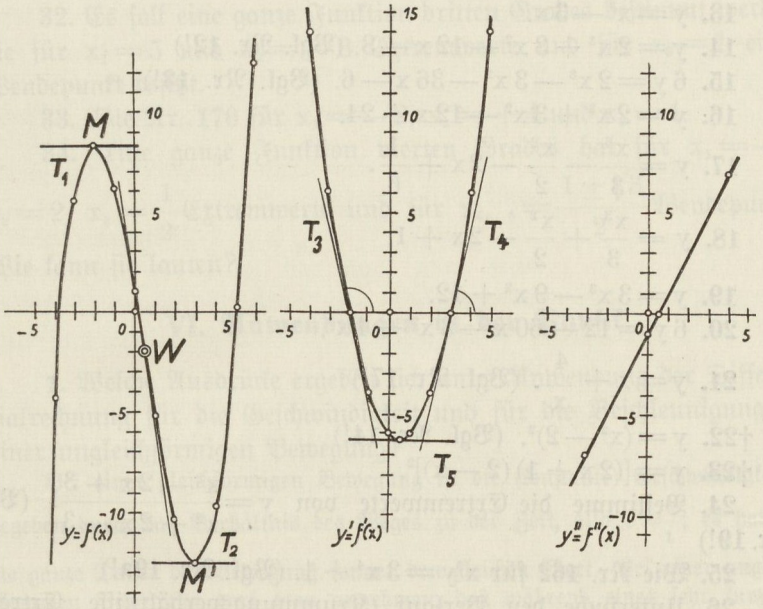
Für den Fall des Maximums geht der erste Differentialquotient von positiven Werten durch die Null zu negativen Werten über (Nr. **140**), für den Fall des Minimums dagegen von negativen Werten durch die Null zu positiven Werten. Im Falle des Maximums ist daher der Wert des zweiten Differentialquotienten negativ (T_3 in Fig. 10), für den Fall des Minimums dagegen positiv (T_4 in Fig. 10).

144 6. Bei der in Nr. **141** betrachteten Funktion ist der links vom Punkte W gelegene Teil der Funktionskurve, von unten gesehen, hohl,

der rechts davon gelegene Teil erhaben; der Wechsel im Kurvenverlauf erfolgt im Punkte W — einem sogenannten Wendepunkte. Wie kann man seine Lage rechnerisch bestimmen?

An der betreffenden Stelle geht der Wert des zweiten Differentialquotienten von einem negativen Wert durch die Null zu einem positiven Wert über. Für die betreffende Stelle wird daher der Wert des zweiten Differentialquotienten gleich Null sein (T_5 in Fig. 10). — Wie erfährt man also das Vorhanden-

Fig. 9, 10, 11.



sein eines Wendepunktes und wie bestimmt man seine Lage? Führe dies für die in Nr. **141** betrachtete Funktion durch!

Die im Wendepunkte vorhandene Tangente wird als Wendetangente bezeichnet. Wie findet man ihre Richtungskonstante?

7. Untersuche das Steigen und Fallen der Kurve $y = -3x^2 + 6x - 8$ und bestimme ihre Extremwerte! **145**

8. Wie Nr. **145** für $y = x^2 - 4x + 6$. **146**

9. Ebenso für $y = x^2 - 4x + 4$. Wie groß ist die Steigung und der Neigungswinkel des Kurvenelementes für die Punkte, deren Abszisse $x_1 = -1$ und $x_2 = +3$ ist? **147**

10. Gibt es einen Punkt der Kurve in Nr. **145**, für den die Tangente unter 45^0 (60^0) geneigt ist? **148**

149 11. In welchen Punkten der Kurve $y = x^2 - x + 3$ ist die Steigung 3, 2, 1, −1, −2, −3?

150 12. Bestimme den Neigungswinkel der Tangenten der Kurve $y = x^3$ für die Punkte mit den Abszissen $x_1 = 1$ und $x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$!

Bestimme die Extremwerte der nachfolgenden Funktionen sowie die Lage etwa vorhandener Wendepunkte und die Gleichung der zugehörigen Wendetangenten, u. zw.:

151 13. $y = x^3 - 3x$.

152 14. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$. (Vgl. Nr. 12!)

153 15. $6y = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 6$. (Vgl. Nr. 13!)

154 16. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 24$.

155 17. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6}$.

156 18. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 1$.

157 19. $y = 3x^3 - 9x^2 + 12$.

158 20. $6y = 12 - 60x - 3x^2 + 4x^3$.

159 21. $y = x + \frac{4}{x}$. (Vgl. Nr. 17!)

160 †22. $y = (x^2 - 2)^2$. (Vgl. Nr. 14!)

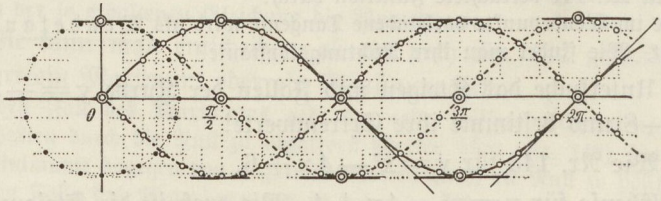
161 †23. $y = [(2x + 1)(2 - x)]^2$.

162 24. Bestimme die Extremwerte von $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$! (Vgl. Nr. 19!)

163 25. Wie Nr. 162 für $x^3y = 3x^4 + 1$. (Vgl. Nr. 19a!)

164 26. Untersuche den Verlauf (Krümmungsverhältnisse, Extremwerte, Wendepunkte, Wendetangenten) für die Sinusfunktion $y = \sin x$ (Fig. 12)! *)

Fig. 12.



*) In Fig. 12 ist die Sinusfunktion durch eine voll ausgezogene, die Cosinusfunktion durch eine gestrichelte Linie dargestellt. Fassen wir daher die

27. Ebenso für die Cosinusfunktion $y = \cos x$.*) **165**

28. Es soll eine ganze Funktion zweiten Grades so bestimmt wer- **166**
den, daß sie für $x = 5$ ein Maximum (ein Minimum) besitzt.

29. Eine ganze Funktion dritten Grades so zu bestimmen, daß **167**
sie für $x_1 = 3$ und $x_2 = -4$ Extremwerte besitzt.

30. Wie Nr. **167** für $x_1 = -2$ und $x_2 = +4$. **168**

31. Eine ganze Funktion vierten Grades zu bestimmen, die für **169**
für $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$ Wendepunkte besitzt.

32. Es soll eine ganze Funktion dritten Grades bestimmt werden, **170**
die für $x_1 = 5$ und $x_2 = -3$ Extremwerte und für $x_3 = 1$ einen Wendepunkt besitzt.

33. Wie Nr. **170** für $x_1 = -2$, $x_2 = +4$ und $x_3 = 1$. **171**

34. Eine ganze Funktion vierten Grades hat für $x_1 = -1$, **172**
$x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}$ Extremwerte und für $x_{4,5} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ Wendepunkte.
Wie kann sie lauten?

VI. Anwendungen in der Physik.

1. Welche Ausdrücke ergeben sich unter Anwendung der Differen- **173**
tialrechnung für die Geschwindigkeit und für die Beschleunigung bei einer ungleichförmigen Bewegung?

Bei einer gleichförmigen Bewegung ist die (konstante) Geschwindigkeit c gegeben durch das Verhältnis des Weges zu der Zeit, also $c = \frac{s}{t}$; es hat für die ganze Dauer der Bewegung immer den gleichen Wert. Bei einer ungleichförmigen Bewegung darf man annehmen, daß während eines sehr kurz andauernden Zeitteilchens Δt die (variable) Geschwindigkeit v sich nicht ändert.

Funktion $y = \sin x$ als die ursprüngliche Funktion auf, so stellt die gestrichelte Linie deren erste Ableitung $y' = \cos x$, die strichpunktierte Linie die zweite Ableitung $y'' = -\sin x$ vor. Beachte daher, daß die Funktion $y'' \begin{cases} \text{fällt} \\ \text{steigt} \end{cases}$, wenn die ursprüngliche Funktion $y \begin{cases} \text{steigt} \\ \text{fällt} \end{cases}$, daß die Extremwerte von y dort liegen, wo die Funktion $y' = 0$ ist, endlich daß die Wendepunkte der Funktion y dort liegen, wo die Funktion $y'' = 0$ ist. Die Figur läßt auch erkennen, daß ein $\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}$ der Funktion y dort vorhanden ist, wo die Funktion $y'' \begin{cases} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{cases}$ ist usw.

*) Wie würde sich der Verlauf der Funktionen $y = \text{tang } x$ und $y = \text{cotang } x$ stellen?

Wird dann in dem kurzen Zeitteilchen Δt das kleine Wegelement Δs zurückgelegt, so darf, da in dieser kurzen Zeit sich die Geschwindigkeit v nicht ändert, nach der vorhin angegebenen Definition der Geschwindigkeit gesetzt werden: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Nähert sich darin Δt der Grenze Null, so ergibt sich

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}:$$

„Die Geschwindigkeit ist gleich dem ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit."

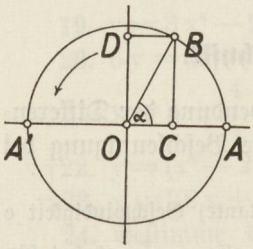
In ähnlicher Weise ist die Beschleunigung b

$$b = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}:$$

„Die Beschleunigung ist gleich dem ersten Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit oder auch gleich dem zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit."

174 2. Ein materieller Punkt von der Masse m bewege sich gleichförmig mit einer Geschwindigkeit c in einem Kreise (Fig. 13) mit dem Mittelpunkt O und dem Halbmesser $OA = r$. Wie kann man mit Hilfe der Differentialrechnung die Größe der auftretenden Zentripetalbeschleunigung, bzw. Zentripetalkraft finden?

Fig. 13.



Der Punkt beginne seine Bewegung in A. Nach Ablauf der Zeit t sei er nach B gelangt. Es ist dann der Bogen $\overset{\frown}{AB} = ct$. Wenn wir nun den zum Halbmesser 1 gehörenden Bogen des Winkels AOB mit α bezeichnen, besteht die Proportion $\overset{\frown}{AB} : \alpha = r : 1$; durch Gleichsetzen beider Werte für $\overset{\frown}{AB}$ ergibt sich $\alpha = \frac{ct}{r}$. Würde sich nun der Punkt unter Einfluß einer gegen das Zentrum wirkenden Kraft (Zentripetalkraft) von B nach O bewegen, so könnte man den Weg BO in zwei Wegkomponenten nach den Richtungen der Koordinatenachsen zerlegen und wäre

$$\overline{OC} = x = r \cos \alpha = r \cos \frac{ct}{r} \quad \text{und}$$

$$\overline{OD} = y = r \sin \alpha = r \sin \frac{ct}{r}.$$

Die in diesen Richtungen auftretenden Geschwindigkeiten wären dann als die ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit

$$v_x = -c \sin \frac{ct}{r} \quad \text{und} \quad v_y = c \cos \frac{ct}{r}.$$

Eine nochmalige Differentiation dieser Geschwindigkeiten nach der Zeit ergibt die zugehörigen Beschleunigungen

$$b_x = -\frac{c^2}{r} \cos \frac{ct}{r} \quad \text{und} \quad b_y = -\frac{c^2}{r} \sin \frac{ct}{r}.$$

Da nun aus geometrischen Gründen die resultierende Zentripetalbeschleunigung durch $b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$ ausgedrückt sein muß, ergibt sich

$$b = \sqrt{\frac{c^4}{r^2}\left(\cos^2\frac{ct}{r} + \sin^2\frac{ct}{r}\right)} = \frac{c^2}{r}$$

und die Zentripetalkraft (nach der Gleichung $P = m \,.\, b$) mit $P = \frac{m c^2}{r}$.

3. Ein materieller Punkt durchlaufe in der Umlaufszeit T mit **175** konstanter Geschwindigkeit einen Kreis mit dem Halbmesser r. Projiziert man seine Bewegung auf den horizontalen Durchmesser AA' (etwa durch in der Richtung senkrecht zu AA' einfallendes Licht), so führt der „Schattenpunkt" C eine harmonische Bewegung aus. Durch welche (veränderliche) Kraft P ließe sich diese Bewegung des Schattenpunktes erzielen?

Ist wie in der vorigen Aufgabe $\overset{\frown}{AB} = ct$ und $c = \frac{2r\pi}{T}$, so folgt aus Fig. 13 $\overline{OC} = x = r\cos\alpha$ und $x = r\cos\frac{ct}{r} = r\cos\frac{2r\pi}{T}\cdot\frac{t}{r} = r\cos\frac{2\pi}{T}\,.\,t$. Die Geschwindigkeit des Punktes in der Richtung des horizontalen Durchmessers wäre dann als erster Differentialquotient von $\frac{dx}{dt}$ gegeben durch $v = -\frac{2r\pi}{T}\cdot \,.\, \sin\frac{2\pi}{T}\,.\,t$ und die Beschleunigung $b = \frac{dv}{dt} = -\frac{2r\pi}{T}\cdot\frac{2\pi}{T}\,.\,\cos\frac{2\pi}{T}\,.\,t = -\frac{4r\pi^2}{T^2}\cdot \,.\, \cos\frac{2\pi}{T}\,.\,t$. Setzen wir darin für $r\cos\frac{2\pi}{T}\,.\,t$ den Wert x und für den konstanten Wert $\frac{4\pi^2}{T^2}$ den Buchstaben C, so gewinnen wir den Ausdruck $b = -Cx$, das heißt: Die bei der Bewegung des Schattenpunktes von A nach O im Punkte C auftretende Beschleunigung ist proportional dem Abstande x von der Ruhelage. Es muß daher auch die eine harmonische Bewegung hervorbringende veränderliche Kraft P proportional sein dem Abstande von der Ruhelage.

VII. Ermittlung der Werte unbestimmter Formen.

1. Was versteht man unter unbestimmten Formen? **176**

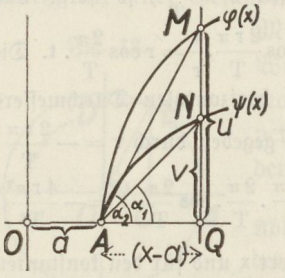
Wenn der Quotient $f(x)$ zweier Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für einen und denselben Wert $x = a$ die Eigenschaft zeigt, daß $\varphi(a) = 0$ und $\psi(a) = 0$ ist, so nimmt $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, die jeden beliebigen Wert bedeuten könnte und deshalb als unbestimmt bezeichnet wird. Und doch kann der Quotient für $x = a$ einen ganz bestimmten Wert besitzen. So nimmt z. B. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ für $x = 1$ den Wert $\frac{0}{0}$ an. Da aber $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} =$

$= \frac{(x^2+x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$ ist, läßt sich dieser Bruch durch $(x-1)$ kürzen und ist daher $f(1) = \frac{3}{2}$.

177 2. Man findet den Wert einer solchen für $x = a$ unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ $\left(\text{oder } \frac{\infty}{\infty}\right)$, wenn man Zähler und Nenner nach x differenziert und in dem Quotienten dann für x den Wert a setzt. Wie läßt sich dies begründen?

Am leichtesten läßt sich auf geometrischem Wege zeigen, daß dann $f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$ ist. Wenn nämlich $\varphi(a)$ und $\psi(a) = 0$ sind, müssen sich die beiden Funktionskurven im Punkte A (a, 0) (Fig. 14) schneiden. Bezeichnen wir den Wert von $\varphi(x)$ mit u, jenen von $\psi(x)$ mit v, so ist

Fig. 14.



$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{u}{v} = \frac{(x-a) \cdot \operatorname{tang} \alpha_2}{(x-a) \cdot \operatorname{tang} \alpha_1} = \frac{\operatorname{tang} \alpha_2}{\operatorname{tang} \alpha_1}$$

Nähert sich nun x der Grenze a, also $(x-a)$ der Grenze 0, so gehen die Sekanten AM und AN in die Tangenten im Punkte A über und wird tang α_2 gleich $\varphi'(a)$ und tang α_1 gleich $\psi'(a)$; es ist also

$$f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)},$$ was zu beweisen war.

Würde aber $f(a) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für $x = a$ den Wert $\frac{\infty}{\infty}$ annehmen, so würde $f(x) = \frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$ für $x = a$ gleich $\frac{0}{0}$, womit dieser Fall auf den früheren zurückgeführt erscheint.

In dem besonderen Falle, der in Nr. **176** behandelt wurde, ergibt sich für $f(1) = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$. —

Würde auch die Form $\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$ für $x = a$ gleich $\frac{0}{0}$ $\left(\text{oder gleich } \frac{\infty}{\infty}\right)$, so müßte man unter nochmaliger Anwendung des Verfahrens den Quotienten der zweiten (dritten, ...) Differentialquotienten bilden.

Bestimme den Wert der sich in den folgenden Beispielen ergebenden unbestimmten Formen:

178 3. $f(x) = \frac{x^6 - 1}{x^4 - 1}$ für $x = 1$.

179 4. $f(x) = \frac{x^8 - 1}{x^7 - 1}$ für $x = 1$.

5. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 24}{x^2 - 7x + 12}$ für $x = 3$. **180**

6. $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 7x + 6}{2x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 7x + 10}$ für $x = 2$. **181**

7. $f(x) = \dfrac{x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 9}{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 9x + 9}$ für $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. **182**

8. $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$ für $x = 2$. **183**

9. $f(x) = \dfrac{2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1}{2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1}$ für $x = 1$. **184**

10. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{x^2 + x - 12}$ für $x = 3$. **185**

11. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$ für $x = 7$. **186**

12. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$ für $x = 0^0$. **187**

13. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x - \sin x}$ für $x = 0^0$. **188**

14. $f(x) = \dfrac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$ für $x = 180^0$. **189**

15. $f(x) = \dfrac{1 - \operatorname{tang} x}{\sin x - \cos x}$ für $x = 45^0$. **190**

16. $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\operatorname{tang} x - \operatorname{cotg} x}$ für $x = 45^0$. **191**

17. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tang} x - 1}{\cos x - \sin x}$ für $x = 45^0$. **192**

18. $f(x) = \dfrac{2 \operatorname{tang}^2 x - \operatorname{cotang} x - 1}{2 \sin^2 x - \cos^2 x - \dfrac{1}{2}}$ für $x = 45^0 \left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. **193**

19. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} 3x}$ für $x = 90^0$. **194**

20. $f(x) = \dfrac{\operatorname{cotang} 2x}{\operatorname{cotang} x}$ für $x = 0^0$. **195**

196 21. $f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$ für $x = 0^0$.

