# Der Parallelismus

der Lehren von den

# Integralen Fourier's

und den

## geschlossenen Integrationen

als das

Hauptergebniss einer von den herrschenden Ansichten abweichenden

## Theorie der bestimmten Integrale

dargestellt von

**Dr. Hermann Frombeck.**

**WIEN.**

Druck und Commissions-Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1873.

# Inaugural - Dissertation.

Die vorliegende Abhandlung enthält die Ausführung einer mehrfach verzweigten Theorie, deren Anfänge in der mathematischen Literatur bereits hie und da erkennbar sind. Diese Theorie fusst auf einer veränderten Discussion zweier Kategorien bestimmter Integrale, nämlich jener mit periodischem und discontinuirlichem Differentialfactor, und zwar betrifft die Veränderung und theilweise Neuerung lediglich die Bedingungen, unter welchen man heutzutage solche Integralformeln in der Rechnung zulässt. Es konnte nur das Resultat der gewissenhaftesten Prüfung sein, den strenge begrenzten Bereich ihrer Geltung aufzuheben, ja unbeschränkt zu lassen; aber auch die grösste Sorgfalt erscheint in einer so wichtigen Frage nicht ohne Bedenken. Wenn die wenigen bisherigen Gegenäusserungen vereinzelt und wirkungslos blieben, so liegt der Grund hiervon darin, dass diese Aeusserungen allzusehr die methodische Seite der Frage in's Auge fassten und zu geringes Gewicht auf die principielle, constitutive Bedeutung derselben legten. Die allgemeine Theorie des bestimmten Integrales ist in ihrer jetzigen Gestalt eine geschlossene und widerspruchsfreie, und führt auf jene Giltigkeitsbedingungen in strenger Gedankenfolge. Hieraus geht schon hervor, dass jede einen speciellen Fall betreffende gegentheilige Ansicht die allgemeine Theorie, die sogenannten „Principien" der bestimmten Integralrechnung selbst in Frage stellt. Diese Principien vor allen zu prüfen und richtig zu stellen, müsste also die Aufgabe einer Abhandlung sein, welche es unternimmt, einen selbstständigen Gedankenkreis zu entwickeln und in seinen Consequenzen zu verfolgen. Sie hätte dabei ein leichtes und ein schweres Geschäft; jenes würde darin bestehen, darzuthun, dass die Grundvoraussetzungen jeder und also auch dieser Theorie unbeweisbar und unbewiesen sind; die schwierige Forderung aber ist es nun, die Nothwendigkeit begreiflich zu machen, die bisherigen hypothetischen Grundlagen als falsche zu verlassen und durch die richtigen zu ersetzen. Der Mangel einer principiellen Begründung und Sicherstellung der bestimmten Integralrechnung bei aller Genauigkeit und Widerspruchslosigkeit wird wohl allgemein gefühlt; aber welcher Weg steht offen, um diesen Mangel zu beseitigen? Der directe ist es nicht, denn abgesehen von der sonstigen Beschaffenheit des Problemes, welches die schärfsten und schwierigsten Distinctionen nothwendig macht und bei der aus-schliesslichen Beschäftigung mit dem Differentialbegriffe so wenig Evidenz besitzt, muss derselbe von Behauptungen ausgehen, welche nicht mehr Wahrscheinlichkeit beanspruchen dürfen, als die Hypothesen der bisherigen Theorie. Die hypothetische Fundirung der bestimmten Integralrechnung in eine principielle umzuwandeln, ähnlich wie sie andere mathematische Disciplinen schon lange besitzen, hiezu bleibt nur ein Zugang frei: der indirecte, leicht controlirbare, sicher einleuchtende Nachweis von der Unrichtigkeit solcher specieller Resultate, welche streng aus der bisherigen Theorie abgeleitet sind. Die vorliegende Abhandlung betritt diese Bahn und zwar liefert sie den bezeichneten Nachweis der Unrichtigkeit durch sofortige Feststellung der richtigen speciellen Resultate. Von den letzteren aus muss die Definition des bestimmten Integrales selbst der Prüfung unterworfen werden; soll zwischen ihnen kein Widerspruch bestehen, so muss einmal an der ursprünglichen Definition festgehalten und zweitens die bisher willkürliche Natur des Differentialbegriffes durch eine Charakteristik der Willkürlosigkeit ersetzt werden. Es ist hier der Ort, der Antithese in den Voraussetzungen jene schärfste Form zu verleihen, wie sie nothwendigerweise existirt; es erhellt hieraus, warum die Haltung der folgenden Ausführungen nicht polemisch ist. Wir fügen die Hoffnung hinzu, dass ihr positiver Inhalt im Stande sei, der neuen Anschauung in ihrer wahren Ausdehnung ebenso sicher auch Freunde zu erwerben, wie der negative die bisherige beseitigt und beseitigen muss.

Der indirecte Weg, welcher dem Vorhergehenden zufolge die vorliegende Abhandlung im Anfange charakterisirt, stützt sich auf Randintegrationen, welchen complexe Idealzahlen mit veränderlichen Coefficienten zu Grunde liegen. Es wird daher eine längere Einleitung über die analytischen Eigenschaften solcher Zahlen, deren Einführung in die Integralrechnung neu ist, vorausgeschickt werden. Die folgenden Betrachtungen erstreben in dieser Hinsicht eine Vertiefung der in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie (Nov.-Heft 1871) enthaltenen Abhandlung: „Ein Beitrag zur Theorie der Functionen complexer Variabeln“ in doppeltem Sinne: es treten an die Stelle der viergliedrigen complexen Zahl $a + ib + i'c + ii'd$ die $n$fache

$$\sigma_p = a_0 + \alpha_p^1 a_1 + \alpha_p^2 a_2 + \ldots + \alpha_p^{n-1} a_{n-1},$$

wo $\alpha_p$ alle Wurzeln darstellt der Gleichungen $x^n - 1 = 0$ und $x^n + 1 = 0$, und die Idealzahl

$$\tau_p = \alpha_0^p a_0 + \alpha_1^p a_1 + \alpha_2^p a_2 + \ldots + \alpha_{n-1}^p a_{n-1},$$

welche aus jener — einer Erfindung Eulers, durch Vertauschung von Indices und Exponenten hervorgeht. Diese Vertauschung wird die nähere Untersuchung als durchgreifenden Rollenwechsel erkennen lassen; mit andern Worten, es besitzen die Euler'sche Zahl $\sigma_p$ und die Gauss'sche $\tau_p$ alle Eigenschaften gemeinsam, die als bedingungslose Identitäten sich darstellen. Die Argumente $a_0 \,.\,.\, a_{n-1}$ sollen reell vorausgesetzt, übrigens beliebig abhängig veränderlich gedacht werden. Wir bezeichnen es gerade als unsere Hauptaufgabe:

„Die allgemeinen Formen der Abhängigkeit zweier gleichartiger Systeme $\sigma$ und $\tau$ untereinander festzusetzen“ und hoffen, dass ausser jener Wechselseitigkeit der beiden gegenübergestellten Zahlbegriffe die gefällige Benützung der Determinantentheorie und die methodische Bedeutung der Resultate im Stande sein werden, für jene Aufgabe ein selbstständiges Interesse zu erregen.

Pag. 2 der angeführten Abhandlung finden sich die Bedingungen einer Abhängigkeit $F$ zweier Systeme $f$, ausgedrückt in Argumenten $x, y, z \ldots \varphi, \psi, \chi \ldots$ In correspondirenden Zeichen $x_0, x_1 \ldots \xi_0, \xi_1 \ldots$ lautet darnach die Differentialgleichung des Integrals

$$f(\xi_0, \xi_1 \ldots \xi_{n-1}) = F[f(x_0, x_1 \ldots x_{n-1})] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

bezüglich $k = 0, 1, \ldots n-1$ $n$fach bestimmt

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_0} \cdot \frac{\partial \xi_0}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \xi_{n-1}} \cdot \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_k} = \frac{dF}{df} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad . \quad b)$$

Genügen irgend welche $\xi$ diesen willkürlichen Bildungen, so sind die aus $\xi$ isolirten inversen Functionen $x$ die Lösungen der inversen Abhängigkeit $F_1$ der beiden Systeme $f$. Man gelangt zu demselben Resultat durch Auflösung der $n$ Gleichungen $b)$ nach den linear und symmetrisch in ihnen auftretenden Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial \xi_k}$; denn die Elimination der $n-1$ übrigen Quotienten liefert ein mit der inversen Differentialgleichung $b)$, mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial x_0}{\partial \xi_k} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \xi_k} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_k} = \frac{df}{dF} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi_k}$$

congruirendes Ergebnis. Indem dieses sich, unter $R$ die Functionaldeterminante der $\xi$ nach $x$ verstanden, deren Unterdeterminante $i$ter Zeile, $k$ter Colonne $r_{ik}$ sein möge, als

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \cdot \frac{r_{k0}}{R} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{r_{k1}}{R} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{r_{k,\,n-1}}{R} = \frac{df}{dF} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi_k}$$

darstellt, entspringt die Identität

$$r_{ik} = R \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i}.$$

Der bekannte Ausdruck für die Unterdeterminanten unabhängiger Functionen gilt demnach auch für Functionen, zwischen welchen die Gleichungen $a)$ und $b)$ bestehen. Jene Unabhängigkeit schliesst blos ein gegenseitiges Sichbegreifen der Functionen aus; wir müssen die entsprechende Formel

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = o$$

als den einzigen directen Beweisgrund der Identität auch für unsere Functionen $\xi$ und $x$ in Anspruch nehmen. Es fliesst aus dieser Folgerung, deren explicite Form ist

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial x_0}{\partial \xi_i}+\frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}+\ldots+\frac{\partial \xi_i}{\partial x_{n-1}}\cdot\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}\quad.\;.\;.\;.\;.\;c)$$
$$=\frac{\partial x_i}{\partial \xi_0}\cdot\frac{\partial \xi_0}{\partial x_i}+\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial \xi_1}{\partial x_i}+\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial \xi_{n-1}}\cdot\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_i}=1,$$
$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial x_0}{\partial \xi_k}+\frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial \xi_k}+\ldots+\frac{\partial \xi_i}{\partial x_{n-1}}\cdot\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_k}$$
$$=\frac{\partial x_i}{\partial \xi_0}\cdot\frac{\partial \xi_0}{\partial x_k}+\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial \xi_1}{\partial x_k}+\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial \xi_{n-1}}\cdot\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_k}=0,$$

die weitere Identität der Functionaldeterminante mit der reciproken inversen; die obige indirecte — im übrigen als allgemein anzusehende — Ableitung gelangt zu diesem Ziele von ihrem ersten Resultate aus, indem sie aus den Unterdeterminanten die adjungirte Determinante bildet und zur Gleichheit dieser letzteren und der mit $R^n$ multiplicirten inversen Determinante fortgeht.

Die Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial \xi_k}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ mögen nun mit $D_k$ und $D'_k$ der Abkürzung wegen bezeichnet werden; dann ist

$$D_0\frac{\partial \xi_0}{\partial x_k}+D_1\frac{\partial \xi_1}{\partial x_k}+\ldots+D_{n-1}\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_k}=D'_k\,\frac{dF}{df},$$
$$D'_0\frac{\partial x_0}{\partial \xi_k}+D'_1\frac{\partial x_1}{\partial \xi_k}+\ldots+D'_{n-1}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_k}=D_k\,\frac{df}{dF},$$

und durch Multiplication

$$\left(D_0\frac{\partial \xi_0}{\partial x_k}+D_1\frac{\partial \xi_1}{\partial x_k}+\ldots+D_{n-1}\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_k}\right)\times$$
$$\left(D'_0\frac{\partial x_0}{\partial \xi_k}+D'_1\frac{\partial x_1}{\partial \xi_k}+\ldots+D'_{n-1}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_k}\right)=D_k\,D'_k\quad.\;.\;d)$$

Auf die gekürzten Ausdrücke $D_k$ und $D'_k$ richten wir jetzt unser Augenmerk. Wir fügen an das $f$, welches sie enthalten, einen Index $p$, der die Zahlen 0 bis $n-1$ vertreten soll, und fordern, dass die allgemeinere Gleichung

$$D_{p0}\frac{\partial \xi_0}{\partial x_k}+D_{p1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_k}+\ldots+D_{p,\,n-1}\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_k}=D'_{pk}\frac{dF}{df_p}$$

erfüllt werde, ohne die Natur der blos' von $x$ abhängigen Ausdrücke $\xi$ zu verändern. Die umgekehrten Formeln

$$D'_{p0}\frac{\partial x_0}{\partial \xi_k}+D'_{p1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_k}+\ldots+D'_{p,\,n-1}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_k}=D_{pk}\frac{df_p}{dF}$$

entspringen dann auf die nämliche Weise wie vorhin. Ist, was wir im Verlaufe festhalten wollen, die Functionaldeterminante der Elemente $D_{pk}$ und $D'_{pk}$ von Null verschieden, so führt unsere Forderung zur eindeutigen Bestimmung der $\xi$ und $x$, und zwar liefert die gewöhnliche Eliminationsmethode in

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}=\frac{dF}{df_0}\cdot\frac{\partial \xi_i}{\partial f_0}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial x_k}+\frac{dF}{df_1}\cdot\frac{\partial \xi_i}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_k}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{dF}{df_{n-1}}\cdot\frac{\partial \xi_i}{\partial f_{n-1}}\cdot\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_k},\quad.\;.\;.\;.\;.\;e)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = \frac{d f_0}{d F} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial f_0} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \xi_k} + \frac{d f_1}{d F} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \xi_k} + \cdot$$

$$\cdot + \frac{d f_{n-1}}{d F} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial f_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \xi_k}$$

partielle Differentialquotienten nach einer einzigen independent Variabeln. Ihre weitere zweistufige Reduction bildet unsere nächste eine doppelte Lösung verstattende Aufgabe.

Man erkennt deutlich den Uebelstand, welcher in der verschiedenen Bedeutung der Differentialquotienten $D$ und $D'$ bei übereinstimmender Bildungsweise gelegen ist. Die Gleichungen $e)$ sind bei dieser Verschiedenheit nicht unmittelbar zu integriren, Gleichung $d)$ kann zur Verwertung ihrer Unabhängigkeit bezüglich $F$ nicht verwendet werden. In der bisherigen Allgemeinheit ist das Problem ein bedeutungsloses, völlig arbiträres. Um $D$ mit $D'$ zu identificiren, müssen sämmtliche $f$ als linear in $x$ und $\xi$ vorausgesetzt werden. Sei in diesem Sinne

$$f_p = a_{p0}\, x_0 + a_{p1}\, x_1 + \cdot \cdot + a_{p,\, n-1}\, x_{n-1},$$

also

$$D_{pk} = a_{pk} = D'_{pk};$$

dann lautet das System Formeln $a)$ bis $e)$

$$F(a_{p0}\, x_0 + a_{p1}\, x_1 + \cdot \cdot + a_{p,\, n-1}\, x_{n-1}) = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad a')$$

$$a_{p0}\, \xi_0 + a_{p1}\, \xi_1 + \cdot \cdot + a_{p,\, n-1}\, \xi_{n-1},$$

$$a_{p0} \frac{\partial \xi_0}{\partial x_k} + a_{p1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} + \cdot \cdot + a_{p,\, n-1} \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_k} = a_{pk} \frac{dF}{df_p}, \quad \cdot \cdot \qquad b')$$

$$\left(a_{p0} \frac{\partial \xi_0}{\partial x_k} + a_{p1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} + \cdot \cdot + a_{p,\, n-1} \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_k}\right) \times$$

$$\left(a_{p0} \frac{\partial x_0}{\partial \xi_k} + a_{p1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_k} + \cdot \cdot + a_{p,\, n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_k}\right) = a_{pk}^2, \quad \cdot \cdot \cdot \qquad d')$$

$$\varDelta \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = a_{0k}\, \delta_{0i} \frac{dF}{df_0} + a_{1k}\, \delta_{1i} \frac{dF}{df_1} + \cdot \cdot + a_{n-1,\, k}\, \delta_{n-1,\, i} \frac{dF}{df_{n-1}}, \qquad e')$$

$$a_{0k}\, \delta_{0k} + a_{1k}\, \delta_{1k} + \cdot \cdot + a_{n-1,\, k}\, \delta_{n-1,\, k}$$

$$= \varDelta = \Sigma\, (\pm\, a_{00}\, a_{11} \cdot \cdot\, a_{n-1,\, n-1}).$$

Man findet jetzt unter der Bedingung $\varDelta \gtrless 0$ $\xi$ und aus der inversen Differentialformel $x$; wegen

$$a_{pk} \int \frac{dF}{df_p}\, dx_k = \int \frac{dF}{df_p} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial x_k}\, dx_k = F(f_p),$$

$$a_{pk} \int \frac{df_p}{dF}\, d\xi_k = \int \frac{dF_{inv}}{df_p} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \xi_k} \cdot d\xi_k = F_{inv}(f_p)$$

erhält man

$$\varDelta\, \xi_i = F(f_0)\, \delta_{0i} + F(f_1)\, \delta_{1i} + \cdot \cdot + F(f_{n-1})\, \delta_{n-1,\, i}, \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad e')$$

$$\varDelta x_i = F_{inv}(f_0)\, \delta_{0i} + F_{inv}(f_1)\, \delta_{1i} + \cdot \cdot + F_{inv}(f_{n-1})\, \delta_{n-1,\, i};$$

es sind dies die nämlichen Bestimmungen, welche die Auflösung der $n$ Gleichungen $a')$ nach $\xi$ und $x$ unmittelbar liefert. Wenn hiemit die erste unserer vorigen Forderungen auch erfüllt ist, so erscheint dagegen die Aufstellung der Differentialgleichung für die Abhängigkeit linearer Systeme jetzt an und für sich überflüssig — hier zeigt die Gleichung $d'$) die Bedeutungslosigkeit dieser Abhängigkeit selbst ohne nähere Definitionen der Substitutionscoefficienten $a_{pk}$.

Die hier fühlbare Lücke ergänzen nun in ausgezeichneter Weise die Aggregate der Coefficienten in den Eingangs erwähnten Zahlen $\sigma$ und $\tau$, die hinfort ausschliesslich die Stelle der Functionen $f$ vertreten sollen; durch beliebige Multiplication und Division der Coefficienten $\alpha_p^k$ und $\alpha_k^p$ kann ihr Bereich niemals überschritten werden, die unendliche Reihe, welche sie darstellen, wird dadurch verrückt, nicht verändert. Indem wir die Wurzeln der Gleichungen $x^n \pm 1 = 0$ immer in dem Bilde unendlicher Reihen uns gegenwärtig halten, heben wir zwei Doppelsätze über sie hervor, welche der nachfolgenden Ausführung — Discussion der Differentialgleichungen $b'$), $c'$) und $d'$) zu Stützen dienen und als solche im voraus zu begründen sind.

*A.* Das Resultat der Division des Aggregates $[1,\ \alpha_p,\ \alpha_p^2,\ ..\ \alpha_p^{n-1}]$ durch $\alpha_p^k$ ist eine Permutation des Dividenden, welche durch $k$ cyclische Vertauschungen derart gebildet wird, dass die $k$ letzten Glieder mit positivem oder negativem Zeichen an den Anfang rücken. Denn es ist $\alpha^{n-r} = \varepsilon\alpha^{-r}$, wo $\varepsilon = \pm 1$, je nachdem $x^n \mp 1 = 0$, daher

$$[1,\ \alpha_p,\ \alpha_p^2\ ..\ \alpha_p^{n-1}] : \alpha_p^k = [\varepsilon\,\alpha_p^{n-k}\ ..\ \varepsilon\,\alpha_p^{n-1},\ 1,\ \alpha_p\ ..\ \alpha_p^{n-k-1}].$$

Das Resultat der Division des Aggregates $[\alpha_0^p,\ \alpha_1^p,\ \alpha_2^p\ ..\ \alpha_{n-1}^p]$ durch $\alpha_k^p$ ist eine Permutation der Wurzeln von $x^n - 1 = 0$, und zwar, wenn $\alpha_1^p = e^{\frac{2\pi ip}{n}}\alpha_0^p$, der Reihe von 1 an bis $e^{\frac{2\overline{n-1}\pi ip}{n}}$, so dass, wie vorhin, die $k$ letzten Glieder dieser Reihe ohne Zeichenänderung an den Anfang treten. Der Beweis dieser Behauptung liegt in der Gleichung

$$e^{-\frac{(n+r)\pi i}{n}} = e^{+\frac{(n-r)\pi i}{n}}.$$

Nimmt man $k = 0$, so entspringt die obige Reihe $1,\ ..\ e^{\frac{2(n-1)\pi ip}{n}}$ selbst.

Es ist eine charakteristische Eigenschaft dieser Reihe, dass sie ebenso gut als Aggregat von Coefficienten $\sigma$ als von Coefficienten $\tau$ angesehen werden kann, oder dass, wenn diese Coefficienten $\beta_p^k$ und $\beta_k^p$ genannt werden, für sie die Gleichung gilt

$$[1,\ \beta_p,\ \beta_p^2\ ..\ \beta_p^{n-1}] = [\beta_0^p,\ \beta_1^p,\ \beta_2^p\ ..\ \beta_{n-1}^p].$$

Zufolge dieser Eigenschaft unterscheiden sich die Zahlen $\sigma_\beta$ von den Zahlen $\tau$ nur durch einen Factor $\alpha_0^p$, während die Zahlen $\sigma_\gamma$, wo $\gamma$

die Wurzeln der Gleichung $x^n + 1 = 0$ darstellt, vereinzelt stehen. Es ist nur der Factor $\alpha_0^p$, der an $\sigma_\beta$ herantritt, und die Verschiedenheit eines Operirens mit Indices und Exponenten, welche eine blosse Tautologie verhindern. Nicht ebenso aber wie für die theoretische Betrachtung, besteht Identität der Fälle $\sigma_\beta$ und $\tau_\alpha$ auch für die praktische Anwendung. Es wird sich in der Folge von selbst herausstellen müssen, ob alle, oder welche Zahlen von charakteristischen Consequenzen begleitet sind; vollständige Deckung besteht, wie bemerkt, nur unter den Zahlen $\sigma_\beta$ und $\tau_\beta$. Indem wir den Parallelismus zwischen Indices und Exponenten aufrecht erhalten, bilden diese Zahlen das Verbindungsglied zwischen den Extremen $\sigma_\gamma$ und $\tau_\gamma$; man wird am Schlusse erkennen, dass sie neben dieser vermittelnden Rolle eine selbstständige Bedeutung nicht besitzen.

*B.* Man kann dem System

$$x_0 + \alpha_p x_1 + \ldots + \alpha_p^{n-1} x_{n-1} = 0$$

nur durch die Annahmen

$$x_\sigma = x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$$

genügen; denn die Determinante des Systems ist als Product aller Wurzel-Differenzen von Null verschieden. Das gleiche gilt vom System

$$\alpha_0^p x_0 + \alpha_1^p x_1 + \ldots + \alpha_{n-1}^p x_{n-1} = 0,$$

dessen Determinante mit der ebenerwähnten $\sigma$-Determinante identisch ist.

Diese Sätze gewinnen Bedeutung nur durch die Sätze *A.* und *e*), denen zufolge jede Gleichung mit dem Index oder Exponent $p$ als Systeme *B.* darstellbar und damit in je $n$-Theilresultate zerlegbar ist. Die Integralrechnung ist die ergiebige Quelle solcher Beziehungen, deren Voraussetzungen die Allgemeinheit der Einführung des Wurzelsymbols meist nicht alterirt. Die Differentialgleichungen $b' - d'$) bieten die Gelegenheit, einige die Anwendung vorbereitende Sätze in zwangloser Weise zu entwickeln.

Wir betonen den Umstand, dass die linken Seiten der Gleichung *b*) durch $\alpha_p^k$, resp. $\alpha_k^p$ dividirt für alle $k$ denselben Wert behalten. Indem wir uns auf die Functionen $\xi$ beschränken, da die Functionen $x$ in ihrem Verhalten von $\xi$ nicht verschieden sind, dafür aber für die complexen $\tau$ die Zeichen $\eta$ und $y$ einführen, können wir gemäss *B.* die Bedingungen *b*) durch die folgenden, der Anzahl nach gleichen, aber einfacheren ersetzen

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}, \quad \ldots \quad f)$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_0} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = \ldots = \varepsilon \frac{\partial \xi_0}{\partial x_{n-1}},$$

$$\begin{matrix} . & . & . \\ . & . & . \end{matrix}$$

$$\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_0} = \varepsilon \frac{\partial \xi_0}{\partial x_1} = \ldots = \varepsilon \frac{\partial \xi_{n-2}}{\partial x_{n-1}}$$

für

$$\alpha_p^0 \frac{\partial \xi_0}{\partial x_k} + \alpha_p^1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} + \ldots + \alpha_p^{n-1} \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_k} = \alpha_p^k \frac{dF}{d\sigma_p};$$

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial y_0} = \frac{\partial \eta_1}{\partial y_1} = \ldots = \frac{\partial \eta_{n-1}}{\partial y_{n-1}}, \quad \ldots \quad g)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial y_0} = \frac{\partial \eta_2}{\partial y_1} = \ldots = \frac{\partial \eta_0}{\partial y_{n-1}},$$

$$\begin{matrix} . & . & . \\ . & . & . \end{matrix}$$

$$\frac{\partial \eta_{n-1}}{\partial y_0} = \frac{\partial \eta_0}{\partial y_1} = \ldots = \frac{\partial \eta_{n-2}}{\partial y_{n-1}}$$

für

$$\alpha_0^p \frac{\partial \eta_0}{\partial y_k} + \alpha_1^p \frac{\partial \eta_1}{\partial y_k} + \ldots + \alpha_{n-1}^p \frac{\partial \eta_{n-1}}{\partial y_k} = \alpha_k^p \frac{dF}{d\tau_p}.$$

Diese Gleichungen reihen sich der Gleichung $d'$) an, die ebenfalls von $F$ unabhängig ist; sie ergänzen die letztere, indem sie erlauben, die Differentialquotienten aller $\xi$ und $\eta$ nach einer Variabeln durch die Differentialquotienten einer Function nach allen Variabeln zu ersetzen. Es besteht Reciprocität zwischen den Indices der dependent und independent Variabeln, wie zwischen diesen selbst. Die Functionaldeterminanten der $\xi$ nach $x$ und $\eta$ nach $y$ enthalten nur $n$ von einander verschiedene Elemente, wie die Functionaldeterminanten der $\sigma$ und $\tau$ nach $x$ und $y$ $n$ verschiedene Wurzeln und die $\sigma$ $\tau$ selbst $n$ verschiedene $x$ und $y$. Um weitere Beziehungen zwischen jenen Functionaldeterminanten und den an die Zahlen $\sigma$ und $\tau$ geknüpften Begriffen aufzufinden, erinnern wir an die Gleichung, deren Wurzeln die verschiedenen durch Specialisirung des $p$ hervorgehenden Zahlen $\sigma$ sind. Diese Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_0 - z & x_1 & \ldots x_{n-1} \\ \varepsilon x_{n-1} & x_0 - z & \ldots x_{n-2} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \varepsilon x_1 & \varepsilon x_2 & \ldots x_0 - z \end{vmatrix} = 0$$

ist ein specieller Fall der folgenden

$$\left|\begin{array}{cccccccc} x_0 & x_1 & \ldots & x_p - z & & \ldots\ldots & & x_{n-1} \\ \varepsilon x_{n-1} & x_0 & \ldots & x_{p-1} & x_p - z & \ldots & & x_{n-2} \\ \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ \varepsilon(x_p - z) & \varepsilon x_{p+1} & \ldots & \varepsilon x_{n-1} & x_0 & \ldots & & x_{p-1} \\ \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ \varepsilon x_1 & \varepsilon x_2 & \ldots & \varepsilon(x_p - z) & \ldots & \varepsilon x_{n-1} & & x_0 \end{array}\right| = 0, \quad h)$$

deren Wurzeln $\frac{\sigma_0}{\alpha_0^p}, \ldots \frac{\sigma_{n-1}}{\alpha_{n-1}^p}$ durch eine ähnliche Betrachtung wie bei $p = 0$ gefunden werden können. Dass die letzte Gleichung $h)$ auch die Wurzeln $\frac{\tau_0}{\alpha_p^0}, \ldots \frac{\tau_{n-1}}{\alpha_p^{n-1}}$ besitzt, wenn nur alle $\varepsilon$ vorher getilgt werden, geht für Wurzeln $\beta$ aus der Identität der Aggregate $\frac{\sigma_q}{\alpha_q^p}$ und $\frac{\tau_q}{\beta_p^q}$ hervor und wird allgemein auf folgendem Wege erwiesen. Statt mit $\alpha_q^0, \ldots \alpha_q^{n-1}$ multiplicire man sämmtliche Colonnen der Reihe nach mit $\alpha_0^q, \ldots \alpha_{n-1}^q$; dann verschwinden alle Glieder der Summencolonne und damit die Determinante auf Grund des 2. Satzes $A$). Eine wichtige Folgerung hieraus liegt in der Möglichkeit einer doppelten Definition der sogenannten Norm der Complexen $\sigma$ (des letzten mit $(-1)^n$ multiplicirten Coefficienten der entwickelten Gleichung $h$). Es ist diese Norm auch Norm für die Complexen $\tau$ nach den Formeln

$$\frac{\sigma_0\, \sigma_1 \,..\, \sigma_{n-1}}{\alpha_0^p\, \alpha_1^p \,..\, \alpha_{n-1}^p} = \varepsilon^p (-1)^{p(n-1)} \left|\begin{array}{ccc} x_0 & x_1 \,..\, & x_{n-1} \\ \varepsilon x_{n-1} & x_0 \,..\, & x_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon x_1 & \varepsilon x_2 \,..\, & x_0 \end{array}\right|$$

$$= \varepsilon^p (-1)^{p(n-1)} M,$$

$$\frac{\tau_0\, \tau_1 \,..\, \tau_{n-1}}{\alpha_p^0\, \alpha_p^1 \,..\, \alpha_p^{n-1}} = (-1)^{p(n-1)} \left|\begin{array}{ccc} x_0 & x_1 \,..\, & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 \,..\, & x_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1 & x_2 \,..\, & x_0 \end{array}\right|$$

$$= (-1)^{p(n-1)} N,$$

$$\sigma_0\, \sigma_1 \,..\, \sigma_{n-1} = M,$$

$$\tau_0\, \tau_1 \,..\, \tau_{n-1} = (-1)^{p(n-1)} (\alpha_p)^{\frac{n(n-1)}{2}} N = \alpha_0^{\frac{n(n-1)}{2}} N.$$

Eigenschaften der Determinanten $M$ und $N$ werden in der Folge mehrfach auftreten; da eine erschöpfende Untersuchung der beiden wichtigen und merkwürdigen Ausdrücke für sich vom vorgezeichneten Wege zu weit abführen würde, möge hier nur der bezüglich der Variabeln symmetrische Charakter von $N$ gegenüber $M_\gamma$ hervorgehoben werden. Während für

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_{n-1}$$

die Determinante $N$ verschwindet, erhält man

$$M_\gamma = 2^{n-1}\, x^n,$$

$$(1 + \gamma_0 + \gamma_0^2 + \ldots + \gamma_0^{n-1})\,(1 + \gamma_1 + \gamma_1^2 + \ldots + \gamma_1^{n-1})\,.$$
$$.\,(1 + \gamma_{n-1} + \gamma_{n-1}^1 + \ldots + \gamma_{n-1}^{n-1}) = 2^{n-1},$$

wie man auch unmittelbar findet.

Wir wenden uns nach diesen Bemerkungen zu den Gleichungen $c)$, deren Determinante die Functionaldeterminante der $\xi$ nach den $x$ ist. Ihre Auflösung gibt die Unterdeterminanten dieser unmittelbar. Die Systeme $f)$ und $g)$ gewähren dagegen das Mittel, die Functionaldeterminante als Determinante von blos $n$ Elementen darzustellen. Wählen wir dazu die Differentialquotienten der Function $\xi_0$, so sind

$$\frac{\partial x_0}{\partial \xi_0}\cdot\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} + \varepsilon\left[\frac{\partial x_0}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial \xi_0}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial x_0}{\partial \xi_2}\cdot\frac{\partial \xi_0}{\partial x_{n-2}} + \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + \frac{\partial x_0}{\partial \xi_{n-1}}\cdot\frac{\partial \xi_0}{\partial x_1}\right] = 1.$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial \xi_0}\cdot\frac{\partial \xi_0}{\partial x_1} + \frac{\partial x_0}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} + \varepsilon\left[\frac{\partial x_0}{\partial \xi_2}\cdot\frac{\partial \xi_0}{\partial x_{n-1}} + \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + \frac{\partial x_0}{\partial \xi_{n-1}}\cdot\frac{\partial \xi_0}{\partial x_2}\right] = o, \qquad i)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial \xi_0}\cdot\frac{\partial \xi_0}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial x_0}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial \xi_0}{\partial x_{n-2}} + \ldots + \frac{\partial x_0}{\partial \xi_{n-1}}\cdot\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} = 0$$

und die entsprechenden $\eta$, $y$-Formeln ohne $\varepsilon$ Systeme mit der Norm der Complexen $\sigma\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_k}\right)$ und $\tau\left(\frac{\partial \eta_0}{\partial y_k}\right)$ als Determinante, deren Auflösung gleichzeitig die völlige Identität dieser letzteren und jener Functionaldeterminanten darthut. Allgemeiner ist für die Functionen $\xi_i$ und $\eta_i$, zugleich mit Berücksichtigung der Reciprocität der Indices von $\xi$ und $x$, $\eta$ und $y$, ferner der Reciprocität dieser Functionen selbst, wenn

$$R = \frac{\partial(\xi_0 \ldots \xi_{n-1})}{\partial(x_0 \ldots x_{n-1})}, \quad S = \frac{\partial(\eta_0 \ldots \eta_{n-1})}{\partial(y_0 \ldots y_{n-1})},$$

$$R = \varepsilon^i\,(-1)^{i(n-1)}\, M\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\right) = \varepsilon^i\,(-1)^{i(n-1)}\, M\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right)$$

$$= \frac{\sigma_0\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\right)\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}}{\alpha_0^i \quad \alpha_1^i \ldots \alpha_{n-1}^i} = \frac{\sigma_0\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right)\ldots\sigma_{n-1}}{\alpha_0^i \quad \ldots \quad \alpha_{n-1}^i},$$

$$S = (-1)^{i(n-1)} N\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y_k}\right) = (-1)^{i(n-1)} N\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial y_i}\right)$$

$$= \frac{\tau_0\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y_k}\right) \dots \tau_{n-1}}{\alpha_i^0 \dots \dots \alpha_i^{n-1}} = \frac{\tau_0\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial y_i}\right) \dots \tau_{n-1}}{\alpha_i^0 \dots \dots \alpha_i^{n-1}};$$

$$M\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\right) = M\left(\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i}\right) = \sigma_0\left(\frac{\partial x_{i,\,k}}{\partial \xi_{k,\,i}}\right) \dots \sigma_{n-1} = \frac{\varepsilon^i(-1)^{i(n-1)}}{R},$$

$$N\left(\frac{\partial y_i}{\partial \eta_k}\right) = N\left(\frac{\partial y_k}{\partial \eta_i}\right) = \alpha_0^{-\frac{n(n-1)}{2}} \tau_0\left(\frac{\partial y_{i,\,k}}{\partial \eta_{k,\,i}}\right) \dots \tau_{n-1} = \frac{(-1)^{i(n-1)}}{S}.$$

Wir sind jetzt in den Stand gesetzt, von der Gleichung $d'$) den angemessenen Gebrauch zu machen.