VIII. Bestimmung größter und kleinster Werte bei arithmetischen, geometrischen und physikalischen Aufgaben.

197 1. Die Summe s (10) in zwei Summanden zu zerlegen, so daß die Summe ihrer Quadrate ein Minimum wird.

Die beiden Summanden seien a und (s — a). Die Summe ihrer Quadrate ist dann $S = a^2 + (s - a)^2$; sie erscheint also als Funktion der Veränderlichen a. Man bildet dann $\frac{dS}{da}$ (oder S'), setzt dies gleich Null und erhält so eine Bestimmungsgleichung für jenen Funktionswert von a, für den ein Extremwert vorhanden ist. Ob dieser ein Maximum oder ein Minimum ist, entscheidet der zweite Differentialquotient. (Vgl. Nr. 143!) *)

198 2. Die Zahl s (10) in zwei Summanden so zu zerlegen, daß die Summe ihrer dritten Potenzen ein Minimum wird.

199 3. Die Zahl s (10) in zwei Summanden zu zerlegen, deren Produkt ein Maximum ist.

200 4. Welche Zahl gibt, um ihren reziproken Wert vermehrt, ein Minimum?

201 5. Zerlege die Zahl p (100) in zwei positive Faktoren, so daß deren Summe einen größtmöglichen Wert besitze!

202 6. Zerlege eine Strecke von 1 m Länge so in zwei Stücke, daß das daraus gebildete Rechteck einen größten Flächeninhalt besitzt!

203 7. Welches von allen Rechtecken mit dem Umfang 2u hat den größten Inhalt und wie groß ist dieser?

204 8. Aus 100 Zündhölzchen das inhaltsgrößte Rechteck zu bilden.

205 9. Welches von allen Rechtecken mit dem Inhalt f hat den kleinsten Umfang?

206 10. Welches unter allen Rechtecken mit dem Umfang 2s hat die kleinste Diagonale?

207 †11. Welches Rechteck mit der Diagonale d hat den größten Inhalt?

208 12. Von einem Punkte der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes werden auf die Katheten Senkrechte errichtet. Wo ist der Punkt zu wählen, damit das entstehende Rechteck den größten Inhalt besitzt?

209 13. Welches von allen Dreiecken mit dem Winkel α und der Summe s der einschließenden Seiten hat den größten Inhalt?

*) Die Frage, ob der gefundene Extremwert ein größter oder ein kleinster sei, kann in vielen Fällen auf Grund einfacher Überlegungen entschieden werden.

14. Welchen Winkel müssen die Seiten a und b eines Dreieckes einschließen, damit dessen Inhalt möglichst groß wird? **210**

†15. Man bestimme Grundlinie und Höhe des flächengrößten gleichschenkligen Dreieckes, das sich einem Kreise mit dem Halbmesser r einschreiben läßt. **211**

†16. Wie groß wäre im Falle der vorigen Aufgabe der Basiswinkel des Dreieckes zu wählen? (Man führe diesen Winkel als Veränderliche in die unabhängig von den Ergebnissen der vorigen Aufgabe zu behandelnde Aufgabe ein!) **212**

†17. Wir kennen von einem Dreiecke eine Seite a und den gegenüberliegenden Winkel α. Wie hat man die beiden anderen Seiten zu wählen, damit der Dreiecksinhalt möglichst groß wird? **213**

†18. Wie ist ein Dreieck mit der Grundlinie b und der Höhe h zu zeichnen, damit die Summe der beiden anderen Seiten einen kleinsten Wert annehme? (Man führe einen der beiden Abschnitte der Grundlinie als Veränderliche in die Rechnung ein.) **214**

†19. Welches Dreieck mit dem Umfang 2s und einem Winkel α hat den größten Inhalt? **215**

20. Wie sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes mit der Hypotenuse a zu wählen, damit seine Fläche möglichst groß werde? **216**

21. Von allen rechtwinkligen Dreiecken, in denen die Summe der Quadrate der Katheten s^2 ist, soll dasjenige ermittelt werden, das den größten Umfang hat. **217**

22. Welches Dreieck mit der Grundlinie a und dem Umfang 2s hat den größten Inhalt? **218**

†23. Welches von allen gleichschenkligen Dreiecken, deren Inhalt f ist, hat den kleinsten Umfang? **219**

†24. Das Dreieck ABC soll durch eine Transversale, die zwei auf den Seiten AB und BC liegende Punkte M und N verbindet, in zwei inhaltsgleiche Teile geteilt werden, wobei die Länge der Strecke MN ein Minimum werden soll. Wo sind die Punkte M und N anzunehmen? **220**

25. Einem durch Grundlinie g und Höhe h gegebenen Dreiecke ist das inhaltsgrößte Rechteck einzuzeichnen. **221**

26. Einem gleichschenkligen Dreieck ist ein Quadrat eingezeichnet, das ein größter Bruchteil vom Inhalte des Dreieckes ist. In welchem Verhältnisse stehen Grundlinie und Höhe des Dreieckes? **222**

223 27. Um ein Quadrat mit der Seite s soll ein gleichschenkliges Dreieck von kleinstem Inhalte gezeichnet werden. Welchen Basiswinkel muß man dem Dreieck geben?

224 28. Einem Quadrat mit der Seite s soll das kleinste Quadrat so eingezeichnet werden, daß seine Ecken auf den Seiten des ursprünglichen Quadrates liegen. Wie muß dies geschehen?

225 29. Man suche auf der Diagonale eines gegebenen Quadrates einen Punkt, für den die Summe der Quadrate seiner Abstände von den vier Quadratecken ein Minimum wird.

226 30. Für welchen Punkt der Höhe eines gleichseitigen Dreieckes ist die Summe der Quadrate seiner Abstände von den drei Eckpunkten des Dreieckes ein Minimum?

227 31. In einem Dreieck ABC soll zur Grundlinie AB eine Parallele MN gezogen und ihre Endpunkte mit irgendeinem Punkte P der Grundlinie verbunden werden. In welchem Abstande von der Basis muß MN gezogen werden, damit das Dreieck MNP den größten Flächeninhalt besitze?

228 32. Zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels liegt ein Punkt P (x, y). Man soll durch ihn eine Gerade so ziehen, daß das entstandene Dreieck den kleinsten Inhalt besitzt.

229 33. Zwischen den Schenkeln des Winkels α liegt ein Punkt P; zieht man durch ihn Parallele zu den Schenkeln und bringt sie mit diesen zum Schnitte, so mögen die sich ergebenden Strecken die Längen b und c haben. Welchen kleinsten Inhalt kann ein Dreieck besitzen, das von den beiden Schenkeln und einer durch P gezogenen Geraden gebildet wird?

230 34. Einem Kreis, dessen Halbmesser r ist, das inhaltsgrößte Rechteck einzuzeichnen.

231 35. Einem durch den Halbmesser gegebenen Kreise das Rechteck mit dem größten Umfang einzuzeichnen. (Die Aufgabe soll auch durch Einführung des Winkels zwischen der Grundlinie und der Diagonale des Rechteckes als unabhängiger Veränderlicher gelöst werden.)

232 36. Welchen Inhalt hat das größte aller Rechtecke, die sich einem gegebenen Halbkreise einzeichnen lassen? (Einführung eines Winkels!)

233 37. In welchem Abstand vom Mittelpunkt eines gegebenen Kreises ist eine Sehne zu ziehen, damit das Dreieck, das durch ihre Endpunkte und durch den Kreismittelpunkt bestimmt ist, den größten Inhalt hat? (Auf zwei Arten zu lösen!)

38a. Welchen Basiswinkel hat das inhaltsgrößte gleichschenklige Dreieck, das sich einem gegebenen Kreise einzeichnen läßt? (Auf zwei Wegen zu lösen!) **234a**

38b. Wie Nr. **234a**, wenn der Umfang des Dreieckes ein Maximum sein soll. **234b**

†**39.** Um einen gegebenen Kreis lassen sich unzählige gleichschenklige Dreiecke zeichnen. Welches von ihnen hat den kleinsten Inhalt und Umfang? **235**

†**40.** Wie müssen wir einen Winkel α mit seinem Scheitel auf die Peripherie eines Kreises legen, damit die Summe seiner innerhalb des Kreises liegenden Schenkelabschnitte einen größten Wert annehme? **236**

†**41.** Wie Nr. **236**, wobei jedoch das Produkt der Sehnenabschnitte ein Maximum werden soll. **237**

42. Einem durch seine Seiten $2a$ und $2b$ gegebenen Rechteck den kleinsten Rhombus zu umschreiben, dessen Ecken auf den Seitensymmetralen des Rechteckes liegen. **238**

43. Wie groß sind die Winkel an der Grundlinie eines Trapezes, dessen andere drei Seiten gleich lang sind, zu wählen, damit der Inhalt ein Maximum werde? **239**

†**44.** In der Höhe h eines gleichschenkligen Trapezes mit den Parallelseiten $2a$ und $2b$ ist jener Punkt zu suchen, für den die Summe seiner Abstände von den vier Eckpunkten am kleinsten ist. — Man zeige aus dem erhaltenen Ergebnisse, daß es der Schnittpunkt der Diagonalen ist. **240**

†**45.** Einem Halbkreis mit dem Radius r das größte Trapez so einzuschreiben, daß die größere Parallelseite mit dem Durchmesser zusammenfällt. **241**

†**46.** Die vorige Aufgabe zu lösen mittels des Winkels, den die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit einer der oberen Ecken des Trapezes bildet. **242**

†**47.** Um einen Halbkreis mit dem Halbmesser r soll ein Trapez von kleinstem Umfang und eines von kleinstem Inhalte gezeichnet werden. Wie groß ist dieser kleinste Umfang und Inhalt? **243**

†**48.** In einem Kreise mit dem Halbmesser r wird eine Sehne gezeichnet, deren zugehöriger Zentriwinkel 2α ist. In den durch die Sehne begrenzten kleineren Kreisabschnitt soll das inhaltsgrößte Trapez eingezeichnet werden. Wie groß ist sein Inhalt? (Mit Be- **244**

nützung von Winkelfunktionen zu lösen. Was ergibt sich für $\alpha = 90°$? Vgl. Nr. 241!)

245 **49.** Wie groß muß der Halbmesser eines Kreises angenommen werden, in dem ein Sektor von gegebenem Inhalt F den kleinsten Umfang hat?

246 **50.** Unter allen Kreisausschnitten vom Umfang $2s$ denjenigen zu finden, dessen Inhalt ein Maximum ist. Wie groß ist sein Zentriwinkel?

247 †**51.** Wie groß ist das inhaltsgrößte Rechteck, das sich einem gegebenen Kreisausschnitt so einzeichnen läßt, daß zwei seiner Seiten der Halbierungslinie des Zentriwinkels parallel laufen? (Lösung trigonometrisch.) Was ergibt sich für $2\alpha = 180°$? (Vgl. Nr. 232!)

248 †**52.** An einen gegebenen Kreis sind zwei Tangenten unter dem Winkel 2α gelegt. Wie ist eine dritte Tangente zu legen, damit der Inhalt des entstandenen Tangentendreieckes ein Minimum werde?

249 †**53.** Auf der Zentrale a zweier Kreise mit den Halbmessern R und r ist jener Punkt zu suchen, für den die Summe der Längen der von ihm an den Kreis gezogenen Tangenten einen größten Wert besitzt. Wie groß ist diese Summe? Man zeige aus dem Ergebnisse, daß es der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise ist. (Besondere Werte: $a = 13$, $R = 8$, $r = 4$.)

250 **54.** Längs einer Mauer soll durch ein 24 m langes Drahtgitter ein rechteckiger Hühnerhof eingezäunt werden. Welche Abmessungen muß man dem Rechteck geben und wie groß ist die eingezäunte Fläche?

251 **55.** An den Ecken eines rechteckigen Stückes Pappe von der Länge l und der Breite b sollen quadratische Stücke herausgeschnitten werden, so daß durch Aufbiegen der stehenbleibenden Rechtecke eine Schachtel von möglichst großem Inhalte entsteht. Wie groß ist die Seite eines solchen quadratischen Ausschnittes zu wählen? (Besondere Werte: $l = 12$ cm, $b = 7{\cdot}5$ cm.)

252 **56.** Welches Ergebnis liefert die vorige Aufgabe, wenn die Pappetafel quadratisch (Seite s) ist?

253 **57.** Auf der Y-Achse liegen in den Entfernungen a und $(a + b)$ vom Ursprung zwei Punkte A und B. Man soll auf der X-Achse jenen Punkt P finden, für den $\sphericalangle$ APB ein Maximum wird. Was ergibt sich für $a = b$?

58. Welcher quadratische Quader, in dem die Summe aller Kanten s ist, hat den größten Inhalt? **254**

59. Welcher quadratische Quader mit dem Inhalte V hat die kleinste Oberfläche? **255**

60. Jede Seitenfläche eines quadratischen Quaders hat den Inhalt $s^2 \cdot \sqrt{2}$. Man soll seine Abmessungen so bestimmen, daß seine Diagonale einen kleinsten Wert besitze. Wie groß ist diese Diagonale? **256**

61. Man soll aus einem 8·4 m langen Stück Draht ein Drahtmodell eines Quaders herstellen, bei dem eine Kante doppelt so lang sein soll wie eine andere. Wie wäre der Draht zu zerschneiden, damit der Quader die größte Oberfläche hätte? **257**

62. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein Rechteck, dessen Seiten sich verhalten wie 1 : 2. Der Inhalt des Prismas sei k^3. Wie müssen die Abmessungen gewählt werden, damit die Oberfläche möglichst klein werde? **258**

63. In zwei zu einander parallelen Flächen eines Würfels sind zwei sich kreuzende Diagonalen k gezogen. Ihre Endpunkte bestimmen die Ecken eines regulären Tetraeders. Dieses soll durch eine zu den vorerwähnten Würfelflächen parallele Ebene so geschnitten werden, daß die Schnittfläche ein Maximum werde. Wie groß ist diese Schnittfläche? **259**

64. Über einem beliebigen regelmäßigen Vieleck, dessen Inhalt G und dessen Umfang U bekannt sein soll, ist eine Pyramide mit der Höhe h errichtet. Wie hoch ist ein eingeschriebenes Prisma anzunehmen, wenn a) dessen Inhalt, b) dessen Mantel ein Maximum sein soll? **260**

65. Die in der vorigen Aufgabe angenommene Pyramide wird durch eine Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten und die Schnittfigur als Basis einer zweiten Pyramide angenommen, deren Spitze in der Grundfläche der ursprünglichen Pyramide liegt. In welcher Höhe ist der Schnitt zu führen, damit die erhaltene Pyramide den größten Rauminhalt erhält und wie verhält sich dieser zum Inhalt der ursprünglichen Pyramide? **261**

66. Man führe die vorige Aufgabe für ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge s durch. Wenn die Spitze der eingeschriebenen Pyramide im Basismittelpunkt des gegebenen Tetraeders angenommen wird, wie groß sind die Kanten und die Kantenwinkel der ein- **262**

geschriebenen Pyramide und wie verhält sich ihr Inhalt zu jenem des gegebenen Tetraeders?

263 67. Man soll in ein reguläres Oktaeder mit der Kantenlänge s ein möglichst großes gerades quadratisches Prisma so einbeschreiben, daß seine Ecken in die Kanten des Oktaeders fallen. Das Volumverhältnis der beiden Körper ist festzustellen.

264 †68. Wenn in derselben Weise wie in Nr. **262** dem regulären Tetraeder der volumgrößte Kegel eingeschrieben werden soll, welche Abmessungen muß er erhalten?

265 †69. Welcher von den in Nr. **264** erhaltenen Kegeln hat den größten Mantel?

266 †70. Vier Stäbe von der Länge a sollen als Seitenkanten einer geraden Pyramide so aufgestellt werden, daß der dadurch bestimmte Pyramidenraum ein Maximum werde. Wie groß ergeben sich dessen Abmessungen? Wie groß ist der Neigungswinkel der Stäbe zur Basis und wie groß jener der Seitenflächen zur Basis?

267 †71. Wie groß sind die Kanten jener inhaltsgrößten, regelmäßigen dreiseitigen Pyramide anzunehmen, deren Oberfläche $(s^2\sqrt{3})$ ist?

268 †72. Der Inhalt einer geraden quadratischen Pyramide ist gegeben. Wie verhält sich ihre Höhe zur Basisdiagonale, wenn die Oberfläche möglichst klein sein soll? Auch soll das Verhältnis der Oberfläche zur Grundfläche bestimmt werden.

269 †73. Wie verhält sich der Inhalt eines regulären Tetraeders zu jenem des inhaltsgrößten eingeschriebenen geraden Zylinders?

270 74. Ein oben offenes Wassergerinne von rechteckigem Querschnitt fördert in einer Sekunde 8 l, wobei die Geschwindigkeit des Wassers 1 dm/s beträgt. Wie groß sind Breite und Tiefe des Gerinnes zu wählen, damit die vom Wasser benetzte Fläche des Gerinnes möglichst klein ist?

271 75. Aus vier Brettern von der Breite b soll eine Rinne von möglichst großem Fassungsraum hergestellt werden, wobei je ein Brett rechts und links vertikal, die beiden anderen unter einem Winkel zueinander geneigt gestellt werden. Wie groß ist dieser Winkel zu wählen?

272 76. Ein Kellerfenster soll die Form eines Rechteckes mit aufgesetztem Halbkreis erhalten. Wenn nun sein Umfang u sein soll, wie sind die Abmessungen zu wählen, damit das Fenster möglichst viel Licht einlasse? (Besonderer Wert: $u = 4$ m.)

77. Ein 1 m langer Draht soll zu einem Rechteck gebogen werden. Wie müssen dessen Abmessungen gewählt werden, damit der Zylindermantel, der entsteht, wenn dieses Rechteck um eine seiner Seiten rotiert, möglichst groß ist? **273**

78. Wie stellt sich die vorige Aufgabe, wenn das Volumen des entstehenden Rotationszylinders ein Maximum werden soll? **274**

79. Welches Rechteck vom Umfang 2 s erzeugt bei der Umdrehung um seine Mittellinie den größten Rotationszylinder? **275**

80. Welcher gerade Zylinder hat bei gegebenem Umfang 2 s seines Achsenschnittes die größte Mantelfläche? **276**

81. Der Basishalbmesser und die Höhe eines Rotationszylinders sind zusammen a lang. Wie sind sie zu wählen, damit der Zylinder den größtmöglichen Inhalt hat? Und wie groß sind die Grundfläche und die Mantelfläche dieses Zylinders? **277**

82. In welchem Verhältnis müssen Basisdurchmesser und Höhe eines geraden Zylinders stehen, der bei gegebenem Inhalt die kleinste Oberfläche haben soll? **278**

83. Unter allen geraden Zylindern, deren Oberfläche O ist, soll jener bestimmt werden, der das größte Volumen hat. **279**

84. Unter allen Zylindern, deren Inhalt dem einer Kugel mit dem Halbmesser r gleichkommt, jenen zu finden, der die kleinste Oberfläche hat. **280**

85. Welcher von allen geraden Zylindern, die sich einem regulären Oktaeder mit der Kante s einschreiben lassen, hat das größte Volumen? **281**

86. Welcher der Zylinder in Nr. 281 hat den größten Mantel? Wie groß ist dieser Mantel? **282**

87. Auf der Grundlinie BC eines Dreieckes mit den Seiten a, b und c soll ein Rechteck stehen, das in das Dreieck eingezeichnet ist und das zusammengerollt den Mantel eines geraden Zylinders geben soll. In welchem Abstande von der Grundlinie ist die Gegenseite des Rechteckes zu ziehen, damit der Inhalt dieses Zylinders ein Maximum werde? (Besondere Werte: a = 42, b = 39, c = 45.) **283**

88. Wie groß müssen Basisinhalt und Höhe eines oben offenen zylindrischen Blechgefäßes von 1 Liter Inhalt gewählt werden, um möglichst viel Material zu ersparen? **284**

89. Welches von allen oben offenen zylindrischen Gefäßen von gleicher Oberfläche hat das größte Volumen? Wie steht es, wenn das Gefäß auch oben geschlossen ist? **285**

286 90. Ein zylindrisches Sammelbecken für Wasser soll so hergestellt werden, daß es bei möglichst geringem Aufwand von Zement einen vorgeschriebenen Inhalt V hat. Welche Abmessungen muß man dem Hohlraum geben?

287 91. Wie groß ist der Inhalt des größten geraden Kegels mit der Seite s?

288 92. Die vorige Aufgabe ist durch Einführung des Öffnungswinkels an der Spitze des Kegels zu lösen. Wie groß ist dieser?

289 93. Welchen Halbmesser hat der größte aller Rotationskegel, deren Oberfläche O ist?

290 94. Wie groß ist das Volumen des größten Rotationskegels, dessen Mantelfläche M ist?

291 †95. Welcher Rotationskegel hat bei gegebenem Inhalt den kleinsten Mantel? In welchem Verhältnis stehen bei ihm Halbmesser, Höhe und Seite?

292 96. Aus einem gegebenen Kreise ist ein Ausschnitt von solcher Größe herauszuschneiden, daß der übrigbleibende Teil zusammengerollt einen Rotationskegel von größtem Inhalte bildet. Welche Abmessungen erhält dieser Kegel? Man bestimme auch den Zentriwinkel der abgerollten Mantelfläche sowie den Öffnungswinkel an der Spitze des Kegels.

293 97. In welchem Verhältnis muß der Halbmesser der Öffnung eines kegelförmigen Blechtrichters zur Höhe stehen, damit er bei gegebener Blechmenge den größten Rauminhalt hat? Wie groß ergibt sich der Öffnungswinkel am Scheitel?

294 98. Welches gleichschenklige Dreieck mit dem Umfange 2s liefert bei Umdrehung um seine Höhe den inhaltsgrößten Kegel?

295 99. Welches von allen gleichseitigen Vierecken, in denen die beiden Diagonalen zusammen die Länge 2s haben, erzeugt bei der Umdrehung um die eine von ihnen den größten Rotationskörper?

296 100. In welchem Verhältnis stehen Grundflächenhalbmesser und Seite bei dem volumgrößten geraden Kegel, dessen Oberfläche derjenigen einer Kugelfläche vom Halbmesser R gleichkommt?

297 101. In einen geraden Kegel mit dem Basishalbmesser r und der Höhe h soll der inhaltsgrößte gerade Kegel eingeschrieben werden, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kegelbasis liegt und dessen Grundkreis den Kegelmantel berührt. Wie verhält sich sein Inhalt zu jenem des gegebenen Kegels?

†102. Ein eisernes Wasserreservoir vom Inhalte V soll von einem Zylindermantel gebildet sein, der nach unten durch einen Kegelmantel von 120° Öffnungswinkel abgeschlossen ist. Wie müssen Höhe des Zylinders und des Kegels gewählt werden, damit der Verbrauch an Eisenblech möglichst gering sei? **298**

103. Welcher von allen Kegelstumpfen von gleicher Höhe und der Summe 2a der Halbmesser beider Grundflächen hat den kleinsten Rauminhalt? Wie groß ist dieser? **299**

104. Wie groß ist das Volumen des größten Zylinders, der sich einem durch Basishalbmesser und Höhe gegebenen geraden Kegel einschreiben läßt? **300**

105. Wie Nr. 300, wenn der Zylinder die größte Mantelfläche haben soll. **301**

106. Wie Nr. 300, wenn der Zylinder die größte Oberfläche haben soll. Wann ist diese Aufgabe nur möglich? (Besonderer Fall: $h = 3r$.) **302**

107. In einen durch r und h gegebenen geraden Kegel soll jener gerade Zylinder hineingestellt werden, dessen Rauminhalt jenen des auf seiner Deckfläche stehenden Kegels am meisten übertrifft. **303**

108. Ein Deltoid mit den Diagonalen D_1 und D_2 erzeugt durch Rotation um D_1 einen Doppelkegel. Es soll der raumgrößte Zylinder bestimmt werden, der dem Doppelkegel eingeschrieben werden kann. (Besondere Werte: $D_1 = 12$, $D_2 = 15$). **304**

109. Man soll einen auf einer Ebene stehenden Würfel von der Kantenlänge s mit einem Kegelmantel überdecken, der die vier oberen Ecken des Würfels berührt und dabei den kleinsten Raum einschließt. Welche Abmessungen muß der Kegelmantel erhalten? **305**

110. Welche Abmessungen muß das inhaltsgrößte quadratische Prisma erhalten, das sich einem durch r und h gegebenen geraden Kegel einschreiben läßt? In welcher Beziehung muß die Seite des Kegels zum Basishalbmesser stehen, damit aus dem Prisma ein Würfel wird? **306**

111. Man soll einem durch h, R und r gegebenen Kegelstumpf einen Zylinder mit größter Mantelfläche einschreiben. Wann ist dies nur möglich? **307**

112. Einer Kugel einen geraden Zylinder mit größter Mantelfläche einzuschreiben. **308**

309 113. Wie Nr. 308, wenn der Zylinder den größten Inhalt haben soll. Wie groß ist dieser?

310 †114. Wie Nr. 308, wenn der Zylinder die größte Oberfläche haben soll. (Die Aufgabe soll auch durch Einführung des Neigungswinkels eines zum Basisrand gezogenen Kugelhalbmessers zur Zylinderbasis gelöst werden.)

311 †115. Aus einer Kugel wird ein zylindrischer Kern herausgebohrt. Wie groß ist die Ausbohrung vorzunehmen, damit die Oberfläche des übrigbleibenden Ringes ein Maximum wird? *)

312 116. Einer Kugel den inhaltsgrößten Kegel einzuschreiben. Welchen Halbmesser hat die diesem Kegel inhaltsgleiche Kugel? (Die Aufgabe soll auch durch Einführung des halben Öffnungswinkels des Kegels gelöst werden.)

313 117. Wie Nr. 312, wenn der Kegel die größte Mantelfläche haben soll.

314 118. Man soll einer Kugel den kleinsten Kegelstumpf umschreiben.

315 119. In eine gegebene Kugel ist durch den Mittelpunkt eine Doppelkegelfläche so zu legen, daß der Inhalt des Doppelkegels ein Maximum wird.

316 120. Einer Kugel das größte quadratische Prisma einzuschreiben.

317 121. Wie groß ist der Inhalt jenes inhaltsgrößten regelmäßig dreiseitigen Prismas, das in eine gegebene Kugel einbeschrieben werden kann?

318 122. Wie Nr. 317 für die inhaltsgrößte regelmäßige dreiseitige Pyramide.

319 123. Wie Nr. 317 für eine quadratische Pyramide.

320 †124. In eine gegebene Kugel eine gerade quadratische Pyramide einzuschreiben, deren Mantelfläche ein Maximum ist. Wie groß ist ihr Inhalt und wie groß ist der Winkel an der Spitze eines jeden Seitendreieckes?

321 †125. Wie hoch ist der kleinste Kegel, der sich um eine gegebene Kugel umschreiben läßt? Wie verhalten sich die Inhalte und wie die Oberflächen beider Körper?

322 †126. Einer Kugel den Kegel mit kleinster Oberfläche zu umschreiben. (Auf zwei Wegen zu lösen.)

*) Vgl. die Aufgabensammlung zur Geometrie des Verf. Nr. 1448! — Die sich ergebende kubische Gleichung kann durch Faktorenzerlegung und Ausscheidung des Wurzelfaktors $(x + r)$ leicht auf eine Gleichung zweiten Grades zurückgeführt werden.

†127. Wie Nr. 322, wenn die Mantelfläche ein Minimum werden soll. **323**

†128. Einer gegebenen Kugel soll eine regelmäßige dreiseitige Pyramide mit kleinstem Inhalte umschrieben werden. Wie groß ist ihr Inhalt? **324**

†129. Wie groß ist der Basishalbmesser jenes geraden Kegels, dessen Seite s ist und dessen Inkugel den größten Halbmesser hat? Wie könnte man seinen Achsenschnitt zeichnen? **325**

130. Eine Halbkugel vom Radius r ist durch einen auf ihrem Grundkreis stehenden geraden Kegel ausgehöhlt. In welcher Entfernung vom höchstgelegenen Punkte der Halbkugel hat der Restkörper den größten Querschnitt und wie groß ist dieser? Wie groß sind die Querschnitte, die von ihm die Abstände $\pm a$ haben? **326**

131. Eine Kugel wird durch zwei in gleichem Abstande vom Mittelpunkt parallel angebrachte Ebenen in drei Teile zerlegt. In jeden wird eine Kugel eingeschrieben, die den Schnittkreis im Mittelpunkt berührt. Wie sind die Ebenen zu legen, damit die Summe a) der Oberflächen, b) der Inhalte der drei Kugeln einen kleinsten Wert besitzt und wie groß sind diese beiden Summen? **327**

132. In eine Halbkugel ist ein gerader Zylinder von größter Mantelfläche einzuschreiben. Wie groß ist diese? **328**

133. Wie Nr. 328, wenn die Zylinderoberfläche ein Maximum sein soll. (Als Veränderliche führe man einen Winkel ein.) **329**

134. Einer gegebenen Halbkugel das inhaltsgrößte quadratische Prisma einzubeschreiben. Wie groß ist sein Inhalt? **330**

135. Wie Nr. 330, wenn die Prismengrundfläche ein regelmäßiges Sechseck sein soll. **331**

136. Wie Nr. 330 für ein regelmäßig achtseitiges Prisma. **332**

137. Wie Nr. 330 für einen geraden Zylinder. (Was sagen uns die Resultate der Aufgaben 330—333?) **333**

138. In eine gegebene Halbkugel ist ein gerader Zylinder und in den auf seiner Deckfläche aufruhenden Kugelabschnitt die größte Kugel einbeschrieben. Wie muß die Höhe des Zylinders angenommen werden, damit die Summe der Rauminhalte dieser drei Körper möglichst groß wird? **334**

†139. Einer gegebenen Halbkugel den Kegelstumpf mit der größten Mantelfläche einzuschreiben. Wie groß ist diese Mantelfläche? **335**

336 **140.** Um einen Halbkreis vom Radius r ist ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet. Die Figur rotiert um die Hypotenuse des Dreieckes. Wie groß sind dessen Winkel anzunehmen, damit der Achsenschnitt des Rotationskörpers möglichst klein wird? Wie verhalten sich die Rauminhalte des Rotationskörpers und der Kugel?

337 **141.** Welcher Kugelabschnitt hat bei gegebenem Inhalt die kleinste Kugelhaube?

338 **142.** Welcher Kugelabschnitt hat bei gegebenem Inhalt die kleinste Oberfläche?

339 **143.** Welcher von allen Kugelabschnitten mit der Kugelhaube C hat den größten Rauminhalt? (Besonderer Wert: $C = 32\pi$.)

340 **144.** Welcher von allen Kugelabschnitten, deren Oberfläche O ist, hat den größten Rauminhalt?

341 **145.** Wie groß ist die Höhe eines Kugelabschnittes, für den der Unterschied zwischen seinem Inhalt und jenem der größten ihm einbeschriebenen Kugel ein Maximum ist, und wie verhalten sich die Oberflächen beider Körper?

342 †**146.** Man soll einem Kugelausschnitt einen Zylinder mit möglichst großer Mantelfläche einbeschreiben, wobei der Zentriwinkel des Kugelausschnittes mit 120° angenommen werden soll. Wie groß ist die Mantelfläche?

343 **147.** Einer Halbkugel den Kegel mit kleinstem Rauminhalt zu umschreiben. Das Verhältnis der Rauminhalte beider Körper soll festgestellt werden.

344 **148.** Welche Höhe und welches Volumen hat jener inhaltsgrößte Rotationskegel, den man in eine gegebene Halbkugel so einbeschreiben kann, daß seine Spitze im Kugelmittelpunkt liegt?

345 **149.** Der Rauminhalt eines Zylinders, dessen Grundflächen halbkugelförmig ausgehöhlt sind, ist V. Welche Abmessungen sind dem Zylinder zu geben, damit die Oberfläche des Restkörpers möglichst klein wird?

346 †**150.** Man soll in eine gegebene Kugel jenen Zylinder einschreiben, für den der Unterschied zwischen seiner Mantelfläche und der Summe der beiden seine Grund- und Deckfläche überwölbenden Kugelhauben möglichst groß ist.

347 †**151.** Ein Kreisausschnitt rotiert um einen seiner Begrenzungshalbmesser. Wie groß ist sein Zentriwinkel zu wählen, damit der Rauminhalt des zum Kugelabschnitt gehörigen Ergänzungskegels

möglichst groß wird? Auch soll das Volumverhältnis des Ergänzungskegels zum Kugelausschnitt ermittelt werden.

†152. Man soll einer durch ihren Durchmesser gegebenen Kugel jenen geraden Kegel einschreiben, für den die Differenz zwischen seinem Mantel und der ihn überwölbenden Kugelhaube möglichst groß wird. **348**

†153. Von einem Punkte der Oberfläche einer Kugel, die den Halbmesser r hat, als Mittelpunkt ist ein zweite Kugelfläche so zu zeichnen, daß ihre innerhalb der ersten Kugelfläche gelegene Kugelhaube möglichst groß sein soll. Wie groß ist der Halbmesser der zweiten Kugelfläche zu wählen? **349**

†154. Zu welcher der nach Nr. 349 entstehenden Kugelhauben gehört der größte Kugelausschnitt und wie groß ist dieser? **350**

†155. Wie groß ist der Zentriwinkel jenes Kugelausschnittes, der die größte Oberfläche hat? **351**

†156. Bei welchem Kugelausschnitt ist der Unterschied zwischen dem Kegelmantel und der Kugelhaube am größten und wie groß ist der Unterschied? **352**

†157. Wie groß ist die Höhe der Kugelhaube bei jenem Kugelabschnitt, bei dem der Unterschied zwischen dem Inhalt des Kegels und des Kugelabschnittes ein Maximum ist? **353**

†158. Eine Halbkugel wird nach einer Kegelfläche ausgehöhlt, deren Spitze im Mittelpunkt des Grundkreises liegt und deren Achse auf dem letzteren senkrecht steht. Wie ist die Kegelfläche anzunehmen, damit die Gesamtoberfläche des Restkörpers möglichst groß ausfällt und wie verhält sich dann die Kugelzone zum Kegelmantel? **354**

†159. Von welchem Punkte der Zentrale c zweier getrennt liegenden Kugeln mit den Halbmessern r und r_1 ist die Summe der überblickten Kugelhauben am größten? (Besondere Werte: $c = 189$, $r = 25$, $r_1 = 16$.) **355**

†160. Durch die Zentrale c zweier getrennt liegenden Kugeln mit den Halbmessern r_1 und r_2 wird eine Ebene gelegt und in ihr über der Zentrale als Durchmesser ein Kreis beschrieben. Für welchen Punkt dieses Kreises ist die Summe der überblickten Kugelhauben die größte? (Man lege durch die Mitte der Zentrale das Koordinatensystem.) Für die besonderen Werte $c = 50$, $r_1 = 4$, $r_2 = 3$ soll auch die Größe der überblickten Fläche berechnet werden. **356**

357 161. Wie groß ist das flächengrößte Rechteck, das sich einer durch ihre Mittelpunktsgleichung gegebenen Ellipse einzeichnen läßt? (Konstruktion.)

358 162. Wie Nr. **357**, wenn das Rechteck den größtmöglichen Umfang haben soll. (Konstruktion.)

359 163. Wie groß ist der Inhalt des größten gleichschenkligen Dreieckes, das sich einer gegebenen Ellipse so einschreiben läßt, daß der Scheitel im Mittelpunkt liegt? (2 Fälle.)

360 164. Wie Nr. **359**, wenn der Scheitel des Dreieckes in einem Scheitel a) der kleinen, b) der großen Achse liegt.

361 165. Welche Form muß die Ellipse in Nr. **360** haben, damit die Dreiecke gleichseitig werden?

362 †166. Man soll um ein gleichschenkliges Dreieck die kleinste Ellipse konstruieren, wobei die große Achse der Ellipse parallel zur Grundlinie des Dreieckes liegen soll.

363 †167. Welche Winkel muß ein gleichschenkliges Dreieck haben, damit die kleinste Ellipse, die man mit dem Dreiecksscheitel als Mittelpunkt so zeichnen kann, daß sie durch die Endpunkte der Grundlinie hindurchgeht, ein Kreis wird?