Zu diesem Behufe schreiben wir die Gleichung, welche, direct entwickelt, das System $i$) zu Tage fördert, in den Formen

$$\frac{\partial x_0}{\partial \xi_k} + \alpha_p^1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_k} + \dots + \alpha_p^{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_k}$$

$$= \frac{\alpha_p^{2k}}{\frac{\partial \xi_0}{\partial x_k} + \alpha_p^1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} + \dots + \alpha_p^{n-1} \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_k}},$$

$$\alpha_0^p \frac{\partial y_0}{\partial \eta_k} + \alpha_1^p \frac{\partial y_1}{\partial \eta_k} + \dots + \alpha_{n-1}^p \frac{\partial y_{n-1}}{\partial \eta_k}$$

$$= \frac{\alpha_k^{2p}}{\alpha_0^p \frac{\partial \eta_0}{\partial y_k} + \alpha_1^p \frac{\partial \eta_1}{\partial y_k} + \dots + \alpha_{n-1}^p \frac{\partial \eta_{n-1}}{\partial y_k}},$$

und anticipiren das Resultat der Darstellung der reciproken Complexen $\sigma\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\right)$ und $\tau\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y_k}\right)$ als neue Complexe $\sigma(X_i)$ und $\tau(Y_i)$ gemäss der Hauptformel $a$), wo $F = \frac{1}{f}$, mit der Modification, dass die Wurzelreihen des Resultates sind

$$\alpha_p^{-0},\ \varepsilon\alpha_p^{-(n-1)},\ \dots \varepsilon\alpha_p^{-1};\ \alpha_0^{-p},\ \alpha_{n-1}^{-p},\ \dots \alpha_1^{-p},$$

weil diese Modification durch die Anwendung der Sätze $A$. geboten ist. Wir erhalten so nach $B$.

$$X_0 = \frac{\partial x_{2k}}{\partial \xi_k},\ X_1 = \frac{\partial x_{2k+1}}{\partial \xi_k},\ \dots X_{n-2k-1} = \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_k},$$

$$X_{n-2k} = \varepsilon \frac{\partial x_0}{\partial \xi_k},\ \dots X_{n-2} = \varepsilon \frac{\partial x_{2k-2}}{\partial \xi_k},\ X_{n-1} = \varepsilon \frac{\partial x_{2k-1}}{\partial \xi_k};$$

$$Y_0 = \frac{\partial y_{2k}}{\partial \eta_k},\ Y_1 = \frac{\partial y_{2k+1}}{\partial \eta_k},\ \dots Y_{n-2k-1} = \frac{\partial y_{n-1}}{\partial \eta_k},$$

$$Y_{n-2k} = \frac{\partial y_0}{\partial \eta_k},\ Y_{n-2k+1} = \frac{\partial y_1}{\partial \eta_k},\ \dots Y_{n-1} = \frac{\partial y_{2k-1}}{\partial y_k}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = \frac{r_{ki}}{R},\ \frac{\partial y_i}{\partial \eta_k} = \frac{s_{ki}}{S};$$

also

$$\frac{1}{\frac{\partial \xi_0}{\partial x_k} + \alpha_p^1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} + \ldots + \alpha_p^{n-1} \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_k}}$$
$$= \big[r_{k,\,2k} + \varepsilon \alpha_p^{-(n-1)} r_{k,\,2k+1} + \,.\,.\, + \varepsilon \alpha_p^{-(2k+1)} r_{k,\,n-1} + \alpha_p^{-2k} r_{k0} + .$$
$$. + \alpha_p^{-1} r_{k,\,2k-1}\big] \frac{1}{R},$$

$$\frac{1}{\alpha_0^p \frac{\partial \eta_0}{\partial y_k} + \alpha_1^p \frac{\partial \eta_1}{\partial y_k} + \ldots + \alpha_{n-1}^p \frac{\partial \eta_{n-1}}{\partial y_k}}$$
$$= \big[\alpha_0^{-p} s_{k,\,2k} + \alpha_{n-1}^{-p} s_{k,\,2k+1} + \,.\,.\, + \alpha_{2k+1}^{-p} s_{k,\,n-1} + \alpha_{2k}^{-p} s_{k0} + .$$
$$. + \alpha_1^{-p} s_{k,\,2k-1}\big] \frac{1}{S}.$$

In abgekürzter Schreibweise lauten diese Ergebnisse

$$\frac{1}{\sigma\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\right)} = \frac{\sigma(r_{k,\,2k+i})}{\varepsilon^k (-1)^{k(n-1)} M\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\right)}, \quad r_{k,\,2k+n-i} = \varepsilon r_{k,\,2k-i},$$

$$\frac{1}{\tau\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y_k}\right)} = \frac{\alpha_0^{-p}\, \tau_\beta (s_{k,\,2k+i})}{(-1)^{k(n-1)} N\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y_k}\right)}, \quad s_{k,\,2k+n-i} = s_{k,\,2k-i},$$

und enthalten eine zweifache Folgerung.

Einmal sind nach den Gleichungen $f)$ und $g)$ die Differentialquotienten $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}$ und $\frac{\partial \eta_i}{\partial y_k}$ gerade wie $\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial \eta_k}{\partial y_i}$ bei constanten $k$, veränderlichen $i$ von einander unabhängig und können durch beliebige Ausdrücke $a_i$ ersetzt werden. Ist $k = 0$, so sind $r_{0i}$ und $s_{0i}$ die Unterdeterminanten zugleich der Normen $M$ und $N$, also resp. gleich $\mu_{0i}$ und $\nu_{0i}$; hiermit ergibt sich die Lösung des Problemes der Abhängigkeit $F(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sigma,\, \tau}$ in den allgemeinen Bestimmungen

$$\frac{1}{a_0 + \alpha_p^1 a_1 + \,.\,.\, + \alpha_p^{n-1} a_{n-1}} = \frac{\Sigma\, \alpha_p^{-(n-i)} \frac{\partial M}{\partial a_{n-i}}}{M} \quad . \quad . \quad . \quad k)$$
$$= \frac{\mu_{0,\,0} + \alpha_p^1 \mu_{0,\,1} + \,.\,.\, + \alpha_p^{n-1} \mu_{0,\,n-1}}{M(a_0, \,.\,.\,.\, a_{n-1})},$$

$$\frac{1}{\alpha_0^p a_0 + \alpha_1^p a_1 + \,.\,.\, + \alpha_{n-1}^p a_{n-1}} = \frac{\Sigma\, \alpha_{n-i}^{-p} \frac{\partial N}{\partial a_{n-i}}}{N}$$
$$= \frac{\alpha_0^{-p} (\nu_{00} + \beta_p^1 \nu_{01} + \,.\,.\, + \beta_p^{n-1} \nu_{0,\,n-1})}{N(a_0, \,.\,.\,.\, a_{n-1})},$$

welche unter den verschiedenen Fällen $F$ eine ausgezeichnete Stelle einnehmen. Ist ferner $k$ anders bestimmt, so bedeutet dies eine Verrückung der Wurzelreihe in $\sigma(a)$ und $\tau(a)$ gemäss $f)$ und $g)$; die Multiplication mit constanten Factoren genügt, die alten Werthe $\sigma$ und $\tau$ wieder-herzustellen. Die $n^2$ Unterdeterminanten reduciren sich danach auf $n$ von einander verschiedene mit den Differentialquotienten der Norm nach ihren Elementen identische Werthe. Man kann die Zähler der vorstehenden Identitäten selbstständig als Determinanten darstellen und bemerkt, dass in den Formeln

$$\Sigma \alpha_p^{-(n-i)} \frac{\partial M}{\partial x_{n-i}} = M'$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_p^{-0} & x_1 \,.\,.\, x_{n-1} \\ \varepsilon \alpha_p^{-(n-1)} & x_0 \,.\,.\, x_{n-2} \\ . & . \quad\quad . \\ . & . \quad\quad . \\ \varepsilon \alpha_p^{-1} & \varepsilon x_2 \,.\,.\, x_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \,.\,. & \alpha_p^{-k} & .\,.\, x_{n-1} \\ \varepsilon x_{n-1} & x_0 \,.\,. & a_p^{-k+1} & .\,.\, x_{n-2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \varepsilon x_1 & \varepsilon x_2 \,.\,. & \varepsilon \alpha_p^{-k-1} & .\,.\, x_0 \end{vmatrix},$$

$$\Sigma \alpha_{n-i}^{-p} \frac{\partial N}{\partial x_{n-i}} = N'$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_0^{-p} & x_1 \,.\,.\, x_{n-1} \\ \alpha_{n-1}^{-p} & x_0 \,.\,.\, x_{n-2} \\ . & . \quad\quad . \\ . & . \quad\quad . \\ \alpha_1^{-p} & x_2 \,.\,.\, x_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \,.\,. & \alpha_k^{-p} & .\,.\, x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 \,.\,. & \alpha_{k-1}^{-p} & .\,.\, x_{n-2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_1 & x_2 \,.\,. & \alpha_{k+1}^{-p} & .\,.\, x_0 \end{vmatrix}$$

Indices und Exponenten dem übrigen schematischen Baue der Ausdrücke $M$ und $N$ entsprechen. Multiplicirt man $M'$ und $N'$ mit $\sigma(x)$ und $\tau(x)$, so gehen die Producte auf Grund der Sätze $A.$ in $M$ und $N$ über.

Um die Unterdeterminanten $\mu_{0i}$ und $\nu_{0i}$ zu isoliren, multipliciren wir die Formeln $k$) mit $\alpha_p^{-i}$ und $\alpha_{n-i}^p$ und addiren die Specialisirungen $p = 0, 1, \,.\,.\, n-1$; auf Grund der Newton'schen Relationen und der für complexe Wurzeln $\beta_p$ geltenden Beziehung

$$1 + \beta_p^1 + \beta_p^2 + \,.\,.\, + \beta_p^{n-1} = \frac{1-\beta_p^n}{1-\beta_p} = 0$$

verschwinden rechts die Unterdeterminanten mit Ausnahme $\mu_{0i}$ und $\nu_{0i}$, für welche die Werte gefunden werden

$$n\mu_{0i} = M\Sigma \frac{1}{\alpha_p^i \sigma_p} = \alpha_0^{-i} \sigma_1 \,.\,.\, \sigma_{n-1} + \sigma_0 \alpha_1^{-i} \,.\,.\, \sigma_{n-1} + .$$
$$. + \sigma_0 \sigma_1 \,.\,.\, \alpha_{n-1}^{-i},$$

$$n\nu_{0i} = N\Sigma \frac{\alpha_{n-i}^p}{\tau_p} = \alpha_{n-i}^0 \tau_1 \,.\,.\, \tau_{n-1} + \tau_0 \alpha_{n-i}^1 \,.\,.\, \tau_{n-1} + .$$
$$. + \tau_0 \tau_1 \,.\,.\, \alpha_{n-i}^{n-1}.$$

Für Wurzeln $\beta$ ist selbstverständlich

$$\Sigma \sigma_0 \sigma_1 \,.\,.\, \sigma_{p-1} \beta_p^{-i} \sigma_{p+1} \,.\,.\, \sigma_{n-1} = \Sigma \tau_0 \tau_1 \,.\,.\, \tau_{p-1} \beta_{n-i}^p \tau_{p+1} \,.\,.\, \tau_{n-1}.$$

Wir kehren zu den Bedingungssystemen $f$) und $g$) — den Grundformeln des Problems der complexen Zahlen $\sigma$ und $\tau$ zurück und stellen die Aufgabe, aus diesen Formeln $n-1$ Functionen $\xi$, $\eta$ und $n-2$ Variable $x$, $y$ zu eliminiren. Eine deutliche Auffassung des Fortganges der Indices von Zählern und Nennern in $f)$ und $g)$ lässt erkennen, dass sie, wie die Wurzeln $\alpha$, in periodischer Wiederkehr der Zahlenfolge $0, 1 \ldots n-1$ eine unendliche Reihe bezeichnen, die füglich durch die Glieder der unbegrenzten Zahlenreihe selbst vertreten werden kann, wenn nur bezüglich $f)$ die Bedeutung des Index $pn+q$ als einen Factor $\varepsilon^p$ involvirend festgehalten wird. Auf dieser Bemerkung fusst das folgende Raisonnement. Die Functionen $\xi$ und $\eta$ sind nicht die einzigen, welche bei der gemeinsamen Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial \zeta_p}{\partial z_k} = \frac{\partial \zeta_{p+1}}{\partial z_{k+1}} = \ldots = \frac{\partial \zeta_{p+r}}{\partial z_{k+r}} = \ldots\ldots \textit{ in inf} \qquad l)$$

in Betracht kommen. Vielmehr zeigt die Entwickelung des Differentialquotienten von $F$

$$\alpha_{pk}\frac{dF}{df} = \alpha_{p0}\frac{\partial \zeta_0}{\partial z_k} + \alpha_{p1}\frac{\partial \zeta_1}{\partial z_k} + \ldots \alpha_{p,\,n-1}\frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial z_k},$$

dass auch die Ausdrücke $\frac{\partial \zeta_i}{\partial z_k}$ für die Gleichungen $l)$ als neue $\zeta$ in Anspruch genommen werden dürfen. Nach $l)$ ersetzen wir die Reihenfolge

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial z_k}, \ldots \frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial z_k} \text{ durch } \frac{\partial \zeta_p}{\partial z_{p+k}}, \frac{\partial \zeta_p}{\partial z_{p+k-1}}, \ldots \frac{\partial \zeta_p}{\partial z_{p+k-n+1}}$$

und nehmen $p+k=2i$; die jetzigen Ausdrücke

$$\frac{d\zeta_p}{\partial z_{2i}}, \frac{\partial \zeta_p}{\partial z_{2i-1}}, \ldots \frac{\partial \zeta_p}{\partial z_{2i-n+1}}$$

unterwerfen wir als neue $\zeta$ den Gleichungen $l)$ — wir erhalten dann das folgende System

$$\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 \zeta_p}{\partial z_{2i}\partial z_0} = \dfrac{\partial^2 \zeta_p}{\partial z_{2i-1}\partial z_1} = \ldots = \dfrac{\partial^2 \zeta_p}{\partial z_{2i-n+1}\partial z_{n-1}}, \;.\;.\;. \qquad m)\\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \zeta_p}{\partial z_{2i-1}\partial z_0} = \dfrac{\partial^2 \zeta_p}{\partial z_{2i-2}\partial z_1} = \ldots = \dfrac{\partial^2 \zeta_p}{\partial z_{2i-n}\partial z_{n-1}},\\
\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
\dfrac{\partial^2 \zeta_p}{\partial z_{2i-n+1}\partial z_0} = \dfrac{\partial^2 \zeta_p}{\partial z_{2i-n}\partial z_1} = \ldots = \dfrac{\partial^2 \zeta_p}{\partial z_{2i-2n+2}\partial z_{n-1}}
\end{array}$$

Dieses System enthält in seiner ersten Zeile die Bestimmung

$$\frac{\partial^2 \zeta_p}{\partial z_i^2} = \frac{\partial^2 \zeta_p}{\partial z_{2i-k}\partial z_k},$$

wo $k$ von dem früheren $k$ zu unterscheiden ist; es muss vor allem die Möglichkeit erwiesen werden, die herausgehobene Formel, welche den Ausgangspunkt einer zweiten, zum Ziele führenden Schlussreihe bildet weitere $n-2$ mal nach $\partial z_i$ zu differenziren. Die Berechtigung hiezu liegt in der Wiederholung des bisherigen Arguments: wie

$$\frac{\partial \zeta_p}{\partial z_{2i}}, \ldots \frac{\partial \zeta_p}{\partial z_{2i-n+1}},$$

so sind

$$\frac{\partial^{n-1}\zeta_p}{\partial z_i^{n-2}\partial z_{2i}}, \ldots \frac{\partial^{n-1}\zeta_p}{\partial z_i^{n-2}\partial z_{2i-n+1}},$$

indem der Index $i$ die Stelle von $p$ $n$ — 2mal vertritt, Glieder der Entwicklung $a$), vorausgesetzt, dass die Function $F$ eine $n$malige Derivation nach $\sigma$ und $\tau$ zulässt. Unter dieser streng festzuhaltenden Bedingung, deren Aufhebung die Rechnung illusorisch macht, besteht die Beziehung

$$\frac{\partial^n\zeta_p}{\partial z_i^n} = \frac{\partial^n\zeta_p}{\partial z_{2i-k}\partial z_k\partial z_i^{n-2}}.$$

Der Differentialquotient rechter Hand kann auf $\frac{\partial^n\zeta_p}{\partial z_k^n}$ reducirt werden. Zuvörderst ist gemäss $m$)

$$\frac{\partial^2\zeta_p}{\partial z_i\partial z_{2i-k}} = \frac{\partial^2\zeta_p}{\partial z_k\partial z_{3i-2k}},$$

sodann in derselben Weise

$$\frac{\partial^2\zeta_p}{\partial z_i\partial z_{3i-2k}} = \frac{\partial^2\zeta_p}{\partial z_k\partial z_{4i-3k}},$$

u. s. f., endlich

$$\frac{\partial^2\zeta_p}{\partial z_i\partial z_{(n-1)i-(n-2)k}} = \frac{\partial^2\zeta_p}{\partial z_k\partial z_{ni-(n-1)k}}.$$

Durch Multiplication der Gleichungen ergibt sich das Resultat

$$\frac{\partial^n\zeta_p}{\partial z_i^n} = \frac{\partial^n\zeta_p}{\partial^{n-1} z_k\partial z_{ni-(n-1)k}},$$

welches bei der Continuität des Fortganges der Indices bezüglich $f$) in

$$\frac{\partial^n\xi_p}{\partial x_i^n} = \varepsilon^{i-k}\frac{\partial^n\xi_p}{\partial x_k^n}, \quad \ldots \ldots \quad f')$$

bezüglich $g$) in

$$\frac{\partial^n\eta_p}{\partial y_i^n} = \frac{\partial^n\eta_p}{\partial y_k^n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad g')$$

übergeht. Die erstere Formel $f'$) zeigt den Fall an, in welchem die Aufstellung des $n$ten Differentialquotienten unnöthig wird; wenn $i - k$ ein Theiler von $n$ ist, so wird einfacher

$$\frac{\partial^{\frac{n}{i-k}}\xi_p}{\partial x_i^{\frac{n}{i-k}}} = \varepsilon\frac{\partial^{\frac{n}{i-k}}\xi_p}{\partial x_k^{\frac{n}{i-k}}}, \quad \frac{\partial^{\frac{n}{i-k}}\eta_k}{\partial y_i^{\frac{n}{i-k}}} = \frac{\partial^{\frac{n}{i-k}}\eta_p}{\partial y_k^{\frac{n}{i-k}}}.$$

Nach dieser Reduction der Differentialgleichungen unserer Aufgabe auf eine Normalform wenden wir uns zu ihrer Integration und zwar zur expliciten Darstellung des Integrales $a$), welches als eine Specialisirung des allgemeinen Integrales, zu diesem unmittelbar erweitert werden kann. Es sind die Gleichungen $e'$)

$$\Delta \xi_k = F(\sigma_0)\,\delta_{0k} + F(\sigma_1)\,\delta_{1k} + \ldots + F(\sigma_{n-1})\,\delta_{n-1,\,k},$$
$$\Delta \eta_k = F(\tau_0)\,\delta_{k0} + F(\tau_1)\,\delta_{k1} + \ldots + F(\tau_{n-1})\,\delta_{k,\,n-1},$$
$$\Delta^2 = \Sigma\left(\pm\, \alpha_0^0\, \alpha_1^1 \ldots \alpha_{n-1}^{n-1}\right)^2 = \varepsilon n^n,$$

welche nur mehr eine Bestimmung der Unterdeterminanten von $\Delta$, $\delta$ erheischen. Die Multiplication von $a)$ mit $\alpha_p^{-i}$ und $\alpha_i^{-p}$ isolirt $\delta_{ik}$ und $\delta_{ki}$, wenn sie für alle $p$ ausgeführt und die Resultate addirt werden; es ergibt sich

$$\frac{\delta_{ik}}{\Delta} = \frac{1}{n\alpha_i^k}, \quad \frac{\delta_{ki}}{\Delta} = \frac{1}{n\alpha_k^i},$$

damit

$$n\xi_k = \frac{F(\sigma_0)}{\alpha_0^k} + \frac{F(\sigma_1)}{\alpha_1^k} + \ldots + \frac{F(\sigma_{n-1})}{\alpha_{n-1}^k}, \quad \ldots \quad n)$$
$$n\eta_k = \frac{F(\tau_0)}{\alpha_k^0} + \frac{F(\tau_1)}{\alpha_k^1} + \ldots + \frac{F(\tau_{n-1})}{\alpha_k^{n-1}}.$$

Diese Formeln enthalten die Antwort auf die im Vorhergehenden gestellte Frage: welcher von den zwei verschiedenen zu $\sigma_\gamma$ in einen und denselben Gegensatz tretenden Fällen $\sigma_\beta = \tau_\beta$ und $\tau_\gamma$ für die methodische Anwendung ein neues Moment beherberge? Die Antwort wird durch die Form der Ausdrücke $\xi_k$ und $\eta_k$ verhüllt, welche die Reciprocität der Indices und Exponenten von $\sigma$ und $\tau$ am reinsten zu Tage treten lässt; sie ergibt sich aber sogleich, wenn die Darstellung der Function $F$ als complexe Zahl $\Phi + i\Psi$ in die Formeln $n)$ eingeführt wird. Aus der Bemerkung dass $\Phi$ bezüglich des imaginären Arguments eine gerade, $\Psi$ eine ungerade Function ist, folgt die Realität der Ausdrücke $\xi(\sigma_\gamma, \beta)$ gegenüber der complexen Natur der Ausdrücke $\eta(\tau_\gamma)$. Diese Abweichung wird illusorisch nur in dem Falle, wo der Factor $\alpha_0$ aus der Gleichung $a)$ für $f = \tau_\gamma$ herausfällt, also im Falle von Potenzen und Logarithmen der Zahl $\tau_\gamma$. Um zu entscheiden, ob die Wurzeln $\beta$ mit Erfolg anzuwenden sind, ist man blos auf die Norm der Zahlen $\sigma_\beta$ angewiesen; Functionen, welche auf diese Determinante nicht führen, wie die Exponentielle und ihre Dependenzen, bedingen bezüglich $\sigma_\beta$ sowie $\sigma_\gamma$, identische, wenn auch verschobene Functionsreihen $\Phi$ und $\Psi$. Auf diesen Functionen $\Phi$ und $\Psi$ ruht das Schwergewicht jeder Verwerthung der Identitäten $n)$; ihre Einführung in die letzteren ist gleichbedeutend mit dem Betreten eines neuen Feldes von Betrachtungen. Ehe wir die angedeutete Grenze überschreiten, und zur Integration der Functionen $F(\sigma)$ und $F(\tau)$ längs geschlossenen Integrationswegen übergehen, drücken wir noch die Functionaldeterminanten der $\xi$ und $\eta$ durch die Differentialquotienten der Function $F$ aus. Nach $b)$ erhalten wir

$$R = \frac{dF}{d\sigma_0} \cdot \frac{dF}{d\sigma_1} \ldots \frac{dF}{d\sigma_{n-1}},$$
$$S = \frac{dF}{d\sigma_0} \cdot \frac{dF}{d\tau_1} \ldots \frac{dF}{d\tau_{n-1}}.$$

und speciell für die Potenz, die Exponentionelle und den Logarithmus

$$R(\sigma^m) = m^n M^{m-1}, \quad S(\tau^m) = \alpha_0^{\frac{(m-1)n(n-1)}{2}} m^n N^{m-1};$$

$$R(e^\sigma) = e^{n x_0}, \quad S\left(e^\tau \beta\right) = e^{n x_0},$$

$$S\left(e^\tau \gamma\right) = e^{2\left(\frac{x_0}{1-\alpha_0} + \frac{x_1}{1-\alpha_1} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{1-\alpha_{n-1}}\right)};$$

$$R(l\sigma) = \frac{1}{M}, \quad S(l\tau) = \alpha_0^{\frac{-n(n-1)}{2}} \frac{1}{N}.$$

So einfach die Functionaldeterminanten des Logarithmus sich ausdrücken, so schwierig ist es, die Functionen $\mathfrak{x}$ selbst auf ihre einfachste Gestalt durch Einführung der Zeichen $\Phi$ und $\Psi$ zu bringen. Das äusserst complicirte und mannigfaltige Bildungsgesetz dieser und der meisten übrigen Functionen macht es wünschenswerth, die Bedingungen der Entwicklung irgend einer Function $F(\sigma)$ oder $F(\tau)$ nach steigenden und fallenden Potenzen von $\sigma$ oder $\tau$ kennen zu lernen, weil diese Entwicklungen selbst bekannten Baues, ihre Voraussetzungen aber allgemeine sind, eine Trennung verschiedener Functionsclassen also nicht nothwendig wird. In dieser Aufgabe bietet sich uns das erste Beispiel der Anwendung geschlossener Integrationen, zugleich das einzige Beispiel, in welchem eine unbeschränkte Anzahl von Veränderlichen der Umkreisung von Ausnahmepunkten nicht hindernd im Wege steht.

Das Ergebnis, welches die unveränderte Beibehaltung der bisherigen Symbole liefert, ist freilich das nämliche, wie das der Einführung der gewöhnlichen complexen Zahl $x + iy$. Man erfährt, dass nicht allein die Zahl der Veränderlichen, sondern die Functionsform $f$, nach welcher die Integration durchgeführt wird und selbst der Werthzustand der einzelnen Variabeln auf das Resultat von keinem Einflusse ist, wenn nur Anfangs- und Endwerth der Function $f$ identisch sind. Blos die doppelte Dimension des Zahlengebietes, welche sich in bestimmten Fällen auf die einfache (reelle oder imaginäre) reduciren kann, bestimmt die schliessliche Formel.

Es ist immerhin von Vortheil, diese von der Theorie gelieferten Sätze an einem instructiven Beispiele zu veranschaulichen. Wir geben im Folgenden drei Lösungen der Aufgabe, die Identität der Integralwerthe

$$\int_{(0_n)} F(f)\,df \quad \text{und} \quad \int_{(0_n)} F(x+iy)\,d(x+iy),$$

für $f$ gleich $\sigma_p$ oder $\tau_p$ darzustellen, welche zugleich in inniger Beziehung zu einander stehen, und auf eine Klasse selbständiger Integralformeln hindeuten.

Auch bei allgemeineren Differentialen $df$ wird der beliebige von ihnen zusammengesetzte Integrationsweg um Ausnahmepunkte durch eine unendlich nahe Umkreisung der letzteren ersetzt werden müssen. Man wähle, wenn der Ausnahmepunkt durch einen complexen Functionswerth $\omega(\zeta)$ definirt ist und $\omega$ speciell als complexe $\sigma$ oder $\tau$ gedacht wird, für $\omega(z)$ die Function $\omega(\zeta) + \omega(\delta)$ mit verschwindenden Elementen $\delta$, welche man solchen Veränderungen unterwerfen muss, dass dadurch die Umgehung des Ausnahmepunktes wirklich erzielt wird. Um dabei nicht auf Unbestimmtheiten zu stossen, muss weiter $\omega(\delta)$ der genaueren Präcisirung $\omega(\delta) = e^{\omega(\vartheta)}$ unterworfen und die Integration nach den neuen Variabeln $\vartheta$ ausgeführt werden. Diese Integration

$$\int F\left[\omega(\zeta) + e^{\omega(\vartheta)}\right] d\, e^{\omega(\vartheta)}$$

bietet in Einem den Vortheil: durch die Differentiation der Exponentiellen diese selbst nicht zu verändern, wodurch die Grenzbestimmung

$$Lim\left\{ F(\zeta + d\zeta)\, d\zeta \right\}$$

während der mehrgliedrigen Integration dieselbe und nur die Summirung der Differentiale $d\vartheta$ übrig bleibt. Dass die Periodicität der Function $e^{\omega(\vartheta)}$ eine durch isolirte Grenzenbestimmung der einzelnen Variabeln bedingte und die letztere relativ einfach ist, ergibt die Betrachtung jener besonderen Gruppe von Integralwerthen, deren vorhin erwähnt worden ist und deren Glieder die Glieder der Entwicklung folgender Ausdrücke

$$J_\sigma = \int_0^{2\pi} \frac{d\left(\alpha_p^0 \cos\vartheta + \alpha_p^1 \sin\vartheta\right)}{\alpha_p^0 \cos\vartheta + \alpha_p^1 \sin\vartheta},$$

$$K_\tau = \int_0^{2\pi} \frac{d\left(\alpha_0^p \cos\vartheta + \alpha_1^p \sin\vartheta\right)}{\alpha_0^p \cos\vartheta + \alpha_1^p \sin\vartheta}$$

als complexe Zahlen $\sigma_p(i_q)$ und $\tau_p(k_q)$ sind. Betrachtet man die Nenner in $J_\sigma$ und $K_\tau$ als Zahlen $\sigma_p(\tan\vartheta)$ und $\tau_p(\tan\vartheta)$, nachdem man vorher mit $\cos\vartheta$ gekürzt, so hat man zu dieser Entwicklung die Formeln $k)$ des vorhergehenden Abschnittes zu Hilfe zu nehmen, deren Symbole im gegenwärtigen Falle auf äusserst einfache explicite Ausdrücke führen. Die Normen der Complexen $1 + \alpha_p \tan\vartheta$, $\alpha_0^p + \alpha_1^p \tan\vartheta$ sind:

$$1 - \varepsilon(-\tan\vartheta)^n,\ 1 - (-\tan\vartheta)^n,$$

ihre Unterdeterminanten

$$\mu_{0i} = \nu_{0i} = (-\tan\vartheta)^i,$$

damit erhält man für $J_\sigma$ und $K_\tau$

$$J_\sigma = \int_0^{2\pi} \frac{(\tan\vartheta + \alpha_p)\left(1 + \alpha_p \tan\vartheta + .. + \alpha_p^{n-1} (\tan\vartheta)^{n-1}\right)}{1 - \varepsilon(\tan\vartheta)^n}\, d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\tan\vartheta + \varepsilon(\tan\vartheta)^{n-1}}{1-\varepsilon(\tan\vartheta)^n}\, d\vartheta$$

$$+ \int_0^{2\pi} \frac{\{\alpha_p + \alpha_p^2 \tan\vartheta + \ldots + \alpha_p^{n-1}(\tan\vartheta)^{n-2}}{1-\varepsilon(\tan\vartheta)^n} (1+\tan^2\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z+\varepsilon z^{n-1}}{(1-\varepsilon z^n)(1+z^2)}\, dz + 2\alpha_p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1-\varepsilon z^n} + \ldots + 2\alpha_p^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{n-2}\, dz}{1-\varepsilon z^n}, \quad \alpha)$$

$$K_\tau = \int_0^{2\pi} \frac{\left(\alpha_0^p \tan\vartheta + \alpha_1^p\right)\left(\alpha_0^{-p} + \alpha_{n-1}^{-p}\tan\vartheta + \ldots + \alpha_1^{-p}(\tan\vartheta)^{n-1}\right)}{1-(\tan\vartheta)^n}\, d\vartheta$$

$$= 2\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z+z^{n-1}}{(1-z^n)(1+z^2)}\, dz + \beta_1^p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1-z^n} + \cdot\right.$$

$$\left. \cdot + \beta_{n-1}^p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{n-2}}{1-z^n}\, dz \right\} \quad . \quad . \quad \beta)$$

Diesen Entwicklungen gesellen sich die endlichen Werthe $J_\sigma$ und $K_\tau$ zu $[J_\sigma = K_\tau = 0$, im Falle, dass $\alpha_p^1$ und $\alpha_1^p$ reell sind, $= \varepsilon 2\pi i$ je nachdem der imaginäre Theil von $\alpha_p^1$ und $\alpha_1^p$ positiv oder negativ$]$ und bilden zusammen zwei Systeme Gleichungen mit unbekannten Integralen $i_q$ und $k_q$, deren Auflösungen in den folgenden Formeln enthalten sind.

$$i_0 = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z+\varepsilon z^{n-1}}{(1-\varepsilon z_n)(1+z^2)}\, dz = \frac{J_{\sigma 0} + J_{\sigma 1} + \ldots + J_{\sigma n-1}}{n} = 0, \quad \gamma)$$

$$i_q = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{q-1}}{1-\varepsilon z^n}\, dz = \frac{1}{n}\left\{\frac{J_{\sigma 0}}{\alpha_0^q} + \frac{J_{\sigma 1}}{\alpha_1^q} + \ldots + \frac{J_{\sigma n-1}}{\alpha_{n-1}^q}\right\};$$

$$k_0 = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z+z^{n-1}}{(1-z^n)(1+z^2)}\, dz = \frac{1}{n}\left\{\frac{K_{\tau 0}}{\alpha_0^0} + \frac{K_{\tau 1}}{\alpha_0^1} + \ldots + \frac{K_{\tau n-1}}{\alpha_0^{n-1}}\right\} = 0, \quad \delta)$$

$$k_q = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^{q-1}}{1-z^n}\, dz = \frac{1}{n}\left\{\frac{K_{\tau 0}}{\alpha_q^0} + \frac{K_{\tau 1}}{\alpha_q^1} + \ldots + \frac{K_{\tau n-1}}{\alpha_q^{n-1}}\right\}.$$

Die weitere Entwicklung dieses Gegenstandes muss für die Folge vorbehalten werden; unser Hauptaugenmerk bleibt den Gleichungen $\alpha)$ und $\beta)$ zugewendet, in welche wir die Lösungen $\gamma)$ und $\delta)$ als Grössen $i$ und $k$ substituiren. Dadurch erhalten wir das Resultat

$$(\varepsilon^{2i\pi},\ o) = \sigma_p\,(i) = \tau_p\,(k);$$

in Worten: es gibt complexe $\sigma$ und $\tau$, deren Werth sich auf die positive oder negative imaginäre Einheit reducirt, je nach den Specialisirungen $p$; für die bekannten reellen Fälle von $\sigma$ und $\tau$ unter diesen Specialisirungen verschwinden die Complexen.

Die Exponentielle, deren Argument diese Zahlen sind, hat den constanten Werth 1. Man erkennt auf der Stelle die Bedeutung dieser Sätze für die Integration

$$\int F\left[\omega\,(\zeta) + e^{\omega\,(\vartheta)}\right] d\,e^{\omega\,(\vartheta)};$$

die Grenzen der einzelnen Glieder dieser Integration nach

$$d\vartheta_0,\ d\vartheta_1\ \ldots\ d\vartheta_{n-1} \text{ sind}$$

$$i_0\ \ldots\ i_{n-1};\ k_0\ \ldots\ k_{n-1};$$

und sie selbst stellt sich als die folgende Summe dar

$$\int F\left[\omega_p\,(\zeta) + e^{\omega_p\,(\vartheta)}\right] d\,e^{\omega_p\,(\vartheta)} =$$

$$\omega_p\left[\int^{i_q} F\left\{\omega_p\,(\zeta) + e^{\omega_p\,(i_0,\,i_1,\,\ldots\,i_{q-1},\,\vartheta_q,\,0\,\ldots)}\right\} e^{\omega_p\,(i_0,\,i_1\,\ldots\,\vartheta_q,\,0\,\ldots)}\,d\,\vartheta_q\right]. \quad \varepsilon)$$

Unter der Annahme des gemeinschaftlichen Grenzwerthes

$$Lim\left\{F\left[\omega_p\,(\zeta) + d\zeta\right] d\zeta\right\} = \lambda\ \omega_p(\zeta)$$

folgt hieraus durch Integration der Differentiale $d\,\vartheta$, zugleich unter Voraussetzung mehrerer Ausnahmepuncte,

$$\int_{0_n} F\left[\omega_p\,(\zeta)\right] d\,\omega_p\,(z) = \Sigma\left(\lambda_{\omega_p\,(\zeta)}\right) \cdot (\pm 2\pi i,\ 0) = \Sigma\left(\lambda_{\omega_p\,(\zeta)}\right) \cdot \Pi_{\pm 2\pi i,\ 0}.$$

Dieses Ergebniss ist, wie bereits hervorgehoben wurde, das nämliche, wie wenn statt der Function $e^{\omega\,(\zeta)}$ die einfachere $\vartheta e^{\pm i\vartheta}$ eingeführt worden wäre mit den Grenzen 0 und $2\pi$, deren zugehörige Werthe $e^{0 i\vartheta}$ und $e^{\pm 2\pi i}$ mit den Werthen $e^{\omega\,(0)}$ und $e^{\omega_p(i)}$ zusammenfallen. Diese beiden Arten der Umkreisung vermittelt eine dritte, welche im Vorhergehenden bereits stillschweigend durchgeführt wurde: das Hinzufügen der Ausdrücke $\delta\,(\cos\vartheta + \alpha_p \sin\vartheta)$ und $\delta\,(\alpha_0^p \cos\vartheta + \alpha_1^p \sin\vartheta)$ zu dem Ausnahmepuncte $\sigma(\xi)$ und $\tau(\eta)$ und die Integration derselben zwischen den Grenzen einer Peripherie; hier überzeugt man sich durch Construction von der Umgehung des Ausnahmepunctes — die Darstellung als $\sigma(i)$ und $\tau(k)$ enthält das die mehrgliedrige mit den einfachen Integrationen vermittelnde Moment, die Möglichkeit der Definitionen von $2i\pi$ als complexe $\sigma(i)$ und $\tau(k)$.

Die nähere Darstellung dieser letzteren wird weiter unten gegeben. Nur in den Anfangswerthen $i_0 = k_0 = 0$ liegt noch ein die ganze bisherige Ausführung stützendes Argument: indem nach $d\vartheta_0$ in $\varepsilon$) keine

Integration stattfindet, gewinnt der Factor $e^{\alpha_p^0 \vartheta_0}$ oder $e^{\alpha_0^p \vartheta_0}$ eine specielle Bedeutung und vertritt eine gewisse Function; er ist aufzufassen als die aus den verschwindenden Elementen $\delta$ gebildete Norm von $\omega(\delta)$, analog dem Modul und der Norm $Lim\, r$ mit den Richtungsfactoren der einfachen Integrationen:

$$cos\,\vartheta + i\, sin\,\vartheta,\ cos\,\vartheta + \alpha_p sin\,\vartheta,\ \alpha_0^p cos\,\vartheta + \alpha_1^p sin\,\vartheta.$$

Die übrigen Ausdrücke $e^{\alpha_p \vartheta_1} \ldots e^{\alpha_1^p \vartheta_1} \ldots$ sind an die Bedingung des Verschwindens nicht weiter gebunden.