364 168. Einem Rhombus mit den Diagonalen 2 D und 2 d soll die inhaltsgrößte Ellipse eingeschrieben werden. Wo liegen die Berührungspunkte? Wie verhält sich der Inhalt dieser Ellipse zum Inhalt derjenigen, die sich dem Rhombus umschreiben läßt?

365 169. Einem Rechteck mit den Seiten m und n soll die kleinste Ellipse umgeschrieben werden.

366 170. Um eine Ellipse ist der kleinste Rhombus zu zeichnen. Welchen Inhalt hat er? In welcher Beziehung steht sein Inhalt zu jenem des durch die vier Ellipsenscheitel als Eckpunkte bestimmten Rhombus?

367 171. Für welchen Punkt P einer gegebenen Ellipse ist der Inhalt des Dreieckes, das von der Normalen des Punktes P, seiner Ordinate und der Hauptachse begrenzt ist, ein Maximum? Welches dieser Dreiecke erzeugt bei der Rotation um die Hauptachse den inhaltsgrößten Rotationskegel? Wie groß ist dieser? (Vgl. Nr. **344**!)

368 172. Für welchen Punkt im ersten Quadranten einer Ellipse schließt die Normale mit dem Halbmesser den größten Winkel ein? Wie groß ist dieser Winkel? (Besondere Werte: $a = 5$, $b = 3$.)

369 173. Wie Nr. **368**, wobei jedoch der Winkel zwischen der Tangente und dem Halbmesser ein größter sein soll.

174. Einer Ellipse jenes Rechteck einzuschreiben, das, zu einem Zylinder zusammengerollt, den inhaltsgrößten Zylinder umschließt. 370

175. Um ein gleichseitiges Dreieck die Ellipse mit dem kleinsten Inhalt zu beschreiben. Wie groß ist dieser Inhalt? (Vgl. Nr. 362!) 371

†176. In ein durch Grundlinie und Höhe gegebenes gleichschenkliges Dreieck die inhaltsgrößte Ellipse einzuschreiben. Wie groß ist ihr Inhalt? Wie stellt sich das Ergebnis, wenn das Dreieck gleichseitig ist? 372

†177. Einer gegebenen Ellipse ist das kleinste gleichschenklige Dreieck so zu umschreiben, daß seine Spitze in der Verlängerung der kleinen Achse der Ellipse liegt. Wie muß die Ellipse beschaffen sein, damit dieses Dreieck ein gleichseitiges wird? 373

178. Man soll einer gegebenen Ellipse das inhaltsgrößte (symmetrische) Sechseck so einzeichnen, daß die große Achse der Ellipse eine Diagonale bildet und zwei Sechseckseiten zu ihr parallel laufen. Wie lang sind diese beiden Seiten und wie lang sind die anderen Seiten? Wie groß ist der Inhalt des Sechseckes? Was ergibt sich für $a = b$? 374

†179. Wie Nr. 374, wobei jedoch das Sechseck den kleinsten Umfang haben soll. Wie lang sind in diesem Falle die Sechseckseiten? 375

†180. Wie groß ist der Halbmesser jenes mit einer gegebenen Ellipse konzentrischen Kreises, der ihren Umfang unter dem größten Winkel schneidet? 376

†181. Wie lang ist die größtmögliche Sehne, die man vom Scheitel der kleinen Achse einer gegebenen Ellipse ziehen kann? 377

182. Welche beiden Rhomben muß man einer gegebenen Ellipse umschreiben, damit sie bei der Rotation um eine der beiden Achsen die inhaltsgrößten Doppelkegel erzeugen? In welchem Verhältnisse stehen ihre Rauminhalte? 378

183. Dem Ellipsoide, das durch Umdrehung einer gegebenen Ellipse um ihre große Achse entsteht, soll der größte Rotationskegel so eingeschrieben werden, daß seine Spitze im Mittelpunkt und seine Höhe in der großen Achse des Ellipsoides liegt. Wie groß ist sein Rauminhalt? 379

184. In welchem Verhältnisse stehen die Inhalte der beiden raumgrößten Rotationskegel, die man dem in Nr. 379 verwendeten Rotationsellipsoide so einschreiben kann, daß ihre Spitze im Scheitel a) der großen, b) der kleinen Ellipsenachse liegt? 380

185. Die beiden Scheitel des ersten Quadranten einer Ellipse sind durch eine Sehne geradlinig verbunden. Welchen Punkt des über 381

ihr befindlichen Ellipsenbogens muß man mit ihren Endpunkten verbinden, damit das entstehende Dreieck den größten Inhalt erhält? Wie groß ist dieser Inhalt? Wie kann der gesuchte Punkt am einfachsten konstruktiv gefunden werden?

382 **186.** Wie groß ist der Inhalt des raumgrößten Rotationszylinders, den man einem Rotationsellipsoide einschreiben kann, das durch Umdrehung einer Ellipse um die kleine Achse entsteht?

383 **187.** Welches Paar konjugierter Durchmesser einer Ellipse bildet miteinander den kleinsten Winkel?

384 **188.** Auf der Hauptachse der Hyperbel $4x^2 - 25y^2 = 1600$ ist im Punkte (40, 0) eine zur Abszissenachse normale Hyperbelsehne gezogen. Wie groß sind die Seiten und wie groß ist der Umfang eines in den entstandenen Hyperbelabschnitt eingezeichneten Rechteckes, dessen Umfang möglichst klein ist?

385 **189.** Die Gerade $x = 4$ schneidet von der Hyperbel $2x^2 - 3y^2 = 6$ ein Segment ab, in das jenes Rechteck einzubeschreiben ist, das bei der Rotation um die Hauptachse den inhaltsgrößten Zylinder erzeugt. Wie groß ist dessen Inhalt?

386 **190.** Welcher Punkt der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ hat vom Punkte (c, 0) den kleinsten Abstand?

387 **191.** Welche Punkte einer gegebenen Hyperbel liegen dem auf der verlängerten Nebenachse gelegenen Punkte (0, c) am nächsten? Wie groß ist ihre Entfernung? (Besondere Werte: $a = 6$, $b = 8$, $c = 24$.)

388 **192.** Eine Ellipse hat die Halbachsen a und b. Eine Hyperbel hat mit ihr den Mittelpunkt, die Richtungen der Achsen und die Nebenachse 2 b gemeinsam. Wie lang muß die Hauptachse der Hyperbel angenommen werden, damit der Inhalt des durch die vier Schnittpunkte beider Kurven bestimmten Rechteckes möglichst groß wird und wie groß ist dieser Inhalt?

389 **193.** Wie groß ist der Inhalt des größten gleichschenkligen Dreieckes, das sich der Parabel $y^2 = 2px$ so einschreiben läßt, daß die Grundlinie parallel zur Ordinatenachse und der Scheitel (a, 0) in der Abszissenachse liegt?

390 **194.** In einem durch Grundlinie g und Höhe h gegebenen gleichschenkligen Dreieck ist eine Parallele zur Grundlinie gezogen. Durch ihre Endpunkte geht eine Parabel, deren Scheitel in den Mittelpunkt der Grundlinie fällt. Die parallele Transversale soll nun so bestimmt werden, daß sie von der Parabel ein möglichst großes Segment ab-

schneidet. Welchen Bruchteil des Dreieckinhaltes macht dieses Segment aus?

†195. Durch die Punkte P_1 (x_1, y_1) und P_2 (x_2, y_2) der Parabel **391** $y^2 = 2px$ ist eine Sehne gelegt. Welchen Punkt des durch sie abgegrenzten Parabelbogens muß man mit ihren Endpunkten verbinden, damit der Inhalt des entstehenden Dreieckes möglichst groß werde?

196. In ein Paraboloid, das durch Umdrehung einer Parabel **392** $y^2 = 2px$ um ihre Achse entsteht, ist ein Rotationskegel einzuschreiben, dessen Spitze im Punkte P (a, 0) liegt und dessen Basis zwischen p und dem Scheitel liegt. Wo muß diese Basis angebracht werden, damit der Kegelinhalt möglichst groß werde?

†197. In der Achse der Parabel $y^2 = 2px$ wird der Punkt P **393** $(8p, 0)$ als Spitze eines Rotationskegels angenommen, der dem durch Drehung der Parabel entstehenden Paraboloide eingeschrieben ist und dessen Basis zwischen P und O liegt. Wo ist diese Basis anzunehmen, damit der Kegelmantel einen Extremwert besitzt?

198. In ein Parabelsegment, das durch eine zur Achse senkrechte **394** Sehne abgegrenzt ist, soll ein Rechteck a) von möglichst großem Inhalte, b) von möglichst großem Umfange eingeschrieben werden.

†199. Welche Tangente der Parabel $y^2 = 4x$ schließt mit der zur **395** Abszisse a gehörigen Ordinate und mit der Achse das kleinste Dreieck ein? (Besonderer Wert: $a = 3$.)

†200. Durch den Brennpunkt der Parabel $y^2 = 2px$ ist eine **396** Sehne senkrecht zur Achse gezogen. Welches von den Rechtecken, die sich dem so entstehenden Parabelsegmente einschreiben lassen, beschreibt bei der Drehung um die Scheiteltangente den inhaltsgrößten Hohlzylinder?

†201. In dem Bogen der Parabel $y^2 = 2px$, der zwischen dem **397** Scheitel O und dem Parabelpunkte P (x_1, y_1) liegt, soll ein Punkt (x_0, y_0) gefunden werden, der, geradlinig mit O und P_1 verbunden, ein Viereck ergibt, das bei Drehung um die Parabelachse den inhaltsgrößten Rotationskörper erzeugt.

202. Der Parabel $y^2 = 2px$ soll ein Trapez von möglichst **398** großem Inhalte eingeschrieben werden, dessen längere Parallelseite $2a$ ist. Wie groß ist sein Inhalt und wie lang ist die kürzere Parallelseite?

†203. Ein gerader Kreiskegel mit dem Basishalbmesser r und der **399** Seite s soll nach einer Parabel so geschnitten werden, daß die Schnitt-

fläche möglichst groß ausfällt. Wie ist der Schnitt zu legen und wie groß ist die Schnittfläche?

400 **204.** Die gemeinsame Sehne des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ und der Parabel $y^2 = 2px$ schneidet von der letzteren ein Segment ab. Wie groß ist der Parameter der Parabel zu wählen, damit der Inhalt dieses Segmentes möglichst groß wird, und wie groß fällt er aus?

401 **205.** Wie Nr. **400** für den Kreis $y^2 = 2rx - x^2$ und die Parabel $y^2 = 2px$.

402 **206.** Die Aufgabe Nr. **400** ist für eine Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ statt des Kreises durchzuführen, wobei die Parabel einmal mit der Gleichung $y^2 = 2px$ und ein zweitesmal mit der Gleichung $x^2 = 2py$ anzunehmen ist.

---

403 **207.** Auf den Schenkeln eines rechten Winkels befinden sich in 50 m und 75 m Entfernung vom Scheitel zwei Punkte; sie beginnen sich gleichzeitig gleichförmig mit der Geschwindigkeit 3 m/s, bzw. 4 m/s gegen den Scheitel zu zu bewegen. Wann ist ihre Entfernung ein Minimum und wie groß ist sie dann? Wo befinden sich dann die beiden Punkte?

404 **208.** Die Aufgabe Nr. **403** ist allgemein für a m, b m, c_1 m/s und c_2 m/s zu behandeln. Auch möge ermittelt werden, wann die Entfernung der beiden Punkte d m beträgt. (Besondere Werte: $a = 32$ m, $b = 12$ m, $c_1 = 8$ m/s, $c_2 = 6$ m/s, $d = 10$ m.)

405 **209.** Wie Nr. **404**, wenn die beiden Punkte sich mit derselben Geschwindigkeit c, u. zw. der erste gegen den Scheitel und der zweite vom Scheitel weg, bewegen.

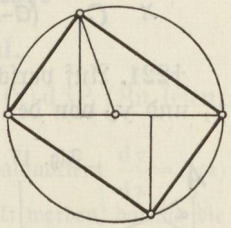
406 **210.** Ein Dampfer bewegt sich mit einer Geschwindigkeit c_1 (20 km/h) gegen einen noch um m (38 km) entfernten Hafen. Gleichzeitig verläßt ein zweiter Dampfer den Hafen mit einer Geschwindigkeit c (30 km/h) und mit einem Kurs, der mit jenem des ersten Dampfers einen Winkel von 60° bildet. Wann sind die beiden Dampfer einander am nächsten und wie weit ist dann jeder vom Hafen entfernt?

407a **211 a.** Welche größte Höhe erreicht ein mit c m/s vertikal nach oben geworfener Körper und nach welcher Zeit ist dies der Fall? (Die Fallbeschleunigung ist mit g m/s² anzunehmen.)

407b **211 b.** Die Wurfweite eines schräg unter einem Winkel von α^0 aufwärts geworfenen Körpers ist durch die Gleichung $W = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$ gegeben; für welchen Winkel α ist sie ein Maximum?

212. Auf einer schiefen Ebene, deren Basis b als gegeben anzu- **408**
nehmen ist, soll eine Kugel in einer kürzesten Zeit herabrollen. Welchen Neigungswinkel muß man der schiefen Ebene geben? (Neigung der Dachflächen, auf denen das Niederschlagswasser so rasch als möglich herabfließen soll.)

†**213.** Um aus einem kreisrunden Baumstamm vom Durchmesser **409**
2r den Balken von größter Tragfähigkeit herzu- Fig. 15.
stellen, wenden die Zimmerleute die aus Fig. 15 ersichtliche Konstruktion an. Da die Tragfähigkeit des rechteckigen Balkens durch die Formel $T = C \cdot b \cdot h^2$ gegeben ist, worin b die Grundlinie, h die Höhe des Balkens und C eine vom Material abhängige Konstante bedeutet, soll die Richtigkeit des Verfahrens begründet werden.



†**214.** Von welcher Höhe muß eine vollkommen elastische Kugel auf **410**
einen sehr harten Felsboden auffallen, damit sie von dort abprallend einen h m über dem Boden gelegenen Punkt in der kürzesten Zeit erreiche?

215. Ein rechtwinklig parallelepipedisches Gefäß hat die Grund- **411**
fläche f. Wie groß müssen ihre Abmessungen gewählt werden, damit der gesamte Seitendruck in dem bis zur Höhe h mit Wasser gefüllten Gefäße ein Minimum werde?

216. Der Achsenschnitt eines zylindrischen Gefäßes hat den Um- **412**
fang u; wie sind Halbmesser r und Höhe h zu wählen, damit der Bodendruck in dem mit Wasser gefüllten Gefäße möglichst groß wird?

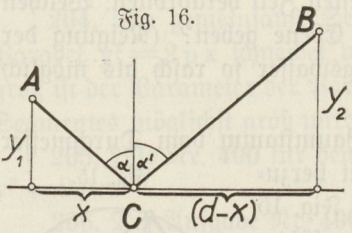
217. Der Achsenschnitt eines zylindrischen Gefäßes hat die Fläche f. **413**
Wie sind die Abmessungen des Gefäßes zu wählen, damit die Summe aus Bodendruck und Seitendruck in dem vollständig gefüllten Gefäße möglichst klein wird?

†**218.** Zwei Lichtquellen von den Lichtstärken I_1 und I_2 sind um **414**
a m voneinander entfernt. In welchem Punkt ihrer geradlinigen Verbindung ist die Gesamtbeleuchtungsstärke am kleinsten? Was ergibt sich für $I_1 = I_2$? (Besondere Werte: $I_1 = 64$ HE, $I_2 = 27$ HE, $a = 70$ cm.)

†**219.** In welcher Höhe über der Mitte eines waagrechten Zeichen- **415**
tisches ist eine Lampe anzubringen, damit ein von der Tischmitte um a entfernter Punkt (Mitte des Zeichenbrettes) möglichst gut beleuchtet ist?

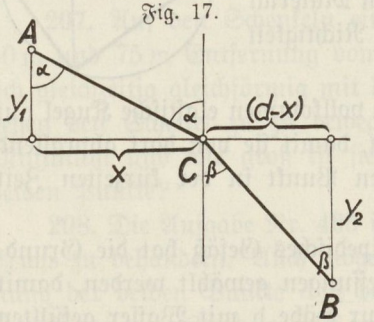
416 †220. Auf einer und derselben Seite einer Geraden liegen in Abständen y_1 und y_2 von der letzteren zwei Punkte A und B, wobei die Entfernung der Fußpunkte von y_1 und y_2 d sein soll. Es soll der kürzeste Weg ermittelt werden, der von A zu einem auf der Strecke d liegenden Punkte C und von dort nach b führt. (Fig. 16.)

Fig. 16.



417 †221. Auf verschiedenen Seiten einer Geraden liegen in Abständen y_1 und y_2 von der letzteren zwei Punkte A und B, wobei die Entfernung der Fußpunkte von y_1 und y_2 d sein soll. Es soll die kürzeste Zeit ermittelt werden, in der ein Punkt von A nach einem auf der Strecke d liegenden Punkte C und von dort nach B gelangt, wenn er sich von A bis B mit einer Geschwindigkeit c_1 und von C nach B mit einer Geschwindigkeit c_2 bewegt. (Fig. 17.)

Fig. 17.



Die Aufgaben 416 und 417 enthalten den Nachweis für den Fermatschen Satz, nach dem das Licht sowohl bei der Zurückwerfung wie bei der Brechung seinen Weg in einem Zeitminimum zurücklegt. — Für die Lösung der Aufgabe **416** möge folgender Gang eingeschlagen werden: Der Gesamtweg z ist die Summe der beiden Strecken AC und CB; diese Strecken drücke man durch die Strecken x, y_1, y_2 und d aus. Es ergibt sich eine Gleichung, die nach x differenziert und nach Nullsetzung des Differentialquotienten für x den Wert $y_1 . d : (y_1 + y_2)$ ergibt. Damit kann tang α und tang α' bestimmt werden; beide ergeben sich gleich (Reflexionsgesetz). (Bemerkt sei übrigens, daß die Begründung durch einen indirekten planimetrischen Beweis weitaus einfacher ist. Wie wird dieser Beweis geführt?) — Für Nr. **417** ist $x : c_1 t_1 = \sin\alpha$ und $(d - x) : c_2 t_2 = \sin\beta$. Man rechnet daraus t_1 und t_2 und ist dann die ganze Dauer der Bewegung $T = t_1 + t_2$; setzt man darin für t_1 und t_2 die aus den früher aufgestellten Gleichungen ermittelten Werte, drückt ferner $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ durch die Strecken y_1, y_2, d und x aus, differenziert sodann die erhaltene Gleichung nach x und setzt die Ableitung gleich Null, so ergibt sich eine Gleichung, aus der man die Gleichung $c_1 : c_2 = \sin\alpha : \sin\beta$ erhält, die das bekannte Snelliussche Brechungsgesetz ausdrückt.