Die Formeln $\zeta$) verwerthen wir zunächst allgemein für die Entwicklung einer Function $f$ nach Potenzreihen ihres Arguments. Das Raisonnement, welches bei der Zahl $x \pm iy$ zum Ziele führt, kann wörtlich auf unseren allgemeineren Fall übertragen werden. Man findet die Fundamentalformeln

$$\int \frac{f(\omega_p z)}{[\omega_p(z) - \omega_p(\zeta)]^{n+1}}\, d\,\omega(z) = \frac{\Pi_{0,\ \pm 2\pi i}}{1.2\ldots n} f^{(n)}[\omega_p(\zeta)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \zeta)$$

und damit die Mac Laurin'sche und die Laurent'sche Entwicklung mit den bekannten Beschränkungen des Arguments $\omega_p(\zeta)$ auf den Convergenzkreis (Convergenzring) der Function $f$. Bildet man diese Beschränkungen der Reihe nach für die verschiedenen Complexen $\sigma$ und $\tau$, indem man für das Zeichen *mod* die gewöhnliche Bedeutung in Anspruch nimmt

$$\begin{array}{ll} mod\,(\sigma_0\,\xi) < r, & mod\,(\tau_0\,\eta) < r, \\ mod\,(\sigma_1\,\xi) < r, & mod\,(\tau_1\,\eta) < r, \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ mod\,(\sigma_{n-1}\,\xi) < r, & mod\,(\tau_{n-1}\,\eta) < r; \end{array}$$

so erhält man durch Multiplication

$$M(\xi) < r^n, \qquad N(\eta) < r^n;$$

in Worten lässt sich dieser Satz ausdrücken, wie folgt:

„Nach steigenden Potenzen einer complexen Zahl $\sigma$ oder $\tau$, deren Normen grösser sind als die $n$te Potenz des Moduls des Convergenzkreises einer Function $f$, darf diese Function nicht entwickelt werden; dann geschieht ihre Entwicklung immer nach fallenden Potenzen des Arguments. Ueber die Möglichkeit der Entwicklung nach bestimmten $\sigma$ oder $\tau$ entscheiden die Moduli dieser Zahlen."

Dass das Product aller Moduli von $\sigma_0 \ldots \sigma_{n-1}$, die Norm dieser Zahlen ist, folgt aus der Bemerkung, dass alle complexen Wurzeln $\alpha$ conjugirt vorkommen; dass ebenso die Multiplication der Moduli aller $\tau$ die Norm der $\tau$ liefert, beweist noch ausserdem der Umstand, dass die Anordnung der Wurzeln in $\tau$ auf die Norm (eine symmetrische Determinante der Variabeln) ohne Einfluss ist, indem immer das Product der reciproken Anfangswerthe (vgl. die Formeln $h$) sich zu 1 reducirt.

In Fällen reeller $\sigma$ und $\tau$ treten an die Stelle der synektischen Beschaffenheit der Function $f$ und ihrer Differentialquotienten die entsprechenden Eigenschaften der Endlichkeit und Stetigkeit derselben im Bereiche der $\sigma$ und $\tau$. Strenge genommen verlieren die geschlossenen Integrationen hier ihre Bedeutung, da sie sich in das Nichts auflösen; gleichwol dürfen diese Grenzfälle nicht aus dem Zusammenhange der übrigen gebracht werden, in welchem allein ihre eigenthümliche isolirte Stellung in das hellste Licht tritt.

Ehe wir zu weiteren Anwendungen der Gleichungen $\zeta$) übergehen, vervollständigen wir das System der Formeln $\alpha$) bis $\delta$). Wir wiederholen die Transformationen $\alpha$) und $\beta$) für dreierlei verschiedene obere Grenzen: $2\pi$, $\pi$ und $\frac{\pi}{2}$. Bei der Periodicität der Tangentenfunction reduciren sich diese Annahmen auf zwei von einander verschiedene: $\pi$ und $\frac{\pi}{2}$. Es genügt aber auch hier die Substitution $-\vartheta$ für $\vartheta$ um das Intervall 0 bis $\pi$ auf das Intervall 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zurückzuführen, so dass uns dieses letztere vorläufig allein übrig bleibt. Indem wir überdies die überflüssigen Fälle $\tau_\beta = \sigma_\beta$ vernachlässigen, erhalten wir für die Formeln $\alpha$) und $\beta$)

$$I'_{\sigma_p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\tan\vartheta + \gamma_p}{1 + \gamma_p \tan\vartheta}\, d\vartheta =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{z - z^{n-1}}{(1+z^n)(1+z^2)}\, dz + \int_{-\infty}^{0} \frac{\gamma_p + \gamma_p^2 z + \cdots + \gamma_p^{n-1} z^{n-2}}{(1+z^n)}\, dz, \qquad \eta)$$

$$K'_{\tau_p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\gamma_0^p \tan\vartheta + \gamma_1^p}{\gamma_0^p + \gamma_1^p \tan\vartheta}\, d\vartheta$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{z + z^{n-1}}{(1-z^n)(1+z^2)}\, dz + \int_{-\infty}^{0} \frac{\beta_p + \beta_p^2 z + \cdots + \beta_p^{n-1} z^{n-2}}{(1-z^n)}\, dz.$$

Die Werthe dieser Integrale sind sämmtlich imaginär (wo nicht 0). Man kann andere Integrale $J''_{\sigma_p}$ und $K''_{\tau_p}$ angeben, deren Werthe reell sind und zu $J'_{\sigma_p}$ und $K'_{\tau_p}$ Gegenstücke bilden. Wir lassen die betreffenden Entwicklungen folgen

$$I''_{\sigma_p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\gamma_p + \tan\vartheta}{1 + \gamma_p \tan\vartheta}\, d\vartheta = \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \qquad \vartheta)$$

$$= \int_0^{-\infty} \frac{z + z^{n-1}}{(1+z^n)(1+z^2)}\, dz + \int_{-\infty}^{0} \frac{\gamma_p + \gamma_p^2 z + \cdots + \gamma^{n-1} z^{n-2}}{1+z^n} \cdot \frac{1-z^2}{1+z^2}\, dz,$$

$$K''_{\tau_p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\gamma_0^p \tan\vartheta + \gamma_1^p}{\gamma_0^p + \gamma_1^p \tan\vartheta}\, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{-\infty} \frac{z - z^{n-1}}{(1 - z^n)(1 + z^2)}\, dz + \int_{-\infty}^0 \frac{\beta_p + \beta_p^2 z + \ldots + \beta_p^{n-1} z^{n-2}}{1 - z^n} \cdot \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\, dz.$$

Die directe Berechnung der Integrale von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ hat keine Schwierigkeit; im allgemeinen gelten folgende Bestimmungen

$$I'_{\sigma_p} = \frac{(2p+1)\pi}{n}\, i, \quad K'_{\tau_p} = \frac{2p\pi}{n}\, i,$$

$$I''_{\sigma_p} = \frac{\pi - 2\frac{(2p+1)\pi}{n} \sin\frac{(2p+1)\pi}{n}}{2\cos\frac{(2p+1)\pi}{n}},$$

$$K''_{\tau_p} = \frac{\pi - 2\frac{2p\pi}{n} \sin\frac{2p\pi}{n}}{2\cos\frac{2p\pi}{n}}.$$

Erweitern sich die Grenzen um den nächsten Quadranten, so tritt zum Integrale $\int_{-\infty}^0$ nach $z$ das Integral $\int_0^{\infty}$ und die Ausdrücke $I$ und $K$ gehen über in

$$J'_{\sigma_p} = \pm\pi i, \quad K'_{\tau_p} = \pm\pi i, \quad K'_{\tau_0} = 0,$$

$$J''_{\sigma_p} = \frac{1 - \sin\frac{(2p+1)\pi}{n}}{\cos\frac{(2p+1)\pi}{n}}\pi, \quad K''_{\tau_p} = \frac{1 - \sin\frac{2p\pi}{n}}{\cos\frac{2p\pi}{n}}\pi.$$

Es ist wohl zu beachten, dass die Einführung des Symbols $2p+1$ und $2p$ eine unendliche Reihe hier nicht wie bei den Wurzeln $\beta$ und $\gamma$ anzeigt. Die Bogen $\frac{(2p+1)\pi}{n}$ und $\frac{2p\pi}{n}$ liegen sämmtlich im ersten Quadranten; auf diesen müssen alle Wurzeln $\beta$ und $\gamma$ in ihren Bogen reducirt werden. Nach diesen Bemerkungen erübrigt noch die Angabe der Auflösungen von $\eta$) und $\vartheta$) nach den Unbekannten; man erhält mit Bezug auf die Integration von 0 bis $-\infty$

$$-\int_0^{-\infty} \frac{z - z^{n-1}}{(1 + z^n)(1 + z^2)}\, dz = \frac{1}{n}\left\{I'_{\sigma_0} + I'_{\sigma_1} + \ldots + I'_{\sigma_{n-1}}\right\} = 0, \qquad \iota)$$

$$-\int_0^{-\infty} \frac{z^{m-1}}{1 + z^n}\, dz = \frac{1}{n}\left\{\frac{I'_{\sigma_0}}{\gamma_0^m} + \frac{I'_{\sigma_1}}{\gamma_1^m} + \ldots + \frac{I'_{\sigma_{n-1}}}{\gamma_{n-1}^m}\right\},$$

$$\int_0^{-\infty} \frac{z + z^{n-1}}{(1+z^n)(1+z^2)}\, dz = \frac{1}{n}\left\{I''_{\sigma 0} + I''_{\sigma 1} + \ldots + I''_{\sigma n-1}\right\},$$

$$-\int_0^{-\infty} \frac{z^{m-1}}{1+z^n} \cdot \frac{1-z^2}{1+z^2}\, dz = \frac{1}{n}\left\{\frac{I''_{\sigma 0}}{\gamma_0^m} + \frac{I''_{\sigma 1}}{\gamma_1^m} + \ldots + \frac{I''_{\sigma n-1}}{\gamma_{n-1}^m}\right\};$$

$$-\int_0^{-\infty} \frac{z + z^{n-1}}{(1-z^n)(1+z^2)}\, dz = \frac{1}{n}\left\{K'_{\tau 0} + K'_{\tau 1} + \ldots + K'_{\tau n-1}\right\} = 0, \qquad \varkappa)$$

$$-\int_0^{-\infty} \frac{z^{m-1}}{1-z^n}\, dz = \frac{1}{n}\left\{\frac{K'_{\tau 0}}{\beta_0^m} + \frac{K'_{\tau 1}}{\beta_1^m} + \ldots + \frac{K'_{\tau n-1}}{\beta_{n-1}^m}\right\},$$

$$\int_0^{-\infty} \frac{z - z^{n-1}}{(1-z^n)(1+z^2)}\, dz = \frac{1}{n}\left\{K''_{\tau 0} + K''_{\tau 1} + \ldots + K''_{\tau n-1}\right\},$$

$$-\int_0^{-\infty} \frac{z^{m-1}}{1-z^n} \cdot \frac{1-z^2}{1+z^2}\, dz = \frac{1}{n}\left\{\frac{K''_{\tau 0}}{\beta_0^m} + \frac{K''_{\tau 1}}{\beta_1^m} + \ldots + \frac{K''_{\tau n-1}}{\beta_{n-1}^m}\right\}.$$

Will man in diesen Formeln die negative Grenze wegschaffen, so muss man gerade und ungerade $n$ auseinanderhalten; als Endergebnis entspringt auf diesem Wege das folgende System:

$$\frac{(-1)^{m-1}}{2n}\left[\tau_{m,\gamma}(I') - \tau_{m,\gamma}(I'')\right] = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{z^{m+1}}{(1+z^n)(1+z^2)}\, dz, & n \text{ gerade} \\ \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{z^{m+1}}{(1-z^n)(1+z^2)}\, dz, & n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad \lambda)$$

$$\tau_{m+1,\gamma}(I') + \tau_{m+1,\gamma}(I'') = \tau_{m-1,\gamma}(I') - \tau_{m-1,\gamma}(I'');$$

$$\frac{(-1)^{m-1}}{2n}\left[\tau_{m,\beta}(K') - \tau_{m,\beta}(K'')\right] = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{z^{m+1}}{(1-z^n)(1+z^2)}\, dz, & n \text{ gerade} \\ \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{z^{m+1}}{(1+z^n)(1+z^2)}\, dz, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\tau_{m+1,\beta}(K') + \tau_{m+1,\beta}(K'') = \tau_{m-1,\beta}(K') - \tau_{m-1,\beta}(K'').$$

Hierin geht $m$ von 0 bis $n-1$; wenn $m = n-2$, so hat man noch speciell

$$\tau_{n-2,\gamma}(I') - \tau_{n-2,\gamma}(I'') = -\tau_{0,\gamma}(I''),$$

indem $\tau_{0,\gamma}(I') = 0$ und ähnlich

$$\tau_{n-2,\beta}(K') - \tau_{n-2,\beta}(K'') = \tau_{0,\beta}(K''), \quad \tau_{0,\beta}(K') = 0.$$

Da die Werthe von $\tau_m(I')$ und $\tau_m(K')$ vom $m$ gleich 1 an bekannten Integralformeln gemäss als gegeben anzusehen sind, so sieht man, wie sich alle $\tau_m(I'')$ und $\tau_m(K'')$ berechnen lassen, wenn nur $\tau_0(I'')$ und $\tau_0(K'')$, respective $\tau_1(I'')$ und $\tau_1(K'')$ ermittelt werden können. Nachdem dieses mit keinen Schwierigkeiten verbunden ist, so kann nunmehr die Integration der Differentiale $\frac{z^{m+1}\,dz}{(1 \pm z^n)(1+z^2)}$ als gelöst betrachtet werden.

Die Transformation der Integrale $J$ und $K$ mittelst der Identitäten $k$) oder $n$) ist die einzige, welche für geschlossene Integrationen einer Function $F$ mit algebraischem Discontinuitätsfactor, wenn gleichzeitig der Ausnahmepunkt im Integrationswege selbst liegt, von Bedeutung ist. Um vollständig zu sein, wollen wir auch Integrationswege ohne Ausnahmepunkte in Betracht ziehen. Wir beschränken uns auf den Fall zweier independent Veränderlicher, welche zur complexen Zahl $x \pm \alpha_p y$, oder $\alpha_0^p x \pm \alpha_1^p y$ unveränderlich verbunden werden mögen. Dann sind es die folgenden Hauptformeln, welche unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen.

$$\int\limits_{(0_0)} F(x+\alpha_p y)\, d(x+\alpha_p y) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mu)$$

$$\int F(x+\alpha_p y,\ x-\alpha_p y)\, d(x+\alpha_p y)$$
$$= -2\alpha_p \iint F'_{x-\alpha_p y}(x+\alpha_p y,\ x-\alpha_p y)\, dx\, dy,$$

$$\int F(\alpha_0^p x + \alpha_1^p y)\, d(\alpha_0^p x + \alpha_1^p y) = 0,$$

$$\int F(\alpha_0^p x + \alpha_1^p y,\ \alpha_0^p x - \alpha_1^p y)\, d(\alpha_0^p x + \alpha_1^p y)$$
$$= -2 \iint F'_{\alpha_0^p x - \alpha_1^p y}(\alpha_0^p x + \alpha_1^p y,\ \alpha_0^p x - \alpha_1^p y)\, dx\, dy, \qquad \alpha_0^p \cdot \alpha_1^p = 1$$

$$\int F(x-\alpha_p y)\, d(x+\alpha_p y) = +2\alpha_p \iint F'_{x-\alpha_p y}(x-\alpha_p y)\, dx\, dy,$$

$$\int F(\alpha_0^p x - \alpha_1^p y)\, d(\alpha_0^p x + \alpha_1^p y)$$
$$= + \iint F'_{\alpha_0^p x - \alpha_1^p y}(\alpha_0^p x - \alpha_1^p y)\, dx\, dy,$$

$$\int\limits_{(0_n)} F(x+\alpha_p y)\, d(x+\alpha_p y) =$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) \int_0^{2\pi,\, \pi,\, \frac{\pi}{2}} \frac{d\,(1 + \alpha_p \tan \vartheta)}{1 + \alpha_p \tan \vartheta},$$

$$\int_{(0n)} F(\alpha_0^p x + \alpha_1^p y)\, d\,(\alpha_0^p x + \alpha_1^p y) =$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) \int_0^{2\pi,\, \pi,\, \frac{\pi}{2}} \frac{d\,(1 + \beta_p \tan \vartheta)}{1 + \beta_p \tan \vartheta},$$

$$\int_{(0n)} F(x + \alpha_p y,\ x - \alpha_p y)\, d\,(x + \alpha_p y) =$$

$$(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n) \int_0^{2\pi,\, \pi,\, \frac{\pi}{2}} \frac{d\,(1 + \alpha_p \tan \vartheta)}{1 \pm \alpha_p \tan \vartheta}$$

$$- 2\,\alpha_p \iint_{(0n)} F'_{x - \alpha_p y}(x + \alpha_p y,\ x - \alpha_p y)\, dx\, dy,$$

$$\int_{(0n)} F(\alpha_0^p x + \alpha_1^p y,\ \alpha_0^p x - \alpha_1^p y)\, d\,(\alpha_0^p x + \alpha_1^p y)$$

$$= (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n) \int_0^{2\pi,\, \pi,\, \frac{\pi}{2}} \frac{d\,(1 + \beta_p \tan \vartheta)}{1 \pm \beta_p \tan \vartheta}$$

$$- 2 \iint_{(0n)} F'_{\alpha_0^p x - \alpha_1^p y}(\alpha_0^p x + \alpha_1^p y,\ \alpha_0^p x - \alpha_1^p y)\, dx\, dy.$$

Jede dieser Formeln zerfällt, wenn die Wurzel $\alpha_p$ für sie keiner Beschränkung des $p$ unterliegt, in $n$ specielle Resultate. So ist beispielsweise, wenn die Formeln ohne Doppelintegrale, welche die $\lambda$ enthalten, gemäss $n$) transformirt werden und die Grundlage der Integration ein Rhomboid mit den Eckpunkten $a$ und $b\,\alpha_p$ oder $\alpha_0^p\, a$ und $\alpha_1^p\, b$ bildet

$$\int_0^a \sum_{q=0}^{q=n-1} \left\{\frac{F(x)}{\alpha_q^m}\right\} dx - \int_0^a \sum_{q=1}^{q=n-1} \left\{\frac{F(x + \alpha_q b)}{\alpha_q^m}\right\} dx$$

$$= \int_0^b \Sigma \left\{\frac{F(\alpha_q y)}{\alpha_q^{m-1}}\right\} dy - \int_0^b \Sigma \left\{\frac{F(a + \alpha_q y)}{\alpha_q^{m-1}}\right\} dy$$

$$+ (\lambda_{\sigma,1} + \lambda_{\sigma,2} + \ldots + \lambda_{\sigma,n})\, \Sigma \left\{\frac{J'_{\sigma_q}}{\alpha_q^m}\right\},$$

$$\int_0^a \Sigma \left\{F(x)\right\} dx - \int_0^a \sum_{q=1}^{q=n-1} \left\{F(x + \alpha_q b)\right\} dx$$

$$= \varepsilon \int_0^b \Sigma \left\{\frac{F(\alpha_q y)}{\alpha_q^{n-1}}\right\} dy - \varepsilon \int_0^b \Sigma \left\{\frac{F(a + \alpha_q y)}{\alpha_q^{n-1}}\right\} dy,$$

$$\int_0^a \sum_{q=1}^{q=n-1} \left\{\frac{F(\alpha_0^q x)}{\alpha_m^q}\right\} dx - \int_0^a \sum_{q=1}^{q=n-1} \left\{\frac{F(\alpha_0^q x + \alpha_1^q b)}{\alpha_m^q}\right\} dx$$

$$= \int_0^b \Sigma \left\{\frac{F(\alpha_1^q y)}{\alpha_{m-1}^q}\right\} dy - \int_0^b \Sigma \left\{\frac{F(\alpha_0^q a + \alpha_1^q y)}{\alpha_{m-1}^q}\right\} dy$$

$$+ (\lambda_{\tau,1} + \lambda_{\tau,2} + \cdot \cdot + \lambda_{\tau,n}) \Sigma \left\{\frac{K'_{\tau q}}{\alpha_m^q}\right\},$$

$$\int_0^a \Sigma' \left\{\frac{F(\alpha_0^q x)}{\alpha_{n-1}^q}\right\} dx - \int_0^a \Sigma \left\{\frac{F(\alpha_0^q x + \alpha_1^q b)}{\alpha_0^q}\right\} dx$$

$$= \int_0^b \Sigma \left\{\frac{F''(\alpha_1^q y)}{\alpha_{n-1}^q}\right\} dy - \int_0^b \Sigma \left\{\frac{F(\alpha_0^q a + \alpha_1^q y)}{\alpha_{n-1}^q}\right\} dy.$$

Bei den Integrationen, für welche die Function $F$ zwei complexe Elemente enthält, kommen, je nachdem der algebraische Discontinuitätsfactor dasselbe oder das vom Differential der Integration verschiedene Augument besitzt, die Integrale $J'$ oder $J''$, respective $K'$ oder $K''$ in Betracht.

Die Werthbestimmungen der Integrale mit Differentialen $e^{\varphi(x)} dx$, wo die Function $\varphi(x)$ eine complexe Zahl zweiten Grades für $x$ darstellt, scheinen ziemlich abgeschlossen zu sein. Die Einführung einer complexen Zahl $\tau$ als Exponent der Exponentiellen $e$ in der dritten der Formeln $\mu$) fügt dieser Reihe ein ergänzendes Glied, die Integration der Differentiale

$$e^{-2bx} \cos(x^2)\, dx \text{ und } e^{-2bx} \sin(x^2)\, dx$$

hinzu. Es mögen die Wurzeln

$$\gamma_0 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = i'_2, \quad \gamma_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = i'_1,$$

$$\gamma_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = -i'_2, \quad \gamma_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} = -i'_1$$

zu Hilfe genommen werden; die Function $F$ sei $e^{-(\gamma_0^p x + \gamma_1^p y)^2}$. Ein Rhomboid mit den Axen $\gamma_0 X$ und $\gamma_1 Y$ werde der Integration zu

Grunde gelegt; es kommt nun zunächst darauf an, die Entwicklungen $n$) im gegenwärtigen speciellen Falle festzustellen. Man findet nun leicht

$$\begin{aligned} 4e^{-(\gamma_0^p x + \gamma_1^p y)^2} = & \left\{e^{-\xi_0} + \frac{e^{-\xi_1}}{\gamma_0} + \frac{e^{-\xi_2}}{\gamma_0^2} + \frac{e^{-\xi_3}}{\gamma_0^3}\right\}\gamma_0^p \\ & + \left\{e^{-\xi_0} + \frac{e^{-\xi_1}}{\gamma_1} + \frac{e^{-\xi_2}}{\gamma_1^2} + \frac{e^{-\xi_3}}{\gamma_1^3}\right\}\gamma_1^p \\ & + \left\{e^{-\xi_0} + \frac{e^{-\xi_1}}{\gamma_2} + \frac{e^{-\xi_2}}{\gamma_2^2} + \frac{e^{-\xi_3}}{\gamma_2^3}\right\}\gamma_2^p \\ & + \left\{e^{-\xi_0} + \frac{e^{-\xi_1}}{\gamma_3} + \frac{e^{-\xi_2}}{\gamma_3^2} + \frac{e^{-\xi_3}}{\gamma_3^3}\right\}\gamma_3^p, \end{aligned}$$

wo $\xi_0 = x^2 + 2xy + y^2, \quad \xi_1 = -ix^2 + iy^2 + 2xy,$

$\xi_2 = -x^2 + 2xy - y^2, \quad \xi_3 = ix^2 - iy^2 + 2xy; \quad p = 0, 1, 2, 3.$

Nach dieser Vorbereitung lauten die vier Gleichungen $\mu$):

$$\begin{aligned} & \int_0^a \left(e^{-x^2} + i'_1 e^{+ix^2} + ie^{+x^2} + ii'_1 e^{-ix^2}\right) dx \\ & - \int_0^a \left(e^{-x^2 - 2bx - b^2} + i'_1 e^{+ix^2 - ib^2 - 2bx} \right. \\ & \qquad \left. + ie^{x^2 + b^2 - 2bx} + ii'_1 e^{-ix^2 + ib^2 - 2bx}\right) dx \\ = & \int_0^b \left(e^{-y^2} - i'_2 e^{-iy^2} - ie^{+y^2} + ii'_2 e^{+iy^2}\right) dy \\ & - \int_0^b \left(e^{-a^2 - 2ay - y^2} - i'_2 e^{+ia^2 - iy^2 - 2ay} \right. \\ & \qquad \left. - ie^{a^2 + y^2 - 2ay} + ii'_2 e^{-ia^2 + iy^2 - 2ay}\right) dy, \end{aligned}$$

$$\int_0^a \sigma_{i'_2}(x)\, dx - \int_0^a \sigma_{i'_2}(x, b)\, dx$$

$$= \int_0^b \sigma_{i'_1}(y)\, dy - \int_0^b \sigma_{i'_1}(a, y)\, dy,$$

$$\int_0^a \sigma_{-i'_1}(x)\, dx - \int_0^a \sigma_{-i'_1}(x, b)\, dx$$

$$= \int_0^b \sigma_{i'_2}(y)\, dy - \int_0^b \sigma_{i'_2}(a, y)\, dy,$$

$$\int_0^a \sigma_{-i'_2}(x)\,dx - \int_0^a \sigma_{-i'_2}(x,b)\,dx$$

$$= \int_0^b \sigma_{-i'_1}(y)\,dy - \int_0^b \sigma_{-i'_1}(a,y)\,dy.$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen addiren wir zu den mit entgegengesetztem Zeichen versehenen beiden letzten; wir erhalten so

$$\int_0^a \left(e^{+ix^2} - e^{-ix^2} - e^{+ix^2-ib^2-2bx} + e^{-ix^2+ib^2-2bx}\right) dx =$$

$$i\int_0^b \left(e^{-iy^2} + e^{+iy^2} - e^{+ia^2-iy^2-2ay} - e^{-ia^2+iy^2-2ay}\right) dy,$$

und auf eine ähnliche Weise, wenn wir die mittleren Formeln von der ersten mehr letzten subtrahiren

$$i\int_0^a \left(e^{+ix^2} + e^{-ix^2} - e^{+ix^2-ib^2-2bx} - e^{-ix^2+ib^2-2bx}\right) dx$$

$$= -\int_0^b \left(e^{-iy^2} - e^{+iy^2} - e^{+ia^2-iy^2-2ay} + e^{-ia^2+iy^2-2ay}\right) dy.$$

In diesen Ausdrücken kann jetzt $a$ unendlich gross gedacht werden; weil dann die Glieder mit dem Factor $e^{-2ay}$ verschwinden, erhält man einfacher

$$\int_0^\infty \left(e^{+ix^2} - e^{-ix^2}\right) dx - i\int_0^b \left(e^{-iy^2} + e^{+iy^2}\right) dy$$

$$= \int_0^\infty \left[e^{+i(x^2-b^2)-2bx} - e^{-i(x^2-b^2)-2bx}\right] dx,$$

$$\int_0^\infty \left(e^{+ix^2} + e^{-ix^2}\right) dx - i\int_0^b \left(e^{-iy^2} - e^{+iy^2}\right) dy$$

$$= \int_0^\infty \left[e^{+i(x^2-b^2)-2bx} + e^{-i(x^2-b^2)-2bx}\right] dx.$$

Diese Formeln reichen hin zur Isolirung der Integrale $\int_0^\infty e^{-2bx} \cos(x^2)\,dx$ und $\int_0^\infty e^{-2bx} \sin(x^2)\,dx$; die schliesslichen Ergebnisse lauten

$$2\int_0^\infty e^{-2bx} \cos(x^2)\,dx =$$

$$+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(\cos(b^2) - \sin(b^2)\Big) + 2\int_0^b \sin(b^2 - y^2)\,dy, = -2\int_b^\infty \sin(b^2 - y^2)\,dy,$$

$$2\int_0^\infty e^{-2bx} \sin(x^2)\,dx =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(\cos(b^2) + \sin(b^2)\Big) - 2\int_0^b \cos(b^2 - y^2)\,dy = 2\int_b^\infty \cos(b^2 - y^2)\,dy.$$

[Die Integrale $2\int_0^b \cos(b^2 - y^2)\,dy$ und $2\int_0^b \sin(b^2 - y^2)\,dy$ werden mit Zuhilfenahme derselben Wurzeln $\gamma$ gewonnen, wenn man nimmt $F = e^{-(x+\gamma_0^p y)^2}$; sie sind unendlichen Reihen äquivalent und zwar ist

$$2\int_0^b \cos(b^2 - y^2)\,dy = \frac{2b}{1} - \frac{(2b)^5}{3.4.5} + \frac{(2b)^9}{5.6.7.8.9} - \ldots,$$

$$2\int_0^b \sin(b^2 - y^2)\,dy = \frac{(2b)^3}{2.3} - \frac{(2b)^7}{4.5.6.7} + \frac{(2b)^{11}}{6.7.8.9.10.11} - \ldots]$$

Diese Formeln sind in einer sehr wichtigen Frage von Bedeutung. Es zeigt sich nämlich, dass die Integrale linker Hand unendlichen, rasch convergirenden Reihen äquivalent sind, die nach Potenzen einer Constanten $b$ fortschreiten. Diesem feststehenden Resultat muss auch die Rechnung *a posteriori* gerecht werden können. Nun gibt es eine einzige Art, die Integrale linker Hand in Potenzreihen nach $b$ zu verwandeln — es ist dies hier die Substitution der Exponentialreihe für $e^{-2bx}$ und die Trennung der Integrationen nach den einzelnen Potenzen von $b$. Die Coefficienten dieser Potenzen müssen rechts und links identisch sein: es folgt hieraus die Continuität der beiden Formeln

$$\int_0^\infty z^{\mu-1} \cos bz\,dz = \frac{\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi}{b^\mu}, \quad \ldots\ldots\ldots 0)$$

$$\int_0^\infty z^{\mu-1} \sin bz\,dz = \frac{\Gamma(\mu)\sin\frac{1}{2}\mu\pi}{b^\mu}$$

über die bekannte Gültigkeitsgrenze $\mu = 1$ hinaus, während die untere Gültigkeitsgrenze $\mu = 0$ durch die Function $\Gamma(\mu)$ selbst geboten bleibt. Zur Bekräftigung dieser überraschenden (übrigens in andern Fällen mit derselben Nothwendigkeit zu ziehenden) Consequenz, ebenso zur weiteren Sicherstellung der Werthbestimmungen der Integrale

$$\int_0^\infty e^{-2bx} \cos(x^2)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty e^{-2bx} \sin(x^2)\,dx,$$

welche jener Schlussfolgerung zu Grunde liegen, ist es von Vortheil, ähnliche Ableitungen bestimmter Integralformeln mit der obigen zu vergleichen.

Aus der allgemeinen Integralgleichung für die Integration längs zweier Seiten $\alpha\gamma$, $\beta\gamma i$ und der diese Seiten verbindenden, zum Anfangspunkte 0 der Integration zurücklaufenden Diagonale eines Rechtecks

$$(\alpha + i\beta)\int_0^\gamma f([\alpha + i\beta]\,x)\,dx = \int_0^{\alpha\gamma} f(x)\,dx + i\gamma\int_0^\beta f([\alpha + iy]\,\gamma)\,dy$$

folgt für $f = e^{-z}$ und $= e^{-z^2}$ das Doppelsystem

$$\alpha\int_0^\gamma e^{-\alpha x} \cos\beta x\,dx + \beta\int_0^\gamma e^{-\alpha x} \sin\beta x\,d\xi \;\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

$$= \int_0^{\alpha\gamma} e^{-x}\,dx + \gamma e^{-\alpha\gamma}\int_0^\beta \sin\gamma y\,dy,$$

$$\beta\int_0^\gamma e^{-\alpha x} \cos\beta x\,dx - \alpha\int_0^\gamma e^{-\alpha x} \sin\beta x\,dx$$

$$= \gamma e^{-\alpha\gamma}\int_0^\beta \cos\gamma y\,dy;$$

$$\alpha\int_0^\gamma e^{-(\alpha^2-\beta^2)x^2} \cos 2\alpha\beta x^2\,dx + \beta\int_0^\gamma e^{-(\alpha^2-\beta^2)x^2} \sin 2\alpha\beta x^2\,dx \quad 2)$$

$$= \int_0^{\alpha\gamma} e^{-x^2}\,dx + \gamma e^{-\alpha^2\gamma^2}\int_0^\beta e^{+\gamma^2 y^2} \sin 2\alpha\gamma\,y^2\,dy,$$

$$\beta\int_0^\gamma e^{-(\alpha^2-\beta^2)x^2} \cos 2\alpha\beta x^2\,dx - \alpha\int_0^\gamma e^{-(\alpha^2-\beta^2)x^2} \sin 2\alpha\beta x^2\,dx$$

$$= \gamma e^{-\alpha^2\gamma^2}\int_0^\beta e^{+\gamma^2 y^2} \cos 2\alpha\gamma\,y^2\,dy$$

mit den Unbekannten

$$\int_0^\gamma e^{-\alpha x} \cos, \sin\beta x\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^\gamma e^{-(\alpha^2-\beta^2)x^2} \cos, \sin 2\alpha\beta x^2\,dx.$$

Man findet für diese Unbekannten die Auflösungen

$$\int\limits_0^\gamma e^{-\alpha x} \cos\beta x\, dx = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\Big[\alpha \int\limits_0^{\alpha\gamma} e^{-x}\, dx + \alpha\gamma\, e^{-\alpha\gamma} \int\limits_0^\beta \sin\gamma y\, dy$$

$$+ \beta\gamma\, e^{-\alpha\gamma} \int\limits_0^\beta \cos\gamma y\, dy\Big],$$

$$\int\limits_0^\gamma e^{-\alpha x} \sin\beta x\, dx =$$

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\Big[-\alpha\gamma\, e^{-\alpha\gamma} \int\limits_0^\beta \cos\gamma y\, dy + \beta \int\limits_0^{\alpha\gamma} e^{-x}\, dx$$

$$+ \beta\gamma\, e^{-\alpha\gamma} \int\limits_0^\beta \sin\gamma y\, dy\Big];$$

$$\int\limits_0^\gamma e^{-(\alpha^2-\beta^2)x^2} \cos 2\alpha\beta x^2\, dx = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\Big[\alpha \int\limits_0^{\alpha\gamma} e^{-x^2}\, dx + \alpha\gamma\, e^{-\alpha^2\gamma^2} \int\limits_0^\beta e^{+\gamma^2 y^2} \sin 2\alpha\gamma y^2\, dy$$

$$+ \beta\gamma\, e^{-\alpha^2\gamma^2} \int\limits_0^\beta e^{+\gamma^2 y^2} \cos 2\alpha\gamma y^2\, dy\Big],$$

$$\int\limits_0^\gamma e^{-(\alpha^2-\beta^2)x^2} \sin 2\alpha\beta x^2\, dx =$$

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\Big[+\beta \int\limits_0^{\alpha\gamma} e^{-x^2}\, dx + \beta\gamma\, e^{-\alpha^2\gamma^2} \int\limits_0^\beta e^{\gamma^2 y^2} \sin 2\alpha\gamma y^2\, dy$$

$$- \alpha\gamma\, e^{-\alpha^2\gamma^2} \int\limits_0^\beta e^{\gamma^2 y^2} \cos 2\alpha\gamma y^2\, dy\Big].$$

Von den für diese Auflösungen nahe liegenden Umformungen und Grenzübergängen bezüglich $\alpha$ und $\gamma$ ist nur ein einziger wirklich ausführbar — die Annahme $\gamma = \infty$, welche zu den bekannten Lösungen

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos\beta x\, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^\infty e^{-x}\, dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin\beta x\, dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^\infty e^{-x}\, dx;$$

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha^2-\beta^2)x^2} \cos 2\alpha\beta x^2\, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx, \quad . \quad . \quad 6)$$

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha^2-\beta^2)x^2} \sin 2\alpha\beta x^2\, dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

führt mit der selbstverständlichen Bedingung, dass bezüglich

$\alpha > 0, \quad \alpha^2 > \beta^2$ ist,

oder in der strengsten Fassung

$\alpha$ nicht $< 0$, $\alpha^2$ nicht $< \beta^2$ sein darf.

Der Fall $\alpha = 0$, $\alpha = \beta$ in Verbindung mit $\gamma = \infty$ ist nun zwar für die in Rede stehende Herleitung, jedoch nicht für die ihm zugehörenden Integrale selbst

$$\int_0^\infty \cos\beta x\, dx, \quad \int_0^\infty \sin\beta x\, dx;$$

$$\int_0^\infty \cos 2\alpha^2 x^2\, dx, \quad \int_0^\infty \sin 2\alpha^2 x^2\, dx$$

von negativer Bedeutung. Der wahre Werth dieser Integrale darf aus den Formeln 5) und 6) nicht geschlossen werden, weil die Integration, welche zu denselben führt, bezüglich des Differentiales $e^{-z}dz$ keine nothwendig geschlossene ist, bezüglich des Differentiales $e^{-z^2}dz$ in den Theilintegralen zwischen 0 und $\beta$ in 4) unbestimmt wird.

Dass die Divergenz, welche für die Integrale $\int_0^\infty \cos bx\, dx$ und $\int_0^\infty \sin bx\, dx$ scheinbar aus den Formeln 3) hervorgeht, eine unrichtige, aus falschen Formeln geschlossene ist, geht überdies aus dem Umstande hervor, dass jene Integrale in Wahrheit höchstens einen oscillirenden, niemals einen unendlich grossen (divergenten) Werth besitzen können. Bezüglich der Integrale

$$\int_0^\infty \cos 2\alpha^2 x^2\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \sin 2\alpha^2 x^2\, dx$$

erweist ein bekanntes Raisonnement, welches in der Zerlegung der Integrationen gründet, die Endlichkeit und Bestimmtheit dieser vorläufig arbiträr festgesetzten Ausdrücke; eine ähnliche Anwendung desselben Raisonnements auf die Integrale $\int_0^\infty \cos\beta\, x\, dx$ und $\int_0^\infty \sin\beta\, x\, dx$ verbietet sich aber sofort durch die Bemerkung, dass bestimmte Integrale divergenten oder oscillirenden Reihen zwar der Form, nicht aber dem wahren Werthe nach äquivalent sein müssen, daher eine solche Aequivalenz in der Form einer Gleichung ausgedrückt, ebenso gut ihre eigene, als die Nichtigkeit des bestimmten Integrales bezeichnet. Es darf schliesslich aus der unbestimmten Integration die Unbestimmtheit des Cosinus- und des Sinusintegrales nicht geschlossen werden, weil zwischen bestimmten Integralen und der Function, deren Differentialquotient integrirt werden soll, die Nothwendigkeit einer Beziehung aufhört, wo die Grenzen ins Unendliche gerückt werden, oder wenigstens diese Beziehung wesentliche Modificationen erleiden kann. Somit steht der Existenz bestimmter Werthe für die obigen Integrale von keiner Seite eine Ueberlegung entgegen; vielmehr erkennt man nur die Unzulänglichkeit aller jener Betrachtungen für die Ermittlung solcher Werthe nebenhergehend mit der Leichtigkeit, die Frage zu verschieben und vorzeitig über gewisse Ausdrücke abzusprechen.

Eine ähnliche Bewandtnis, wie bei den Integralen $\int_0^\infty \cos, \sin b\, x\, dx$, hat es mit den allgemeineren Integralen

$$\int_0^\infty x^{\mu - 1} \cos, \sin b\, x\, dx,\ \mu \geqq 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

Man gelangt zu diesen und zu Werthen für sie, wenn man in 3) und 4) die Differentiale unter den Integralzeichen rechts und links nach Potenzen von $\alpha$ und $\alpha^2 - \beta^2$ entwickelt. Allein diese Werthe sind ebenso illusorisch, wie im Falle $\mu = 1$. Es entsteht Divergenz in 3), während die Formeln 5) nur für $\alpha < \beta$ convergente Werthe liefern. Jene Entwicklungen sind bedeutungslos, wie es die Entwicklung der Function $e^{-\alpha\gamma}$ für $\gamma = \infty$ ist; diese Werthbestimmungen 5) enthalten durch die Beschränkung $\alpha < \beta$ einen Widerspruch. Von den Werthen in 4) und 6) gilt Aehnliches. Es können die Gleichungen 3) bis 6) zur Werthbestimmung von 7) nicht verwendet werden. Aber auch die widersprechende Natur von 7) selbst (ihre Unendlichkeit oder Unbestimmtheit) kann durch keine Betrachtung erhärtet werden.

Nunmehr ergänzen wir die Grundformeln 1) und 2) durch die folgenden:

$$e^{b^2}\int_0^a e^{-x^2} \cos 2bx\, dx = \int_0^a e^{-x^2} dx + e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2} \sin 2ay\, dy, \quad . \quad . \quad 8)$$

$$e^{b^2}\int_0^a e^{-x^2} \sin 2bx\, dx = \int_0^b e^{y^2} dy - e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2} \cos 2ay\, dy;$$

$$\int_0^a e^{-2bx} \cos(x^2)\, dx = \int_0^a \cos(b^2 + x^2)\, dx + \int_0^b \sin(b^2 - y^2)\, dy \qquad 9)$$

$$- \int_0^b e^{-2ay} \sin(a^2 + b^2 - y^2)\, dy$$

$$\int_0^a e^{-2bx} \sin(x^2)\, dx = \int_0^a \sin(b^2 + x^2)\, dx - \int_0^b \cos(b^2 - y^2)\, dy$$

$$+ \int_0^b e^{-2ay} \cos(a^2 + b^2 - y^2)\, dy.$$

Diese Formeln sind gegenseitig reciprok und stehen zu 1) und 2) in Gegensatz. In ihnen werden die Bedingungen der geschlossenen Integration, der Endlichkeit der Function $f = e^{-z^2}$ durch die gleichzeitige Annahme $a = \infty$ und Entwicklung nach der Constante $b$ nicht alterirt. Das Resultat ist für 8) ein bekanntes: die Werthbestimmung des Integrales $\int_0^\infty e^{-x^2} x^p\, dx$, für 9) aber die Antwort auf die directer Lösung spottende Frage nach den Werthbestimmungen 7), wie sie in 0) unterschiedslos, für $\mu \lesseqgtr 1$ gegeben sind. Man erkennt deutlich die Symmetrie, welche hiernach in den Randintegralen des Rechtecks und Rhomboides

$$\int e^{-(x + iy)^2}\, d(x + iy) \quad \text{und} \quad \int e^{-(i_1' x + i_2' y)^2}\, d(i_1' x + i_2' y)$$

allerdings verhüllt besteht. Ihre Ergänzung bildet einestheils die Integration längs eines gegen das ebengenannte um $\frac{\pi}{8}$ verschobenen Rhomboides:

$$\int e^{-(x + i_1' y)}\, d(x + i_1' y),$$

welches zur Kenntnis der Integrale

$$\int_0^b \cos, \sin(y^2)\, dy, \int_0^\infty \cos, \sin(y^2)\, dy$$

führt, andererntheils die Beschreitung des rechtwinkeligen Dreiecks in

$$\int e^{-(x + iy)}\, d(x + iy) \quad \text{und} \quad \int e^{-(x + iy)^2}\, d(x + iy);$$

die einzige Voraussetzung aller endlichen Werthbestimmungen besteht im Laplace'schen Normalintegral $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$, resp. $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx$, deren Bedeutung und Bestimmung von den hier in Kurzem skizzirten Betrachtungen unabhängig ist.

Wir kehren nochmals zu den Formeln 9) zurück

$$\int\limits_0^\infty e^{-2bx}\cos(x^2)\,dx = -2\int\limits_b^\infty \sin(b^2 - y^2)\,dy,$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-2bx}\sin(x^2)\,dx = +2\int\limits_b^\infty \cos(b^2 - y^2)\,dy.$$

Wir haben die Ausdrücke links und rechts nach Potenzen von $b$ entwickelt — es bedarf noch des Nachweises, dass die Reihen linker Hand convergiren, um die Coefficienten gleicher Potenzen $b$ auf beiden Seiten identificiren zu können.

Zu diesem Zwecke geben wir den Integralen linker Hand die Form der Maclaurin'schen Reihe. Irgend ein Coefficient derselben sei

$$\frac{1}{k!}D^k_{b=0}\int\limits_0^\infty e^{-2bx}\cos,\ \sin(x^2)\,dx$$

und soll auf den einfachsten Ausdruck reducirt werden. Dass

$$D_{b=0}\int\limits_0^\infty e^{-2bx}\cos,\ \sin(x^2)\,dx = \int\limits_0^\infty D_{b=0}\,e^{-2bx}\cos,\ \sin(x^2)\,dx$$

$$= -2\int\limits_0^\infty x\cos,\ \sin(x^2)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

sei, darf nur unter der Bedingung

$$0 = db\int\limits_0^\infty (2x)^2\cos,\ \sin(x^2)\,e^{-2bx-\varepsilon 2dbx}\,dx$$

oder

$$0 = db\int\limits_0^\infty (2x)^2\cos,\ \sin(x^2)\,dx$$

für $b = 0$ angenommen werden. Während die allgemeinere Bedingung, wofür $b > 0$, allzeit erfüllt ist, trifft der Grenzfall $b = 0$ gerade den Angelpunkt der Frage: wenn $\int\limits_0^\infty (2x)^2\cos,\ \sin(x^2)\,dx$ endlich ist, findet die Gleichung 10) statt. Wo dies nicht der Fall ist, divergirt der Ausdruck

$$\int_0^\infty D_{b=0}\, e^{-2bx} \cos,\ \sin(x^2)\, dx \text{ gemäss 9).}$$

Ebenso ist $\int_0^\infty D^2_{b=0}\, e^{-2bx} \cos,\ \sin(x^2)\, dx$ unendlich gross gleichzeitig mit

$$\int_0^\infty D^3_{b=0}\, e^{-2bx} \cos,\ \sin(x^2)\, dx.$$

Und es besteht Reciprocität zwischen der Divergenz oder Convergenz von

$$\int_0^\infty D^k_{b=0}\, e^{-2bx} \cos,\ \sin(x^2)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

und dem Nichtbestehen oder Stattfinden der Gleichung

$$D^k_{b=0} \int_0^\infty e^{-2bx} \cos,\ \sin(x^2)\, dx = \int_0^\infty D^k_{b=0}\, e^{-2bx} \cos,\ \sin(x^2)\, dx. \qquad 12)$$

Unter der Bedingung der Convergenz der Reihe der Glieder 11) findet also gleichzeitig statt die Identität dieser Reihe mit der Maclaurin'schen Reihe von 9) und die Convergenz der letzteren auf Grund von 12). Um die Convergenz der Reihe der Glieder 11) nachzuweisen, drücken wir das Restglied der Maclaurin'schen Formel als bestimmtes Integral aus. Es ist

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_0^b (b-u)^n\, F^{(n+1)}(u)\, du,$$

also in unserem Falle

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_0^b (b-u)^n\, D_u^{n+1} \int_0^\infty e^{-2ux} \cos,\ \sin(x^2)\, dx\, du$$

$$= \frac{1}{n!} \int_0^b (b-u)^n \int_0^\infty D_u^{n+1}\, e^{-2ux} \cos,\ \sin(x^2)\, dx\, du$$

$$= \frac{1}{n!} \int_0^b (b-u)^n\, e^{-2ux} \int_0^\infty (-2x)^{n+1} \cos,\ \sin(x^2)\, dx\, du.$$

Da der Factor $(-2x)^{n+1}$ bei der Integration aus der Gleichung herausfällt, so haben wir ganz die Convergenzbedingungen der Exponentialreihe vor uns; es verschwindet $\mathit{Lim}\ R_{n+1}$ für jedes endliche positive $b$. Hiermit ist die Convergenz der Entwicklung 11) und 9), die Berechtigung der Identificirung der Coefficienten in 9) und die Erweiterung der Gültigkeitsgrenzen für 0) erwiesen.

Die Continuität der Functionen rechts und links in 0) bezüglich $\mu$ verlangt dazu, dass auch die zwischen den einzelnen ganzen Zahlen inneliegenden Werthe von $\mu$ für die Formeln 0) in Anspruch genommen werden. An einigen Beispielen möge nun die Festigkeit und Sicherheit der aus den Gleichungen 9) gezogenen Folgerung erprobt werden.

Geschlossene Integrationen längs eines unbegrenzten Octanten führen auf die Formeln

$$\int_0^\infty \frac{a^2 \cos(z^2)}{a^4 + z^4}\, dz = \frac{\pi}{4\sqrt{2a}}\, e^{-a^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{a^2 e^{-x^2}}{a^4 - x^4}\, dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{a^2 \sin(z^2)}{a^4 + z^4}\, dz = -\frac{\pi}{4\sqrt{2a}}\, e^{-a^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{a^2 e^{-x^2}}{a^4 - x^4}\, dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{a^2 z^2 \cos(z^2)}{a^4 + z^4}\, dz = \frac{\pi a}{4\sqrt{2}}\, e^{-a^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{a^2 x^2 e^{-x^2}}{a^4 - x^4}\, dx,$$

$$\int_0^\infty \frac{a^2 z^2 \sin(z^2)}{a^4 + z^4}\, dz = \frac{\pi a}{4\sqrt{2}}\, e^{-a^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{a^2 x^2 e^{-x^2}}{a^4 - x^4}\, dx.$$

Multiplicirt man diese Formeln mit $da$ und integrirt erst nach $a$, dann nach $z$, so erhält man nach $\iota$) und $\varkappa$) (Seite 23 $f$).

$$2\int_0^\infty \frac{\cos(z^2)}{z}\, dz = \int_0^\infty \frac{e^{-a^2}}{a}\, da + \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x}\, dx = 2\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x}\, dx,$$

$$2\int_0^\infty \frac{\sin(z^2)}{z}\, dz = -\int_0^\infty \frac{e^{-a^2}}{a}\, da + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{a^2 e^{-x^2}}{a^4 - x^4}\, dx\, da = \infty - \infty,$$

$$2\int_0^\infty z \cos(z^2)\, dz = \int_0^\infty a e^{-a^2}\, da - \int_0^\infty x e^{-x^2}\, dx = 0,$$

$$2\int_0^\infty z \sin(z^2)\, dz = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1.$$

Geht man in

$$\int_0^\infty z^{\mu-1} \cos bz\, dz = \frac{\Gamma(u) \cos \frac{1}{2} \mu \pi}{b^u},$$

$$\int_0^\infty z^{\mu - 1} \sin bz\, dz = \frac{\Gamma(\mu) \sin \frac{1}{2} \mu \pi}{b^\mu}, \quad \infty > \mu > 1$$

zur Grenze für $b = \infty$ über, so verschwinden die Integrale gemäss den Sätzen

$$Lim \int_0^\alpha z^{\mu - 1} \sin bz\, dz = \frac{\pi}{2} f(0),$$

$$Lim \int_0^\alpha f(z) \cos bz\, dz = 0.$$

Der erstere dieser Sätze zeigt, dass bei Anwendung doppelter Integrationen die erste Integration

$$\int_0^\infty z^{2\mu - 2} \cos bz\, dz = 0$$

stets einer Prüfung unterzogen werden muss. Die zweite Integration kann entweder nach jenem Satze ein von 0 verschiedenes Resultat liefern, oder dieses lässt sich ohne jenen Satz immer vermuthen, weil dann mit der Limite der ersten verschwindenden Integration die zweite divergente als Ausdruck $0 . \infty$ zusammentrifft. Wenn z. B. in

$$\int_0^\infty \sin xu\, du \int_a^b \sin uy\, \psi y\, dy = \frac{\pi}{2} \psi x$$

$\psi x = 1$, $a = 0$, $b = \infty$ unendlich genommen wird, so hat man zunächst

$$\int_0^\infty \sin uy\, dy = \frac{1}{u},$$

sodann

$$\int \frac{\sin xu}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$$

in Uebereinstimmung mit dem rechter Hand stehenden Werthe; dagegen darf in der gleichlautenden Formel

$$\int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^\infty \cos uy\, dy = \frac{\pi}{2}$$

nicht

$$\int_0^\infty \cos uy\, dy = 0$$

gesetzt, sondern muss

$$\int_0^\infty \cos uy\, dy = Lim \frac{\cos\frac{\pi}{2}\mu}{u^\mu},\quad \mu = 1$$

genommen werden; man hat dann richtig

$$Lim \int_0^\infty u^{1-1} \frac{\cos xu}{u^\mu}\, du = Lim \int_0^\infty u^{-\mu} \cos xu\, du$$

$$= \frac{\Gamma(1-\mu)\cos\left[(\mu-1)\frac{\pi}{2}\right]}{x^{\mu-1}},$$

und $Lim\left\{\Gamma(1-\mu)\,.\,\cos\mu\frac{\pi}{2}\right\}$ nach den Regeln der Bestimmung von Ausdrücken $0\,.\,\infty = \frac{\pi}{2}$.

In den Formeln

$$\int_0^\infty \cos xu\, du \int_a^b \sin uy\, \psi y\, dy = \int_a^b \frac{y\psi y}{y^2 - x^2}\, dy,$$

$$\int_0^\infty \sin xu\, du \int_a^b \cos uy\, \psi y\, dy = \int_a^b \frac{x\psi y}{x^2 - y^2}\, dy$$

können dieselben Annahmen gemacht werden. In der ersteren ist

$$\int_0^\infty \sin uy\, dy = \frac{1}{u}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}\, du = l\infty - lx = \int_0^\infty \frac{du}{u} - C - lx$$

übereinstimmend mit

$$\int_0^\infty \frac{y}{y^2 - x^2}\, dy = \tfrac{1}{4}\, l(\infty^4) - \tfrac{1}{4}\, l\left\{(-x^2)^2\right\};$$

in der zweiten Formel darf

$$\int_0^\infty \cos uy\, dy = 0$$

genommen werden, weil $\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}\, du$ nicht divergirt; in der That ist auch

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2 - y^2}\, dy = 0 \text{ (siehe die Formeln } \iota),\ \varkappa) \text{ und auch unten).}$$

Für $\psi(y) = \frac{1}{y}$ ist in der ersteren Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin u y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}$$

und wieder

$$\int_0^\infty \cos x u\, du = \int_0^\infty \frac{dy}{x^2 - y^2} = 0.$$

Die principielle Bedeutung dieser Anwendungen für die Theorie der Fourier'schen Integrale liegt auf der Hand. Wenn die Grundformeln

$$\int_0^\infty \cos x u\, du = 0, \quad \int_0^\infty \sin x u\, du = \frac{1}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

zu Recht bestehen, so folgt daraus mit Nothwendigkeit die Ungebundenheit dieser unbegrenzten Integrationen bezüglich der unbestimmten Integralformeln, welche, so nahe sie liegen mögen, über die Existenz und Widerspruchslosigkeit der Werthe 0 und $\frac{1}{u}$ nicht entscheiden.

In der Theorie der Fourier'schen Integrale benützt man nun in ungerechtfertigter Weise die unbestimmte Integration der ersten der Formeln 13) und wird dadurch zur Einführung des problematischen, unstatthaften Symboles $Lim \sin \mu \vartheta$, $\mu = \infty$ genöthigt. Indem man diesen Fehler durch die Substitution $\mu \vartheta = \eta$ eliminirt, gelangt man zur Bestimmung des Integrales $Lim \int_0^\beta \frac{\sin \mu \vartheta}{\vartheta} f(\vartheta)\, d\vartheta$ erstens mit der unnatürlichen Beschränkung auf positive $\vartheta$, zweitens mit Zuhilfenahme einer weitläufigen, der Sache fremden Reihenentwicklung, aus welcher zudem der Werth $\frac{\pi}{2}$ nur durch eine Specialisirung des $f$ hervorgeht.

Mit Benützung der Bestimmungen 13) werden alle diese Ungenauigkeiten, Weitläufigkeiten und Mängel vermieden; die Lehre von den Fourier'schen Integralen kann sodann auf die folgende Art am kürzesten und präcisesten begründet werden.

Das Integral

$$\int_0^\infty u^{\mu - 1} \cos (y - x) u\, du \int_a^b f(y)\, dy = J, \quad b > a > 0$$

ist zufolge Gleichung 0) identisch mit

$$\Gamma(\mu) \cos \frac{\mu \pi}{2} \int_a^b \frac{f(y)}{\left[\varepsilon (y - x)\right]^\mu}\, dy = \Gamma(\mu) \cos \frac{\mu \pi}{2} \int_a^b \frac{e^{-y} \varphi(y)}{\left[\varepsilon (y - x)\right]^\mu}\, dy,$$

wo einmal $\varepsilon = \pm 1$ bedeutet, dass $\varepsilon(y - x)$, von $y = a$ bis $y = b$ stets positiv sein soll, dann das Product $e^{-y}\,\varphi(y)$ die willkürliche Function ohne Beschränkung dieser Willkürlichkeit vertritt.

Es liege nun $x$ irgendwo zwischen $a$ und $b$; in diesem Falle gehört im Allgemeinen das Integral zu den divergenten, so oft $\mu \geqq 1$ ist. Uns interessirt zunächst nur der Fall $\mu = 1$, für welchen $\cos\frac{\mu\pi}{2}$ verschwindet, und die derart entspringende Limitenbestimmung $0.\infty$ nach $\mu$; die späteren Fälle $\mu = 2$, 3 etc., welche nicht minder wichtig sind als $\mu = 1$, müssen der späteren Untersuchung vorbehalten bleiben. Unter der Bedingung der Endlichkeit und Stetigkeit zwischen $a$ und $b$ kann $\varphi(y)$ in eine Reihe

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots$$

verwandelt werden und für $J$ kann man die Summe der Integrale setzen

$$\Gamma(\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}\left\{a_0\int\limits_a^b \frac{e^{-y}}{[\varepsilon(y-x)]^{\mu}}\,dy + a_1\int\limits_a^b \frac{e^{-y}\,.\,y}{[\varepsilon(y-x)]^{\mu}}\,dy + \dots\right\} \qquad 14)$$

Jedes einzelne dieser Integrale zerfällt in zwei Theile und ebenso die Reihe nach der folgenden unmittelbar einleuchtenden Zerlegung

$$J = \Gamma(\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}\left\{a_0\int\limits_a^x \frac{e^{-y}}{(x-y)^{\mu}}\,dy + a_1\int\limits_a^x y\,\frac{e^{-y}}{(x-y)^{\mu}}\,dy + \dots\right.$$

$$\left. + a_0\int\limits_x^b \frac{e^{-y}}{(y-x)^{\mu}}\,dy + a_1\int\limits_x^b y\,\frac{e^{-y}}{(y-x)^{\mu}}\,dy + \dots\right\}$$

$$= \Gamma(\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}\left\{a_0\int\limits_0^{x-a} \frac{e^{-x+z}}{z^{\mu}}\,dz + a_1\int\limits_0^{x-a} \frac{e^{-x+z}}{z^{\mu}}(x-z)\,dz + \dots\right.$$

$$\left. + a_0\int\limits_0^{b-x} \frac{e^{-x-z}}{z^{\mu}}\,dz + a_1\int\limits_0^{b-x} \frac{e^{-x-z}}{z^{\mu}}(x+z)\,dz + \dots\right\}.$$

Wenn hierin $\mu = 1$ gesetzt wird, so kommen bei der Grenzbestimmung $0.\infty$ nur jene Theile der Integration in Betracht, welche divergiren und es ist wohl klar, dass ohne Darstellung von $\varphi$ als $a_0 + a_1 y + \dots$ von Anfang an für $J$ das Integral hätte gesetzt werden können

$$J = f(x)\,Lim\left\{\cos\frac{\mu\pi}{2}\int\limits_0^{x-a} \frac{e^{+z}}{z^{\mu}}\,dz + \cos\frac{\mu\pi}{2}\int\limits_0^{b-x} \frac{e^{-z}}{z^{\mu}}\,dz\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

Auch um die Identität der jetzigen zwei Grenzbestimmungen nachzuweisen, bedürfte es strenge genommen nicht erst des spitzfindigen, die wahre Natur der Probleme stets verhüllenden Raisonnements; auch die folgende zweifache Darstellung ist weniger geeignet, die Einfachheit und Anschaulichkeit der gegenwärtigen Aufgabe, als besondere Eigenschaften anderer mit ihr lose zusammenhängender Fragen hervortreten zu lassen. Es handelt sich darum, die Function von $\mu$, welche, als Grenzfall, den Integralen $\int_0^{a-x}$ und $\int_0^{b-x}$ äquivalent ist, aufzufinden, welche in Verbindung mit $\cos\frac{\mu\pi}{2}$ der bekannten Regel der Grenzbestimmung unterworfen werden kann. Wir erinnern zu diesem Zwecke an die Formel der unbestimmten Integration

$$\int x^m e^{ax}\, dx = \left[\frac{x^m}{a} - \frac{m x^{m-1}}{a^2} + \frac{m(m-1)x^{m-2}}{a^3} - \right.$$

$$\left. - \ldots + (-1)^m \frac{m(m-1)\ldots 2\cdot 1}{a^{m+1}}\right] e^{ax}, \quad a = \pm 1,$$

welche zunächst blos für positive ganze $m$ und für $m = 0$ gilt, aber doch mit noch näher zu bezeichnenden Modificationen für $m = -1$ den gesuchten, eindeutigen Grenzfall liefert. Denn diese Formel führt für $m = -1$ auf logarithmische Divergenz, wie aus der folgenden Schreibweise

$$\int x^m e^{\mp x}\, dx =$$

$$-\Gamma(1+m)\left\{1 \pm \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} \pm \frac{x^3}{3!} + \ldots \pm (-1)^m \frac{x^m}{m!}\right\} e^{\mp x} (\mp 1)^{m+1} \quad 16)$$

hervorgeht. Nun muss aber, weil in der Limite $\cos\frac{\mu\pi}{2}\int\limits_0^c \frac{e^{\pm z}}{z^\mu}\, dz$ der Logarithmus des Unendlichkleinen ohne Factor erscheint, die eingeklammerte Reihe als unendlich aufgefasst und mit $e^{\mp x}$ zur Einheit reducirt werden. Indem diese Betrachtungen für die untere Integrationsgrenze gelten, ist das Zeichen zu ändern; es bleibt schliesslich in beiden Fällen blos der Ausdruck $\Gamma(1-\mu)$, der mit $\cos\frac{\mu\pi}{2}$ den Werth $\frac{\pi}{2}$ erzeugt. Damit aber erscheint für $J$

$$\int\limits_0^\infty u^{\mu-1} \cos(y-x)\, u\, du \int\limits_a^b f(y)\, dy =$$

$$Lim\left\{\cos\frac{\mu\pi}{2}\int\limits_a^b \frac{f(y)}{[\varepsilon(y-x)]^\mu}\, dy\right\} = \pi f(x), \quad \ldots \quad 17)$$

$0 < a < x < b$; für $x = a$ und $x = b$ hat man blos die Hälfte des betreffenden Functionswerthes zu nehmen, da eine Theilintegration verschwindet, und für $x < a$ oder $x > b$ verschwindet $J$.

Anschaulicher als die vorstehende Ableitung ist die gesonderte Betrachtung der Integrale $\int_0^{x-a}$ und $\int_0^{b-x}$. In dem einen, welches die Function $f(x-y)$ enthält, setze man $f(z)=e^z\,\varphi(z)$, in dem andern, worin $f(x+y)$ ist, sei

$$f = e^{-z}\,\psi(z),$$

also

$$\varphi(z)\,\psi(z) = \{f(z)\}^2;$$

dann hat man das Eine Integral

$$\int_0^c \frac{e^{-z}}{z^\mu}\,dz,$$

welches sich von $\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{z^\mu}\,dz$ bekanntlich blos durch eine endliche Function unterscheidet. Vernachlässigt man diese, so hat man direct $\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{z^\mu}\,dz = \Gamma(1-\mu)$ und gelangt zu denselben Resultaten wie früher. Fügen wir zu ihnen die unmittelbar aufzustellende Bestimmung

$$\int_0^\infty \cos(y+x)u\,du \int_a^b f(y)\,dy = 0,\quad x \gtreqq a > 0,\quad = \frac{\pi}{2} f(0),\quad x = a = 0,$$

so erhalten wir die Fourier'schen Doppelintegrale in der gewöhnlichen Gestalt und es können uns die Annahmen $f(y)=1,\quad a=0,\quad b=\infty$ jetzt nicht mehr paradox erscheinen.

Die Bedingungen für die Existenz der Fourier'schen Integrale sind die Endlichkeit und Stetigkeit der Function $f$ zwischen $a$ und $b$. Ebenso wenig wie die letztere nothwendig auf positive $a$ und $b$ beschränkt ist, ist es die Existenz der Integrale. Die Ableitung der betreffenden Functionswerthe bleibt immer dieselbe, ist aber für die methodische Bedeutung der Fourier'schen Integrale selbst von geringerer Wichtigkeit. Wir kommen aber später auf diese Einführung negativer Argumente und negativer Grenzen zurück. Wegen der folgenden Anwendung mögen hier auch die Analogien der Fourier'schen Integrale eine Stelle finden; die Sinusformel 13) liefert augenblicklich die Beziehungen

$$\int_0^\infty \sin xu\,du \int_a^b \cos uy\,f(y)\,dy = \int_a^b \frac{x\,f(y)}{x^2-y^2}\,dy,$$

$$\int_0^\infty \cos xu\,du \int_a^b \sin uy\,f(y)\,dy = \int_a^b \frac{y\,f(y)}{y^2-x^2}\,dy,$$

welche in allen jenen Fällen von Bedeutung sind, wo die Discontinuität rechter Hand nur scheinbar Divergenz zur Folge hat, da die Bedingung eines allzeit positiven Nenners hier nicht obwaltet.

Wenn, wie bemerkt, die geläufige Begründung der Theorie der Fourier'schen Integrale richtige Resultate durch Umgehung der Formeln 0) erzielt, so muss dagegen die directe Leugnung dieser Formeln falsche und höchst einseitige Consequenzen nach sich ziehen. Dies ist der Fall, wenn die Definitionsgleichungen der Fourier'schen Integrale nach $x$ differenzirt werden. Die principielle Nothwendigkeit ihrer Existenz erhellt erst aus der wiederholten Anwendung der Differentiationsregel und geht durch Nichtanerkennung der Formeln 0) verloren.

Aus der Identität

$$\frac{\pi}{2} f^{(n)}(x) = D_x^n \int_0^\infty \cos xu\, du \int_a^b f(y) \cos uy\, dy$$

$$= D_x^n \int_0^\infty \sin xu\, du \int_a^b f(y) \sin uy\, dy$$

geht die Bedingungsgleichung für die Differentiation unter dem Integralzeichen hervor, wenn zugleich auf die Formeln

$$\frac{\pi}{2} f^{(n)}(x) = \int_0^\infty \cos xu\, du \int_a^b f^{(n)}(y) \cos uy\, dy$$

$$= \int_0^\infty \sin xu\, du \int_a^b f^{(n)}(y) \sin uy\, dy$$

Rücksicht genommen wird; diese Bedingungsgleichung lautet

$$\int_0^\infty \cos, \sin xu\, du \int_a^b f^{(n)}(y) \cos, \sin uy\, dy =$$

$$\int_0^\infty u^n \cos, \sin \left(xu + \frac{n\pi}{2}\right) \int_a^b f(y) \cos, \sin uy\, dy.$$

Ihre Reduction geschieht nun mit Hilfe fortgesetzter partieller Integration. Man kann den Regress leicht in den folgenden Formeln wiederfinden:

$$\int_0^\infty \cos xu\, du \int_a^b \cos uy\, f^{(n)}(y)\, dy = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 18)$$

$$\int_0^\infty \cos xu \left\{ f^{(n-1)}(b) \cos bu - f^{(n-1)}(a) \cos au \right\} du$$

$$-\int_0^\infty \cos xu \left\{ f^{(n-2)}(b) \cos\left(bu + \frac{\pi}{2}\right) - f^{(n-2)}(a) \cos\left(au + \frac{\pi}{2}\right)\right\} u\, du$$

$$+\int_0^\infty \cos xu \left\{ f^{(n-3)}(b) \cos\left(bu + \frac{2\pi}{2}\right) - f^{(n-3)}(a) \cos\left(au + \frac{2\pi}{2}\right)\right\} u^2\, du$$

$$-\ldots$$

$$+(-1)^{n-2}\int_0^\infty \cos xu \left\{ f'(b) \cos\left(bu + \frac{(n-2)\pi}{2}\right) - f'(a) \cos\left(au + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)\right\} u^{n-2}\, du$$

$$+(-1)^{n-1}\int_0^\infty \cos xu \left\{ f(b) \cos\left(bu + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) - f(a) \cos\left(au + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)\right\} u^{n-1}\, du$$

$$+(-1)^n \int_0^\infty \cos(xu)\, u^n\, du \int_a^b f(y) \cos\left(uy + \frac{n\pi}{2}\right) dy;$$

$$\int_0^\infty \sin xu\, du \int_a^b \sin uy\, f^{(n)}(y)\, dy = \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 19)$$

$$\int_0^\infty \sin xu \left\{ f^{(n-1)}(b) \sin bu - f^{(n-1)}(a) \sin au \right\} du$$

$$-\int_0^\infty \sin xu \left\{ f^{(n-2)}(b) \sin\left(bu + \frac{\pi}{2}\right) - f^{(n-2)}(a) \sin\left(au + \frac{\pi}{2}\right)\right\} u\, du$$

$$+\ldots$$

$$+(-1)^{n-2}\int_0^\infty \sin xu \left\{ f'(b) \sin\left(bu + \frac{n-2\pi}{2}\right) - f'(a) \sin\left(au + \frac{\overline{n-2\pi}}{2}\right)\right\} u^{n-2}\, du$$

$$+(-1)^{n-1}\int_0^\infty \sin xu \left\{ f(b) \sin\left(bu + \frac{\overline{n-1\pi}}{2}\right) - f(a) \sin\left(au + \frac{\overline{n-1\pi}}{2}\right)\right\} u^{n-1}\, du$$

$$+(-1)^n \int_0^\infty \sin(xu)\, u^n\, du \int_a^b f(y) \sin\left(uy + \frac{n\pi}{2}\right) dy.$$

Weil das Aggregat der vier bei geraden und ungeraden $n$ entstehenden Fälle

$$(-1)^n \int_0^\infty u^n \cos xu\, du \int_a^b \cos\left(uy + \frac{n\pi}{2}\right) f(y)\, dy,$$

$$(-1)^n \int_0^\infty u^n \sin xu\, du \int_a^b \sin\left(uy + \frac{n\pi}{2}\right) f(y)\, dy$$

von dem Aggregate

$$\int_0^\infty u^n \cos\left(xu + \frac{n\pi}{2}\right) du \int_a^b \cos uy\, f(y)\, dy,$$

$$\int_0^\infty u^n \sin\left(xu + \frac{n\pi}{2}\right) du \int_a^b \sin uy\, f(y)\, dy$$

nicht verschieden ist und die Doppelintegrale linker Hand den gemeinschaftlichen Werth $\frac{\pi}{2} f^{(n)}(x)$ besitzen, so verlangt die vorbezeichnete Bedingung das Verschwinden sämmtlicher einfacher Integrale rechter Hand in 18) und 19). Wir haben hier die erste Anwendung der allgemeinen Formeln 0) vor uns, welche im gegenwärtigen Falle zu dem gewünschten Resultate führt, wenn alle Differentialquotienten von $f$ und diese Function selbst für $a$ und $b$ nicht divergiren. Diese Festsetzung verbunden mit der allgemeinen Forderung, dass die genannten Ausdrücke zwischen $a$ und $b$ überall endlich und stetig bleiben, ermöglicht es aber erst, die theilweise Integration anzuwenden. Nun ist diese Integration der einzige Weg, die Formeln

$$\int_0^\infty u^n \cos\left(xu + \frac{n\pi}{2}\right) du \int_a^b \cos uy\, f(y)\, dy \quad . \quad . \quad . \quad 20)$$

$$= \int_0^\infty u^n \sin\left(xu + \frac{n\pi}{2}\right) du \int_a^b \sin uy\, f(y)\, dy$$

$$= \int_0^\infty \cos xu\, du \int_a^b \cos uy\, f^{(n)}(y)\, dy$$

$$= \int_0^\infty \sin xu\, du \int_a^b \sin uy\, f^{(n)}(y)\, dy = \frac{\pi}{2} f^{(n)}(x)$$

zu erreichen (wie es die Formeln auch an und für sich aussprechen) — es sind die Bedingungen der Ableitung also auch wirklich die natürlichen Bedingungen des gestellten Problems. Und diese Bedingungen gelten nun auch für den aus 20) durch directe Integration der linken Seiten dieser Gleichungen neu zu gewinnenden Satz

$$Lim \left\{ \frac{1}{2} \cos \frac{(2n+\mu)\pi}{2} \int_a^b \frac{f(y)}{\pm (x-y)^{n+\mu}} dy \right\} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f^{(n)}(x)}{1.2.3..,n}, \quad . \quad . \quad 21)$$

$$\mu = 1$$

in welchem wir die Fundamentalformel der Theorie der Fourier'schen Integrale zu erkennen haben.