418 222. Wie muß man n galvanische Elemente von der elektromotorischen Kraft e und dem inneren Widerstande r_i schalten, um bei

einem äußeren Widerſtand r_a das Maximum der Stromſtärke zu erzielen?

223. Wie muß ein Draht von der Länge l und von durchaus gleichem Querſchnitt in zwei Stücke geteilt werden, damit dieſe nebeneinander geſchaltet den größten Geſamtwiderſtand ergeben? **419**

B. Integralrechnung.

I. Das unbeſtimmte Integral.

1. Was verſteht man unter dem Zeichen $\int f'(x)\,dx$? (Zu leſen: „Integral von $f'(x)\,dx$.") **420**

Wenn von einer Funktion $y = f(x)$ der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ vorliegt oder $dy = f'(x)\,dx$ iſt, kann die Aufgabe geſtellt werden, daraus die urſprüngliche Funktion $y = f(x)$ zu ermitteln. Dieſe Aufgabe wird durch das „Integralzeichen" $\int$ angedeutet; die dadurch angezeigte Operation, die die Umkehrung des Differenzierens bildet, heißt das „Integrieren". So iſt z. B. $\int dx = x$, weil x jene Funktion iſt, deren Differential dx iſt. Oder es iſt $\int n \cdot x^{n-1} \cdot dx = x^n$, weil $y = x^n$, nach x differentiert, $n \cdot x^{n-1} \cdot dx$ liefert. Oder es iſt $\int \cos x \cdot dx = \sin x$, weil $y = \sin x$, nach x differenziert, die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \cos x$ ergibt.

In allen dieſen Fällen kann man aber, ohne das Ergebnis zu ändern, den erhaltene Reſultaten eine beliebige Konſtante C hinzufügen; dieſe Konſtante kann jeden Wert beſitzen, der nur von der Veränderlichen x frei ſein muß. Denn es iſt z. B. auch $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ richtig, da auch $y = \sin x + C$, nach x differenziert, die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \cos x$ ergibt. Man bezeichnet deshalb dieſe Integrale als unbeſtimmte Integrale.

2. Welche Sätze ergeben ſich durch Umkehrung der bezüglichen Differentialformeln (Nr. 40)? **421**

Es ergibt ſich:

1. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$;
2. $\int n \cdot x^{n-1} \cdot dx = x^n + C$;
3. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;
4. $\int -\sin x\,dx = \cos x + C$;
5. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tang} x + C$;
6. $\int -\frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \operatorname{cotang} x + C$;

7. $\int [f'(x)\,dx + \varphi'(x)\,dx - \psi'(x)\,dx] = \int f'(x)\,dx + \int \varphi'(x)\,dx - \int \psi'(x)\,dx = f(x) + \varphi(x) - \psi(x) + C$;

8. $\int a f'(x)\,dx = a \int f'(x)\,dx = a f(x) + C$.

Entwickle demnach die nachfolgenden unbestimmten Integrale:

422 3. $\int x^4\,dx = ?$

423 4. $\int 5x^7\,dx = ?$

424 5. $\int \frac{1}{x^2}\,dx = ?$

425 6. $\int \sqrt{x}\,dx = ?$

426 7. $\int \sqrt[3]{x^5}\,dx = ?$

427 8. $\int \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx = ?$

428 9. $\int \frac{4}{3} x^3\,dx = ?$

429 10. $\int 3mx\,dx = ?$

430 11. $\int 5 \cos x\,dx = ?$

431 12. $\int m \sin x\,dx = ?$

432 13. $\int \frac{a^2}{\cos^2 x}\,dx = ?$

433 14. $\int \frac{5m^2}{\sin^2 x}\,dx = ?$

434 †15. $\int \frac{5 + 3\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = ?$

435 16. $\int 3a^2 t^2\,dt = ?$

436 17. $\int (ax^2 - bx + c)\,dx = ?$

437 18. $\int (m \cos x - n \sin x)\,dx = ?$

438 19. $\int (\sin \alpha \cos x - \cos \alpha \sin x)\,dx = ?$

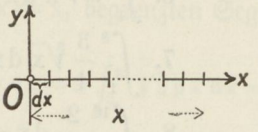
439 20. $\int (\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x)\,dx = ?$

II. Das bestimmte Integral.

440 1. Inwiefern kann man in der Gleichung $\int dx = x$ das Integral als eine Summe auffassen?

Wenn man sich die Variable x in unendlich kleine Teile dx zerlegt denkt, zeigt uns die Fig. 18 unmittelbar, daß x gleichkommt der Summe aller dieser „Differentiale" dx. Daher erklärt sich nun auch die Wahl des Zeichens $\int$, d. i. eines in die Länge gestreckten S.

Fig. 18.

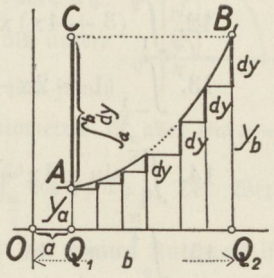


2. Was versteht man unter dem bestimmten Integral 441

$$\int_a^b dy?$$

In Fig. 19 soll uns das Kurvenstück AB den Verlauf einer Funktion $y = f(x)$ zwischen zwei Werten a und b der unabhängigen Veränderlichen x angeben. Es ist dann aus der Figur abzulesen, daß die Summe aller Differentiale dy (stark gezeichnete Streckenstückchen) zwischen a und b, für die wir schreiben $\int_a^b dy$, gleich $y_b - y_a$ ist; denn diese Summe gibt die Strecke $\overline{AC}$. Da aber $y_b = f(b)$ und $y_a = f(a)$ ist, gewinnen wir die Gleichung $\int_a^b dy = f(b) - f(a)$. Nun ist $y = f(x)$, also $dy = f'(x)\,dx$, wodurch unsere letzte Gleichung übergeht in

Fig. 19.



$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Es kommt somit in diesem zwischen zwei bestimmten Grenzen gebildeten Integrale keine Integrationskonstante C (die jeden beliebigen Wert besitzen könnte) vor. Das Integral heißt daher zum Unterschiede von dem in Nr. **420** besprochenen „unbestimmten" Integralen ein bestimmtes Integral. So ist z. B. $\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C$ ein unbestimmtes Integral. Dagegen besitzt das bestimmte Integral $\int_2^6 x^3\,dx$ nach dem oben Ausgeführten den Wert $\frac{1}{4}\cdot 6^4 - \frac{1}{4}\cdot 2^4 = 324 - 4 = 320$. Ebenso ist z. B. $\int \cos dx = \sin x + C$ ein unbestimmtes Integral, wogegen nach dem früheren $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin\frac{1}{2}\pi - \sin 0 = 1$ ist, also einen ganz bestimmten Wert besitzt.

Ermittle den Wert der nachfolgenden bestimmten Integrale:

3. $\int_2^6 x\,dx = ?$ **442**

4. $\int_0^4 5x^3\,dx = ?$ **443**

5. $\int_0^5 3x^4\,dx = ?$ **444**

445 6. $\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx = ?$

446 7. $\int_1^8 \frac{3}{4}\sqrt[3]{x}\,dx = ?$

447 8. $\int_0^{16} \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx = ?$

448 9. $\int_0^1 (m + nx)\,dx = ?$

449 10. $\int_0^m (m^2 + x^2)\,x\,dx = ?$

450 11. $\int_3^6 (2x^4 - 1)\,x\,dx = ?$

451 12. $\int_1^2 (3 + 4x)\,x^2\,dx = ?$

452 13. $\int_{-\frac{1}{2}}^0 (1 + 2x + 3x^2)\,dx = ?$

453 14. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx = ?$

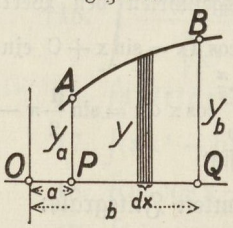
454 15. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx = ?$

III. Anwendungen in der Geometrie.

a) Flächenberechnungen. (Komplanationen.)

455 1. Wie kann man ein Flächenstück berechnen, das zwischen zwei Ordinaten y_a und y_b einer Kurve liegt, die durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben ist?

Fig. 20.



Man zerlegt die Fläche ABQP (Fig. 20) in unendlich schmale Streifen; es ist dann die Fläche eines solchen Streifens gleich $y \cdot dx$ und die ganze Fläche

$$f = \int_a^b y \cdot dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

456 2. Berechne die Fläche, die zwischen der Geraden $y = x$, zwischen den zu $x_1 = 5$ und $x_2 = 9$ gehörigen Ordinaten und der Abszissenachse liegt!

Es ist das Integral $\int_5^9 x\,dx$ zu berechnen.

457 3. Wie Nr. **456** für $y = 2x + 5$ und $x_1 = 3$ und $x_2 = 6$.

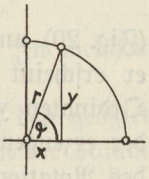
4. Es ist die Fläche des von der Geraden $x = x_1$ begrenzten Segmentes der Parabel $y^2 = 2px$ zu berechnen. **458**

Das hier zu bildende Integral ergibt $f = 2\int_0^{x_1} y\,dx = 2\int_0^{x_1} \sqrt{2px}\,dx = \frac{4}{3} x_1 y_1$.

5. Berechne die Fläche, die von einer Parabel $y^2 = 2px$ und den beiden Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ begrenzt ist! **459**

6. Berechne die Fläche des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$! **460**

Fig. 21.



Die Integration $f = 4\int_0^r y\,dx$ gelingt am leichtesten, wenn man als Veränderliche den Winkel φ (Fig. 21) einführt. Es ist $y = r\sin\varphi$ und $x = r\cos\varphi$, daher $dx = -r\sin\varphi\,d\varphi$. Die Integrationsgrenzen ändern sich dann in $\frac{\pi}{2}$ als untere und 0 als obere Grenze. Durch Einsetzen ergibt sich somit $f = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 r^2\sin^2\varphi\,d\varphi$. Nach den Sätzen der Goniometrie ist aber $\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$, somit $f = -4r^2 \cdot \frac{1}{2}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^0 d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos 2\varphi\,d\varphi\right]$. Der Wert des ersten Integrals ist $\left[\varphi\right]_{\frac{\pi}{2}}^0 = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, jener des zweiten Integrals ist $\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\frac{\pi}{2}}^0 = 0 - 0 = 0$. Es ist daher $f = -2r^2 \cdot -\frac{\pi}{2} = r^2\pi$.

Universitätsbibliothek Wien

7. Es soll die Fläche der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ berechnet werden. **461**

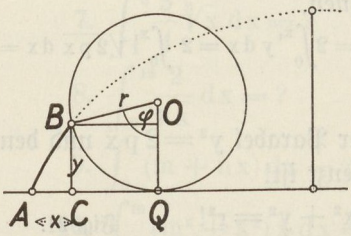
Wie in der vorigen Aufgabe ist $f = 4\int_0^a y\,dx$. Nach der bekannten Beziehung zwischen den Ordinaten der Ellipsenpunkte zu jenen des über ihrer großen Achse beschriebenen Kreises $y : Y = b : a$ ist $y = \frac{b}{a} \cdot Y$. Wie in der vorigen Aufgabe ist dann $y = a\sin\varphi$, $x = a\cos\varphi$, $dx = -a\sin\varphi\,d\varphi$ und geht das zu ermittelnde Integral über in $-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2\varphi\,d\varphi$. Die weitere Rechnung ist dann ebenso durchzuführen wie in Nr. **460** und ergibt die bekannte Formel $f = ab\pi$.

8. Es soll die von der Sinuslinie (Gleichung $y = \sin x$, Fig. 12, S. 20), reichend von 0 bis π, und von der Abszissenachse begrenzte Fläche berechnet werden. **462**

Das Integral $\int_0^\pi y\,dx$ ergibt den Wert 2.

†**9.** Es soll die von der Radlinie (Zykloide) und der Abszissenachse begrenzte Fläche berechnet werden. **463**

Fig. 22.



Nach Fig. 22 ist $y = r - r\cos\varphi$ und $x = r\varphi - r\sin\varphi$, daher $dx = r(d\varphi - \cos\varphi\, d\varphi)$. Daher ist $f = \int_0^{2\pi} r^2 (1-\cos\varphi)\,.\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi = r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi$. Dies ergibt als Schlußresultat $f = 3r^2\pi$.

b) Raumberechnungen. (Kubaturen.)

464 1. Dreht sich das Kurvenstück AB (Fig. 20) um die Abszissenachse, so wird ein Rotationskörper erzeugt; er erscheint durch die beiden Kreisflächen begrenzt, die die beiden Ordinaten y_a und y_b beschreiben. Wie läßt sich, wenn die Gleichung der erzeugenden Kurve durch $y = f(x)$ gegeben ist, der Rauminhalt des Rotationskörpers mit Hilfe der Integralrechnung ermitteln?

Der in Fig. 20 schraffierte unendlich schmale Rechtecksstreifen erzeugt bei der Umdrehung eine unendlich dünne kreisförmige Platte vom Rauminhalte $y^2\pi\,.\,dx$; das gesuchte Volumen ist daher ausgedrückt durch

$$V = \int_a^b y^2\pi\,dx.$$

465 2. Man berechne auf dem vorstehend angedeuteten Wege den Inhalt eines Rotationszylinders vom Basishalbmesser r und der Höhe h.

Man lege die Zylinderachse in die Abszissenachse. (Analog ist bei den nächsten Aufgaben vorzugehen.) Es ist dann $\int_0^h r^2\pi\,dx = r^2\pi\,h$.

466 3. Ebenso berechne man den Inhalt eines Rotationskegels aus r und h.

467 †4. Ebenso den Inhalt eines geraden Kegelstumpfes aus R, r und h.

Ist a die Höhe des Ergänzungskegels, so ist das gesuchte Volumen ausgedrückt durch $\int_a^{a+h} y^2\pi\,dx$; unter Benützung ähnlicher Dreiecke ergibt sich $y : x = R : (a+h)$. Nach Umformungen und indem man — wieder durch ähnliche Dreiecke — die Beziehung $(R-r) : h = r : a$ benützt, erhält man die bekannte Endformel für den Inhalt eines Kegelstumpfes.

468 5. Man berechne den Inhalt eines Rotationsparaboloides.

Ist a die Höhe des Rotationsparaboloides, so ergibt sich $V = \int_0^a y^2\pi\,dx = a^2\pi p$. In welcher Beziehung steht daher das Rotationsparaboloid zum umschriebenen Rotationszylinder?

469 6. Ein Rotationskegel ist durch Basishalbmesser und Höhe gegeben. Man soll ihm das größte Rotationsparaboloid einschreiben,

das seinen Scheitel im Basismittelpunkt hat und dessen Achse mit jener des Kegels zusammenfällt. In welchem Abstand von der Grundfläche durchdringt die Paraboloidfläche den Kegelmantel? In welchem Verhältnis steht sein Inhalt zu jenem des Kegels?

7. Die Figur der Aufgabe **400** dreht sich um die Achse der Parabel. **470** Wie groß muß deren Parameter gewählt werden, damit das innerhalb der Kugel liegende Paraboloidsegment ein Maximum wird? In welchem Verhältnisse stehen die Inhalte folgender drei Kreise: 1. der durch den Parabelbrennpunkt gelegte Querschnittskreis, 2. der Basiskreis des Paraboloides und 3. ein Hauptkreis der Kugel?

†**8.** Die Aufgabe **402** ist für den Raum zu lösen. In welchem **471** Verhältnisse stehen die beiden Paraboloidsegmente?

9. In ein Umdrehungsparaboloid von der Höhe h den größten **472** Zylinder einzuschreiben. In welchem Verhältnisse stehen die Rauminhalte der beiden Körper?

10. In ein Umdrehungsparaboloid von der Höhe h den Zylinder **473** mit größter Mantelfläche einzuschreiben. Wie groß ist sein Inhalt und wie groß jener des ihn umgebenden ringförmigen Stückes des Paraboloides?

11. Man berechne den Rauminhalt der Kugel. **474**

12. Ebenso jenen eines Kugelabschnittes. **475**

Führt man den Abstand seiner Grundfläche vom Kugelmittelpunkte mit $a = r - h$ ein, so ergibt das bezügliche Integral $\int_a^{a+h} y^2 \pi \, dx$ die bekannte Formel.

†**13.** Man berechne den Inhalt einer Kugelschicht aus den Halb- **476** messern r_1 und r_2 der Begrenzungskreise und aus der Höhe h der Kugelschicht.

Bezeichnet a den Abstand der größeren Kreisfläche der Schicht vom Zentrum, so ist $\pi \int_a^{a+h} y^2 \, dx = \pi \int_a^{a+h} (r^2 - x^2) \, dx$ zu berechnen. In das Ergebnis werden die Halbmesser r_1 und r_2 der beiden Begrenzungskreise eingeführt, wodurch sich dann die bekannte Schlußformel ergibt.

14. Man berechne den Rauminhalt eines schiefen Kreiskegels aus **477** dem Basishalbmesser und der Höhe.

Man zerlege den Kegel parallel zur Basis in Platten von der Dicke Δx; es ist dann das Volumen einer im Abstande x von der Spitze liegenden Platte gleich $f \cdot dx$, wobei $f : r^2\pi = x^2 : h^2$, also $f = \frac{r^2 \pi x^2}{h^2}$ ist; es ist dann $\int_0^h \frac{r^2 \pi}{h^2} x^2 \, dx$ zu berechnen.

15. Man berechne den Rauminhalt eines „gestreckten Rotations- **478** ellipsoides". (Die Umdrehung erfolgt um die große Achse der Ellipse.)

479 †16. In einem geraden Zylinder soll sich der Grundflächendurchmesser zur Höhe verhalten wie die Diagonale eines Quadrates zu seiner Seite. Man soll ihm das kleinste gestreckte Rotationsellipsoid umschreiben.