Diese Formel bildet das Analogon zur Gleichung der Umkreisung eines Ausnahmepunktes $\zeta$ bezüglich der Integration der der Theorie von der Abhängigkeit complexer Systeme angehörigen Function $\frac{f(z)}{\zeta - z}$ längs willkürlichen, geschlossenen Integrationswegen. Die Theorie der Fourier'schen Integrale erscheint damit selbst als das der Theorie complexer Functionen im Gebiete des Reellen ebenbürtige Glied: die arbiträren geschlossenen Integrationen wickeln sich als reelle Integrationsstrecke von beliebiger Begrenzung ab und die Grenzbetrachtung unendlich naher Umkreisungen von Ausnahmepunkten hat zum Gegenstück die Limitenbestimmung des Productes divergenter und verschwindender Integrale. Die Analogien der Fourier'schen Integrale kehren gleichfalls in der Lehre von den geschlossenen Integrationen ohne Ausnahmepunkte wieder. Die principielle Bedeutung der beiden Theorien gipfelt gemeinschaftlich in der Entwicklung der Function und ihrer Differentialquotienten als begrenzte und unbegrenzte Reihe einerseits, begrenztes und unbegrenztes Integral anderseits. Zwischen beiden Formen der Entwicklung — lehrt die Discussion der Resultate weiter — besteht durchgreifende Reciprocität; auch in den Gefahren, welche in einer Missdeutung des Ueberganges vom Endlichen in's Unendliche für die Existenz von Reihe und Integral entstehen können. Ganz ausschliesslich nur, um diese Missdeutung scharf hervorheben zu können, gehen wir auf die Reihenentwicklung, welche die Formel 21) an die Hand gibt, noch näher ein.

Indem wir $a$ und $x$ vertauschen, entwickeln wir in der Formel

$$\frac{\pi}{2} f(a) = Lim \left\{ \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} \int_x^b \frac{f(y)}{\pm (a-y)} dy \right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22)$$

in welcher der Buchstabe $\mu$ als unwesentlich mit der Einheit vertauscht worden,

$$\frac{1}{a-y} = - \frac{1}{y\left(1 - \frac{a}{y}\right)}$$

in die Reihe

$$- \frac{1}{y} \left(1 + \frac{a}{y} + \frac{a^2}{y^2} + \dots\right);$$

damit sie während der Integration convergent bleibe, müssen wir $a$ vorläufig mit dem unteren Grenzwerthe $x$ identificiren und erhalten aus 22) die neue Gleichung

$$\frac{\pi}{2} f(x) =$$

$$Lim \left\{ \cos \frac{\pi}{2} \left[ \int_x^b \frac{f(y)}{y} dy + x \int_x^b \frac{f(x)}{y^2} dy + \dots \right] \right\}, \quad . \quad . \quad . \quad 22\,b)$$

bezüglich welcher wir die Formel 21) für $n = 0, 1, .. n$, $x = 0$ in Anspruch nehmen sollten. Allein diese Zuziehung von 21) und überhaupt die ganze Rechnung ist trügerisch. Man gelangt nur zu den Identitäten $0 = 0$, wenn $x$ beliebig, $f(0) = f(0)$, wenn $x = 0$ vorausgesetzt wird. Die Gleichung 22 *b*) zeigt, dass ohne Zuhilfenahme negativer $y$ das gewünschte Resultat sich nicht erzielen lässt. Wenn hiermit also eine neue Uebereinstimmung mit der Lehre von den geschlossenen Integrationen entspringt, indem diese den Nullpunkt umkreisen, also sämmtliche Radien der Zahlentafel treffen muss, so macht sich aber auch eine selbständige Behandlung des Problems insofern nothwendig, als bei der geradlinigen Integration der Fourier'schen Integrale die Reihenentwicklung von $\frac{1}{x-y}$ jetzt vollkommen unstatthaft ist. Wie hat jetzt die Reduction des Ausnahmepunktes $y = x$ auf den Ausnahmepunkt $y = 0$ zu geschehen? Wird der Convergenzkreis der geschlossenen Integration im Gebiete des Reellen auf eine angemessene Art vertreten sein? Diese Fragen zu beantworten, gehen wir auf die Formeln

$$2 \int_0^\infty u^{\mu - 1} \cos x u \, du \int_a^b \cos u y \, f(y) \, dy =$$

$$\int_0^\infty u^{\mu - 1} \{ \cos (x + y) u + \cos (x - y) u \} \, du \int_a^b f(y) \, dy,$$

$$2 \int_0^\infty u^{\mu - 1} \sin x u \, du \int_a^b \sin u y \, f(y) \, dy =$$

$$\int_0^\infty u^{\mu - 1} \{ \cos (x - y) u - \cos (x + y) u \} \, du \int_a^b f(y) \, dy$$

zurück, und nehmen wieder $\mu = 1$, heben aber jetzt die Beschränkung positiver $a$ und $b > a$ auf, ohne die Methode der Specialisirung von $f(z)$ als $e^{\pm z} \varphi(z)$ zu verändern, welche auch hier wieder mit der gleichen Sicherheit die allgemeinen Bestimmungen liefert. Sei zuerst $a$ seinem absoluten Werthe nach kleiner als $b$; zur Abkürzung werde

$$J_1 = Lim \int_0^\infty u^{\mu - 1} \cos (x - y) u \, du \int_{-a}^b f(y) \, dy$$

$$J_2 = Lim \int_0^\infty u^{\mu - 1} \cos (x + y) u \, du \int_{-a}^b f(y) \, dy$$

gesetzt — es besteht dann unter der genannten Bedingung die folgende Tabelle

| $J_1 =$ | | $J_2 =$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0 > a > x,$ | $\pi f(x)$ |
| $\frac{\pi}{2} f(-a),$ | $x = -a,$ | $\pi f(a)$ |
| $\pi f(-x),$ | $0 > x > a,$ | $\pi f(x)$ |
| $\pi f(x),$ | $0 < x < a,$ | $\pi f(-x)$ |
| $\pi f(x),$ | $0 < a < x,$ | $0$ |
| $\frac{\pi}{2} f(b),$ | $x = b,$ | $0$ |
| $0,$ | $x > b,$ | $0.$ |

Der zweite Hauptfall, wo der absolute Werth von $a$ den von $b$ übersteigt, erledigt sich durch eine einfache Transformation; den Gleichungen zufolge

$$Lim\left\{\pm \cos\frac{\pi}{2}\int_{-a}^{b}\frac{f(y)}{x-y}\,dy\right\} = Lim\left\{\pm \cos\frac{\pi}{2}\int_{-b}^{a}\frac{f(-y)}{x+y}\,dy\right\} = J'_2$$

$$Lim\left\{\pm \cos\frac{\pi}{2}\int_{-a}^{b}\frac{f(y)}{x+y}\,dy\right\} = Lim\left\{\pm \cos\frac{\pi}{2}\int_{-b}^{a}\frac{f(-y)}{x-y}\,dy\right\} = J'_1$$

besteht die Aenderung der obigen Tafel nur darin, dass $-x$ an die Stelle von $x$, $b$ an die Stelle von $a$ tritt; dies gibt die Ausdrücke

| $J'_2 =$ | | $J'_1 =$ |
|---|---|---|
| $0,$ | $x > a,$ | $0$ |
| $0,$ | $0 < b < x,$ | $\pi f(-x)$ |
| $\pi f(x),$ | $0 < x < b,$ | $\pi f(-x)$ |
| $\pi f(-x),$ | $0 > x > b,$ | $\pi f(+x)$ |
| $\pi f(-x),$ | $0 > b > x,$ | $0$ |
| $0,$ | $x < -a,$ | $0.$ |

Wenn nun $a = b$ ist, so vereinfachen und identificiren sich diese Bestimmungen nach dem folgenden Schema

| $J_1 = J'_2 =$ | | $J_2 = J'_1 =$ |
|---|---|---|
| $\frac{\pi}{2} f(a),$ | $a = x,$ | $\frac{\pi}{2} f(-a)$ |
| $\pi f(x),$ | $0 < x < a,$ | $\pi f(-x)$ |
| $\pi f(-x),$ | $0 > x > a,$ | $\pi f(x)$ |
| $\frac{\pi}{2} f(-a),$ | $x = -a,$ | $\frac{\pi}{2} f(a).$ |

Man kann diese einzelnen Ausführungen, wie leicht zu ersehen ist, in zwei Formeln zusammenfassen

$$\left.\begin{array}{ll} J_1 = \pi f(x), & -a < x < b \\ J_2 = \pi f(x), & -b < x < a \end{array}\right\} a \gtrless b,$$

welche die Grundlage der Maclaurin'schen Entwicklung bilden.

Dieselben Formeln 0), welche die Differentiation der Definition $J_1$ im Falle positiver $a$ und $b$ ermöglichten, vermitteln diejenige der erweiterten Definitionen $J_1$ und $J_2$. Indess lässt sich ein zweiter Beweis der Grundformeln

$$D_x^n J_1 = D_x^n J_2 = \pi f^{(n)}(x),$$

in denen unter $D^n J_1$ und $D^n J_2$ eine Differentiation unter dem Integralzeichen zu verstehen ist, auf die Methode der Zerlegung des Bruches $\frac{1}{(x_0 \mp y)(x_1 \mp y)\ldots(x_n \mp y)}$ in seine Partialbrüche gründen, da man die Beziehung hat

$$D^n J_1 = \pi f^{(n)}(x) = \Gamma(n+1)\, Lim \left\{ \cos\frac{\mu\pi}{2} \int_{-a}^{b} \frac{f(y)\,(-1)^n}{\varepsilon\,(x-y)^{n+\mu}}\, dy \right\}, \qquad 22\,c)$$

$$D^n J_2 = \pi f^{(n)}(x) = \Gamma(n+1)\, Lim \left\{ \cos\frac{\mu\pi}{2} \int_{a}^{b} \frac{f(y)\,(-1)^n}{\varepsilon\,(x+y)^{n+\mu}}\, dy \right\}.$$

Man hat nur nach der Zerlegung

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_n$$

zu setzen, um auf eine von der Lehre der geschlossenen Integrationen her bekannte Art, den $n$ten Differentialquotienten der Function $f$ gleichfalls zu erhalten. Gelegentlich möge betreffs der Differentialquotienten mit ungeraden $n$ eine Bemerkung hier Platz finden. Sei $n = 1$; in diesem Falle hat man die meistens allein noch verwendeten Formeln

$$\int_0^\infty u \sin xu\, du \int_a^b \cos uy\ f(y)\, dy = -\frac{\pi}{2} f'(x),$$

$$\int_0^\infty u \cos xu\, du \int_a^b \sin uy\ f(y)\, dy = +\frac{\pi}{2} f'(x);$$

und durch Addition und Subtraction

$$\int_0^\infty u \sin (x+y)\, u\, du \int_a^b f(y)\, dy = 0,$$

$$\int_0^\infty u \sin (x-y)\, u\, du \int_a^b f(y)\, dy = -\pi f'(x).$$

Gemäss den Formeln 0) liesse sich statt des zweiten dieser Doppelintegrale das einfache

$$Lim \left\{ \Gamma(1+\mu) \sin\frac{(1+\mu)\pi}{2} \int_a^b \frac{f(y)\, dy}{\pm (x-y)^{1+\mu}} \right\}, \quad \mu = 1$$

setzen und hier nun darf es nicht befremden, dass an der Stelle des Ausnahmepunktes das Integral vom Negativen in's Positive übergeht, und es wäre auch der Schluss auf ein Verschwinden der Integrale mit ungeradem $n$, analog dem Falle $n = 0$, ein unstatthafter. Dies lässt sich auch unmittelbar nachweisen. Wie vorhin beim Integrale $n = 0$ setzen wir auch hier nichts weiter als die Entwickelbarkeit von $f$ (*per analogiam* schliessend) in eine Potenzreihe voraus: d. h. wir setzen unbestimmt

$$f(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots;$$

dann haben wir für $n = 0$

$$\int_0^\infty \cos(x - y)\, u\, du \int_a^b f(y)\, dy =$$

$$Lim \int_a^b \cos \frac{\pi}{2} \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots}{\pm (x - y)} dy =$$

$$Lim \int_0^{x-a} \cos \frac{\mu\pi}{2} \left\{a_0 + a_1(x - z) + a_2(x - z)^2 + \ldots\right\} \frac{dz}{z^\mu}$$

$$+ Lim \int_0^{b-x} \cos \frac{\mu\pi}{2} \left\{a_0 + a_1(x + z) + a_2(x + z)^2 + \ldots\right\} \frac{dz}{z^\mu}$$

$$= 2\, Lim \cos \frac{\mu\pi}{2} \Gamma(1 - \mu) f(x) = \pi f(x);$$

und wie auch unmittelbar aus $f(x) = 1$ hätte ersehen werden können

$$Lim \left\{\cos \frac{\mu\pi}{2} \int_0^c \frac{dz}{z^\mu}\right\} = \frac{\pi}{2}.$$

Ist jetzt $n = 1$, so gilt die folgende Entwicklung

$$Lim \left\{\sin \frac{(1 + \mu)\pi}{2} \int_a^b \frac{f(y)}{\pm (x - y)^{1+\mu}} dy\right\} =$$

$$+ Lim \cos \frac{\mu\pi}{2} \int_0^{x-a} \left(a_0 + a_1(x - z) + a_2(x - z)^2 + \ldots\right) \frac{dz}{z^{1+\mu}}$$

$$- Lim \cos \frac{\mu\pi}{2} \int_0^{b-x} \left(a_0 + a_1(x + z) + a_2(x + z)^2 + \ldots\right) \frac{dz}{z^{1+\mu}}.$$

In der Grenze für $\mu = 1$ bleibt wegen

$$Lim \left\{\cos \frac{\mu\pi}{2} \int_0^a \frac{dz}{z^{1+\mu}}\right\} = Lim \left\{\cos \frac{\mu\pi}{2} \int_0^b \frac{dz}{z^{1+\mu}}\right\} = Lim \left\{\cos \frac{\mu\pi}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{z^{1+\mu}}\right\},$$

als früheren Bestimmungen zugänglich, übrig

$$-2\,Lim\left\{\cos\frac{\mu\pi}{2}\int\limits_0^c(a_1+2a_2\,x+3a_3\,x^2+\ldots)\frac{dz}{z^{\mu}}\right\}=-\pi f'(x)$$

in Uebereinstimmung mit dem früheren Resultate.

Für ein beliebiges $n$ erhalten wir nach der hier befolgten Methode

$$(-1)^n\,Lim\cos\frac{\mu\pi}{2}\int\limits_0^{x-a}\left\{a_0+a_1(x-z)+a_2(x-z)^2+\ldots\right\}\frac{dz}{z^{n+\mu}}$$

$$+(-1)^{2n}\,Lim\cos\frac{\mu\pi}{2}\int\limits_0^{b-x}\left\{a_0+a_1(x+z)+a_2(x+z)^2+\ldots\right\}\frac{dz}{z^{n+\mu}}$$

$$=2\,Lim\cos\frac{\mu\pi}{2}\int\limits_0^c\left\{(n)_0\,a_n+(n+1)_1\,a_{n+1}\,x+(n+2)_2\,a_{n+2}\,x^2+\ldots\right\}\frac{dz}{z^{\mu}}$$

$$=\frac{\pi}{n!}f^{(n)}(x);$$

aus der Vergleichung dieses Resultates mit dem gleichlautenden früheren ziehen wir den wichtigen Satz:

„In allen Fällen, worin $f(z)$ in eine Reihe nach Potenzen von $z$ „entwickelbar ist, sind ohne Hinzutreten neuer Bedingungen auch die „Differentialquotienten dieser Reihe mit den entsprechenden Differential-„quotienten der Function identisch.“

Welches die Bedingungen der Entwicklung der Function in eine unendliche Potenzreihe sind, kann mit völliger Schärfe nur die indirecte Betrachtung der Grundformeln der Fourier'schen Integrale ermitteln. Mit dieser Frage wollen wir uns zunächst beschäftigen und gehen darum auf die Gleichungen 22 c) zurück, welche für $x=0$, $n=0, 1, 2$ .. etc. *in inf.* specialisirt und mit den Factoren $\frac{x^n}{n!}$ addirt werden mögen; dies gibt

$$\int\limits_0^\infty du\int\limits_{-a}^b f(y)\cos uy\,dy-\frac{x^2}{1.2}\int\limits_0^\infty u^2\,du\int\limits_{-a}^b f(y)\cos uy\,dy\;.\;\;.\;\;.\;\;.\qquad 22\,d)$$

$$+\frac{x^4}{1.2.3.4}\int\limits_0^\infty u^4\,du\int\limits_{-a}^b f(y)\cos uy\,dy-\ldots$$

$$+\frac{x}{1}\int\limits_0^\infty u\,du\int\limits_{-a}^b f(y)\sin uy\,dy-\frac{x^3}{1.2.3}\int\limits_0^\infty u^3\,du\int\limits_{-a}^b f(y)\sin uy\,dy+\ldots$$

$$=Lim\cos\frac{\mu\pi}{2}\left\{\int\limits_{-a}^b\frac{f(y)}{(\pm y)^{\mu}}\,dy+x\int\limits_{-a}^b\frac{f(y)\,dy}{-y\,(\pm y)^{\mu}}+x^2\int\limits_{-a}^b\frac{f(y)}{y^2\,(\pm y)^{\mu}}\,dy+\ldots\right\}$$

Die Reihen linker Hand können der Form nach in zwei Integrale zusammengezogen werden; diese Operation wird real giltig unter der Bedingung der Convergenz beider Reihen. Man erhält die Convergenz der Reihen gemäss bekannten Kennzeichen; ist $\xi^2$ der Grenzwerth, dem das Verhältniss der reciproken Factoren von $x^n$ und $x^{n+2}$ zustrebt, wenn $n$ unendlich gross wird, so hat man der Reihe nach

$$x^2 < \xi^2,$$

$$-n \,.\, (x^2 - \xi^2) < \xi^2, \quad x^2 = \xi^2$$

etc. etc.

als Aequivalente der verschiedenen Restformeln für die Entwicklung Maclaurin's, weil diese selbst unter jenen Voraussetzungen aus der obigen Gleichung hervorgeht. Es muss $\xi$ zwischen $-a$ und $b$, ja zwischen $-b$ und $+b$ gelegen sein, wenn $b < a$; denn sonst würden die Reihen links von 22 $d$) für $x^2 > b^2$ verschwinden. Dass sie nicht verschwinden, zeigt aber die Gleichung selbst. Es liegt demnach $\xi$ innerhalb des Stetigkeitsintervalles von $f$ und es kann eine Function, welche im Positiven und Negativen nicht gleichmässig stetig ist, in eine unendliche Potenzreihe nicht verwandelt werden. Dieses Resultat ist im Einklange mit der Entwicklung der complexen Function nach der Lehre von den geschlossenen Integrationen, welche einen Convergenzkreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt der Function vindicirt. Dass aber die Gerade der Convergenz genau mit dem doppelten Radius des Convergenzkreises zusammenfällt, wie es die Induction lehrt, kann auf theoretischem Wege einzig und allein aus dem Principe der formalen Continuität der mathematischen Constructionen erklärt werden, das in seiner Unbeweisbarkeit und seiner fundamentalen Bedeutung den Namen eines Princips vollkommen verdient. Von der Theorie der geschlossenen Integration führt, wie wir gesehen, keine Brücke zur reellen Function und dasselbe gilt umgekehrt von den Fourier'schen Integralen, welche die complexe Function perhorresciren; diese Theorien sind nur durch das genannte Princip verknüpft. Wir drücken noch die Grenze $\xi$ in expliciter Form aus

$$\xi^2 = \pm\, Lim \left\{ (n+1)\,(n+2)\, \frac{f^{(n)}\,(0)}{f^{(n+2)}\,(0)} \right\}, \quad n = \infty$$

und wenden uns zu einer allgemeineren Frage, welche mit dem Principe der formalen Continuität in Verbindung steht, zur Frage von der Verwendung divergenter Reihen.

Die Definition der unendlichen Reihe:

„sie sei der Grenzwerth, welchem die der endlichen Reihe äquivalente „Summe $S_n$ zustrebt, wenn $n$ unendlich gross wird",

hat durch die Maclaurin'sche Formel für ein complexes und reelles Argument, für Potenzreihen, das mathematische Bürgerrecht erlangt. Der Lehre von den geschlossenen Integrationen widerstreitet hierin nicht die der Fourier'schen Integrale, in welcher die Maclaurin'sche Formel auf die nämliche Weise, d. h. durch Beobachtung der nämlichen Convergenzregeln zu Stande kommt. Diese Convergenzregeln aber ruhen ganz allein auf der obigen (vorläufig durchaus willkürlichen) Definition. Für die Lehre von den Fourier'schen Integralen, deren Beweiskraft noch überdies von der Umkehrbarkeit des Satzes

$$\int_{z_0}^{z_1} F(z)\left(Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots \textit{ in inf}\right) dz$$

$$= \int_{z_0}^{z_1} F(z)\, Z_0\, dz + \int_{z_0}^{z_1} F(z)\, Z_1\, dz + \int_{z_0}^{z_1} F(z)\, Z_2\, dz + \ldots \textit{ in inf}$$

abhängt, würde hieraus geradezu die Gefahr eines unverfälschten Cirkelschlusses hervorgehen, wollte man auf die Richtigkeit der angeführten Definition aus der Prämisse der Maclaurin'schen Formel schliessen, die selbst jene Definition zur Voraussetzung hat. Es ist der weitaus bedeutendste und merkwürdigste Vorzug der Argumentation Cauchy's, dass die besagte Definition von der ideellen Construction der unendlichen Reihe, mit den übrigen feststehenden Ideen, in erster Linie mit der Construction des Integralbegriffes harmonirt. Denn die dort angewendete Formel

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots;\ \textit{mod}\, z < 1,$$

die aus dem Grenzübergange hervorgeht, führt **allein** zur Maclaurinschen Formel. Diese Ausschliesslichkeit findet bei den Fourier'schen Integralen nicht statt. Aber diese letzteren lehren ein Anderes. Wie bemerkt, leisten sie das von der geschlossenen Integration direct gelieferte indirect.

In der Gleichung

$$\pi f(x) =$$

$$\textit{Lim}\cos\frac{\mu\pi}{2}\left\{\int_{-a}^{b}\frac{f(y)}{(\mp y)^{\mu}}\,dy - x\int_{-a}^{b}\frac{f(y)}{-y\,(\mp y)^{\mu}}\,dy + x^2\int_{-a}^{b}\frac{f(y)}{(-y)^2\,(\mp y)^{\mu}}\,dy - \ldots\right\},$$

$$x^2 \leqq \xi^2$$

kann rechts die Reihe als Integral dargestellt werden; dies gibt

$$\pi f(x) = \textit{Lim}\cos\frac{\mu\pi}{2}\int_{-a}^{b}\frac{f(y)}{(\mp y)^{\mu}}\,dy\left(1 + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} + \ldots \textit{ in inf}\right).$$

Nun hat man auch

$$\textit{Lim}\cos\frac{\mu\pi}{2}\int_{-a}^{b}\frac{f(y)}{[\varepsilon\,(x-y)]^{\mu}}\,dy = \pi f(x),$$

also gilt für die indirecte Rechnung die Formel

$$1 + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} + \ldots \mathit{in\ inf} = \frac{-y}{x-y}$$

über die Convergenzgrenzen $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1$ hinaus. Doch ist eine Bedingung daran geknüpft. Das $\varepsilon = \pm 1$, dessen Umschlagen bei der Reihe im Punkte $y = 0$ stattfindet, betrifft hier in gleicher Weise den Punkt $y = x$. Es ist also die obige Giltigkeitserweiterung eine blos formale und verbunden in ihrer realen Bedeutung mit einer Sinnesänderung ihrer Symbole (hier des Symboles $\varepsilon = \pm 1$). Danach kann also das Princip der formalen Continuität der analytischen Constructionen ausgedehnt werden auf den Fall der Divergenz der letzteren, aber mit einer Umdeutung der Symbole Hand in Hand. Mag die methodische Bedeutung dieses erweiterten Principes bei seiner schwierigen directen Begründung in speciellen Fällen als nur sehr beschränkt zu betrachten sein: seine Existenz und principielle Wichtigkeit müssen mit aller Schärfe betont und festgehalten werden. Es bildet das Band zwischen scheinbar heterogenen Sätzen. Die Analysis kennt ein fundamentales Beispiel der Anwendung dieses Principes: es ist dies die Umdeutung der Gammafunction für negative Argumente, während ihre formale Definition, wie sie Gauss gegeben hat, intact bleibt, eine Umdeutung, von welcher vielfach im Folgenden die Rede sein wird, von welcher unter Anderm schon die unbestimmte Integralformel für $\int x^\mu e^{ax}\, dx$ betroffen und ausserdem die erweiterte Geltung der Formeln 0) abhängig gemacht wird.

Wenn die Potenzreihe mit dem Gesetze von Maclaurin mit Recht als das Resultat des Grenzübergangs der endlichen Reihensumme bezeichnet werden kann, so ist dagegen bei zwei andern ideellen Formen der Entwicklung einer Function die Beziehung zwischen Form und Grenzenfunction auf endliche Grenzen eingeschränkt und jene Function als das Aequivalent der unendlichen (unbegrenzten) Form ist nicht das Resultat der Aufhebung des Grenzbegriffes in der Grenzenfunction. Diese Formen sind: die periodische Reihe und das Fourier'sche Integral. Man hat auch für sie die endliche Summenformel in schärfster Weise als bestimmend erklärt. Es braucht nicht erst darauf hingewiesen zu werden, dass mindestens beim Integrale eine solche Begriffsbestimmung die höchste Willkürlichkeit involvirt, indem für dieses eine klare uud bestimmte Definition (Summe aller Differentiale) bereits vorliegt.

Wenn das Fourier'sche Integral und seine Wurzel, die Euler'schen Integrale ohne reelle Exponentialfunction, die Eigenthümlichkeit zeigt, dass die aus der unbestimmten Integration hervorgehende Summe für die aufgehobene Grenze unrichtig wird, so ist der Grund das Nichtverschwinden des ergänzenden Aggregates der unbestimmten Integralformel

$$\mathit{Lim}\,[\varrho_0\,\delta_0 + \varrho_1\,\delta_1 + \ldots] = \mathit{Lim}\,(\varrho\,.\,n),\ \varrho = 0,\ n = \infty.$$

Dass diese Formel nur in Ausnahmsfällen für unendliche Grenzen richtig bleibt, kann schon aus der Unmöglichkeit einer speciellen Discussion jenes Aggregates geschlossen werden.

Was nun die periodischen Reihen anbelangt, so wird es Aufgabe der nachfolgenden Untersuchung sein, den Satz von der Irrelevanz der endlichen Summenformel für sie zu erweisen. Die Erzwingung der ihnen äquivalenten Function mittelst des vollkommen unbestimmbaren (nichtssagenden) Symboles $\sin \mu \vartheta$, $\mu = \infty$, ist schon darum ungenügend, weil die Integration einer während dieser Integration unaufgehobenen Unbestimmtheit, nur wieder Unbestimmtes, niemals Bestimmtes liefern kann. Die geläufige Theorie gelangt wie bei den Fourier'schen Integralen zu ihren (nicht völlig präcisen) Ergebnissen durch Aufhebung entgegengesetzter logischer Fehler, Einführung und Elimination des unbestimmten Symbols.

Wir anticipiren den Gang der folgenden Darstellung in kurzem dahin, dass an einem speciellen Beispiele die Convergenz einer scheinbar divergenten periodischen Reihe auf mehrfache Weise dargethan, hieraus die widersprechende Natur einer im Unendlichen die Continuität ihres Gesetzes wahrenden Reihe überhaupt und die Nothwendigkeit ihrer Correction zum richtig construirten analytischen Begriffe gefolgert und endlich jede Transformation zugelassen wird, die das Gesetz der endlichen Entwicklung nicht alterirt. Die Reihen mögen kurz mit $R_{\cos x}$ und $R_{\sin x}$, ihre Coefficienten mit $A_n$ und $B_n$ bezeichnet werden; zufolge der bekannten Definitionen dieser Coefficienten können die Reihen als bestimmte Integrale dargestellt werden und zwar ist

$$R_{\cos x} = \int_0^\pi f(y) \left[\frac{1}{2} + \cos x \cos y + \cos 2x \cos 2y + \ldots\right] dy$$

$$R_{\sin x} = \int_0^\pi f(y) \left[\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y + \ldots\right] dy.,$$

Die eingeklammerten Reihen rechter Hand divergiren, gleichwohl wird verlangt, dass durch ihre Integration eine endliche Summe erzeugt werde. Dies letztere ist unmöglich, was zur Genüge aus den nachfolgenden Betrachtungen erhellt; hier wiederholt möge blos bemerkt werden, dass eine im Unendlichen vollzogene Integration keine Entscheidung herbeiführen kann.

Die Elimination widersprechender Divergenzen kann nun nur durch Angabe einer bestimmten endlichen Summenformel bewerkstelligt werden; man wird die Summirung als richtige anzusehen haben, wenn die inductive Integration der (scheinbar) divergenten Reihe auf eine Convergenz führt, die — bekannten Formeln gemäss — mit dem Integrale der Summe übereinstimmt. Zur Summirung der Reihen

$$\tfrac{1}{2} + \cos x \cos y + \cos 2x \cos 2y + \ldots \text{ in inf.}, \quad . \quad . \quad . \qquad 23)$$
$$\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y + \ldots \text{ in inf.}$$

darf also nicht in der betreffenden endlichen Summenformel der Grenzübergang für unendlich wachsende $n$ benützt werden, denn dadurch erhält man eine unbestimmte (divergente) Formel und dann ist die Zusammenfassung der periodischen Reihen in ein einziges Integral unzulässig: sondern es muss die betreffende unendliche (von der endlichen Reihe ganz und gar unabhängige) Reihe ohne weiteres ins Auge gefasst werden. Und es kann jetzt die Lehre von den periodischen Reihen geradezu benützt werden, um den Beweis der Convergenz der im Unendlichen discontinuirlichen Reihen 23) zu führen. Die Coefficienten dieser Reihen sind

$$a_n = \cos ny = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi Z_a \cos nz\, dz,$$

$$b_n = \sin ny = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi Z_b \sin nz\, dz;$$

man erkennt auf der Stelle, dass für $Z_a$ und $Z_b$ die zwischen 0 und $\pi$ stetigen und endlichen Functionen von $z$

$$Z_a = \int_0^\infty \cos uy \cos zu\, du = 0, \quad . \quad . \quad . \qquad 24)$$

$$Z_b = \int_0^\infty \sin uy \sin zu\, du = 0$$

einzutreten haben, weil hiermit die Fourier'schen Integrale

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos uy\, du \int_0^\pi \cos uz \cos nz\, dz = \cos ny = a_n,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin uy\, du \int_0^\pi \sin uz \sin nz\, dz = \sin ny = b_n$$

die verlangten Coefficientenwerthe liefern.

Die Reihen 23) sind sonach nicht unbestimmt, sondern verschwinden, vorausgesetzt, dass weder $x$ noch $y$ das Intervall 0 bis $\pi$ überschreiten — die Summenformeln 24) sind ebenso wie 23), wie es sein muss, bezüglich $x$ und $y$ symmetrisch. — Das benutzte bequeme Mittel der Summirung der Reihen 23) erlangt aber erst Beweiskraft, wenn durch die Integration der Formeln

$$\tfrac{1}{2} + \cos x \cos y + \cos 2x \cos 2y + \cdots = \int_0^\infty \cos ux \cos uy \, du,$$

$$\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y + \cdots = \int_0^\infty \sin ux \sin uy \, du,$$

zwischen 0 und $\pi$ eine bekannte Identität erzielt wird. Integriren wir zuerst zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ etwa nach $y$, so erhalten wir

$$\frac{\pi}{4} + \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 25)$$

$$= \int_0^\infty \cos ux \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos uy \, dy = \frac{\pi}{2}, \text{ wenn } 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$= 0, \text{ wenn } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Ebenso ist

$$\sin x + 2\tfrac{1}{2} \sin 2x + \tfrac{1}{3} \sin 3x + 2\tfrac{1}{6} \sin 4x + \cdots \quad . \quad . \quad 26)$$

$$= \sin x + \tfrac{1}{3} \sin 3x + \tfrac{1}{5} \sin 5x + \cdots$$

$$+ \frac{\sin 2x}{1} + \frac{\sin 6x}{3} + \frac{\sin 10x}{5} + \cdots$$

$$= \int_0^\infty \sin ux \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin uy \, dy = \frac{\pi}{2}, \text{ wenn } 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$= 0, \text{ wenn } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Und eine ähnliche Unterscheidung wird bei der Integration von $\frac{\pi}{2}$ bis $\pi$ den gewünschten Erfolg nach sich ziehen.

Wenn hiermit einestheils die Möglichkeit dargethan ist, die Formeln der periodischen Reihen unter ihren natürlichen Bedingungen und mit den gewöhnlichen Beschränkungen abzuleiten, womit wir uns nicht weiter befassen, so eröffnet sich auf der andern Seite die Perspective, die Coefficienten $A_n$ und $B_n$ zu den allgemeineren Definitionen

$$\frac{\pi}{2} A_n = \int_a^b f(x) \cos nx \, dx, \quad \frac{\pi}{2} B_n = \int_a^b f(x) \sin nx \, dx$$

zu erweitern. Auch jetzt müssen die periodischen Reihen als mit Fourier'schen Integralen identisch sich herausstellen. Die Frage ist nur, welche Integrale an die Stelle der Reihen 23) gesetzt werden müssen. Eine weitere Integration von 23) und 24) nach $y$ über $\pi$ hinaus zeigt die Beschränkung der Summen 24) auf das Intervall 0 bis $\pi$. Eine leichte Ueberlegung, die Abfolge der verschiedenen Werthe $\pm\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{\pi}{2}$ und 0 bei gleichzeitig wachsenden $x$ und $y$ in 25) und 26) betreffend, führt auf das folgende Schema von Argumenten, die für $\xi$ und $\eta$ in

$$\int_0^\infty \cos u\xi \cos u\eta \, du \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \sin u\xi \sin u\eta \, du$$

einzutreten haben, wenn $x$ und $y$ die mitbezeichneten Intervalle durchlaufen.

| Interv. $x$ | Argum. $\eta$ | Argumente $\xi$, Intervalle $y$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $0-\pi$, | $\pi-2\pi$, | $2\pi-3\pi$, | $3\pi-4\pi$, | $4\pi-5\pi\ldots$ |
| $0-\pi$ | $y$ | $x$, | $2\pi-x$, | $2\pi+x$, | $4\pi-x$, | $4\pi+x,\ldots$ |
| $\pi-2\pi$ | $2\pi-y$ | $-x$, | $-2\pi+x$, | $2\pi-x$, | $x$, | $4\pi-x,\ldots$ |
| $2\pi-3\pi$ | $2\pi+y$ | $x$, | $6\pi-x$, | $2\pi+x$, | $8\pi-x$, | $4\pi+x,\ldots$ |
| $3\pi-4\pi$ | $4\pi-y$ | $-x$, | $-6\pi+x$, | $2\pi-x$, | $-4\pi+x$, | $4\pi-x,\ldots$ |
| $4\pi-5\pi$ | $4\pi+y$ | $x$, | $10\pi-x$, | $2\pi+x$, | $12\pi-x$, | $4\pi+x,\ldots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Dieses Schema gilt ebenso gut für die Cosinus- als für die Sinusreihe, wenn nur die Summe der letzteren, so oft das Argument $\xi$ als Differenz erscheint, mit negativem Zeichen versehen wird und die Argumente $-2k\pi+x$, welche im Schema blos der Gesetzmässigkeit halber als negativ aufgeführt sind, in $2k\pi-x$ verwandelt werden. Man kann die Werthe leicht so umsetzen, dass die Intervalle $y$ constant bleiben und die Intervalle $x$ gleichzeitig mit den Argumenten $\eta$ wechseln; das resultirende Schema ist dasselbe, wie wenn blos im ursprünglichen Schema $x$ und $y$ vertauscht würden. Damit ist die Symmetrie zwischen $y$ und $x$ gewahrt.