480 †17. Ein Rhombus mit den Diagonalen 2D und 2d rotiert um die größere Diagonale 2D. Man soll ihm das größte Rotationsellipsoid einschreiben.

481 18. Man berechne den Rauminhalt eines „abgeplatteten Rotationsellipsoides". (Die Umdrehung erfolgt um die kleine Achse der Ellipse.)

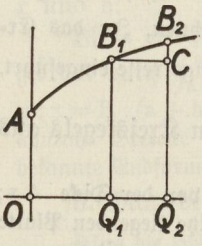
482 †19. In einen durch r und h gegebenen Rotationskegel soll das größte abgeplattete Rotationsellipsoid eingeschrieben werden. Wie groß ist sein Volumen und welchen Bruchteil des Kegelvolumens macht es aus?

483 20. Man berechne den Rauminhalt eines Abschnittes eines zweischaligen Rotationshyperboloides (Rotationsachse ist die reelle Achse 2a der erzeugenden Hyperbel) aus den Achsen 2a und 2b der Hyperbel und aus der Höhe des Hyperbelabschnittes h.

484 21. Ein einschaliges Rotationsellipsoid (Rotationsachse ist die Nebenachse 2b der erzeugenden Hyperbel) wird durch zwei Normalebenen zur Rotationsachse, die im Abstand $+h$ und $-h$ vom Mittelpunkt liegen, geschnitten. Man berechne den Rauminhalt des entstehenden Körpers.

c) Längenberechnungen. (Rektifikationen.)

485 Fig. 23.



1. Wie läßt sich die Integralrechnung zur Berechnung der Bogenlänge einer durch ihre Gleichung gegebenen Kurve verwenden?

Der Bogen B_1B_2 (Fig. 23) sei durch zwei nahe aneinander gelegene Punkte begrenzt. Dann ist die Sehne $B_1B_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Bezeichnet man die Länge des Bogens $\overset{\frown}{AB_1}$ mit s_1, jene des Bogens $\overset{\frown}{AB_2}$ mit s_2, so nähert sich $s_2 - s_1$ um so mehr der Sehne B_1B_2, je kleiner $x_2 - x_1$ ist. Es ist also

$$\lim_{\text{für } x_2 - x_1 = 0} \frac{s_2 - s_1}{x_2 - x_1} = \lim (s_2 - s_1) \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} = \lim \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$$= \lim_{\text{für } x_2 - x_1 = 0} \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Es ist daher das „Bogendifferential" $ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$; daraus ergibt sich

$$s = \int \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

2. Berechne nach dem angegebenen Wege den Umfang eines Kreises aus seinem Halbmesser r! **486**

Wie in Nr. **460** folgt aus $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -r \sin \varphi \text{ und } \frac{dy}{d\varphi} = r \cos \varphi, \text{ daher } \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotang} \varphi.$$

Somit ist $u = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1 + \operatorname{cotang}^2 \varphi}\, . -r \sin \varphi\, d\varphi = 2r\pi.$

3. Berechne die Länge eines vollen Zykloidenbogens! **487**

Wie in Nr. **463** folgt aus $x = r(\varphi - \sin \varphi)$ und $y = r(1 - \cos \varphi)$

$$\frac{dy}{d\varphi} = r \sin \varphi \text{ und } \frac{dx}{d\varphi} = r - r \cos \varphi = 2r \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \text{ daher } \frac{dy}{dx} = \operatorname{cotang} \frac{\varphi}{2}.$$

Daher ist

$$u = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \operatorname{cotang}^2 \frac{\varphi}{2}}\, . 2r \sin^2 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi,$$ woraus sich das Schlußergebnis $u = 8r$ leicht finden läßt.

d) Oberflächenberechnungen. (Komplanationen.)

1. Wie läßt sich die Oberflächenberechnung (Komplanation) krummer Flächen mit Hilfe der Integralrechnung durchführen? **488**

Dreht sich die Fig. 23 um die Abszissenachse, so beschreiben die Bogen AB_1 und AB_2 krumme Flächen, deren Inhalte M_1 und M_2 sein mögen. Dabei nähert sich $M_2 - M_1$ um so mehr der Mantelfläche eines Kegelstumpfes mit der Seite B_1B_2, je kleiner $x_2 - x_1$ ist. Es ist somit

$$\lim_{\substack{x_2 - x_1 = 0 \\ x_2 - x_1}} \frac{M_2 - M_1}{x_2 - x_1} = \lim_{x_2 - x_1 = 0} \frac{(y_2 + y_1)\, \pi\, \overline{B_1B_2}}{x_2 - x_1} = 2y\pi \, . \frac{ds}{dx};$$ es ist das sogenannte „Oberflächendifferential" $dM = 2y\pi \, . \, ds$ und wegen $ds = \sqrt{1 + (y')^2} \, . \, dx$

$$M = \int 2y\pi \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

2. Man berechne auf diesem Wege die Mantelfläche eines Rotationskegels. **489**

Legt man die Kegelachse in die Abszissenachse und den Kegelscheitel in den Koordinatenanfangspunkt, führt man ferner den Winkel α zwischen der Höhe h und der Seite des Kegels ein, so ist $M = \int_0^h 2\pi \, . \tan \alpha \, . \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \, . \, x\, dx =$ $= 2\pi \, . \tan \alpha \, . \frac{1}{\cos \alpha} \int_0^h x\, dx$; setzt man darin $\tan \alpha = \frac{r}{h}$ und $\cos \alpha = \frac{h}{s}$, so ergibt sich die bekannte Schlußformel.

3. Ebenso soll die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes aus R, r und s berechnet werden. **490**

Man führe die Höhe a des Ergänzungskegels und — ebenso wie in der vorigen Aufgabe — den Winkel zwischen Seite s und Höhe h des Kegelstumpfes in die Rechnung ein.

491 4. Man berechne auf diesem Wege auch die Oberfläche einer Kugel.

Zur Auswertung des nach Nr. 488 zu bestimmenden Integrals führe man den Winkel φ zwischen Halbmesser r und Ordinate y ein. Ebenso bei den beiden folgenden Aufgaben.

492 5. Ebenso den Inhalt einer Kugelhaube (Kalotte) aus Kugelradius r und der Höhe der Kalotte h.

493 6. Ebenso den Inhalt einer Kugelzone aus Kugelhalbmesser r und der Zonenhöhe h.

IV. Anwendungen in der Physik.

494 1. In Nr. 173 wurde gezeigt, daß für eine ungleichförmige Bewegung die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ und die Beschleunigung $b = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ ist. Wie kann man durch Integration dieser „Differentialgleichungen" die Grundgesetze einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung finden?

Es handelt sich hier darum, a) die Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit derart zu bestimmen, daß ihr Differentialquotient nach t die Beschleunigung b ergibt, ferner b) den Weg s als Funktion der Zeit so zu bestimmen, daß der zweite Differentialquotient nach t den Wert s ergibt.

Es ist zunächst wegen $dv = b\,dt$

$$v = \int b\,dt = b\int dt = bt + C;$$

soll zu Beginn der Bewegung $v = 0$ sein, so ergibt sich zur Bestimmung von C die Gleichung $0 = 0 + C$, somit $C = 0$ und

$$\mathbf{v = bt.}$$

Ebenso ergibt sich aus $v = \frac{ds}{dt} = bt$, $ds = bt\,dt$ und $s = \int bt\,dt = \frac{b}{2}t^2 + C$, wobei ebenso wie vorhin $C = 0$ ist, wenn zur Zeit $t = 0$ der Weg $s = 0$ war, so daß

$$s = \frac{b}{2}t^2$$

ist.

495 2. In einem bestimmten Punkte P befinde sich eine Elektrizitätsmenge von $+e$ elektrostatischen Einheiten, in der Entfernung r davon eine Elektrizitätsmenge $+1$. Welche Arbeit haben wir gegen die elektrischen Abstoßungskräfte zu leisten, um diese Elektrizitätsmenge $+1$ aus der Entfernung r in die kleinere Entfernung ϱ zu bringen?

Nach dem Coulombschen Gesetze ist die Abstoßungskraft in irgendeinem Punkte, der die Entfernung x vom Punkte P besitzt, gegeben durch $\frac{e \cdot 1}{x^2}$; für

eine kleine Entfernung dx darf diese Kraft als unveränderlich angenommen werden und ist somit die Arbeit $\frac{e}{x^2} . dx$ zu leisten. Die bei der Verschiebung auf dem Wege $(r - \varrho)$ zu leistende Gesamtarbeit erscheint daher gegeben durch

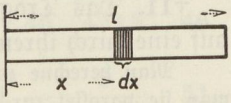
$$A = \int_{\varrho}^{r} \frac{e}{x^2} dx = \left[-\frac{e}{x} \right]_{\varrho}^{r} = -\frac{e}{r} + \frac{e}{\varrho} = e \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} \right).$$

Ist $r = \infty$, so drückt uns die Gleichung $A = \frac{e}{\varrho}$ das sogenannte Potential der Ladungsmenge e in der Entfernung ϱ aus; es entspricht nach dem eben gesagten der Arbeit, die geleistet wird, wenn man die Ladungsmenge $+1$ aus der Unendlichkeit in die Entfernung ϱ bringt.

3. Wie findet man das Trägheitsmoment eines geraden, durchaus gleich dicken und homogenen Stabes von der Länge l, dem Querschnitt q und der spezifischen Masse (Masse der Volumseinheit) δ, wenn dieser Stab um eine Achse gedreht wird, die normal auf der Längenrichtung des Stabes durch einen seiner Endpunkte hindurchgeht? **496**

Nach den Sätzen der Mechanik erscheint das Trägheitsmoment stets durch $\Sigma (m r^2)$ gegeben, worin m die Masse und r^2 die zweite Potenz der Entfernung eines Massenpunktes von der Drehungsachse bedeutet. Zerlegt man nun den Stab in unendlich schmale Stücke von der Länge dx (Fig. 24) und hat ein solches Element den Abstand x von der Drehungsachse, so ist seine Masse $m = q . dx . \delta$ und daher sein Trägheitsmoment $q \delta x^2 dx$. Das gesamte Trägheitsmoment des Stabes ist somit gegeben durch

Fig. 24.



$$J = \int_0^l q \delta x^2 dx = q \delta \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{q \delta l^3}{3};$$

nachdem nun $q \delta l$ die Gesamtmasse M des Stabes vorstellt; ist

$$J = \frac{M . l^2}{3}.$$

4. Wie groß ist das Trägheitsmoment des in der vorigen Aufgabe gegebenen Stabes, wenn die Achse normal auf der Längenrichtung durch den Schwerpunkt des Stabes hindurchgeht? **497**

5. Wie groß ist das Trägheitsmoment eines homogen mit Masse belegten Rechteckes von der Länge a und der Breite b, wenn die Drehungsachse mit der Länge a zusammenfällt? **498**

6. Wie groß ist das Trägheitsmoment des nach der vorigen Aufgabe bestimmten Rechteckes, wenn die Drehungsachse normal zu seiner Ebene durch den Schwerpunkt des Rechteckes hindurchgeht? **499**

Hier ist das Rechteck parallel zu seiner Länge und parallel zu seiner Breite in unendlich schmale Streifen zu zerlegen und ergibt sich das gesamte Trägheitsmoment gleich der Summe der beiden bezüglichen Integrale.

500 †7. Wie groß ist das Trägheitsmoment eines gleichmäßig mit Masse belegten gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Grundlinie g ist und die Höhe h als Drehungsachse dient?

501 †8. Ein Quadrat vom Flächeninhalt f dreht sich einmal um eine Mittellinie als Achse, ein zweites Mal um eine Eckenlinie und ein drittes Mal um eine normal auf der Ebene des Quadrates durch dessen Schwerpunkt gehende Achse. Wie verhalten sich die Trägheitsmomente in diesen drei Fällen?

502 9. Das Trägheitsmoment einer homogenen Kreislinie vom Halbmesser r soll für eine normal zu ihrer Ebene durch den Kreismittelpunkt verlaufende Achse bestimmt werden. Für welche krumme Fläche erscheint das Trägheitsmoment durch dieselbe Endformel bestimmt?

503 10. Wie in der vorigen Aufgabe soll das Trägheitsmoment einer homogenen Kreisfläche vom Halbmesser r bestimmt werden. Für welchen runden Körper ist das Trägheitsmoment durch dieselbe Endformel bestimmt?

504 †11. Das Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel, bezogen auf eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse, zu berechnen.

Man berechne zuerst das Trägheitsmoment der oberen Halbkugel, indem man sie parallel zur Basis in unendlich dünne Schichten vom Halbmesser x und von der Dicke d y zerlegt und für eine solche Schicht das Trägheitsmoment $dJ = \frac{x^2 \pi \delta \,.\, dy \,.\, x^2}{2}$ bestimmt. Es ist dann für die Halbkugel $J = \frac{\pi \delta}{2} \int_0^r x^4 \, dy$. Nun setzt man für $x^2 = r^2 - y^2$, also für $x^4 = r^4 - 2 r^2 y^2 + y^4$ und erhält so für die Halbkugel das Trägheitsmoment als die algebraische Summe von drei bestimmten Integralen, deren Reduktion $\frac{4}{15} r^5 \pi \delta$ ergibt. Somit ist für die Vollkugel $J = \frac{8}{15} r^5 \pi \delta = \frac{4}{3} r^3 \pi \delta \,.\, \frac{2}{5} r^2 = \frac{2}{5} M r^2$.

Ergebnisse der Rechnungsaufgaben.

A. Differentialrechnung.

II. Der Begriff des Differentialquotienten.

22. $10x - 3$. 23. $-6x + 4$. 24. $3x^2 - 6x + 4$. 25. $12x^3 - 15x^2 + 14x - 9$. 27. $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

III. Die Differentialquotienten der wichtigsten einfachen Funktionen.

41. $7x^6$. 42. 1. 43. $-2x^{-3}$. 44. $\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$. 45. $45x^8$. 46. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$. 47. $\frac{24}{x^5}$. 48. $-\frac{3}{5x\sqrt[5]{x^3}}$. 49. $-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$. 50. $-\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$. 51. $-\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$. 52. $-\frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$. 53. m. 54. $35mx^4$. 55. $-\frac{20x^4}{mn}$. 56. $3n + 10x$. 57. $\frac{10}{x\sqrt[5]{x^2}}$. 58. $\frac{7x^2\sqrt{x}}{2}$. 59. $-\frac{13}{6x^3\sqrt[6]{x}}$. 60. $\frac{15}{8}\sqrt[8]{x^7}$. 61. $\frac{7}{6}\sqrt[6]{\frac{x}{a^2}}$. 62. $-4x^3$. 63. $2x$. 64. $-8x$. 65. $-1 - 12x$. 66. $6x^5$. 67. $10x^9$.

68. $-\frac{1}{x^2}$. 69. $-\frac{2}{(x-1)^2}$. 70. $-\frac{15 + 14x + 9x^2}{x^4}$. 71. $\frac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2}$. 72. $-\frac{16x}{(3-x^2)^2}$. 73. $-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$. 74. $-\frac{2x(x+3)}{(3+2x+x^2)^2}$. 75. $\frac{3x^2 - 14x + 6}{(x^2-2)^2}$. 76. $4\frac{1+x}{(1-x)^3}$. 77. $\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$. 78. $3(2x^2 - 3x + 4)^2(4x - 3)$. 79. $(x+2)^2(x-2)(5x-2)$. 80. $-8x(m^2 - x^2)^3$. 81. $\frac{m-x}{\sqrt{2mx - x^2}}$. 82. $\frac{1}{\sqrt[3]{(2m+3x)^2}}$. 83. $3(x+1)\sqrt{x^2 + 2x - 6}$. 84. $-3x\sqrt{a^2 - x^2}$. 85. $a - \frac{2}{3\sqrt[3]{a+x}}$. 86. $\sqrt{\frac{p}{2x}}$.

87. $\frac{3-2x}{(x^2-3x)^2}$. 88. $\frac{3}{(3-{}^1/_3 x)^4}$. 89. $\frac{nx}{(m-nx^2)^4}$. 90. $20x^3(5-7x^3+$
$+2x^6)$. 91. $\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. 92. $\frac{3(1-x)}{2\sqrt{3-x}}$. 93. $-\frac{6}{x^3}-\frac{4}{(1-x)^3}$. 94.
$3\frac{(x^4-m^4)(x^2+m^2)}{m^3x^4}$. 95. $\frac{6x(2+x^2)^2(1+2x)}{(1-x^3)^3}$. 96. $-\frac{x+3}{x^2\sqrt{3+2x}}$.
97. $\frac{x(2a^2-x^2)}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$. 98. $\frac{3x^2(2a^3-3x^3)}{2\sqrt{a^3-x^3}}$. 99. $\frac{3x}{\sqrt{(1-3x^2)^3}}$. 100. $\frac{4x^2}{\sqrt[3]{(2-x^3)^7}}$.
101. $\frac{4x^2+4x\sqrt{1+x^2}+2}{\sqrt{1+x^2}}$.

102. $-m\sin mx$. 103. $-\sin\frac{x}{m}$. 104. $\cos\frac{x}{m}$. 105. $-\frac{m^2}{x^2}\cdot$
$\cdot\cos\frac{m}{x}$. 106. $2\cos(2x-m)$. 107. $-2x\sin(x^2-m^2)$. 108.
$\frac{b}{\cos^2(a+bx)}$. 109. $\frac{1}{\sin^2(a-x)}$. 110. $\frac{m}{x^2}\cdot\sin\frac{1}{x}$. 111. $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\cdot$
$\cdot\cos\sqrt{\frac{1}{x}}$. 112. $\frac{m}{\cos^2(mx)}$. 113. $-\frac{1}{\cos^2\frac{x}{m}}$. 114. $\sin 2x$. 115. $-m\sin(2mx)$.
116. $-\frac{\text{cotang } x}{\sin x}$. 117. $-\sin\frac{3x}{4}\cos\frac{x}{4}$. 118. $-\frac{1}{2}\sin 2x\sin x$. 119.
$-\frac{4}{(\sin 2x)^2}$. 120. $-3\sin x(1-4\cos^2 x)$. 121. $\cos^2 x$. 122. $\frac{m}{1+\cos x}$.
123. $\sin(2x-m)$. 124. $-\sin(2x-m)$. 125. $\frac{\text{tang } x}{\cos^4 x}$.