Geht man mit den verschiedenen Summen 23) in die Formel für die periodischen Reihen, so entsteht das folgende Schema von Functionen $f$.

$$\text{Intervalle } x \left\{ \overbrace{\begin{array}{lllll} f(x), & \pm f(2\pi-x), & f(2\pi+x), & \pm f(4\pi-x), & f(4\pi+x),\ldots \\ \pm f(2\pi-x), & f(x), & \pm f(4\pi-x), & f(2\pi+x), & \pm f(6\pi-x),\ldots \\ f(x-2\pi), & \pm f(4\pi-x), & f(x), & \pm f(6\pi-x), & f(2\pi+x),\ldots \\ \pm f(4\pi-x), & f(x-2\pi), & \pm f(6\pi-x), & f(x), & \pm f(8\pi-x),\ldots \\ f(x-4\pi), & \pm f(6\pi-x), & f(x-2\pi), & \pm f(8\pi-x), & f(x), \quad \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}}^{\text{Intervalle } y} \right. \tag{27}$$

Die negativen Zeichen beziehen sich hierin auf die Sinusreihe. Die Diagonalwerthe sind constant. Das vorstehende Schema löst die Aufgabe, die Summe der periodischen Reihen $R_{cos\,x}$ und $R_{sin\,x}$ anzugeben, wenn

$$\frac{\pi}{2} A_n = \int_a^b f(y)\, cos\, ny\, dy, \quad \frac{\pi}{2} B_n = \int_a^b f(y)\, sin\, ny\, dy,$$

jetzt nicht blos in dem Falle als $a$ und $b$ vielfache von $\pi$, oder 0 und $\infty$, auch in dem allgemeineren Falle, wo $a$ und $b$ völlig beliebig positiv, und überdies $x$ den Spielraum eines willkürlichen Intervalles $h\pi$ bis $(h+1)\pi$ hat. Es ist, der Theorie der Fourier'schen Integrale entsprechend, für $R_{cos\,x}$ und $R_{sin\,x}$, wenn $x$ das bezeichnete Intervall durchläuft, in der $(h+1)$sten Zeile des Schema's die Summe aller Functionen zu setzen, welche innerhalb des Intervalles $a$ bis $b$ von $y$ im Schema aufgeführt sind. Erreicht $x$ die Grenzen eines Intervalles, so verschwindet die Sinusreihe, während die Cosinusreihe ungeändert bleibt. Dieses überraschende Resultat erklärt sich, wenn man bedenkt, dass die Summen der Reihen 23) für $x = \pi,\ 2\pi \ldots$ ihre Gültigkeit verlieren, obwohl die von den Grenzgebieten gelieferten Argumente $\xi$ für jene Werthe übereinstimmen. Man setze $y = \pi$ und integrire die Formel

$$\tfrac{1}{2} - cos\, y + cos\, 2y - \ldots = \int_0^\infty cos\, u\pi\, cos\, uy\, du$$

von $\frac{\pi}{2}$ bis $\pi$; man erhält links $\frac{\pi}{2}$, rechts $\frac{\pi}{4}$ und hat demnach für den Grenzfall $x = \pi$ die Summe zu verdoppeln; auf $x = 0$ findet dieselbe Verdoppelung keine Anwendung. Das gleiche gilt für $x = 2\pi,\ 3\pi$ etc.

Auch für die Sinusreihe muss eine Correction eintreten, welche in der Differenz der nämlichen Integrale, d. h. in einem Verschwinden der Reihe besteht, das der Limitenbestimmung im Fourier'schen Integrale sich entzieht.

Hiermit erscheinen die abweichenden Ausnahmsfälle und die Continuität des Functionenschemas gerechtfertigt. Es gibt Fälle, in welchen die Reihen $R_{cos\,x}$ und $R_{sin\,x}$ verschwinden. Bei beliebigen $a$ und $b$ kommt man auf folgende drei Gattungen Fourier'scher Integrale

$$\int_0^\infty cos\, u\, \xi\, du \int_{h\pi+\alpha}^{(h+1)\pi} f(y)\, cos\, u\eta\, d\eta,$$

$$\int_0^\infty cos\, u\, \xi\, du \int_{k\pi}^{(k+1)\pi-\beta} f(y)\, cos\, u\eta\, d\eta,$$

$$\int_0^\infty cos\, u\, \xi\, du \int_{m\pi+\alpha}^{(m+1)\pi-\beta} f(y)\, cos\, u\eta\, d\eta.$$

Diese Integrale sind $\frac{\pi}{2} f(\xi)$ nur unter den Bedingungen

$$\alpha < \xi - h\pi < \pi,\ 0 > \xi - k\pi < \pi - \beta,$$
$$\alpha < \xi - m\pi < \pi - \beta$$

gleichzusetzen.

Es ist nicht die Aufgabe dieser Ausführungen den Nutzen, welchen eine Erweiterung der Theorie der periodischen Reihen für die Anwendung hat, kenntlich zu machen, indem wir die Aufhebung des Satzes: „eine Function könne auf eine einzige Art in Potenzreihen entwickelt werden" an Beispielen durchführen; auch später werden wir uns auf rein theoretische Betrachtungen beschränken. Indessen als eine Art Bestätigung möge, seiner Anschaulichkeit wegen, der Fall $f(x) = 1$ hier folgen, wobei $a$ und $b$ innerhalb 0 und $\pi$ gelegen gedacht werden sollen. Man hat

$$R_{\cos x} = \frac{\sin b - \sin a}{1} \cos x + \frac{\sin 2b - \sin 2a}{2} \cos 2x + \ldots$$
$$= \tfrac{1}{2}(\pi - b + a),$$
$$R_{\sin x} = \frac{\cos a - \cos b}{1} \sin x + \frac{\cos 2a - \cos 2b}{2} \sin 2x + \ldots$$
$$= \frac{\pi}{2}.$$

$R_{\cos x}$ und $R_{\sin x}$ sind aber Aggregate von je 4 Sinusreihen $\Sigma\left(\frac{\sin ny}{n}\right)$, worin $y = b + x,\ b - x,\ -(a + x),\ -(a - x)$ und $y = x + a,\ x - a,\ -(x + b),\ -(x - b)$; da nun hievon bezüglich $a - x$ und $x - b$ negativ sind, so combiniren sich die vier Sinusreihen alsbald zu den obigen Summen. Für $x < a$ oder $> b$ verschwinden die Reihen.

Wir beschäftigen uns nun mit einer andern Gattung periodischer Reihen, ohne für diese andere Elemente in Anspruch zu nehmen als die bisher betrachteten.

Es sind die Reihen

$$S_{\cos x} = B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + B_3 \cos 3x + \ldots,$$
$$S_{\sin x} = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + A_3 \sin 3x + \ldots$$

Die Methode, zu ihren Summen zu gelangen, ist von der Methode der Summirung von $R_{\cos x}$ und $R_{\sin x}$ nicht verschieden. Nur treten andere Normalreihen in $S$ auf — die Reihen

$$\sin y \cos x + \sin 2y \cos 2x + \sin 3y \cos 3x + \ldots \text{ in inf.}, \quad 28)$$
$$\cos y \sin x + \cos 2y \sin 2x + \cos 3y \sin 3x + \ldots \text{ in inf.},$$

die sich im Grunde auf eine reduciren.

Die Subsumtion der Reihen $S_{\cos x}$ und $S_{\sin x}$ unter ein Integralzeichen ist — allgemein ausgedrückt — widersprechend. Sie führt daher auch auf das widersprechende Resultat einer divergenten Reihe, welche corrigirt werden muss, um den Fehler zu beheben. Aber man hätte gleich anfangs sagen können: Eine unendliche periodische Reihe involvirt einen

Widerspruch; denn die Continuität der Operationen, welche sie anzeigt, hört im Unendlichen auf; diese Operationen verlieren im Unendlichen jeden Sinn. Die Correction der Reihe sei nun nothwendig oder nicht — hierüber kann im vorhinein nicht entschieden werden — jedenfalls deutet die periodische Reihe auf eine Function ihres Arguments, welcher sie äquivalent sein muss, da diese Function das apriorische, die Quelle der Reihe und ihres Gesetzes ist. Um diese Function in Besitz zu nehmen und die Bedingungen aufzufinden, unter welchen sie vermag sich in das Gewand der periodischen Reihe zu hüllen, können mit der Reihe alle Operationen vorgenommen werden, die nur im Unendlichen zu gelten aufhören, da die Correction der entspringenden Formen eine eindeutige ist und das Gesetz der endlichen Entwicklung nicht alterirt wird. Welches sind nun die Ausdrücke, welche den unendlichen, corrigirten Reihen 28) entsprechen? Man gelangt zu ihnen auf doppeltem Wege.

Die Reihe

$$\sin y \cos x + \sin 2y \cos 2x + \sin 3y \cos 3x + \ldots$$

möge in die Summe der Reihen

$$\tfrac{1}{2}\{\sin(y+x) + \sin 2(y+x) + \sin 3(y+x) + \ldots\},$$

$$\tfrac{1}{2}\{\sin(y-x) + \sin 2(y-x) + \sin 3(y-x) + \ldots\}$$

zerlegt werden, welche in der allgemeinen Form

$$\tfrac{1}{2}\{\sin z + \sin 2z + \sin 3z + \ldots\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 29)$$

enthalten sind. Das Integral dieser Reihe, zwischen $a$ und $b$ genommen, ist

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\cos a - \cos b}{1} + \frac{\cos 2a - \cos 2b}{2} + \frac{\cos 3a - \cos 3b}{3} + \ldots\right\}$$

und hat die bekannte Summe $\frac{1}{4}\, l \sin^2 \frac{b}{2} - \frac{1}{4}\, l \sin^2 \frac{a}{2}$. Diese Summe ist bezüglich $a$ und $b$ an keine Bedingungen gebunden. Der Ausdruck $\frac{1}{4}\, l \sin^2 \frac{1}{2} b$ gibt differenzirt die Cotangente von $\frac{b}{2}$ dividirt durch 4, welche demnach an die Stelle der Reihe 29) treten muss, so dass man bedingunglos hat

$$\sin z + \sin 2z + \sin 3z + \ldots = \tfrac{1}{2} \cot \frac{z}{2}.$$

Ein Zweifel kann hier nur dann entstehen, wenn $\frac{1}{4}\, l \sin^2 \frac{b}{2}$ divergirt. Dies findet statt für $b = 2k\pi$, wofür die Reihe 29) verschwindet. Es ist dieses Resultat der sinnfällige Ausdruck des Grundsatzes, dass Divergenzen keine Rechnungsoperationen zulassen. Von der Reihe 29) aus zeigt sich nun das Problem der Reihen

$$S_{\cos x} \text{ und } S_{\sin x}$$

als gelöst; es bestehen die Formeln

$$S_{\cos x} = \int_a^b f(y) \frac{\cot \frac{y+x}{2} + \cot \frac{y-x}{2}}{4} dy = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 30)$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_a^b f(y) \frac{\sin y}{\cos x - \cos y} dy, \quad B_n = \int_a^b f(y) \sin ny \, dy,$$

$$S_{\sin x} = \tfrac{1}{2} \int_a^b f(y) \frac{\sin x}{\cos y - \cos x} dy, \quad A_n = \int_a^b f(y) \cos ny \, dy,$$

welche nur für $x = a$ oder $= b$ Divergenzen anzeigen, für alle andern $x$ in allen Fällen, wo nicht $f(x)$ unendlich gross wird, endliche Werthe behalten. Auf die Theorie dieser discontinuirlichen Integrale ist hier nicht der Ort einzugehen; es genüge der Hinweis, dass sie mit der exacten Theorie der periodischen Reihen im Einklang steht, s. übrigens auch weiter unten.

In der vorstehenden Form sind die Integrale oft schwer zu bestimmen. Wir wenden uns daher zu einer zweiten Darstellung der Reihen $S_{\cos x}$ und $S_{\sin x}$, indem wir für 28) die Sätze der periodischen Reihenlehre in Anspruch nehmen.

Die Coefficienten $\sin ny$, $\cos ny$ sind unbegrenzten Fourier'schen Integralen aequivalent. Und zwar hat man die Bestimmungen

$$\int_0^\infty \sin uy \, du \int_0^\infty \cos ux \cos nx \, dx = \frac{\pi}{2} \sin ny,$$

$$\int_0^\infty \cos uy \, du \int_0^\infty \sin ux \sin nx \, dx = \frac{\pi}{2} \cos ny,$$

welche besagen, dass sämmtliche, unendlich viele Functionswerthe einer Zeile des Schemas 27) statt

$$\int_0^\infty \sin uy \cos u\xi \, du, \quad \int_0^\infty \cos uy \sin u\xi \, du$$

zu wählen und ihre Summe den Reihen 28) gleichzusetzen ist, zweitens, dass alle diese Summen identisch, und in Bezug auf $y$ und $x$ symmetrisch sind: so dass damit gleichfalls die bedingungslose Geltung der Summenformeln 30) dargethan ist. Wir haben demzufolge die Gleichungen

$$\sin y \cos x + \sin 2y \cos 2x + \sin 3y \cos 3x + \ldots$$

$$= \int_0^\infty \cos ux \sin uy \, du + \int_0^\infty \cos (2\pi - x) u \sin uy \, du$$

$$+ \int_0^\infty \cos (2\pi + x) u \sin uy \, du + \int_0^\infty \cos (4\pi - x) u \sin uy \, du$$

$$+ \ldots$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{y+x}+\frac{1}{y-x}+\frac{1}{y+2\pi-x}+\frac{1}{y-2\pi+x}+\frac{1}{y+2\pi+x}\right.$$
$$+\frac{1}{y-2\pi-x}+\frac{1}{y+4\pi-x}+\frac{1}{y-4\pi+x}$$
$$\left.+\ldots\right\},$$

$$\cos y \sin x+\cos 2y \sin 2x+\cos 3y \sin 3x+\ldots$$
$$=\int_0^\infty \sin xu \cos uy\, du-\int_0^\infty \sin(2\pi-x)u \cos uy\, du$$
$$+\int_0^\infty \sin(2\pi+x)u\cos uy\, du-\int_0^\infty \sin(4\pi-x)u\cos uy\, du$$
$$+\ldots$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{y+x}-\frac{1}{y-x}-\frac{1}{y+2\pi-x}+\frac{1}{y-2\pi+x}+\frac{1}{y+2\pi+x}\right.$$
$$-\frac{1}{y-2\pi+x}-\frac{1}{y+4\pi-x}+\frac{1}{y-4\pi+x}$$
$$\left.+\ldots\right\}.$$

Die Vergleichung dieser Ergebnisse mit 30) lässt sogleich die bekannte Identität entspringen

$$\tfrac{1}{2}\cot z=\frac{1}{2z}-\frac{z}{\pi^2-z^2}-\frac{z}{(2\pi)^2-z^2}-\frac{z}{(3\pi)^2-z^2}-\ldots,$$
$$-\infty<z<+\infty,$$

und leitet so auf die Umformung der Integrale 30); man hat

$$S_{\cos x}=\int_a^b\frac{y f(y)}{y^2-x^2}\,dy+\int_a^b\frac{y f(y)}{y^2-(2\pi-x)^2}\,dy \quad\ldots\ldots\quad 31)$$
$$+\int_a^b\frac{y f(y)}{y^2-(2\pi+x)^2}\,dy+\int_a^b\frac{y f(y)}{y^2-(4\pi-x)^2}\,dy$$
$$+\ldots,$$

$$S_{\sin x}=\int_a^b\frac{x f(y)}{x^2-y^2}\,dy-\int_a^b\frac{(2\pi-x)f(y)}{(x-2\pi)^2-y^2}\,dy$$
$$+\int_a^b\frac{(2\pi+x)f(y)}{(x+2\pi)^2-y^2}\,dy-\int_a^b\frac{(4\pi-x)f(y)}{(x-4\pi)^2-y^2}\,dy$$
$$+\ldots$$

ohne weitere Bedingungen.

Beispielsweise sei in 30) $f(y)=1$; es gelten dann die Formeln

$$\frac{\cos a-\cos b}{1}\cos x+\frac{\cos 2a-\cos 2b}{2}\cos 2x+\frac{\cos 3a-\cos 3b}{3}\cos 3x+\ldots$$
$$=\tfrac{1}{4}\, l\left\{\frac{\cos b-\cos x}{\cos a-\cos x}\right\}^2,$$

$$\frac{\sin y \sin x}{1} + \frac{\sin 2y \sin 2x}{2} + \frac{\sin 3y \sin 3x}{3} + \dots$$
$$= \pm \tfrac{1}{4}\, l \left\{ \frac{1 - \cos(y \pm x)}{\cos y - \cos x} \right\}^2,$$

wobei die Wahl der Zeichen gleichgiltig ist. Es fragt sich aber, bei der Convergenz aller periodischen Reihen, welches der Werth der Summe

$$\frac{\cos y \cos x}{1} + \frac{\cos 2y \cos 2x}{2} + \frac{\cos 3y \cos 3x}{3} + \dots$$

für sich sei, d. h. welcher von $y$ und $x$ unabhängige Summand dem Ausdruck $-\frac{1}{4}\, l \{\cos y - \cos x\}^2$ beizufügen ist. Um hierüber zu entscheiden, nehme man $x = 0$; die Reihe $\Sigma \frac{\cos ny}{n}$ hat dann eine bekannte Summe, $-l2 - \frac{1}{2}\, l \sin^2 \frac{y}{2}$, welche von $-\frac{1}{4}\, l\, (1 - \cos y)^2 = -\frac{1}{4}\, l \left(4 \sin^4 \frac{y}{2}\right)$ blos um $-\frac{1}{2}\, l2$ verschieden ist. Also hat man

$$\frac{\cos y \cos x}{1} + \frac{\cos 2y \cos 2x}{2} + \frac{\cos 3y \cos 3x}{3} + \dots$$
$$= -\tfrac{1}{2}\, l2 - \tfrac{1}{4}\, l \{\cos y - \cos x\}^2.$$

Ausserdem bemerke man die Entwicklung

$$\frac{\cos y \cos x}{1} + \frac{\cos 3y \cos 3x}{3} + \frac{\cos 5y \cos 5x}{5} + \dots = \tfrac{1}{8}\, l \left(\frac{\cos y + \cos x}{\cos y - \cos x}\right)^2,$$

welche aus den vorigen Formeln gemeinschaftlich hervorgeht, sowie

$$\frac{\sin y \sin x}{1} + \frac{\sin 3y \sin 3x}{3} + \frac{\sin 5y \sin 5x}{5} + \dots$$
$$= \pm \tfrac{1}{8}\, l \left\{ \tan^4 \frac{y \pm x}{2} \cdot \left(\frac{\cos y + \cos x}{\cos y - \cos x}\right)^2 \right\}.$$

Nimmt man jetzt weiter die Formeln 31) zu Hilfe, so erfährt man leicht, dass die rechts stehenden Functionen von *cos* und *sin* unendlichen Producten äquivalent sind; speciell nämlich ergibt sich

$$\frac{\cos b - \cos x}{\cos a - \cos x} = \frac{b^2 - x^2}{a^2 - x^2} \cdot \frac{b^2 - (2\pi - x)^2}{a^2 - (2\pi - x)^2} \cdot \frac{b^2 - (2\pi + x)^2}{a^2 - (2\pi + x)^2} \dots,$$

$$\left(\frac{1 - \cos(b \pm x)}{\cos b - \cos x}\right)^2 = \left[\frac{b + x}{b - x} \cdot \frac{b - 2\pi + x}{b + 2\pi - x} \cdot \frac{b + 2\pi + x}{b - 2\pi - x} \dots\right]^{\mp 2},$$

und es hat weiter keine Schwierigkeit, neue Bestätigungen dieser Entwicklungen dadurch zu gewinnen, dass man sie auf die bekannten, unbedingt geltenden Sinus- und Cosinusproducte reducirt.

Wir haben im Vorhergehenden versucht die Reihen $S$ in Reihen $R$ umzuformen. Zu diesem Zwecke stellten wir die Integrale $B_n$ und $A_n$, welche nach $\sin ny$ und $\cos ny$ fortlaufen, als Integrale $A'_n$ und $B'_n$ dar, deren Grenzen bezüglich $y$ nicht mehr $a$ und $b$, sondern 0 und $\infty$ waren, entsprechend der unbedingten Geltung der Reihen $S$. Selbstverständlich erhielten wir so für die Summen 30) Aggregate 31) von Functionen $\pm F(2k\pi \pm x)$. Es fragt sich nun, ob diese Darstellung von $S$ unter der Form $R$ die einzig mögliche ist und da zeigt es sich bald, dass noch eine Darstellung existirt, welche indessen nur für eine gewisse Specialisirung der Grenzen $a$ und $b$ giltig ist, und dass damit die Transformation der Integrale $B$ und $A$ abgeschlossen ist. Wir meinen den Fall, wo $a$ und $b$ ganze Vielfache von $\pi$ sind. Sei $a = 0$, $b = \pi$; die Sache wird mittelst dieser Voraussetzungen am leichtesten klar. Die Summen 30) haben die Eigenschaft für alle Substitutionen $2k\pi \pm x$ für $x$ den anfänglichen absoluten Werth beizubehalten; sie repräsentiren in dieser Hinsicht genau das Schema der Functionen 26), das für Reihen $R$ mit begrenzten Intervallen aufgestellt wurde. Man überzeugt sich von der Allgemeinheit dieser Bemerkung auch leicht, indem man die Summen 30) als Functionen $f$ in $A'$ und $B'$ einführt und bei veränderten Grenzen so transformirt, dass die neuen Reihen $R$ die nämlichen Ausdrücke 30) erzeugen; die transformirten Integrale $A'$ und $B'$ erweisen sich nämlich unter allen Umständen mit den von 0 und $\pi$ begrenzten identisch. Hieraus folgt also auch die Identität dieser einfachsten Integrale $A'$ und $B'$ mit $B$ und $A$, d. h. man hat die Formeln

$$\int_0^\pi f(y) \sin ny\, dy = \frac{2}{\pi} \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^\pi \cos ny\, dy \int_0^\pi \frac{\sin z f(z)}{\cos y - \cos z}\, dz,$$

$$\int_0^\pi f(y) \cos ny\, dy = \frac{2}{\pi} \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^\pi \sin ny\, dy \int_0^\pi \frac{\sin y f(z)}{\cos z - \cos y}\, dz.$$

Bei der Willkürlichkeit des $f$ muss man nun weiter auf die Beziehungen schliessen

$$\pi \sin ny = \int_0^\pi \frac{\sin y \cos nx}{\cos x - \cos y}\, dx,$$

$$\pi \cos ny = \int_0^\pi \frac{\sin x . \sin nx}{\cos y - \cos x}\, dx, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots \textit{in inf.},$$

in welchen ein Pfeiler der ganzen Theorie der periodischen Reihen erkannt werden muss. Es fällt in die Augen, dass sie auf eine nicht vereinzelt stehende Art die bekannten Integralbestimmungen

$$\int_0^\pi \frac{\cos nx \sin y}{1 - \cos x \cos y}\, dx \text{ und } \int_0^\pi \frac{\sin x \sin nx}{1 - \cos x \cos y}\, dx$$ ergänzen; bedeutender aber

ist jedenfalls der Umstand, dass *cos* un d*sin* vielfacher Winkel neben den Darstellungen durch divergente und continuirliche Integrale auch unter den Formen zweier sogenannter discontinuirlicher Integrale erscheinen, die in gewisser Hinsicht vertretbar sind.

Diese Formeln lösen nun auf der Stelle ein bisher unbeachtet und unbeantwortet gebliebenes Problem, nämlich

„alle Reihen $R$, deren Coefficienten beliebige Grenzen enthalten, auf Reihen mit zwischen 0 und $\pi$ genommenen Grenzen zu reduciren."

Dass eine solche Reduction existirt, zeigt der Fall, wo $A$ und $B$ unbegrenzt sind. Man gelangt nun auf diesem Wege zu Summationen für $R$, welche durch bestimmte Integrale gegeben sind; was noch wichtiger ist, es entspringen hierbei Darstellungen einer willkürlichen Function $f$ durch beliebige discontinuirliche Integrale. Die Formeln bleiben dieselben, wenn man bei einer blossen Reduction von $R$ auf $S$ stehen bleibt; diese ist nun auf eine doppelte Weise ausführbar. Bei der Leichtigkeit des Gedankenganges folgen hier blos die Resultate.

1. Integrale für die Reihen $R$

$$R_{\cos x} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi dy \int_a^b dz\, \frac{\sin y\, f(z)}{\cos z - \cos y} \cdot \frac{\sin y}{\cos x - \cos y}$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty dy \int_a^b dz\, \frac{y f z}{y^2 - z^2} \cdot \frac{\sin y}{\cos x - \cos y},$$

$$R_{\sin x} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi dy \int_a^b dz\, \frac{\sin z\, f(z)}{\cos y - \cos z} \cdot \frac{\sin x}{\cos y - \cos x}$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty dy \int_a^b dz\, \frac{z f(z)}{z^2 - y^2} \cdot \frac{\sin x}{\cos y - \cos x};$$

2. Integrale, einer Function $f$ aequivalent

$$\pi^2 f(x) = \int_0^\pi \int_0^\pi dy\, dz\, \frac{\sin z\, f(z) \sin x}{(\cos y - \cos z)(\cos y - \cos x)}$$

$$= \int_0^\pi \int_0^\pi dy\, dz\, \frac{\sin^2 y\, f(z)}{(\cos z - \cos y)(\cos x - \cos y)}$$

$$= \int_0^\infty dz \int_0^\pi dy\, \frac{z f(z)}{z^2 - y^2} \cdot \frac{\sin x}{\cos y - \cos x}$$

$$= \int_0^\infty dz \int_0^\pi dy\, \frac{y f(z)}{y^2 - z^2} \cdot \frac{\sin y}{\cos x - \cos y}$$

$$= \int_0^\infty dz \int_0^\pi dy\, \frac{x}{x^2 - y^2} \cdot \frac{\sin z\, f(z)}{\cos y - \cos z} = \int_0^\infty dz \int_0^\pi dy\, \frac{y}{y^2 - x^2} \cdot \frac{\sin y\, f(z)}{\cos z - \cos y}$$

$$= 2\int_0^\infty \int_0^\infty dy\, dz\, \frac{y^2 f(z)}{(y^2 - z^2)(y^2 - x^2)} = 2\int_0^\infty \int_0^\infty dy\, dz\, \frac{x z f(z)}{(y^2 - z^2)(y^2 - x^2)}.$$

Mit der Summirung der Reihen $R_{\cos x}$, $R_{\sin x}$, $S_{\cos x}$ und $S_{\sin x}$ ist die Analogie derselben mit den Fourier'schen Integralen bis auf Einen Punkt erschöpft. Dieser betrifft die Darstellung der Reciprocität der in beiden vorkommenden Argumente $x$ und $y$. Er führt in der bisherigen Gestalt der Theorie auf den Parseval'schen Lehrsatz und beschränkt sich auf die Reihen $R$; die erweiterte Betrachtung, wie sie im Vorhergehenden durchgeführt ist, hat die Lücke auszufüllen, was nur möglich ist, wenn die Reihen $R$ und $S$ auf ihre Wurzeln, die Fourier'schen Integrale und ihre Analogien zurückgeführt werden. Wir erinnern zu diesem Zwecke an die Summen, welche für 23) und 28) abgeleitet werden konnten und an das Schema der für 23) speciell geltenden Argumente $\xi$ und $\eta$.

Es liege nun $a$ zwischen $h\pi$ und $(h+1)\pi$, $b$ zwischen $k\pi$ und $(k+1)\pi$, und zwar sei

$$a = h\pi + \alpha, \quad b = k\pi + \beta;$$

wir multipliciren jetzt die vorstehenden Formeln mit einer willkürlichen Function $\varphi(x)$ und integriren sie wieder von $a$ bis $b$; da in diesem Falle die Integrationsbuchstaben linker Hand vertauscht werden dürfen, so wird man eine Bestätigung der zu Grunde gelegten Reihensummen darin erblicken, wenn rechts das zu gewinnende Resultat die gleiche Symmetrie bezüglich $f$ und $\varphi$ zeigt. Der Spielraum für $x$ und $y$ soll, wie bemerkt, der gleiche sein; dies hat die Bedeutung, dass aus dem Schema der Argumente $\xi$ und $\eta$ ein beliebiges Quadrat herausgehoben werden muss, dessen Diagonale mit der Diagonale des Schemas zusammenfällt. Lässt man alle in Betracht zu ziehende Fourier'scher Integrale vorläufig durch das Zeichen $\int$ vertreten sein, so sind überhaupt die folgenden Operationen auszuführen:

$$\int_a^b R_{\cos,\,\sin x}\,\varphi(x)\,dx =$$

$$\int_{h\pi+\alpha}^{(h+1)\pi}\int_{h\pi+\alpha}^{(h+1)\pi} + \int_{h\pi+\alpha}^{(h+1)\pi}\int_{(h+1)\pi}^{k\pi} + \int_{h\pi+\alpha}^{(h+1)\pi}\int_{k\pi}^{k\pi+\beta} \tag{32}$$

$$+ \int_{(h+1)\pi}^{k\pi}\int_{h\pi+\alpha}^{(h+1\pi)} + \int_{(h+1)\pi}^{k\pi}\int_{(h+1)\pi}^{k\pi} + \int_{(h+1)\pi}^{k\pi}\int_{k'\pi}^{k\pi+\beta}$$

$$+ \int_{k\pi}^{k\pi+\beta}\int_{h\pi+\alpha}^{(h+1)\pi} + \int_{k\pi}^{k\pi+\beta}\int_{(h+1)\pi}^{k\pi} + \int_{k\pi}^{k\pi+\beta}\int_{k\pi}^{k\pi+\beta}.$$

Jedes dieser neun Integrale erfordert eine besondere Beachtung. Für die drei ersten sind die Argumente der $h+1$sten Zeile des Schemas, welche das Intervall $a$ bis $b$ betreffen, für die zweite Zeile ebenso die Argumente der $h+2$ten bis $k$ten Zeile und für die dritte Reihe die der $k+1$sten Zeile in Anspruch zu nehmen.

Wir beschäftigen uns zuerst mit dem Kernintegral

$$\int\limits_{(h+1)\pi}^{k\pi} \int\limits_{(h+1)\pi}^{k\pi},$$

für welches vorläufig allein das Schema 27) der Functionen $f$ sofort in Anwendung gebracht werden kann. Es ist dieses Integral hiernach identisch mit folgender Summe

$$\int\limits_{h\pi}^{(h+1)\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx \pm \int\limits_{h\pi}^{(h+1)\pi} f(2h\pi - x)\,\varphi(x)\,dx + \int\limits_{h\pi}^{(h+1)\pi} f(2\pi + x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$\pm \int\limits_{h\pi}^{(h+1)\pi} f(\overline{2h+2}\pi - x)\,\varphi(x)\,dx + \ldots$$

$$\pm \int\limits_{(h+1)\pi}^{(h+2)\pi} f(2h\pi - x)\,\varphi(x)\,dx + \int\limits_{(h+1)\pi}^{(h+2)\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx \pm \int\limits_{(h+1)\pi}^{(h+2)\pi} f(\overline{2h+2}\pi - x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$+ \int\limits_{(h+1)\pi}^{(h+2)\pi} f(2\pi + x)\,\varphi(x)\,dx \pm \ldots + \ldots,$$

in welcher $h$ durch $h-1$ ersetzt ist. Die letzte Colonne und die letzte Zeile der Doppelsumme lässt, wie leicht zu sehen, zwei Bestimmungen zu; entweder ist das Anfangsglied der letzten Zeile ein Glied steigender oder fallender Diagonale. Im ersten Falle lautet die letzte Zeile

$$(k' = k + h,\ k'' = k - h - 2)$$

$$\pm \int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\overline{k' - 2}\pi - x)\,\varphi(x)\,dx + \int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(x - \overline{k'' - 4}\pi)\,\varphi(x)\,dx$$

$$\pm \int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(k'\pi - x)\,\varphi(x)\,dx + \int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(x - \overline{k'' - 6}\,\pi)\,\varphi(x)\,dx \pm \ldots,$$

die letzte Colonne

$$\pm \int\limits_{h\pi}^{(h+1)\pi} f(\overline{k' - 2}\pi - x)\,\varphi(x)\,dx + \int\limits_{(h+1)\pi}^{(h+2)\pi} f(\overline{k_{\prime\prime} - 4}\pi + x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$\pm \int\limits_{(h+2)\pi}^{(h+3)\pi} f(k'\pi - x)\,\varphi(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx;$$

im andern Falle, $k-h$ ungerade, hat man als letzte Zeile und Colonne

$$+\int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(-\overline{k'-1}\pi+x)\,\varphi(x)\,dx \pm \int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\overline{k''-3}\pi-x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$+\int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(x-\overline{k'-3}\pi)\,\varphi(x)\,dx \pm \int\limits_{(k-1)\pi}^{(k\pi} f(\overline{k''-1}\pi-x)\,\varphi(x)\,dx+\ldots,$$

$$+\int\limits_{h\pi}^{(h+1)\pi} f(x+\overline{k'-1}\pi)\,\varphi(x)\,dx \pm \int\limits_{(h+1)\pi}^{(h+2)\pi} f(\overline{k''-3}\pi-x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$+\int\limits_{(h+2)\pi}^{(h+3)\pi} f(\overline{k'-3}\pi+x)\,\varphi(x)\,dx+\ldots+\int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Ueberhaupt kann kein einziges Doppelintegral verschwinden, weil der Spielraum der Argumente $\xi$ und $\eta$ bei allen derselbe ist; dass als Grenzen die vorstehend verzeichneten zu wählen sind, versteht sich von selbst. Es bleiben nur zwei Fragen noch zu beantworten übrig; es ist die Symmetrie des soeben analysirten Integrales $\int\limits_{h\pi}^{k\pi}\int\limits_{h\pi}^{k\pi}$ bezüglich $\varphi$ und $f$ nachzuweisen, sodann muss die Ergänzung dieses Integrales durch die Randintegrale von 32), resp. die Continuität des Integrales mit dem vervollständigten dargestellt werden. Jene Symmetrie erhellt aus der folgenden Schreibweise des Integrales, in welcher die Ordnung der Glieder beibehalten ist:

$$\int\limits_{h\pi}^{(h+1)\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx \pm \int\limits_{(h+1)\pi}^{(h+2)\pi} f(x)\,\varphi(2h\pi-x)\,dx+\int\limits_{(h+2)\pi}^{(h+3)\pi} f(x)\,\varphi(x-2\pi)\,dx$$

$$\pm\int\limits_{(h+3)\pi}^{(h+4)\pi} f(x)\,\varphi\,(\overline{2h+2}\pi-x)\,dx+\ldots$$

$$\pm\int\limits_{(h+1)\pi}^{(h+2)\pi} f(2h\pi-x)\,\varphi(x)\,dx+\int\limits_{(h+1)\pi}^{(h+2)\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx \pm \int\limits_{(h+2)\pi}^{(h+3)\pi} f(x)\,\varphi(\overline{2h+2}\pi-x)\,dx$$

$$+\int\limits_{(h+3)\pi}^{(h+4)\pi} f(x)\,\varphi(x-2\pi)\,dx\pm\ldots$$

$$+\int\limits_{(h+2)\pi}^{(h+3)\pi} f(x-2\pi)\,\varphi(x)\,dx \pm \int\limits_{(h+2)\pi}^{(h+3)\pi} \varphi(x)\,f(\overline{2h+2\pi}-x)\,dx + \int\limits_{(h+2)\pi}^{(h+3)\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$\pm \int\limits_{(h+3)\pi}^{(h+4)\pi} f(x)\,\varphi(\overline{2h+4\pi}-x)\,dx + \cdots$$

$$\pm \int\limits_{(h+3)\pi}^{(h+4)\pi} f(\overline{2h+2\pi}-x)\,\varphi(x)\,dx + \int\limits_{(h+3)\pi}^{(h+4)\pi} f(x-2\pi)\,\varphi(x)\,dx$$

$$\pm \int\limits_{(h+3)\pi}^{(h+4)\pi} f(\overline{2h+4\pi}-x)\,\varphi(x)\,dx + \int\limits_{(h+3)\pi}^{(h+4)\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx \pm \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

oder aus der folgenden, in welcher die Diagonalreihen zu Integralen vereinigt sind

$$\int\limits_{h\pi}^{k\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx + \int\limits_{(h+2)\pi}^{k\pi} [f(x-2\pi)\,\varphi(x) + \varphi(x-2\pi)\,f(x)]\,dx$$

$$+ \int\limits_{(h+4)\pi}^{k\pi} [f(x-4\pi)\,\varphi(x) + \varphi(x-4\pi)\,f(x)]\,dx + \cdots$$

$$\pm \int\limits_{(h+1)\pi}^{(h+2)\pi} [f(2h\pi-x)\,\varphi(x) + \varphi(2h\pi-x)\,f(x)]\,dx \pm \int\limits_{(h+2)\pi}^{(h+4)\pi} [f(\overline{2h+2\pi}-x)\,\varphi(x)$$

$$+ \varphi(\overline{2h+2\pi}-x)\,f(x)]\,dx$$

$$\pm \int\limits_{(h+3)\pi}^{(h+6)\pi} [f(\overline{2h+4\pi}-x)\,\varphi(x) + \varphi(\overline{2h+4\pi}-x)\,f(x)]\,dx \pm \cdots$$

$$\pm \int\limits_{(k-4)\pi}^{(k-2)\pi} [f(\overline{2k-2\pi}-x)\,\varphi(x) \qquad \pm \int\limits_{(k-2)\pi}^{(k-1)\pi} [f(2k\pi-x)\,\varphi(x)$$

$$+ \varphi(\overline{2k-2\pi}-x)\,f(x)]\,dx \qquad + \varphi(2k\pi-x)\,f(x)]\,dx.$$

In dieser letzten Gestalt zeigt das Integral deutlich, in welcher Weise es durch die Randintegrale 32) zu ergänzen ist. Denn vermindert man vorerst $h$ und erhöht $k$ um den Werth von $\pi$, so geht das Integral in

$$\int\limits_{(h-1)\pi}^{(k+1)\pi} + \int\limits_{(h+1)\pi}^{(k+1)\pi} + \int\limits_{(h+3)\pi}^{(k+1)\pi} + \cdots$$

$$\pm\int\limits_{h\pi}^{(h+1)\pi} \pm\int\limits_{(h+1)\pi}^{(h+3)\pi} \pm \ldots \pm\int\limits_{(k-3)\pi}^{(k-1)\pi} \pm\int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi}$$

über und hieraus folgt, dass, um die Continuität des Ueberganges auf diesen extremen Fall zu sichern, bei Verminderung des $h$ um den Bruchtheil $\alpha\pi$, dagegen Vermehrung von $k$ um $\beta\pi$, nur folgende Determination zulässig bleibt:

$$\int\limits_{(h-\alpha)\pi}^{(k+\beta)\pi} + \int\limits_{(h+2-\alpha)\pi}^{(k+\beta)\pi} + \int\limits_{(h+4-\alpha)\pi}^{(k+\beta)\pi} + \ldots$$

$$\pm\int\limits_{(h-\alpha)\pi}^{h\pi} \pm\int\limits_{(h-\alpha)\pi}^{(h+1)\pi} \pm \ldots \pm\int\limits_{(k-1)\pi}^{(k+\beta)\pi} \pm\int\limits_{k\pi}^{(k+\beta)\pi} .$$

Setzt man nun $(h-\alpha)\pi = a$, $(k+\beta)\pi = b$, so hat man das Endresultat:

$$\int\limits_a^b R_{\cos,\, \sin x}\, \varphi(x)\, dx =$$

$$\int\limits_a^b f(z)\,\varphi(z)\,dz + \int\limits_{a+2\pi}^b [f(z-2\pi)\,\varphi(z) + \varphi(z-2\pi)\,f(z)]\,dz$$

$$+ \int\limits_{a+4\pi}^b [f(z-4\pi)\,\varphi(z) + \varphi(z-4\pi)\,f(z)]\,dz + \ldots$$

$$\pm\int\limits_a^{h\pi} [f(2h\pi - z)\,\varphi(z) + \varphi(2h\pi - z)\,f(z)]\,dz \pm \int\limits_a^{(h+1)\pi} [f(\overline{2h+2}\pi - z)\,\varphi(z)$$

$$+ \varphi(\overline{2h+2}\pi - z)\,f(z)]\,dz \pm \ldots$$

$$\pm\int\limits_{(k-1)\pi}^b [f(\overline{2k-2}\pi - z)\,\varphi(z) + \varphi(\overline{2k-2}\pi - z)\,f(z)]\,dz$$

$$\pm\int\limits_{k\pi}^b [f(2k\pi - z)\,\varphi(z) + f(z)\,\varphi(2k\pi - z)]\,dz.$$

Es liegen in der Symmetrie der Functionen $f$ und $\varphi$, sowie in dem klaren Gesetze des Grenzenganges wohl genügende Bürgschaften der Richtigkeit der gewonnenen Formel; gleichwohl mögen zu einer gewissen *demonstratio ad oculos* noch aus 32) die Randintegrale

$$\int\limits_{h\pi-\alpha}^{h\pi} \int\limits_{k\pi}^{k\pi+\beta} \quad \text{und} \quad \int\limits_{k\pi}^{k\pi+\beta} \int\limits_{h\pi-\alpha}^{h\pi} \quad . \quad . \quad . \quad 33)$$

näher geprüft werden.

Gehen wir auf die Tafel der Argumente $\xi$ und $\eta$ zurück und substituiren die betreffenden speciellen Werthe in die Fourier'schen Integrale, so kommen folgende Fälle für das erste jener Randintegrale in Betracht:

$$\int_0^\infty du \int_{h\pi-\alpha}^{h\pi} \cos(m\pi - x)\, u\, \varphi(x)\, dx \int_{k\pi}^{k\pi+\beta} \cos(\overline{h-1}\pi + y)\, u\, f(y)\, dy,$$

$$\int_0^\infty du \int_{h\pi-\alpha}^{h\pi} \cos(n\pi + x)\, u\, \varphi(x)\, dx \int_{k\pi}^{k\pi+\beta} \cos(\overline{h-1}\pi + y)\, u\, f(y)\, dy,$$

$$\int_0^\infty du \int_{h\pi-\alpha}^{h\pi} \cos(m'\pi - x)\, u\, \varphi(x)\, dx \int_{k\pi}^{k\pi+\beta} \cos(h\pi - y)\, u\, f(y)\, dy,$$

$$\int_0^\infty du \int_{h\pi-\alpha}^{h\pi} \cos(n'\pi + x)\, u\, \varphi(x)\, dx \int_{k\pi}^{k\pi+\beta} \cos(h\pi - y)\, u\, f(y)\, dy.$$

Man überzeugt sich nun leicht, dass der Reihe nach

$$m = k + 2h - 1, \qquad m' = k,$$
$$n = k, \qquad n' = k - 2h + 1,$$

wovon $m$ und $m'$ auf Glieder steigender, $n$ und $n'$ auf Glieder fallender Diagonalen führen. Substituirt man nun an die Stelle der hervorgehobenen Argumente $\xi$ und $\eta$ wirklich $\xi$ und $\eta$, so bekommt man die vier Doppelpaare von Grenzen ohne den Factor $\pi$

$$\left\{\begin{matrix} k+h-1, & k+h-1+\beta \\ k+h-1, & k+h-1+\alpha \end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{matrix} k+h-1, & k+h-1+\beta \\ k+h-\alpha, & k+h \end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{matrix} k-h, & k-h+\beta \\ k-h, & k-h+\alpha \end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{matrix} k-h, & k-h+\beta \\ k-h-\alpha+1, & k-h+1 \end{matrix}\right\},$$

und zwar sind die linken Paare die unteren', die rechten die oberen Grenzenpaare. Hieraus entspringen sofort die Intervalle des jedem einzelnen Fourier'schen Integral aequivalenten Integrales; man erhält für diese letzteren überhaupt

$$\int_{(k+h-1)\pi}^{(k+h-1)\pi+(\alpha,\beta)} f(z - \overline{h-1}\pi)\, \varphi(\overline{k+2h-1}\pi - z)\, dz, \qquad \alpha \lesseqgtr \beta,$$

$$\int_{\pi(k+h)-\alpha}^{\pi(k+h-1)+\beta} f(z - \overline{h-1}\pi)\, \varphi(k\pi + z)\, dz,\ 0; \qquad \pi \lesseqgtr \alpha + \beta,$$

$$\int\limits_{(k-h)\pi}^{(k-h)\pi+(\alpha,\ \beta)} f(z+h\pi)\,\varphi(k\pi-z)\,dz, \qquad \alpha \lesseqgtr \beta,$$

$$\int\limits_{\pi(k-h+1)-\alpha}^{\pi(k-h)+\beta} f(z+h\pi)\,\varphi(\overline{k-2h+1}\,\pi+z)\,dz,\ 0, \qquad \pi \lesseqgtr \alpha+\beta.$$

In diesen Integralen müssen die Argumente für $f$ einfach durch $z$ ersetzt werden; dies gibt endlich die Ausdrücke

$$\int\limits_{k\pi}^{k\pi+(\alpha,\ \beta)} f(z)\,\varphi(\overline{k+h}\,\pi-z)\,dz, \qquad \alpha \lesseqgtr \beta,$$

$$\int\limits_{k\pi+\pi-\alpha}^{k\pi+\beta} f(z)\,\varphi(-\overline{k-h+1}\,\pi+z)\,dz,\ 0, \qquad \pi \lesseqgtr \alpha+\beta,$$

zu denen sich vom zweiten Randintegral 33) noch die folgenden gesellen

$$\int\limits_{h\pi-(\alpha,\ \beta)}^{h\pi} f(\overline{k+h}\,\pi-z)\,\varphi(z)\,dz, \qquad \alpha \lesseqgtr \beta,$$

$$\int\limits_{h\pi-\alpha}^{h\pi-\pi+\beta} f(-\overline{k-h+1}\,\pi+z)\,\varphi(z)\,dz,\ 0, \qquad \pi \lesseqgtr \alpha+\beta,$$

Man hat hiernach die Bedingungen, unter welchen ein Eckintegral absteigender Diagonale noch einen Werth liefert — es muss die Summe $\alpha+\beta\,\pi$ übersteigen oder $b-a$ muss grösser sein als $\pi+\overline{k-h}\,\pi = (k-h+1)\,\pi$; und bei Eckintegralen steigender Diagonale sieht man, welcher von den Werthen $\alpha$ und $\beta$ beim Anschluss an das übrige Diagonalintegral den Ausschlag gibt, in diesem Falle ist natürlich der kleinere Werth zu nehmen.

Nachdem auf diese Weise das Problem in seiner allgemeinsten Fassung sls gelöst erscheint, erübrigt es, specielle Fälle hervorzuheben.

Wenn

$$A_n = \int\limits_a^b f(x)\cos nx\,dx, \quad B_n = \int\limits_a^b f(x)\sin nx\,dx,$$

$$\mathrm{A}_n = \int\limits_a^b \varphi(y)\cos ny\,dy, \quad \mathrm{B}_n = \int\limits_a^b \varphi(y)\sin ny\,dy,$$

und

$$0 < a < b < \pi,$$

so gelten die einfachen Beziehungen

$$\tfrac{1}{2} A_0 \mathrm{A}_0 + A_1 \mathrm{A}_1 + A_2 \mathrm{A}_2 + \ldots \text{ in inf.} =$$

$$B_1 \mathrm{B}_1 + B_2 \mathrm{B}_2 + B_3 \mathrm{B}_3 + \ldots \text{ in inf.} = \frac{\pi}{2} \int_a^b f(z)\, \varphi(z)\, dz.$$

Wenn zweitens $a = 0$, $b = \infty$ ist, so lassen sich den vorstehenden Bestimmungen die folgenden Sätze entnehmen

$$\frac{2}{\pi} \left(\tfrac{1}{2} A_0 \mathrm{A}_0 + A_1 \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 \mathrm{A}_2 + \ldots \text{ in inf.}\right) = \ldots \ldots \tag{34}$$

$$\int_0^\infty f(z)\, \varphi(z)\, dz + \int_0^\infty [f(z + 2\pi)\, \varphi(z) + \varphi(z + 2\pi)\, f(z)]\, dz$$

$$+ \int_0^\infty [f(z + 4\pi)\, \varphi(z) + \varphi(z + 4\pi)\, f(z)]\, dz + \ldots$$

$$+ \int_0^{2\pi} f(z)\, \varphi(2\pi - z)\, dz + \int_0^{4\pi} f(z)\, \varphi(4\pi - z)\, dz + \ldots,$$

$$\frac{2}{\pi} (B_1 \mathrm{B}_1 + B_2 \mathrm{B}_2 + B_3 \mathrm{B}_3 + \ldots \text{ in inf.}) =$$

$$\int_0^\infty f(z)\, \varphi(z)\, dz + \int_0^\infty [f(z + 2\pi)\, \varphi(z) + \varphi(z + 2\pi)\, f(z)]\, dz$$

$$+ \int_0^\infty [f(z + 4\pi)\, \varphi(z) + \varphi(z + 4\pi)\, f(z)]\, dz + \ldots$$

$$- \int_0^{2\pi} f(z)\, \varphi(2\pi - z)\, dz - \int_0^{4\pi} f(z)\, \varphi(4\pi - z)\, dz - \ldots$$

Diese Sätze addirt und subtrahirt liefern wieder:

$$\frac{2}{\pi} \left(\tfrac{1}{2} A_0 \mathrm{A}_0 + A_1 \mathrm{A}_1 + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \right. \tag{35}$$

$$\left. + B_1 \mathrm{B}_1 + B_2 \mathrm{B}_2 + \ldots\right) =$$

$$2 \int_0^\infty [f(z)\, \varphi(z) + f(z + 2\pi)\, \varphi(z) + f(z + 4\pi)\, \varphi z + \ldots$$

$$+ f(z)\, \varphi(z + 2\pi) + f(z)\, \varphi(z + 4\pi) + \ldots]\, dz,$$

$$\frac{2}{\pi} \left(\tfrac{1}{2} A_0 \mathrm{A}_0 + A_1 \mathrm{A}_1 + A_2 \mathrm{A}_2 + \ldots \right.$$

$$\left. - B_1 \mathrm{B}_1 - B_2 \mathrm{B}_2 - \ldots\right) =$$

$$2 \int_0^{2\pi} f(z)\, \varphi(2\pi - z)\, dz + 2 \int_0^{4\pi} f(z)\, \varphi(4\pi - z)\, dz + \ldots =$$

$$2 \int_0^{2\pi} \varphi(z)\, f(2\pi - z)\, dz + 2 \int_0^{4\pi} \varphi(z)\, f(4\pi - z)\, dz + \ldots$$

Hiermit ist der Kreis der Formeln, die auf der Grundlage der Reihen $R_{\cos x}$ und $R_{\sin x}$ erbaut werden können, geschlossen. Wir ergänzen sie durch die folgenden auf die Reihen $S_{\cos x}$ und $S_{\sin x}$ gestützten Ergebnisse:

$$A_1 \mathrm{B}_1 + A_2 \mathrm{B}_2 + A_3 \mathrm{B}_3 + \ldots = -\int_a^b\int_a^b \frac{\varphi(x)\, f(y) \sin x}{2(\cos x - \cos y)}\, dy\, dx, \quad . \; . \quad 36)$$

$$\mathrm{A}_1 B_1 + \mathrm{A}_2 B_2 + \mathrm{A}_3 B_3 + \ldots = \int_a^b\int_a^b \frac{\varphi(x)\, f(y) \sin y}{2(\cos x - \cos y)}\, dy\, dx,$$

mit den ihnen äquivalenten Reihen

$$\int_a^b\int_a^b \frac{x\,\varphi(x) f(y)}{x^2 - y^2}\, dx\, dy - \int_a^b\int_a^b \frac{(2\pi - x)\,\varphi(x)\, f(y)}{(x - 2\pi)^2 - y^2}\, dx\, dy \quad . \; . \; . \; . \quad 37)$$

$$+ \int_a^b\int_a^b \frac{(2\pi + x)\,\varphi(x)\, f(y)}{(x + 2\pi)^2 - y^2}\, dx\, dy - \int_a^b\int_a^b \frac{(4\pi - x)\,\varphi(x)\, f(y)}{(x - 4\pi)^2 - y^2}\, dx\, dy$$

$$+ \ldots,$$

$$\int_a^b\int_a^b \frac{y\,\varphi(x)\, f(y)}{y^2 - x^2}\, dx\, dy + \int_a^b\int_a^b \frac{y\,\varphi(x)\, f(y)}{y^2 - (2\pi - x)^2}\, dx\, dy$$

$$+ \int_a^b\int_a^b \frac{y\,\varphi(x)\, f(y)}{y^2 - (2\pi + x)^2}\, dx\, dy + \int_a^b\int_a^b \frac{y\,\varphi(x)\, f(y)}{y^2 - (4\pi - x)^2}\, dx\, dy$$

$$+ \ldots,$$

in welchen, wie in 34) und 35) die Buchstaben $x$ und $y$, $\varphi$ und $f$ vertauscht werden dürfen.

Im speciellen Falle $\varphi = f$ gehen diese Formeln in die folgenden über:

$$\frac{2}{\pi}\left(\tfrac{1}{2} A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \ldots\right) = \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 34)\ b)$$

$$\int_0^\infty f(z)^2\, dz + 2\int_0^\infty f(z + 2\pi)\, f(z)\, dz + 2\int_0^\infty f(z + 4\pi)\, f(z)\, dz + \ldots$$

$$+ \int_0^{2\pi} f(2\pi - z)\, f(z)\, dz + \int_0^{4\pi} f(4\pi - z)\, f(z)\, dz + \ldots,$$

$$\frac{2}{\pi}\left(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + \ldots\right) =$$

$$\int_0^\infty f(z)^2\, dz + 2\int_0^\infty f(z + 2\pi)\, f(z)\, dz + 2\int_0^\infty f(z + 4\pi)\, f(z)\, dz + \ldots$$

$$- \int_0^{2\pi} f(2\pi - z)\, f(z)\, dz - \int_0^{4\pi} f(4\pi - z)\, f(z)\, dz - \ldots$$

etc., woraus noch speciell die Identität

$$\int_a^b\int_a^b \frac{x\,f(x)\,f(y)}{x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_a^b\int_a^b \frac{y\,f(x)\,f(y)}{y^2-x^2}\,dx\,dy = \tfrac{1}{2}\int_a^b\int_a^b \frac{f(x)\,f(y)}{x+y}\,dx\,dy$$

erwähnt werden muss, indem

$$\int_a^b\int_a^b \frac{f(x)\,f(y)}{x-y}\,dx\,dy = 0.$$

Im Falle, wo $\int\limits_a^b f(z)\,f(z)\,dz = 0$ ist, $0 < a < b < \pi$, verschwinden $A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = B_1 = B_2 = \ldots$ gleichmässig; ob unter dieser Bedingung auch

$$\int_a^b\int_a^b \frac{f(x)\,f(y)\sin x}{\cos x - \cos y}\,dx\,dy = -\int_a^b\int_a^b \frac{f(x)\,f(y)\sin y}{\cos x - \cos y}\,dx\,dy = 0,$$

bedarf immer einer nähern Untersuchung.

Von den Formeln 34) *b*) machen wir eine Anwendung in Bezug auf Euler'sche Integrale.

Es sei unter $\mu$ eine ganze positive Zahl verstanden,

$$f = \varphi = z^{\mu-1}\,e^{-az};$$

unter dieser Voraussetzung sind alle Integrationen rechter und linker Hand ausführbar; es ist:

$$\int_0^\infty z^{\mu-1}\,e^{-az}\cos nz\,dz = \Gamma(\mu)\,\frac{\cos\mu\left(\arctan\frac{n}{a}\right)}{(a^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}},$$

$$\int_0^\infty z^{\mu-1}\,e^{-az}\sin nz\,dz = \Gamma(\mu)\,\frac{\sin\mu\left(\arctan\frac{n}{a}\right)}{(a^2+n^2)^{\frac{\mu}{2}}},$$

$$\int_0^\infty z^{\mu-1}\,e^{-az}\Big[z^{\mu-1}\,e^{-az} + 2e^{-2\pi a}(z+2\pi)^{\mu-1}\,e^{-az}$$

$$+ 2e^{-4\pi a}(z+4\pi)^{\mu-1}\,e^{-az} + \ldots\Big]dz$$

$$= \Gamma(2\mu-1)\,\frac{1}{(2a)^{2\mu-1}}\left\{1 + 2e^{-2\pi a} + 2e^{-4\pi a} + \ldots\right\}$$

$$+ (\mu-1)_1\,\Gamma(2\mu-2)\,\frac{e^{-2\pi a}}{(2a)^{2\mu-2}}\,2.2\pi\left\{1 + 2e^{-2\pi a} + 3e^{-4\pi a} + \ldots\right\},$$

$$+ (\mu-1)_2 \frac{\Gamma(2\mu-3)}{(2a)^{2\mu-3}} e^{-2\pi a}\, 2(2\pi)^2 \left\{1 + 2^2 e^{-2\pi a} + 3^2 e^{-4\pi a} + \ldots\right\}$$

$$+ \ldots$$

$$+ (\mu-1)_{\mu-1} \frac{\Gamma(\mu)}{(2a)^{\mu}} e^{-2\pi a} . 2 . (2\pi)^{\mu-1} \Big\{1 + 2^{\mu-1} e^{-2\pi a}$$

$$+ 3^{\mu-1} e^{-4\pi a} + \ldots\Big\},$$

$$e^{-2\pi a} \int_0^{2\pi} z^{\mu-1} (2\pi - z)^{\mu-1} dz + e^{-4\pi a} \int_0^{4\pi} z^{\mu-1} (4\pi - z)^{\mu-1} dz + \ldots$$

$$= (2\pi)^{2\mu-1} e^{-2\pi a} \Big[ \int_0^1 z^{\mu-1} (1-z)^{\mu-1} dz$$

$$+ 2^{2\mu-1} e^{-2\pi a} \int_0^1 z^{\mu-1} (1-z)^{\mu-1} dz + \ldots \Big]$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\mu)} (2\pi)^{2\mu-1} e^{-2\pi a} \left(1 + 2^{2\mu-1} e^{-2\pi a} + 3^{2\mu-1} e^{-4\pi a} + \ldots\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\mu)} . \tfrac{1}{2} R_{2\mu-1}.$$

Die Reihe $R_q$ lässt sich leicht als der $q^{te}$ Differentialquotient des Ausdruckes $(-1)^q \dfrac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}$ erkennen; ferner kann man die Formel dadurch vereinfachen, dass man mit $a^{2\mu}$ multiplicirt und $a'$ für dessen reciproken Werth setzt und so bestehen schliesslich die Gleichungen

$$\tfrac{1}{2} + \frac{\cos^2(\mu \arctan a')}{(1 + a'^2)^{\mu}} + \frac{\cos^2(\mu \arctan 2a')}{(1 + \overline{2a'}^2)^{\mu}} + \frac{\cos^2(\mu \arctan 3a')}{(1 + \overline{3a'}^2)^{\mu}} + \ldots$$

$$= \frac{\pi}{2} . \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\mu)} . \frac{a}{(2\mu-1)\, 2^{2\mu-1}} . \times$$

$$\Bigg\{ \frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} - \frac{\mu-1}{2\mu-2} . \frac{2a}{1} D_a \left(\frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}\right)$$

$$+ \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{(2\mu-2)(2\mu-3)} . \frac{(2a)^2}{1 \cdot 2} D_a^2 \left(\frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}\right) - \ldots$$

$$\pm \frac{(\mu-1) \ldots 2 \cdot 1}{(2\mu-2) \ldots (\mu+1)\mu} . \frac{(2a)^{\mu-1}}{1 \cdot 2 \ldots \mu-1} D_a^{\mu-1} \left(\frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}\right)\Bigg\}$$

$$- \frac{\pi}{2} \frac{a^{2\mu}}{1\, 2 \ldots (2\mu-1)} D_a^{2\mu-1} \left(\frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}\right)$$

$$\frac{\sin^2(\mu \arctan a')}{(1 + a'^2)^{\mu}} + \frac{\sin^2(\mu \arctan 2a')}{(1 + \overline{2a'}^2)^{\mu}} + \frac{\sin^2(\mu \arctan 3a')}{(1 + \overline{3a'}^2)^{\mu}} + \ldots$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu)} \cdot \frac{a}{(2\mu-1)\, 2^{2\mu-1}} \times \left\{ \frac{e^{\pi a}+e^{-\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}} - \frac{\mu-1}{2\mu-2} \right.$$

$$\times \frac{2a}{1} D_a \left( \frac{e^{\pi a}+e^{-\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}} \right)$$

$$\left. + \ldots \pm \frac{(\mu-1)\ldots 1}{(2\mu-2)\ldots\mu} \cdot \frac{(2a)^{\mu-1}}{1\ldots(\mu-1)} D_a^{\mu-1} \left( \frac{e^{\pi a}+e^{-\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}} \right) \right\}$$

$$+ \frac{\pi}{2} \frac{a^{2\mu}}{1\cdot 2\ldots(2\mu-1)} D_a^{2\mu-1} \left( \frac{e^{\pi a}+e^{-\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}} \right),$$

$$\tfrac{1}{2} + \frac{1}{(1+a'^2)^\mu} + \frac{1}{(1+\overline{2a'}^2)^\mu} + \frac{1}{(1+\overline{3a'}^2)^\mu} + \ldots =$$

$$a\pi \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu)} \cdot \frac{1}{(2\mu-1)\, 2^{2\mu-1}} \left\{ \frac{e^{\pi a}+e^{-\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}} - \frac{\mu-1}{2\mu-2} \right.$$

$$\times \frac{2a}{1} D_a \left( \frac{e^{\pi a}+e^{-\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}} \right)$$

$$\left. + \ldots \pm \frac{(\mu-1)\ldots 1}{(2\mu-2)\ldots\mu} \cdot \frac{(2a)^{\mu-1}}{(\mu-1)\ldots 1} \cdot D_a^{\mu-1} \left( \frac{e^{\pi a}+e^{-\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}} \right) \right\},$$

$$\frac{\pi}{2} R_{2\mu-1} \frac{a^{2\mu}}{\Gamma(2\mu)} = (\mu \gtrless \tfrac{1}{2})$$

$$\tfrac{1}{2} + \frac{\cos(2\mu \arctan a')}{(1+a'^2)^\mu} + \frac{\cos(2\mu \arctan 2a')}{(1+\overline{2a'}^2)^\mu} + \ldots$$

Für die auf das Intervall 0 bis $\pi$ beschränkte Parseval'sche Gleichung besteht eine ganze Classe von Integralformeln, welche, indem ihre Differentialfactoren nur periodische Functionen sind, auch für die Formeln 36) bequem benützt werden können.

Wir begnügen uns die Integralformeln und die aus ihnen zu gewinnenden Resultate kurz anzudeuten, in welchen die Gammafunction auf negative Argumente auszudehnen ist, s. unten.

$$1.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\psi)^{p-1} \cos q\psi\, d\psi = \frac{\pi}{2^p} \cdot \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1+p+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-q}{2}\right)};$$

$$\tfrac{1}{2} \left( \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)} \right)^2 + \left( \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-1}{2}\right)} \right)^2 + \ldots$$

$$+ \left( \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+p+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right)^2 + \ldots$$

$$= \frac{\Gamma(2p-1)}{(\Gamma(p)\Gamma(p))^2}.$$

$$2.\ \int_0^\pi (\sin\psi)^{p-1} \cos q\,\psi\, d\psi = \frac{\pi \cos q\,\frac{\pi}{2}}{2^{p-1}} \cdot \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1+p+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-q}{2}\right)},$$

$$\int_0^\pi (\sin\psi)^{p-1} \sin q\,\psi\, d\psi = \frac{\pi \sin q\,\frac{\pi}{2}}{2^{p-1}} \cdot \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1+p+q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-q}{2}\right)};$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+p+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-2}{2}\right)}\right)^2$$

$$+\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+p+4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-4}{2}\right)}\right)^2 + \ldots \textit{ in inf.}$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(2p-1)}{(\Gamma(p)\,\Gamma(p))^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-1}{2}\right)}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+p+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p-3}{2}\right)}\right)^2$$

$$+ \ldots \textit{ in inf.}$$

Bevor wir die Theorie der periodischen Reihen verlassen, wollen wir in Kurzem noch einen auf die Dirichlet'schen Reihen bezüglichen Satz entwickeln. Die Dirichlet'schen Reihen benöthigen ausser der gewöhnlichen Entwicklung

$$\tfrac{1}{2} + \cos\xi + \cos 2\xi + \ldots = \int_0^\infty \cos\,(2k\pi \pm \xi)\, u\, du$$

noch der folgenden

$$\cos\frac{\xi}{2} + \cos\frac{3\xi}{2} + \cos\frac{5\xi}{2} + \ldots,$$

welche auch nur unter der Bedingung in's Unendliche ausgedehnt werden darf, dass ihre Convergenz (ihre völlige Bestimmtheit) nicht zerstört wird. Die Summe dieser Entwicklung findet sich nun leicht als

$$\int_0^\infty \cos\left(2k\pi \pm \frac{\xi}{2}\right) u\, du - \int_0^\infty \cos\,(4k\pi \pm \xi)\, u\, du.$$

Es soll sich hier nicht darum handeln, die bekannten Formeln der Dirichlet'schen Theorie zu verificiren, da dies im Vorhergehenden mit enthalten ist, sondern es mögen die Integrale

$$\int_0^\infty \cos\frac{x^2}{4\omega}\, f(x)\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \sin\frac{x^2}{4\omega}\, f(x)\, dx$$

einer zweiten Transformation dahin unterworfen werden, dass

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

in denselben substituirt wird, während jetzt allgemein

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots$$
$$+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots$$

vorausgesetzt wird. Die angezeigte Substitution ist den Formeln 0) gemäss vollkommen durchführbar. Man erhält die dreifachen Entwicklungen:

$$\int_0^\infty \cos \frac{x^2}{4\omega} f(x)\, dx =$$

$$\sqrt{\frac{\omega\pi}{2}} \Big[ a_0 - a_4 \frac{1.3}{2^2} (4\omega)^2 + a_8 \frac{1.3.5.7}{2^4} (4\omega)^4 - \ldots$$
$$- a_2 \frac{1}{2} (4\omega)^1 + a_6 \frac{1.3.5}{2^3} (4\omega)^3 - \ldots \Big]$$
$$- \tfrac{1}{2} \{ 1!\, a_3 (4\omega)^2 - 3!\, a_7 (4\omega)^4 + 5!\, a_{11} (4\omega)^6 - \ldots \},$$

$$\int_0^\infty \sin \frac{x^2}{4\omega} f(x)\, dx =$$

$$\sqrt{\frac{\omega\pi}{2}} \Big[ a_0 - a_4 \frac{1.3}{2^2} (4\omega)^2 + a_8 \frac{1.3.5.7}{2^4} (4\omega)^4 - \ldots$$
$$+ a_2 \frac{1}{2} 4\omega - a_6 \frac{1.3.5}{2^3} (4\omega)^3 + \ldots \Big]$$
$$+ \tfrac{1}{2} \{ a_1 (4\omega)^1 - 2!\, a_5 (4\omega)^3 + 4!\, a_9 (4\omega)^5 - \ldots \}$$

mit vier Unbekannten. Um das System der Gleichungen dieser Unbekannten zu vervollständigen, führen wir die Function $f(-x)$ in die Rechnung ein, die offenbar die folgenden beiden Definitionen besitzt:

$$f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \ldots$$
$$= \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots$$
$$- B_1 \sin x - B_2 \sin 2x - \ldots$$

Nimmt man für die vorstehenden zwei Gleichungen die abgekürzten Formen

$$\int_0^\infty \cos \frac{x^2}{4\omega} f(x)\, dx = \sqrt{\frac{\omega\pi}{2}} [r_0 - r_1] - \tfrac{1}{2} s_1,$$

$$\int_0^\infty \sin \frac{x^2}{4\omega} f(x)\, dx = \sqrt{\frac{\omega\pi}{2}} [r_0 + r_1] + \tfrac{1}{2} s_0,$$

so lauten in denselben Elementen die ergänzenden Gleichungen wie folgt:

$$\int_0^\infty \cos \frac{x^2}{4\omega} f(-x)\, dx = \sqrt{\frac{\omega\pi}{2}} [r_0 - r_1] + \tfrac{1}{2} s_1,$$

$$\int_0^\infty \sin \frac{x^2}{4\omega} f(-x)\, dx = \sqrt{\frac{\omega\pi}{2}} [r_0 + r_1] - \tfrac{1}{2} s_0,$$

Genau den nämlichen symmetrischen Bau zeigen die Formeln, welche man erhält, wenn man in die Integrale linker Hand die periodischen Reihen für $f$ substituirt. Die Relationen, welche dabei zur Anwendung kommen, sind:

$$\int_0^\infty cos\,\frac{x^2}{4\,\omega}\,cos\,nx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,[cos\,(n^2\,\omega) + sin\,(n^2\,\omega)]\,\sqrt{\omega},$$

$$\int_0^\infty sin\,\frac{x^2}{4\,\omega}\,cos\,nx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,[cos\,(n^2\,\omega) - sin\,(n^2\,\omega)]\,\sqrt{\omega};$$

$$\int_0^\infty cos\,\frac{x^2}{4\,\omega}\,sin\,nx\,dx = 2\sqrt{\omega}\int_0^{n\sqrt{\omega}} sin\,(n^2\,\omega - x^2)\,dx,$$

$$\int_0^\infty sin\,\frac{x^2}{4\,\omega}\,sin\,nx\,dx = 2\sqrt{\omega}\int_0^{n\sqrt{\omega}} cos\,(n^2\,\omega - x^2)\,dx;$$

die beiden letzten dieser Identitäten entspringen wieder aus der Anwendung der Formeln 0) (siehe Seite 30). Hiermit ergibt sich, wenn wieder zur Abkürzung

$$R_0 = \tfrac{1}{2}\,A_0 + A_1\,cos\,(1^2\,\omega) + A_2\,cos\,(2^2\,\omega) + \ldots,$$
$$R_1 = A_1\,sin\,(1^2\,\omega) + A_2\,sin\,(2^2\,\omega) + \ldots,$$

$$S_0 = B_1\int_0^{\sqrt{\omega}} cos\,(1^2\,\omega - x^2)\,dx + B_2\int_0^{2\sqrt{\omega}} cos\,(2^2\,\omega - x^2)\,dx + \ldots,$$

$$S_1 = B_1\int_0^{\sqrt{\omega}} sin\,(1^2\,\omega - x^2)\,dx + B_2\int_0^{2\sqrt{\omega}} sin\,(2^2\,\omega - x^2)\,dx + \ldots$$

gesetzt wird, das System der äquivalenten Functionsentwicklungen:

$$\sqrt{\frac{\omega\,\pi}{2}}\,(r_0 - r_1) - \tfrac{1}{2}\,s_1 = \sqrt{\frac{\omega\,\pi}{2}}\,(R_0 + R_1) + \frac{4\sqrt{\omega}}{2}\,S_1,$$

$$\sqrt{\frac{\omega\,\pi}{2}}\,(r_0 + r_1) + \tfrac{1}{2}\,s_0 = \sqrt{\frac{\omega\,\pi}{2}}\,(R_0 - R_1) + \frac{4\sqrt{\omega}}{2}\,S_0,$$

$$\sqrt{\frac{\omega\,\pi}{2}}\,(r_0 - r_1) + \tfrac{1}{2}\,s_1 = \sqrt{\frac{\omega\,\pi}{2}}\,(R_0 + R_1) - \frac{4\sqrt{\omega}}{2}\,S_1,$$

$$\sqrt{\frac{\omega\,\pi}{2}}\,(r_0 + r_1) - \tfrac{1}{2}\,s_0 = \sqrt{\frac{\omega\,\pi}{2}}\,(R_0 - R_1) - \frac{4\sqrt{\omega}}{2}\,S_0,$$

und man hat die Auflösungen:

$$r_0 = R_0, \qquad r_1 = -R_1$$
$$s_0 = 4\sqrt{\omega}\,S_0, \quad s_1 = -4\sqrt{\omega}\,S_1.$$

In der Form eines Satzes ausgedrückt, heisst dies: „Wenn für alle reellen $x$ der Maclaurin'schen Formel eine Fourier'sche Reihe

$$\tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots.$$
$$+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots.$$

zur Seite steht, so ist diese Aequivalenz das erste Glied in einer Kette von durchaus vierfachem Anschluss, gemäss den Formeln

$$\tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos 1^2 x + A_2 \cos 2^2 x + \ldots. = \quad . \quad . \quad . \quad 37)$$
$$f(0) - \frac{x^2}{2!} f^{(4)}(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(8)}(0) - \ldots.,$$
$$A_1 \sin 1^2 x + A_2 \sin 2^2 x + \ldots. =$$
$$- \frac{x}{1} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(6)}(0) - \ldots.,$$
$$2 \left\{ B_1 \int_0^x \cos (1^2 x^2 - \omega^2)\, d\omega + B_2 \int_0^{2x} \cos (2^2 x^2 - \omega^2)\, d\omega + \ldots. \right\} =$$
$$\frac{2x}{1} f'(0) - 2! \frac{(2x)^5}{5!} f^{(5)}(0) + 4! \frac{(2x)^9}{9!} f^{(9)}(0) - \ldots.,$$
$$2 \left\{ B_1 \int_0^x \sin (1^2 x^2 - \omega^2)\, d\omega + B_2 \int_0^{2x} \sin (2^2 x^2 - \omega^2)\, d\omega + \ldots. \right\} =$$
$$- 1! \frac{(2x)^3}{3!} f^{(3)}(0) + 3! \frac{(2x)^7}{7!} f^{(7)}(0) - \ldots., \; -\infty < x < +\infty.\text{“}$$

Eine Eigenthümlichkeit zeigt die Annahme $f(x) = e^x$, für welche die Reihen rechts in die positiven und negativen Factoren von $A_1$ und $B_1$ links übergehen. Die Ableitung der Formeln bedarf der Geltung der Maclaurin'schen Reihe für negative $x$. Es besitzt übrigens diese Vervielfältigung des Bezuges zwischen Potenz- und periodischer Reihe wohl nur theoretisches Interesse, ebenso wie die sich hieraus ergebenden Darstellungen von $D_0^q f(x)$ als convergirende Reihen, gemäss den Formeln

$$\Sigma [p^{2n} A_p] = (-1)^n f^{(2n)}(0),$$
$$\Sigma [p^{2n+1} B_p] = (-1)^n f^{(2n+1)}(0),$$

in welchen das Glied $A_0$ blos zur Hälfte zu nehmen ist. Man kann die letzteren Reihen auch als Controle ansehen, da sie sich ebenso aus der Grundäquivalenz ergeben; es sei hier die Bemerkung hinzugesetzt, dass die bekannten Bedingungen der Differentiation der periodischen Reihen ebenso als falsch zu beseitigen sind, wie die der Fourier'schen Integrale; die Gründe ergeben sich leicht aus dem Vorhergehenden.