IV. Höhere Ableitungen.

126. $y'=3x^2-4x+3$, $y''=6x-4$, $y'''=6$, $y^{IV}=0$. 127.
$y'=9x^2-8x+5$, $y''=18x-8$. 128. $y'=1-\frac{1}{x^2}$, $y''=\frac{2}{x^3}$.
129. $y'=5+\frac{3}{x^4}$, $y''=-\frac{12}{x^5}$. 130. $y'=4x^3-7mx^2+6m^2x-8m^3$,
$y''=12x^2-14mx+6m^2$. 131. $y'=4x^3-3x^2+4x-1$, $y''=$
$=12x^2-6x+4$. 132. $y'=\frac{b}{2\sqrt{a+bx}}$, $y''=-\frac{b^2}{4\sqrt{(a+bx)^3}}$. 133.
$y'=\sqrt{\frac{p}{2x}}$, $y''=-\frac{p}{2xy}$. 134. $y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{m+x}}-\frac{1}{\sqrt{m-x}}\right)$, $y''=$
$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{(m-x)^3}}-\frac{1}{\sqrt{(m+x)^3}}\right)$. 135. $y'=7x^6$, $y''=42x^5$, $y'''=210x^4$,

$y^{IV} = 840x^3$. **136.** $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$, $y''' = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$, $y^{IV} = -\frac{15}{16x^3\sqrt{x}}$. **137.** $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{IV} = \sin x$. **138.** $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$, $y''' = \sin x$, $y^{IV} = \cos x$.

V. Die geometrische Bedeutung des ersten und zweiten Differentialquotienten.

145. Max. in $x = 1$, $y = -5$. **146.** Min. in $x = 2$, $y = 2$. **147.** Min. in $x = 2$, $y = 0$; $\operatorname{tang} \alpha_1 = -6$, $\operatorname{tang} \alpha_2 = 2$; $\alpha_1 = 99^0 27' 45''$, $\alpha_2 = 63^0 26' 6''$. **148.** $\left(\frac{5}{6}, -5\frac{1}{12}\right)$ und $\left[\frac{1}{6}(6-\sqrt{3}), -5\frac{1}{4}\right]$. **149.** $(2, 5)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$, $(1, 3)$, $(0, 3)$, $\left(-\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4}\right)$, $(-1, 5)$; Min. in $\left(\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}\right)$. **150.** W. P. in $(0, 0)$; W. T. $y = 0$; $\alpha_1 = 71^0 33' 54''$, $\alpha_2 = 45^0$. **151.** Min. in $(1, -2)$, Max. in $(-1, 2)$; W. P. in $(0, 0)$, W. T. $y = -3x$. **152.** Min. in $(1, -10)$, Max. in $(-2, 17)$; W. P. in $\left(-\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$, W. T. $y = -\frac{27}{2}x - \frac{13}{4}$.

153. Min. in $\left(3, -12\frac{1}{2}\right)$; Max. in $\left(-2, 8\frac{1}{3}\right)$; W. P. in $\left(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{12}\right)$, W. T. $24y + 150x = 25$. **154.** Min. in $(1, 17)$; Max. in $(-2, 44)$; W. P. in $\left(-\frac{1}{2}, 30\frac{1}{2}\right)$; W. T. $2y + 27x = 47{\cdot}5$. **155.** Min. in $\left(2, -3\frac{1}{6}\right)$; Max. in $\left(-1, 1\frac{1}{3}\right)$; W. P. in $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{12}\right)$, W. T. $12y + 27x = 2{\cdot}5$. **156.** Min. in $\left(1, -\frac{1}{6}\right)$; Max. in $\left(-2, 4\frac{1}{3}\right)$; W. P. in $\left(-\frac{1}{2}, 2\frac{1}{12}\right)$; W. T. $12y + 27x = 11{\cdot}5$. **157.** Min. in $(2, 0)$; Max. in $(0, 12)$; W. P. in $(1, 6)$, W. T. $y = -9x + 15$. **158.** Min. in $\left(\frac{5}{2}, -15\frac{17}{24}\right)$; Max. in $\left(-2, 14\frac{2}{3}\right)$; W. P. in $\left(\frac{1}{4}, -\frac{25}{48}\right)$, W. T. $48y + 486x = 96{\cdot}5$. **159.** Min. in $(2, 4)$; Max. in $(-2, -4)$; W. P. in $(0, \infty)$, W. T. $x = 0$. **160.** Min. in $(\sqrt{2}, 0)$ und $(-\sqrt{2}, 0)$; Max. in $(0, 4)$; W. P. in $\left(\frac{1}{3}\sqrt{6}, 1\frac{7}{9}\right)$ und $\left(-\frac{1}{3}\sqrt{6}, 1\frac{7}{9}\right)$,

W. T. $9y \pm 16\sqrt{6}x = 48$. **161.** Min. in $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ und $(2, 0)$; Max. in $\left(\frac{3}{4}, \frac{625}{64}\right)$; W. P. in $\left(\frac{9 \mp 5\sqrt{3}}{12}, \frac{625}{144}\right)$, W. T. $y = \pm\frac{125\sqrt{3}}{18}x + \frac{125(5 \mp 2\sqrt{3})}{48}$. **162.** Min. in $\left(3, \frac{1}{2}\right)$; Max. in $(0, -1)$. **163.** Min. in $(1, 4)$; Max. in $(-1, -4)$. **164.** Max. in $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \ldots$; Min. in $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2} \ldots$; von 0 bis π ist y'' negativ, also die Kurve, von unten gesehen, hohl, von π bis 2π dagegen y'' positiv, also die Kurve, von unten gesehen, erhaben. W. P. in $0, \pi, 2\pi \ldots$; W. T. $y = x$, $y = -x$ usw. **165.** Ähnlich wie **164**: Max. in $0, 2\pi, 4\pi, \ldots$; Min. in $\pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$; W. P. in $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$; W. T. $y = -x$, $y = x$, $y = -x$ usw. **166.** $y = \alpha x^2 - 10\alpha x + \gamma$; ist z. B. $\alpha = 4$, $\gamma = 4$, so Min. in $(5, -96)$; ist $\alpha = -4$, $\gamma = 4$, so Max. in $(5, 104)$. **167.** $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 12x + m$; ist z. B. $m = 1$, so Min. in $\left(3, -21\frac{1}{2}\right)$, Max. in $\left(-4, 35\frac{2}{3}\right)$. **168.** $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 8x + m$; ist z. B. $m = 1$, so Min. in $\left(4, -25\frac{2}{3}\right)$, Max. in $\left(-2, 10\frac{1}{3}\right)$. **169.** $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + mx + n$; z. B. für $m = 1$, $n = -1$, W. P. in $\left(1, -\frac{13}{12}\right)$ und $\left(-3, -19\frac{3}{4}\right)$. **170.** $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x + m$; für $m = -1$ ist z. B. Min. $\left(5, -59\frac{1}{3}\right)$, Max. $(-3, 26)$, W. P. $\left(1, -16\frac{2}{3}\right)$. **171.** $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + m$; für $m = 1$; Min. in $\left(4, \frac{77}{3}\right)$, Max. in $\left(-2, \frac{31}{3}\right)$, W. P. in $\left(1, -7\frac{2}{3}\right)$. **172.** $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x + m$; für $m = 1$ ist z. B. Min. in $(2, 0)$ und $(-1, 0)$, Max. in $\left(\frac{1}{2}, 1\frac{17}{64}\right)$, W. P. in $\left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{9}{16}\right)$.

VII. Ermittlung der Werte unbestimmter Formen.

178. $\frac{3}{2}$. 179. $\frac{8}{7}$. 180. -11. 181. 5. 182. $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5}$. 183. 5. 184. 3. 185. $\frac{3}{35}$. 186. $-\frac{1}{56}$. 187. 2. 188. ∞. 189. $\frac{1}{2}$. 190. $-\sqrt{2}$. 191. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$. 192. $-\sqrt{2}$. 193. $\frac{10}{3}$. 194. 3. 195. $\frac{1}{2}$. 196. $\frac{1}{3}$.

VIII. Aufgaben über größte und kleinste Werte aus der Geometrie und Physik.

197. $\frac{s}{2}, \frac{s}{2}$; 5, 5. 198. 199. Wie Nr. 197. 200. 1. 201. $(\sqrt{p}, \sqrt{p})$ (10, 10). 202. 50 cm, 50 cm. 203. Das Quadrat mit der Seite $\frac{u}{2}$ und dem Inhalt $\frac{u^2}{4}$. 204. Das Quadrat, dessen Seiten von je 25 Zündhölzchen gebildet werden. 205. Das Quadrat mit der Seite $\sqrt{f}$. 206. Das Quadrat mit der Seite $\frac{s}{2}$; Diagonale $= \frac{s}{2}\sqrt{2}$. 207. Das Quadrat mit der Seite $\frac{d}{2}\sqrt{2}$. 208. In der Mitte der Hypotenuse. 209. Das gleichschenklige Dreieck mit dem Schenkel $\frac{s}{2}$. 210. 90^0. 211. $h = \frac{3}{2}r$, $g = r\sqrt{3}$; gleichseitiges Dreieck mit dem Inhalt $\frac{3r^2}{4}\sqrt{3}$. 212. $\alpha = 60^0$. 213. $\sphericalangle \beta = \gamma = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$; $b = c = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$. 214. Jede Seite $= \sqrt{h^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2}$. 215. Das gleichschenklige Dreieck mit den Seiten $a = \frac{2s \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}$, $b = c = \frac{s}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}$. 216. Jede Kathete $= \frac{a}{2}\sqrt{2}$. 217. Jede der beiden Katheten ist $\frac{s}{2}\sqrt{2}$. 218. Das gleichschenklige Dreieck mit den Schenkeln $\frac{2s - a}{2}$; sein Inhalt ist $\frac{a}{2}\sqrt{s(s-a)}$. 219. Das gleichseitige Dreieck mit der Seite $2\sqrt[4]{\frac{f^2}{3}}$. 220. Es muß $\overline{CM} = \overline{CN} = \sqrt{\frac{ab}{2}}$ sein. 221. Grundlinie

$\frac{g}{2}$, Höhe $\frac{h}{2}$. **222.** Grundlinie und Höhe müssen gleich groß sein; der größte Bruchteil ist dann $^1/_2$. **223.** $63^0\,26'\,6''$. **224.** Die Ecken fallen in die Mittelpunkte der Quadratseiten. **225.** Der Mittelpunkt des Quadrates. **226.** Der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreieckes. **227.** In der halben Höhe des Dreieckes. **228.** Die Abschnitte auf den Schenkeln müssen doppelt so groß sein wie die Koordinaten des Punktes P. **229.** $2bc \sin \alpha$. **230.** Das Quadrat mit der Seite $r\sqrt{2}$. **231.** Das Quadrat mit der Seite $r\sqrt{2}$. **232.** r^2. **233.** Die Sehne ist im Abstande $\frac{r}{2}\sqrt{2}$ zu ziehen. **234a.** Das gleichseitige Dreieck mit dem Inhalt $\frac{3r^2}{4}\sqrt{3}$. **234b.** Das gleichseitige Dreieck mit den Umfang $3r\sqrt{3}$. **235.** Das gleichseitige Dreieck hat den kleinsten Inhalt und $\left(\text{wegen } f = r \cdot \frac{u}{2}\right)$ auch den kleinsten Umfang. **236.** Die Halbierungslinie des Peripheriewinkels α muß durch den Kreismittelpunkt gehen. **237.** Wie Nr. **236.** **238.** Die Diagonalen des Rhombus müssen doppelt so lang sein wie die Rechtecksseiten. **239.** 60^0. **240.** $\frac{ah}{a+b}$. **241.** Das Trapez bildet die Hälfte des eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes. **242.** 60^0. **243.** a) $4r\sqrt{2}$; b) $r^2\sqrt{3}$. **244.** $2r^2 \sin^3 \frac{2\alpha}{3}$; für $\alpha = 90^0$ ist $f = \frac{3r^2}{4}\sqrt{3}$ (Hälfte des eingeschriebenen Sechseckes). **245.** $r = \sqrt{f}$. **246.** $114^0\,35'\,29''$. **247.** $r^2 \tan \frac{\alpha}{2}$. **248.** Sie muß ein gleichschenkliges Dreieck abgrenzen. **249.** Abstand des gesuchten Punktes vom Mittelpunkt des größeren Kreises $= \frac{aR}{R+r}$; $s = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$; $8\frac{2}{3}$, 5. **250.** $l = 12\,m$, $b = 6\,m$; Inhalt $= 72\,m^2$. **251.** $x = \frac{l+b-\sqrt{l^2-bl+b^2}}{6}$; 1·5 cm. **252.** $\frac{s}{6}$; $2 \cdot \left(\frac{s}{3}\right)^3$. **253.** $x = \sqrt{a(a+b)}$; $x = a\sqrt{2}$.

254. Der Würfel mit der Kante $\frac{s}{12}$. **255.** $a = b = \sqrt[3]{V}$. **256.** $D = 2s$. **257.** Je vier Stücke zu 45 cm, 75 cm, 90 cm Länge. **258.** $\frac{K}{2}\sqrt[3]{3}$; $K\sqrt[3]{3}$; $\frac{2K\sqrt[3]{3}}{3}$. **259.** $f = \frac{k^2}{4}$. **260.** a) $\frac{h}{3}$; b) $\frac{h}{2}$. **261.** $\frac{h}{3}$;

4 : 27. **262.** Grundkanten $= \frac{2}{3}s$, Seitenkanten $= \frac{s}{3}\sqrt{2}$; Kantenwinkel = $90°$; 4 : 27. **263.** 4 : 9. **264.** Abstand der Kegelbasis von der Spitze des Tetraeders $= \frac{2}{3}$ der Tetraederhöhe. **265.** Derselbe Kegel wie in Nr. **264.** **266.** $\frac{2a}{3}\sqrt{3}$; $\frac{a}{3}\sqrt{3}$; $35° 15' 52''$; $45°$. **267.** Das reguläre Tetraeder mit der Kante $\sqrt{\frac{0\sqrt{3}}{3}}$. **268.** Beide sind gleich; wie 4 : 1. **269.** $81 : 4\pi\sqrt{3}$; die Höhe des Zylinders ist gleich dem dritten Teil der Tetraederhöhe. **270.** 4 dm breit und 2 dm tief. **271.** $2\alpha = 137° 3' 30''$. **272.** $x = \frac{2u}{4+\pi}$, $y = \frac{1}{2}x$, $f = \frac{u^2}{2(4+\pi)}$; $f = \frac{8}{u+\pi}$ m². **273.** $r = h = \frac{1}{4}l$. **274.** $r = \frac{l}{3}$; $h = \frac{l}{6}$. **275.** $x = y = \frac{s}{3}$. **276.** Der gleichseitige Zylinder mit $2r = h = \frac{1}{2}s$. **277.** Beide gleich $\left(\frac{2a}{3}\right)^2\pi$. **278.** Beide sind gleich. **279.** Der gleichseitige Zylinder. **280.** Der gleichseitige Zylinder mit dem Grundflächenhalbmesser $\frac{r}{3}\sqrt[3]{18}$. **281.** Basishalbmesser = Höhe = $= \frac{s\sqrt{2}}{3}$. **282.** Der gleichseitige Zylinder mit der Seite $\frac{s}{2}\sqrt{2}$; $M = \frac{s^2\pi}{2}$. **283.** Basisumfang $= \frac{2}{3}a$, Höhe $= \frac{h}{3}$; 28, 12. **284.** Basishalbmesser = Höhe $= \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$ cm $= 6{\cdot}828$ cm. **285.** a) Basishalbmesser = $=$ Höhe $= \sqrt{\frac{0}{3\pi}}$; b) Basishalbmesser $= \sqrt{\frac{0}{6\pi}}$; Höhe $= \sqrt{\frac{20}{3\pi}}$, also ein gleichseitiger Zylinder. **286.** Basishalbmesser = Höhe $= \sqrt[3]{V : \pi}$. **287.** $\frac{2s^3\pi\sqrt{3}}{27}$. **288.** $2\alpha = 109° 28' 16''$. **289.** $\sqrt{0 : 3\pi}$; der gleichseitige Kegel. **290.** $\sqrt{\frac{2M^3\sqrt{3}}{81\pi}}$. **291.** $x : y : s = \sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. **292.** $\varrho = \frac{r}{3}\sqrt{6}$; $h = \frac{r}{3}\sqrt{6}$; $293° 56' 24''$; $109° 28' 16''$. **293.** $1 : \sqrt{2}$; $2\alpha = 70° 31' 44''$. **294.** Grundlinie $= \frac{4}{5}s$; Schenkel $= \frac{3}{5}s$. **295.** Der Rhombus mit den

Diagonalen $\frac{4}{3}s$ und $\frac{2}{3}s$ bei Umdrehung um die kleinere. **296.** $r : s = 1 : 3$. **297.** $4 : 27$. **298.** Beide mit je $\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$. **299.** Der Zylinder mit $R = r = a$; $V = a^2 \pi h$. **300.** Basishalbmesser $= \frac{2}{3}r$; Höhe $= \frac{h}{3}$; $V = \frac{4}{27} r^2 \pi h = \frac{4}{9}$ vom Inhalte des Kegels. **301.** Basishalbmesser $= \frac{1}{2}r$; Höhe $= \frac{1}{2}h$. **302.** Basishalbmesser $= \frac{hr}{2(h-r)}$; Höhe $= \frac{h(h-2r)}{2(h-r)}$; es muß $h > 2r$ sein; $\frac{3}{4}r$, $\frac{3}{4}r$. **303.** Basishalbmesser $= \frac{1}{2}r$; Höhe $= \frac{1}{2}h$. **304.** Basishalbmesser $= \frac{D_2}{3}$; Höhe $= \frac{D_1}{3}$. **305.** Basishalbmesser $= \frac{3}{4}s\sqrt{2}$; Höhe $= 3s$. **306.** Basishalbmesser $= \frac{2}{3}r\sqrt{2}$; Höhe $= \frac{h}{3}$. Im Verhältnis $3 : 1$. **307.** Basishalbmesser $= \frac{R}{2}$; Höhe $= \frac{Rh}{2(R-r)}$; es muß $r < \frac{1}{2}R$ sein. **308.** Der gleichseitige Zylinder mit dem Basishalbmesser $\frac{r}{2}\sqrt{2}$. **309.** $V = \frac{4r^3\pi}{9}\sqrt{3}$. **310.** Basishalbmesser $= r\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{5}}\right)}$; Höhe $= 2r\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{5}}\right)}$. **311.** Halbmesser $= \frac{1}{2}r$; Höhe $= r\sqrt{3}$; 120°. **312.** Höhe $= \frac{4r}{3}$; Halbmesser $= \frac{2r}{3}\sqrt{2}$; $\varrho = \frac{2}{3}r$. **313.** Wie Nr. **312.** **314.** Der Kegelstumpf mit dem Radius r für die Grundfläche und für die Deckfläche und mit der Höhe $2r$, d. h. der gleichseitige Zylinder. **315.** Basishalbmesser $= \frac{r}{3}\sqrt{6}$; Höhe $= \frac{r}{3}\sqrt{3}$. **316.** Der Würfel mit der Seite $\frac{2\sqrt{3}}{3}r$. **317.** r^3. **318.** $V = \frac{8\sqrt{3}}{27}r^3$. **319.** Grundkante $=$ Höhe $= \frac{4}{3}r$. **320.** Höhe $= r\sqrt{2}$; r^2; 45°. **321.** $V_1 : V_2 = 1 : 2$; $O_1 : O_2 = 1 : 2$. **322.** Basishalbmesser $= r\sqrt{2}$; Höhe $= 4r$. **323.** Basishalbmesser $= r\sqrt{1+\sqrt{2}}$; Höhe $=$

$= r(2+\sqrt{2})$. **324.** $8r^3\sqrt{3}$. **325.** Der Halbmesser der Basis ist $\frac{1}{2}s$ $(\sqrt{5}-1)$, also gleich dem größeren Abschnitte der nach goldenem Schnitte geteilten Seite; die Inkugel hat den größten Inhalt und die größte Oberfläche. **326.** In der Entfernung $\frac{1}{2}r$; $\frac{r^2\pi}{2}$; beide sind gleich. **327.** In beiden Fällen im Abstande von $\frac{r}{3}$ vom Mittelpunkt. Die Summe der drei Kugeloberflächen ist $\frac{1}{3}$ von der Oberfläche der gegebenen Kugel, die Summe der drei Kugelinhalte $\frac{1}{9}$ vom Inhalte der gegebenen Kugel. **328.** $r^2\pi$. **329.** $O = r^2\pi\,(1+\sqrt{2})$. **330.** Grundkante $= \frac{2r}{3}\sqrt{3}$; Höhe $= \frac{r}{3}\sqrt{3}$. **331.** $V = r^3$. **332.** Umkreishalbmesser der Grundfläche $=$ $= \frac{r}{3}\sqrt{6}$; Höhe $= \frac{r}{3}\sqrt{3}$. **333.** $\frac{2r^3\pi\sqrt{3}}{9}$. **334.** $\frac{r}{7}(1+2\sqrt{2})$. **335.** $\frac{8}{9}r^2\pi\sqrt{3}$. **336.** 45^0; $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{2}}{1}$. **337.** Das Segment mit $h = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$. **338.** Der Abschnitt mit der Höhe $h = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$ oder $h = 2r$, d. h. die ganze Kugel. **339.** $h = r = \sqrt{\frac{C}{2\pi}}$ (Halbkugel); 4, 4. **340.** Der Kugelabschnitt, dessen Höhe $h = \sqrt{\frac{O}{\pi}} = 2r$ ist, d. h. die ganze Kugel mit dem Halbmesser $\sqrt{\frac{O}{4\pi}}$. **341.** $\frac{4}{3}r$; 2 : 1. **342.** $\frac{r^2\pi}{3}\sqrt{3}$. **343.** Basishalbmesser $= \frac{1}{2}r\sqrt{6}$; Höhe $= r\sqrt{3}$; $3\sqrt{3} : 4$. **344.** $\frac{2r^3\pi\sqrt{3}}{27}$. **345.** Zylinderhalbmesser $r =$ $= \sqrt[3]{\frac{3V}{20\pi}}$; Zylinderhöhe $= 8 . r$. **346.** Halbmesser des Zylinders $=$ $= \frac{1}{2}r$; Höhe des Zylinders $= r\sqrt{3}$. **347.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$; $(\sqrt{3}+1) : 6$. **348.** $2\varphi = 38^0\,56'\,33''$. **349.** $x = \frac{4}{3}r$. **350.** $\frac{9r^3\pi}{16}$. **351.** Der Winkel zwischen Achse und Seite des Ausschnittes beträgt $153^0\,26'\,6''$; die Höhe der Kugelhaube ist $r\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$, also größer als der Kugelhalbmesser.

352. Der Ausschnitt hat den Öffnungswinkel $53^0\,7'\,48''$; bei ihm ist der Unterschied $r^2\pi(\sqrt{5}-2)$. 353. Die Höhe der Kugelhaube ist $\frac{r}{3}(3-\sqrt{6})$. 354. 4 : 1. 355. Der Abstand des gesuchten Punktes vom Mittelpunkt der Kugel mit dem Halbmesser r ist $c:[1+\sqrt{(r_1:r)^3}]$; 125. 356. Die Abszisse des gesuchten Punktes ist $\frac{1}{2}c\,[(r_1^2-r_2^2):(r_1^2+r_2^2)]$; 7; 45π.

357. $2ab$. 358. $4\sqrt{a^2+b^2}$. 359. In beiden Fällen $\frac{1}{2}ab$. 360. In beiden Fällen $\frac{3ab}{4}\sqrt{3}$. 361. In beiden Fällen $a=b$. 362. Die Achsen der Ellipse sind $\frac{g}{3}\sqrt{3}$ und $\frac{2}{3}h$. 363. 45°, 45°, 90°. 364. Die Halbachsen sind $\frac{1}{2}D\sqrt{2}$ und $\frac{1}{2}d\sqrt{2}$; der Berührungspunkt im ersten Quadranten ist $\left(\frac{1}{2}D,\ \frac{1}{2}d\right)$; 2 : 1. 365. Die Halbachsen sind $\frac{1}{2}m\sqrt{2}$ und $\frac{1}{2}n\sqrt{2}$. 366. $4ab$, $2ab$; 2 : 1. 367. a) $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2},\ \frac{1}{2}b\sqrt{2}\right)$; b) $\left(\frac{a}{3}\sqrt{3},\ \frac{b}{3}\sqrt{6}\right)$; $\left(\frac{2b^4\pi}{27a}\sqrt{3}\right)$. 368. $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2},\ \frac{1}{2}b\sqrt{2}\right)$; $\tan\varphi=\frac{a^2-b^2}{2ab}$; $\varphi=28^0\,4'\,21''$. 369. $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2},\ \frac{1}{2}b\sqrt{2}\right)$; $\tan\varphi=\frac{2ab}{a^2-b^2}$; $61^0\,55'\,39''$. 370. Seiten des Rechteckes $\frac{2a}{3}\sqrt{6}$ und $\frac{2b}{3}\sqrt{3}$. 371. Die Ellipse geht in einen Kreis mit dem Halbmesser $\frac{s}{3}\sqrt{3}$, also $\frac{2}{3}$ der Dreieckshöhe über. 372. $F_e=\frac{hg}{9}\sqrt{3}\pi$; $\frac{s^2\pi}{6}$; $F_e:F_d=\pi\sqrt{3}:9$. 373. Die Grundlinie ist $2a\sqrt{3}$, die Höhe $3b$; ein kleinstes gleichseitiges Dreieck ist nur möglich, wenn $a=b$ (Kreis). 374. a, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+3b^2}$; $\frac{3ab}{2}\sqrt{3}$; $\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$. 375. $2x=\frac{2a^2}{a+b}$; $z=b$. 376. $r^2=\frac{a^2+b^2}{2}$. 377. $l=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$. 378. $V_1:V_2=a:b$. 379. $\frac{2ab^2\pi\sqrt{3}}{27}$. 380. $V_1:V_2=b:a$. 381. $f=ab\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; man ziehe den Durchmesser parallel zu jener Sehne, die

die beiden Scheitel verbindet. **382.** $\frac{4a^2 b \pi\sqrt{3}}{9}$. **383.** Jenes, das parallel zu den die Scheitel verbindenden Sehnen verläuft. **384.** $189\frac{1}{3}$. **385.** 4π. **386.** $\left(\frac{a^2 c}{b^2}, \pm\frac{b}{e^2}\sqrt{a^2c^2 - e^4}\right)$. **387.** $\frac{a}{e}\sqrt{c^2 + e^2}$; 15·6. **388.** $2ab$. **389.** $\triangle = \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{2ap}{3}}$. **390.** Die Parallele geht durch die Höhenmitte; das größte Parabelsegment ist gleich $\frac{gh}{6}$, also gleich ein Drittel des Dreieckinhaltes. **391.** Es ergibt sich $\eta = \frac{y_1 + y_2}{2}$ und $2f = x_1 y_2 - x_2 y_1$. **392.** Im Punkte $\left(\frac{1}{2}a, 0\right)$. **393.** Min. für $\left(\frac{16p}{3}, 0\right)$, Max. für $(4p, 0)$. **394.** a) Koordinaten der beiden auf der Parabel liegenden Eckpunkte $\left(\frac{2a}{3}, \pm\sqrt{\frac{2ap}{3}}\right)$; b) die zur gegebenen Sehne parallele Rechteckseite ist im Abstande $2p$ vom Scheitel zu legen und hat die Länge $4p$. **395.** $y = \sqrt{\frac{3}{a}}x + \sqrt{\frac{a}{3}}$; $y = x + 1$. **396.** Das Rechteck mit der Grundlinie $\frac{p(5-\sqrt{5})}{10}$ und der Höhe $\frac{2p\sqrt[4]{125}}{5}$. **397.** $x_0 = \frac{x_1}{3}$; $y_0 = \frac{y_1}{3}\sqrt{3}$. **398.** $\frac{16a^3}{27p}$; $\frac{a}{3}$. **399.** Der Scheitel der Parabel muß in $\frac{1}{4}$ der Kegelseite, gerechnet von der Kegelspitze aus, liegen; $f = \frac{rs}{2}\sqrt{3}$. **400.** $\frac{r\sqrt{2}}{4}$; $\frac{2}{3}r^2$. **401.** $r^2\sqrt{3}$. **402.** $f = \frac{2}{3}ab$. Beide Parabeln gehen durch denselben Punkt $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}, \frac{1}{2}b\sqrt{2}\right)$ der Ellipse, bzw. durch zwei Spiegelpunkte im 4. und 2. Quadranten. Beide Parabelsegmente sind inhaltsgleich $\left(=\frac{2}{3}ab\right)$, also gleich $\frac{1}{3}$ des durch die vier Ellipsenscheitel bestimmten Rhombus.

403. Nach 18 Sekunden; 5 m; P_1 um 4 m über den Scheitel hinaus, P_2 3 m vor dem Scheitel. **404.** $t = \frac{ac_1 + bc_2}{c_2^2 + c_1^2}$; $D = 9{\cdot}6$ m; $t = \frac{1}{c_1^2 + c_2^2}$ $[ac_1 + bc_2 \pm \sqrt{d^2(c_1^2 + c_2^2) - (ac_2 - bc_1)^2}]$; der kleinste Abstand ist

nach $t = \frac{a c_1 + b c_2}{c_1^2 + c_2^2}$ (3·28) Sek. vorhanden; er beträgt im besonderen Falle 9·6 m. — Der Abstand d ist nach der eingangs angegebenen Formel nach 3 und 3·56 Sek. vorhanden. **405.** $x = \frac{a - b}{2c}$; 5 Sek.; 40 m, 40 m, $40\sqrt{2}$ m. **406.** $x = \frac{m(2c_1 + c_2)}{2(c_1^2 + c_1 c_2 + c_2^2)}$, (0·7) Stunden (= 42 Minuten). 22·65 km; 24 km; 21 km. **407a.** $t = \frac{c}{g}$; $s = \frac{c^2}{2g}$. **407b.** 45°. **408.** 45°. **409.** Die Tragfähigkeit ist proportional dem Produkte $b \cdot h^2$, worin b die Breite und h die Höhe des rechteckigen Querschnittes bedeutet. Der größte Wert von T ergibt sich für $b = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$ und $h = \frac{2r\sqrt{6}}{3}$. **410.** $H = \frac{4}{3}h$. **411.** Es muß $l = b = \sqrt{f}$ sein. **412.** $x = y = \frac{1}{6}u$. **413.** $x = \frac{1}{2}\sqrt{2f}$; $y = \frac{1}{2}\sqrt{2f}$. **414.** Ist x der Abstand von der Lichtquelle I_2 und $(a - x)$ jener von der Lichtquelle I_1, so ist die Beleuchtungsstärke B ausgedrückt durch $\frac{I_1}{(a-x)^2} + \frac{I_2}{x^2}$; daraus folgt $x = a : (\sqrt[3]{I_1 : I_2} + 1)$ von I_2 entfernt; 30 cm von I_2, 40 cm von I_1 entfernt. **415.** Ist x die gesuchte Höhe der Lichtquelle, y die Entfernung der Lichtquelle von der beleuchteten Stelle der Tischplatte und α der Neigungswinkel des dort auffallenden Lichtstrahles, so ist die daselbst vorhandene Beleuchtungsstärke gegeben durch $i = \frac{I \sin \alpha}{y^2}$; daraus ergibt sich $x = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. **418.** Wenn man je x Elemente parallel und die sich so ergebenden (n : x) Gruppen hintereinander schaltet, ergibt sich das Maximum der Stromstärke, wenn der innere Widerstand r_i dem äußeren r_a gleich ist. **419.** In zwei gleichgroße Stücke von der Länge $\frac{1}{2}l$.

B. Integralrechnung.

I. Das unbestimmte Integral.

422. $\frac{x^5}{5} + C$. **423.** $\frac{5x^8}{8} + C$. **424.** $-\frac{1}{x} + C$. **425.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$.

426. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + C$. **427.** $5\sqrt[5]{x^2} + C$. **428.** $\frac{1}{3}x^4 + C$. **429.** $\frac{3m}{2}x^2 + C$. **430.** $5 \sin x + C$. **431.** $-m \cos x + C$. **432.** $a^2 \operatorname{tang} x + C$. **433.** $-5m^2 \operatorname{cotang} x + C$. **434.** $15\sqrt[3]{x} + \frac{18}{11}\sqrt[6]{x^{11}} + C$. **435.** $a^2 t^3 + C$. **436.** $\frac{ax^3}{3} - \frac{bx^2}{2} + cx + C$. **437.** $m \sin x + n \cos x + C$. **438.** $\cos(\alpha - x) + C$. **439.** $\sin(x - \alpha) + C$.

II. Das bestimmte Integral.

442. 16. **443.** 320. **444.** 1875. **445.** 14. **446.** $8\frac{7}{16}$. **447.** 16. **448.** $m + \frac{1}{2}n$. **449.** $\frac{3}{4}m^4$. **450.** 15295·5. **451.** 22. **452.** $\frac{3}{8}$. **453.** $\frac{1}{2}$. **454.** 1.

III. Anwendungen in der Geometrie.

a) Flächenberechnungen (Quadraturen).

456. 28. **457.** 42. **459.** $\frac{4}{3}(x_2 y_2 - x_1 y_1)$.

b) Raumberechnungen (Kubaturen).

466. $\frac{r^2 \pi h}{3}$. **467.** $\frac{h\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$. **468.** $a^2 p \pi$, worin a die Höhe des Paraboloides ist. (In welcher Beziehung steht daher das Paraboloid zum umschriebenen Rotationszylinder?) **469.** In $\frac{1}{3}$ der Höhe, gerechnet von der Basis aus; 2 : 9. **470.** $p = \frac{r}{3}\sqrt{3}$; 1 : 2 : 3. **471.** b : a. **472.** Die Höhe des Zylinders ist gleich $\frac{1}{2}h$; 1 : 2. **473.** Beide gleich $\frac{4p\pi}{9} \cdot h^2$, also $\frac{4}{9}$ vom Inhalt des ganzen Rotationsparaboloides. **474.** $\frac{4r^3\pi}{3}$. **475.** $\frac{h^2\pi}{3}(3r - h)$. **476.** $\frac{h\pi}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$. **477.** $\frac{r^2\pi h}{3}$. **478.** $\frac{4}{3}ab^2\pi$. **479.** Es ergibt sich $a = b = \frac{1}{2}r\sqrt{6}$, somit eine Kugel mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}r\sqrt{6}$. **480.**

UB WIEN
+AM50602802

Die Halbachsen sind $\frac{D\sqrt{3}}{3}$ und $\frac{d\sqrt{6}}{3}$, der Rauminhalt $\frac{8\,D\,d^2\,\pi\sqrt{3}}{27}$.

481. $\frac{4}{3}\,a^2\,b\,\pi$. **482.** $V = \frac{r^2\,\pi\,h}{6}$ = Hälfte des Kegelvolumens. **483.** $\frac{b^2\,h^2\,\pi}{3\,a^2}(3a + h)$. **484.** $\frac{2\,a^2\,\pi\,h\,(3\,b^2 + h^2)}{3\,b^2}$.

c) Längenberechnungen (Rektifikationen).

d) Oberflächenberechnungen (Komplanationen).

489. $r\,\pi\,s$. **490.** $(R + r)\,\pi\,s$. **491.** $4\,r^2\,\pi$. **492.** $2\,r\,\pi\,h$. **493.** $2\,r\,\pi\,h$.

IV. Anwendungen in der Physik.

497. $\frac{Ml^2}{12}$. **498.** $\frac{Ma^2}{3}$. **499.** $\frac{M}{12}(l^2 + b^2)$ oder $\frac{M\,d^2}{12}$, worin d die Diagonale des Rechteckes ist. **500.** $\frac{M\,g^2}{24}$. **501.** $1 : 1 : 2$. **502.** Mr^2; für einen Kreiszylindermantel vom Halbmesser r. **503.** $\frac{Mr^2}{2}$; für einen Rotationszylinder vom Halbmesser r. **504.** $\frac{2\,Mr^2}{5}$.

Universitätsbibliothek Wien

books2ebooks.eu

www.books2ebooks.eu

eBooks from your library by

eBooks on Demand

digitised by

UNIVERSITÄTS BIBLIOTHEK