Ehe wir, um einen gewissen Zirkel im Gange unserer Betrachtungen abzuschliessen, die Bedeutung der Formeln 0) auf dem Felde der bestimmten Integrale selbst veranschaulichen, werfen wir einen Rückblick auf die Theorie der Potenz- und der periodischen Reihe, hauptsächlich der Schwierigkeiten wegen, welchen diese auf das einseitige Gebiet des Reellen beschränkte Theorie im Gegensatze zur betreffenden complexen Theorie begegnet. Wir beschränken uns auf das Nothwendigste und bemerken Folgendes:

Von den drei fundamentalen, ideellen (auf einen unrealisirbaren Grenzbegriff gebauten) Constructionen: unendliche Potenzreihe, unendliche periodische Reihe, unendliches bestimmtes Integral, ist das letzte das prio-rische, seine Definition die Quelle der Definitionen der beiden übrigen. Es gibt keine der allgemeinen Begriffsbestimmung des Integrales als Summe der Differentiale im speciellen Falle unendlicher Grenzen *per synthesin* verbundene allgemeine Definition. *A*) Die unendliche Potenzreihe mit dem Gesetze Maclaurins ist das Resultat des Grenzüberganges in dem endlichen Summenäquivalent für eine complexe Zahl. Im Gebiete des Reellen kommt der Begriff der Potenzreihe aus dem Integralbegriffe nicht zu Stande. Hier bedarf es des gliedweisen Aufbaues der Reihe unter Angabe der verschiedenen äquivalenten Restformeln; aus der Uebereinstimmung dieser letzteren mit den allgemeinen Convergenzregeln folgt der Begriff der reellen Reihe, aus der Coincidenz der Geraden der Convergenz mit dem Durchmesser des Convergenzkreises die formelle Continuität der Resultate äusserlich unvermittelter Theorien. Die beiden letzten Schlüsse sind jedoch nur Schlüsse *per inductionem*. — Divergente Potenzreihen besitzen keine eigene Definition; denn es kann keine Correction derselben angegeben werden. Mit der genannten Begriffsbestimmung der Potenzreihen überhaupt können sie verwendet werden in Formen $\frac{\infty}{\infty}$ und $\infty - \infty$; auf den Fällen, wo hierbei die betreffende endliche Summenformel unter angebbaren Sinnesmodificationen den gleichen praktischen Dienst leistet, beruht das Princip der formellen Continuität ideeller Constructionen in seiner Divergenz mit Convergenz verknüpfenden Kraft, wobei die endliche Form immer die Rolle eines Hauptwerths spielt. *B*) Die unendliche periodische Reihe, mit dem Doppelgesetze Fourier's in der allgemeinsten Gestalt, ist nur dann das Resultat des Grenzüberganges im endlichen Summenäquivalent, wenn ihre Glieder im Unendlichen verschwinden. Im Allgemeinen ist ihr Gesetz im Unendlichen discontinuirlich. Ihre Correctur zum richtig construirten analytischen Begriffe besteht in dem jederzeitigen Verschwinden ihrer „letzten“ Glieder.

Es gibt blos eine Unbestimmtheit (Divergenz) im Unendlichen, nicht im Bereiche des Endlichen, welcher letzten schlecht definirte, Unbestimmtheiten als wesentliche Merkmale involvirende Begriffe zu Grunde liegen. Hiernach sind die bekannten Convergenzregeln der periodischen Reihen zu verbessern und zu erweitern. Die periodische Reihe kann streng und direct aus dem Fourier'schen Integral abgeleitet werden, was bei der Potenzreihe nicht der Fall ist, wenn auch der Hilfssatz die Induction in Anspruch nimmt. Wenn die complexe Potenzreihe die Entwicklung von $\frac{1}{1-z}$, die periodischen Reihen die unendlichen Summen $\cos px$ und $\sin px$, die reelle Potenzreihe aber die Cosinus- und Sinusentwicklung voraussetzen, so fehlt doch bei der letzten noch der Beweis, den die andern Formeln liefern, dass der erst festzustellende Begriff der reellen Potenzreihe einzig und allein auf dem eingeschlagenen Wege zu gewinnen ist. Dieser Beweis ist erbracht, wenn der Zusammenhang zwischen complexer und reeller Potenzreihe in allen Theilen ohne Begriffsänderung *a priori* feststeht; mit andern Worten, wenn ein Princip der begrifflichen Continuität auch im Bereiche des Endlichen angenommen wird, welches dem Principe der begrifflichen Stellvertretung bei Divergenzfällen gegenübersteht. Wenn an solche Principe alle zweifelfreie Bewegung in der Analysis ebenso wie in der Geometrie unabänderlich festgeknüpft ist, so kann die Erkenntniss ihrer selbst doch immer nur auf inductivem Wege gewonnen werden.

Die Negation aller Unbestimmtheit im Bereiche des Endlichen, wie sie vorhin erwähnt wurde, ist nichts anderes als eine Folge jenes Principes der begrifflichen Continuität. Sie reicht aus, um *C)* den speciellen Fall des unendlichen Integrals, das Fourier'sche Doppelintegral, und seine Wurzel, das Euler'sche Integral, wie es sich erweitert in den Formeln O) zeigt, herzustellen. Es gibt zwei fundamentale Fälle scheinbarer Unbestimmtheit bestimmter Integralausdrücke: die discontinuirlichen und die Euler'schen Integrale mit ihren Dependenzen. Das genannte Princip nimmt hiernach auch eine zweifache schärfere Fassung an; es gestaltet sich zur Aequivalenz des independent Unendlichkleinen in der Gleichung

$$\frac{dx_p}{dx_q} = 1,$$

welche die Existenz der discontinuirlichen Integrale zur Folge hat und es spricht die Unmöglichkeit des selbständigen Auftretens der Symbole $\sin \mu \vartheta$ und $\cos \mu \vartheta$ bei unendliche wachsenden $\mu$ aus, es sei denn, dass

$$Lim \sin \mu \vartheta = Lim \cos \mu \vartheta = 0.$$

Diese letzteren Annahmen werden nothwendig, wenn man die Euler'schen Integrale auf dem Wege unbestimmter Integration und die Begriffsbestimmung der periodischen Reihe ohne eine Correction derselben gewinnen will; selbstverständlich können sie nicht als einander widersprechend angesehen werden. Es muss nun scharf betont werden, dass nicht das Princip der formellen Continuität die Formeln O), sondern umgekehrt, diese Formeln, auf indirectem Wege unumstösslich bewiesen, jenes Princip stützen und fordern. Man kann jetzt dieses Princip als Fundament der Integralrechnung selbst aufstellen und dadurch die bisherigen Kriterien derselben, als durch die Formeln O) illusorisch geworden, ersetzen. Man hat zwei Hauptsätze, welche über die Existenz der Integrale ein positives, allerdings unzuverlässiges Urtheil herbeiführen: in Betreff der discontinuirlichen Integrale die singulären Werthe, bei den Euler'schen Integralen die Theilung des Grenzenintervalls. Dass diese methodischen Kunstgriffe logisch unzulässig sind, kann abgesehen davon, dass sie schon durch die falschen Resultate, zu welchen sie geführt haben, widerlegt sind, direct eingesehen werden, denn die singulären Werthe verstossen gegen die Independenz des leitenden Differentials und können nicht zur Specification von Hauptwerthen führen — die Theilung des Grenzenintervalls beruht auf unbestimmten Integrationen, welche blos bei endlichen Integrationsgrenzen ohne Ausnahme erlaubt sind. Es ist im Verlaufe der bisherigen Betrachtung mehrmals Gelegenheit geboten worden, Paradoxien wie sie in der Integralrechnung so zahlreich sind, mit Hilfe jener zwei Sätze von der Aequivalenz des independenten Differentials und der Unmöglichkeit eines selbständigen Auftretens der Symbole $\cos \mu \vartheta$ nnd $\sin \mu \vartheta$, $\mu = \infty$ zu lösen; überall da, wo jene Sätze und die unvertretbare Definition des Integrals selbst keine Entscheidung an die Hand geben, bleibt eben nichts übrig, als einen indirecten, aber einwurfsfreien Weg zu versuchen. Es ist die jedesmalige Erledigung der Vorfrage nach der Existenz eines bestimmten Integrals übrigens eine ziemlich müssige; eine einigermassen aufmerksame Betrachtung des auf den ersten Blick etwas bunten und zusammenhanglosen Bildes der bestimmten Integrationsfälle löst dasselbe bald in nur wenige, dabei einfache und ganz der so ausgezeichneten Durchsichtigkeit und Homogeneität der Differentialrechnung entsprechende Grundzüge auf. Der noch folgende Theil unserer Betrachtung wird die Aufgabe zu lösen suchen

„die scheinbaren Abweichungen einer Anzahl von Integralbestimmungen von den erwähnten Grundzügen zu beseitigen"; als letztere aber mögen allein zwei angeführt werden, nämlich:

„Ein Integral hat, welches auch seine Grenzen seien, immer einen bestimmten Werth, sobald es der allgemeinen Definition nicht widerspricht, d. h. eine durchgängige Summe von Differentialen ist,"
sodann

„Ein Integral hat auch dann noch einen bestimmten Werth, wenn die Aufhebung des Differentialbegriffes in demselben blos scheinbar ist oder in seiner ganzen Ausdehnung als blos äusserlich anhaftend aus dem Integrale in der Form $a - a$ herausfällt."

Man erkennt sofort, dass die beiden letzten Ausnahmefälle gerade die Euler'schen Integrale einerseits, die discontinuirlichen Integrale andererseits vorstellen. Hierbei sind unter den Euler'schen Integralen auch ihre Dependenzen, die Fourier'schen Doppelintegrale, überhaupt alle mit dem Factor $\cos$ oder $\sin ax$ versehenen Ausdrücke verstanden. Es erscheint zweckmässig, für diese Gruppe einen eigenen Namen zu verwenden, als welcher hinfort der Name „oscillirende Integrale" eintreten soll (man könnte auch die Bezeichnung „periodisches Integral" wählen, wegen der durchschlagenden Analogie mit den periodischen Reihen, indessen dürfte wohl „oscillirendes Integral" significanter sein). Den beiden Gruppen der discontinuirlichen und der oscillirenden Integrale stehen dann gegenüber die continuirlichen und die divergenten; letztere sind alle jene, die in unablöslichen Partien der fundamentalen Integraldefinition nicht mehr gehorchen, den Namen „Integral“ also usurpiren. Hiernach und auch nur in diesem Sinne fällt nun die Ausscheidung einer Gruppe unendlicher oder unbegrenzter Integrale, als dem Geiste der Integralrechnung widerstrebend, ganz fort.

Discontinuirliche und oscillirende Integrale, welche nicht zugleich divergiren, sind weder unbestimmt, noch unendlich gross, ähnlich wie es keine divergenten periodischen Reihen gibt, es seien denn die Anfangsglieder divergent. Und diese Behauptung ist es, welche eine kurze Uebersicht der bekannten oscillirenden, so wie der discontinuirlichen Integrale und eine Kritik ihrer Herleitung bekräftigen soll; mit andern Worten, es sollen die mit jener Behauptung im Widerspruche stehenden Giltigkeitsbedingungen als blosse Consequenz einer zu beschränkten Methode und nicht natürliche Bedingungen des Problems selbst beseitigt oder erweitert und dazu die im Vorhergehenden entwickelten Grundlagen verwendet werden. Es wird sich die Gelegenheit bieten, das Princip der begrifflichen Continuität im Bereiche des Endlichen, welches hauptsächlich die Existenz der discontinuirlichen und oscillirenden Integrale gewährleistet, zu verbinden mit dem Principe der begrifflichen Stellvertretung in Divergenzfällen, welches die Werthe der letzteren Classe von Integralen selbst liefern wird. Um es näher zu bezeichnen die nachfolgende Untersuchung soll den Beweis beibringen, dass die Stellvertretung der Gauss'schen Definition bei der Gammafunction für das divergente Integral von weit grösserer Ausdehnung ist, als man bisher angenommen hat und dass hier kein Paradoxon vorliegt, sondern eine tief gegründete Erscheinung, welcher allerdings im Gebiete der Differentialrechnung kein Gegenstück zur Seite steht. Es kann nicht die Aufgabe dieser Abhandlung sein, diesen Gegenstand zu erschöpfen und eine Grenze zu überschreiten, welche über den Grenzen der Differential- und Integralrechnung selbst hinausliegt; sie hat lediglich die wenigen und zerstreuten Anhaltspunkte zu benützen, die sich unter den Ergebnissen der Lehre von den bestimmten Integralen darbieten, um ihren Satz von der Endlichkeit und Bestimmtheit aller oscillirenden Integrale gegen jeden Zweifel möglichst sicher zu stellen.

Wir beginnen mit einer Anwendung der Fourier'schen Integrale. Es dürfen dieselben nach dem Argumente der ihnen äquivalenten Function bekanntlich beliebig oftmal differenzirt werden. Diesen Satz ziehen wir nun heran und führen die bezeichnete Operation $n$mal durch an den Integralen Laplace's. Das Resultat erscheint in den beiden Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{\omega^n \cos\left(b\omega + \frac{n\pi}{2}\right)}{a^2 + \omega^2}\, d\omega = \frac{\pi}{2a}(-a)^n e^{-ab},$$

$$\int_0^\infty \frac{\omega^{n+1} \sin\left(b\omega + \frac{n\pi}{2}\right)}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} (-a)^n e^{-ab},$$

welche sich auch gegenseitig zu den folgenden brauchbareren Formen ergänzen

$$\int_0^\infty \frac{\omega^{2m} \cos b\omega}{a^2 + \omega^2} d\omega = (-1)^m \frac{\pi}{2} a^{2m-1} e^{-ab},$$

$$\int_0^\infty \frac{\omega^{2m+1} \sin b\omega}{a^2 + \omega^2} d\omega = (-1)^m \frac{\pi}{2} a^{2m} e^{-ab}.$$

Da nun die Laplace'schen Integrale ein complexes $a$ einzuführen erlauben, welches im Integrale beliebig, in der äquivalenten Function als entsprechender Hauptwerth (mit allzeit positivem Cosinus) anzuwenden ist, so kann dieser Umstand benützt werden, eine indirecte Bestätigung der für die Differentialquotienten der Integrale angenommenen Werthe herbeizuführen. Die Nenner $a^2 + \omega^2$ mögen als $a^2\beta_p$ und $a^2\gamma_p$ unter Substitution der bekannten Wurzelwerthe der positiven und negativen Einheit für $\beta_p$ und $\gamma_p$ specialisirt und hierauf als complexe $\sigma(\beta_p')$ und $\sigma(\gamma_p)$ dargestellt werden nach den Formeln

$$\frac{1}{a^2\beta_p + \omega^2} = -\frac{(-\omega^2)^{n-1} + \beta_p(-\omega^2)^{n-2}a^2 + \ldots + \beta_p^{n-1}a^{2n-2}}{a^{2n} - (-\omega^2)^n},$$

$$\frac{1}{a^2\gamma_p + \omega^2} = -\frac{(-\omega^2)^{n-1} + \gamma_p(-\omega^2)^{n-2}a^2 + \ldots + \gamma_p^{n-1}a^{2n-2}}{a^{2n} + (-\omega^2)^n}.$$

Wenn man diese Transformationen in die Differentiationsgleichung der Laplace'schen Integrale einsetzt und beachtet, dass sämmtliche $\beta_p$ und $\gamma_p$ zulässig sind, so erhält man zwei Systeme linearer Gleichungen von je $n$ Unbekannten, deren Auflösung auf die bekannte Weise zu den neuen Bestimmungen führt

$$\int_0^\infty \frac{\omega^{2(m+p)} \cos b\omega}{(a^2)^n - (-\omega^2)^n} d\omega$$

$$= (-1)^{m+p-1} \frac{\pi}{2n} \Sigma \left\{ \frac{\left(\sqrt{\beta'_q}\right)^{2m-1} e^{-ab\sqrt{\beta'_q}}}{\beta_q^{n-p-1}} \right\}_{q=1}^{q=n-1} a^{2m+2p-2n+1},$$

$$\int_0^\infty \frac{\omega^{2(m+p)+1} \sin b\omega}{(a^2)^n - (-\omega^2)^n} d\omega$$

$$= (-1)^{m+p-1} \frac{\pi}{2n} \Sigma \left\{ \left(\sqrt{\beta'_q}\right)^{2m} \beta_q^{p+1} e^{-ab\sqrt{\beta'_q}} \right\} a^{2(m+p-n+1)},$$

$$\int_0^\infty \frac{\omega^{2(m+p)} \cos b\,\omega}{(a^2)^n + (-\omega^2)^n}\, d\omega$$

$$= (-1)^{m+p} \frac{\pi}{2n} \Sigma \left\{ (\sqrt{\gamma'_q})^{2m-1} \gamma_q^{p+1} e^{-ab\sqrt{\gamma'_q}} \right\} a^{2(m+p-n)+1},$$

$$\int_0^\infty \frac{\omega^{2(m+p)+1} \sin b\,\omega}{(a^2)^n + (-\omega^2)^n}\, d\omega$$

$$= (-1)^{m+p} \frac{\pi}{2n} \Sigma \left\{ (\sqrt{\gamma'_q})^{2m} \gamma_q^{p+1} e^{-ab\sqrt{\gamma'_q}} \right\} a^{2(m+p-n+1)},$$

worin $\sqrt{\gamma'_q}$ und $\sqrt{\beta'_q}$ die Hauptwerthe sind bezüglich der Wurzeln $\sqrt{\gamma_q}$ und $\sqrt{\beta_q}$. Es müssen nun rechter Hand die Wurzelaggregate unverändert bleiben, wenn zwei neue Zahlen $m'$ und $p'$ an die Stelle von $m$ und $p$ treten, welche die Bedingung erfüllen, dass

$$m' + p' = m + p.$$

Es ist aber in der That, wie man sich leicht überzeugt,

$$(\sqrt{\alpha'_q})^{2m} \alpha_q^p = (\sqrt{\alpha'_q})^{2m'} (\alpha_q)^{p'},$$

und es kann somit in dieser identischen Gleichung eine willkommene indirecte Bestätigung der gewonnenen Formeln erblickt werden.

Wie die Integrale Laplace's, so können die auf transscendente Functionen leitenden Summen

$$\int_0^\infty \frac{\omega \cos \beta\,\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\, d\omega, \quad \int_0^\infty \frac{\sin \beta\,\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\, d\omega$$

der gleichen Transformation mit demselben Erfolge unterworfen werden; wir übergehen diese Entwicklungen und wenden uns zu anderen Integralen ähnlichen Baues, deren bereits erwähnte, durch geschlossene Integrationen gelieferte Reduction uns erlaubt, ein Beispiel der Anwendung discontinuirlicher Formen durchzuführen und zugleich den ersten Fall der stellvertretenden Gammafunction zwanglos anzuschliessen. Unsere jetzige Aufgabe formuliren wir dahin, in den Ergebnissen der geschlossenen Integration

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{a^4 - x^4}\, dx = \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{\cos(z^2)}{a^4 + z^4}\, dz - \frac{\pi}{4a^3} e^{-a^2}$$

$$= \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{\sin(z^2)}{a^4 + z^4}\, dz + \frac{\pi}{4a^3} e^{-a^2},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x^2}}{a^4 - x^4}\, dx = -\sqrt{2} \int_0^\infty \frac{z^2 \cos(z^2)}{a^4 + z^4}\, dz + \frac{\pi}{4a} e^{-a^2}$$

$$= \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{z^2 \sin(z^2)}{a^4 + z^4}\, dz - \frac{\pi}{4a} e^{-a^2}.$$

die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{a^4 - x^4}\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x^2}}{a^4 - x^4}\, dx$$

mit Hilfe der Analogien zu den Fourier'schen Doppelintegralen weiter zu reduciren. Man zerlege sie in zwei einfachere wie folgt

$$2a^2 \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{a^4 - x^4}\, dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{a^2 + x^2}\, dx + \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{a^2 - x^2}\, dx,$$

$$2\int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x^2}}{a^4 - x^4}\, dx = -\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{a^2 + x^2}\, dx + \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{a^2 - x^2}\, dx;$$

und benütze für die beiden ersten Integrale rechter Hand die bekannte Formel

$$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\, e^{a^2 b^2} \int_{ab}^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{e^{-b^2 x^2}}{a^2 + x^2}\, dx;$$

die parallele Beziehung

$$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\, e^{-a^2 b^2} \int_0^{ab} e^{x^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{e^{-b^2 x^2}}{a^2 - x^2}\, dx$$

ergibt sich dann sofort, wenn die allgemeine Gleichung

$$\int_a^b \frac{a f(x)}{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^\infty \sin au\, du \int_a^b \cos ux\, f(x)\, dx$$

für $f(x) = e^{-b^2 x^2}$, $a = 0$, $b = \infty$ specialisirt und die beiden Bestimmungen

$$\int_0^\infty \cos, \ \sin ax\, e^{-b^2 x^2}\, dx$$

herangezogen werden. Vereinigt man nun weiter nach der Analogie von Transscenten wie

$$-e^{-ab} \int_{-ab}^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx + e^{+ab} \int_{+ab}^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx = 2a \int_0^\infty \frac{\sin bx}{a^2 + x^2}\, dx,$$

$$e^{-ab} \int_{-ab}^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx + e^{+ab} \int_{+ab}^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx = 2 \int_0^\infty \frac{x \cos bx}{a^2 + x^2}\, dx;$$

$$\cos ab \int_0^a \frac{\sin bx}{x}\, dx + \sin ab \int_a^\infty \frac{\cos bx}{x}\, dx = -a \int_0^\infty \frac{\sin bx}{a^2 - x^2}\, dx,$$

$$\cos ab \int_a^\infty \frac{\cos bx}{x}\,dx - \sin ab \int_0^a \frac{\sin bx}{x}\,dx = -\int_0^\infty \frac{x\cos bx}{a^2-x^2}\,dx$$

jene Theilreductionen durch Addition und Subtraction, so erhält man gerade die gesuchten Integrale, nämlich:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-b^2x^2}}{a^4-x^4}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^3}\left[e^{-a^2b^2}\int_0^{ab} e^{x^2}\,dx + e^{+a^2b^2}\int_{ab}^\infty e^{-x^2}\,dx\right],$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 e^{-b^2x^2}}{a^4-x^4}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left[e^{-a^2b^2}\int_0^{ab} e^{x^2}\,dx - e^{+a^2b^2}\int_{ab}^\infty e^{-x^2}\,dx\right]$$

und gelangt damit, nach den anfänglichen Formeln, noch zu den folgenden Resultaten, in welchen die Constante $b$ beibehalten ist:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(b^2x^2)\,dx}{a^4+x^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}\,a^3}\,e^{-a^2b^2}$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{a^3}\left\{e^{-a^2b^2}\int_0^{ab} e^{x^2}\,dx + e^{+a^2b^2}\int_{ab}^\infty e^{-x^2}\,dx\right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(b^2x^2)\,dx}{a^4+x^4} = -\frac{\pi}{4\sqrt{2}\,a^3}\,e^{-a^2b^2}$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{a^3}\left\{e^{-a^2b^2}\int_0^{ab} e^{x^2}\,dx + e^{+a^2b^2}\int_{ab}^\infty e^{-x^2}\,dx\right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2\cos(b^2x^2)\,dx}{a^4+x^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}\,a}\,e^{-a^2b^2}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{a}\left\{e^{-a^2b^2}\int_0^{ab} e^{x^2}\,dx - e^{+a^2b^2}\int_{ab}^\infty e^{-x^2}\,dx\right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2\sin(b^2x^2)\,dx}{a^4+x^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}\,a}\,e^{-a^2b^2}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{a}\left\{e^{-a^2b^2}\int_0^{ab} e^{x^2}\,dx - e^{+a^2b^2}\int_{ab}^\infty e^{-x^2}\,dx\right\}.$$

Ehe wir weiter gehen, prüfen wir an der Hand der Analogien zu den Fourier'schen Integralen erst eine im Folgenden zu verwendende Formel, welche unnöthiger Weise stets verdoppelt wird, die Formel:

$$\int_0^\infty \frac{z^{r-1}}{1-z^q}\,dz = \frac{\pi}{q}\cot\frac{r\pi}{q},\quad r<q.$$

Setzt man $z^q = \frac{t^2}{a^2}$, so hat man:

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{2r}{q}-1}}{a^2-t^2}\,dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty \sin au \int_0^\infty \cos uy \cdot y^{\frac{2r}{q}-1}\,dy$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{2r}{q}\right)\cos\frac{r\pi}{q}}{a}\int_0^\infty \frac{\sin au}{u^{\frac{2r}{q}}}\,du =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{2r}{q}\right)\Gamma\left(1-\frac{2r}{q}\right)\sin\left(1-\frac{2r}{q}\right)\frac{\pi}{2}\cos\frac{r\pi}{q}}{a^{2\left(1-\frac{r}{q}\right)}}$$

und wegen

$$\Gamma\left(\frac{2r}{q}\right)\Gamma\left(1-\frac{2r}{q}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{2r\pi}{q}} = \frac{\pi}{2\sin\frac{r\pi}{q}\cos\frac{r\pi}{q}}, \quad \frac{2r}{q}-1=\beta$$

$$\int_0^\infty \frac{t^\beta}{a^2-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2a^{1-\beta}}\cot\frac{(\beta+1)\pi}{2}, \quad \beta^2<1,$$

was mit der zu prüfenden Bestimmung übereinkommt.

Mit ihrer Hilfe nun wollen wir bezüglich der den Integralen

$$\int_0^\infty \frac{e^{-b^2x^2}}{a^4-x^4}\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{x^2e^{-b^2x^2}}{a^4-x^4}\,dx$$

äquivalenten transscendenten Functionen nachforschen, ob sie der bei den Transscendenten der Integralrechnung sehr gewöhnlichen Erscheinung, integrirt die niederen Transscendenten, aus denen sie ihrerseits durch Integration entsprungen, wieder zu erzeugen, entsprechen. Demgemäss multipliciren wir die Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{a\,e^{-b^2x^2}}{a^2-x^2}\,dx = \int_0^\infty \sin au\,du \int_0^\infty \cos uy\, e^{-b^2y^2}\,dy$$

$$= \sqrt{\pi}\,e^{-a^2b^2}\int_0^{ab} e^{y^2}\,dy,$$

$$\int_0^\infty \frac{a\,e^{-b^2x^2}}{a^2+x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{+a^2b^2}\int_{ab}^\infty e^{-y^2}\,dy$$

mit $a^{\mu-1}$, $\mu<1$ und integriren nach $a$ zwischen 0 und $\infty$. Wegen

$$-\int_0^\infty \frac{a^\mu}{a^2-x^2}\,da = \frac{\pi}{2x^{1-\mu}}\cot\frac{(\mu+1)\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{a^\mu}{a^2+x^2}\,da = \frac{\pi}{2x^{1-\mu}}\csc\frac{(\mu+1)\pi}{2}$$

ergibt sich leicht

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{a^\mu e^{-b^2 x^2}}{a^2 - x^2}\, da\, dx = -\frac{\pi}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{b^\mu}\, \cot\frac{(\mu+1)\pi}{2} \\
&\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{a^\mu e^{-b^2 x^2}}{a^2 + x^2}\, da\, dx = \frac{\pi}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{b^\mu}\, \csc\frac{(\mu+1)\pi}{2}
\end{aligned}\right\}\ 0 < \mu < 1;$$

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{a^{\mu+2} e^{-b^2 x^2}}{a^4 - x^4}\, da\, dx = \frac{\pi}{8 b^\mu}\, \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \tan\frac{(\mu+1)\pi}{4},$$

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{a^\mu x^2 e^{-b^2 x^2}}{a^4 - x^4}\, da\, dx = \frac{\pi}{8 b^\mu}\, \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \cot\frac{(\mu+1)\pi}{4},$$

womit die ausgesprochene Vermuthung bestätigt wird. Eine Controlle gestatten diese Werthbestimmungen insofern, als man auch hier wieder die Analogien der Fourier'schen Integrale zu Hilfe nehmen kann. So nämlich erhält man noch speciell

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{a^\mu e^{2 - b^2 x}}{a^2 + x^2}\, da\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\mu+1}} \cdot \frac{\Gamma(\mu)}{b^\mu} \cdot \sin\frac{\mu\pi}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right),\ 0 < \mu < 1$$

und gelangt zur Formel

$$\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\cos\frac{\mu\pi}{2}}\, 2^{\mu-1},\ 0 < \mu < 1,$$

welche aus der Theorie der Euler'schen Integrale zweiter Classe bekannt ist. Diese leichten Integrationen verdecken nun aber eine sehr bedeutende Schwierigkeit. Das dreifache Integral

$$\int_0^\infty du \int_0^\infty a^{\mu-1} \sin au\, da \int_0^\infty \cos uy\, e^{-b^2 y^2}\, dy$$

convergirt bei der Continuität des Differentiales $a^{\mu-1} \sin au\, da$ auch für negative $\mu$ grösser als $-1$. Es ist leicht den betreffenden endlichen Werth des Integrales anzugeben; er lautet unbestreitbar

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-\mu}}\, \frac{\sin\frac{\mu\pi}{2}}{\mu b^\mu}\, \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \Gamma(1-\mu),$$

während das aequivalente Doppelintegral

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{a^{-\mu} e^{-b^2 x^2}}{a^2 - x^2}\, da\, dx = -\frac{\pi}{4 b^\mu}\, \Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) \cot\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\pi$$

divergirt. Der Fehler liegt in der umgekehrten Integration und es fragt sich, ob die letzte Formel vollkommen zu verwerfen ist, oder ob sie die

Möglichkeit einer Correction einschliesst. Die Antwort auf diese Frage geben die Euler'schen Grundformeln selbst an die Hand; damit

$$\int_0^\infty a^{\mu-1} \sin a u \, d a = \frac{\Gamma(\mu) \sin \frac{\mu \pi}{2}}{u^\mu}$$

für negative $\mu > -1$ nicht fälschlich Divergenz anzeige, muss das Euler'sche Integral $\Gamma(\mu)$ durch die Gauss'sche Function $\Gamma(\mu)$ ersetzt und demgemäss eine von den äquivalenten Definitionen

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(a+1) &= a \, \Gamma(a), \\ \Gamma(a) \, \Gamma(1-a) &= \frac{\pi}{\sin a \pi} \end{aligned}\right\} -\infty < a < +\infty$$

substituirt werden. Der Beweis liegt im gegenwärtigen Falle in der Bedingungsgleichung der Identität

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right)}{\Gamma(\mu)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\mu-1}},$$

welche bei näherer Prüfung als richtig befunden wird; denn multiplicirt man sie mit der früheren Formel

$$\frac{\Gamma(\mu) \, \Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\cos \frac{\mu \pi}{2}} \, 2^{\mu-1},$$

so entspringt

$$\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos \frac{\mu \pi}{2}},$$

wieder die Definitionsgleichung der Gammafunction.

Es ist aber mit dergleichen Beweisen ein eigen Ding; indem sie den speciellen Fall eines Problems fixiren, machen sie seine allgemeine Natur geradezu unkenntlich, denn sie ersetzen den starken, tiefergreifenden Beweisgrund durch ein ärmliches, an der Oberfläche haftendes Argument.

Bei der grossen Bedeutung, welchen die Thatsache der Eliminationsfähigkeit gewisser Divergenzen der Integralrechnung für die Erweiterung ihrer den Gegenstand nie erschöpfenden Methoden besitzt, erscheint es als nothwendig, dieser Thatsache die möglichst prägnante Fassung zu geben. In diesem Sinne erscheint sie nun als Ausfluss des Principes der begrifflichen Stellvertretung (Discontinuität) bei Divergenzfällen und lautet danach wie folgt:

„So oft der Faden einer Methode durch das Auftreten einer Divergenz abgeschnitten wird und es liegen anderweitige Gründe vor, welche diese Divergenz entweder als eine irrige oder als eine zu umgehende darstellen: so oft muss für das divergente Integral eine Stellvertretung existiren,' welche trotz der Discontinuität der Methode die Continuität des Problemes sichert."

Als eine derartige Methode möge nun im Folgenden die Cauchy-sche Integrationsmethode zu Grunde gelegt werden; die Stellvertretung wird immer durch die Gauss'sche Definition der Gammafunction gegeben sein, welche solchergestalt als Quell einer neuen Methode zu betrachten ist, die den zerrissenen Faden wieder anzuknüpfen vermag — als erstes Beispiel mögen uns nun die Formeln 0) selbst dienen.

Wenn es sich darum handelt, ohne vorherige Kenntniss der Existenzbedingung den Werth der Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos bz}{z^\lambda}\, dz \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\sin bz}{z^\lambda}\, dz$$

zu erforschen, so ersetzt man die Factoren $z^{-\lambda}$ durch das Integral

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty e^{-zu}\, u^{\lambda-1}\, du\,,$$

eine Substitution, welche, wie die unbestimmte Integration beweist, auch im Falle ganzer negativer $\lambda$ noch statthaft ist. Hierauf unterwirft man die rechte Seite der Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{\cos bz}{z^\lambda}\, dz = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \cos bz\, dz \int_0^\infty u^{\lambda-1}\, e^{-zu}\, du$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bz}{z^\lambda}\, dz = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \sin bz\, dz \int_0^\infty u^{\lambda-1}\, e^{-zu}\, du$$

der umgekehrten Integration; diese gibt sehr leicht

$$\int_0^\infty \frac{\cos bz}{z^\lambda}\, dz = \frac{b^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \frac{v^\lambda\, dv}{1+v^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bz}{z^\lambda}\, dz = \frac{b^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \frac{v^{\lambda-1}\, dv}{1+v^2}$$

und dieses sind die Formeln, welche, seien sie nun einer Correction bedürftig oder nicht, die volle Lösung des Problemes enthalten müssen. Eine Correction kann selbstverständlich innerhalb des Bereiches der Convergenz nicht eintreten; das Resultat dieses Theiles der Aufgabe sind die bekannten Bestimmungen innerhalb der bekannten Grenzen. Aber die Aufgabe selbst ist damit noch keineswegs erschöpft; die Reductionsformeln deuten selbst auf die Möglichkeit einer weiteren Verfolgung des Gegenstandes hin, indem sie für negative $\lambda$ rechter Hand Ausdrücke wie $\frac{\infty}{\infty}$ zu Tage bringen, welche nach dem Satze von der Aequivalenz der

Divergenzen stets reducirt werden können. Es würde sich also darum handeln, diese Reductionen nach den bekannten Regeln auszuführen — wenn man nur auch sicher wäre, dass die Formeln jetzt auch noch durchgängig richtig bleiben, d. h. dass die umgekehrte Integration für diesen Divergenzfall zulässig ist. Hier liegt die Schwierigkeit, welche später noch klarer zu Tage tritt und welche zeigt, dass die angewendete Methode verlassen werden muss. Die gewonnenen Formeln selbst nämlich verlieren doch nicht ihre Bedeutung; man nehme in der ersten Formel $\lambda = -(2p+1)$, in der zweiten sei $\lambda = -2p$; die Ausdrücke rechter Hand werden jetzt

$$\frac{\pi}{2} b^{-2p-2} \frac{sec \frac{(2p+1)\pi}{2}}{\Gamma(-\overline{2p+1})} = \tfrac{1}{2} b^{-2p-2} \Gamma(2p+2) \frac{sec \frac{(2p+1)\pi}{2}}{csc\,[-(2p+1)\pi]}$$

$$= -\frac{\Gamma(2p+2)}{2b^{2p+2}} \cdot \frac{2\, sin \frac{(2p+1)\pi}{2}\, cos \frac{(2p+1)\pi}{2}}{cos \frac{(2p+1)\pi}{2}} = \frac{\Gamma(2p+2)}{b^{(2p+2)}}\, cos \frac{\overline{2p+2}\,\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2b^{2p+1}} \frac{csc\, p\pi}{\Gamma(-2p)} = + \frac{\pi}{2b^{2p+1}} \Gamma(2p+1) \frac{csc\, p\pi}{csc\, 2p\pi}$$

$$= \frac{\Gamma(2p+1)}{b^{2p+1}}\, sin \frac{(2p+1)\pi}{2},$$

und dieses sind specielle Fälle der Formeln 0).

Diese Bemerkungen genügen nun aber gerade, um das vorliegende Problem mittelst der Stellvertretung des Euler'schen Integrals $\Gamma(\lambda)$ durch die Gauss'sche Function $\Gamma(\lambda)$ zu lösen. Nach dem mehrmals Gesagten und nach den Gründen, welche für die Stellvertretung sprechen, stellen wir das in seinen Fundamenten bedrohte Problem wieder her, indem wir die Formeln 0) in der ganzen positiven Ausdehnung des Exponenten $\mu$ für das Cosinusintegral, für das Sinusintegral ausserdem noch unter Zulassung negativer $\mu > -1$ behaupten.

Es sei uns gestattet, diese Behauptung in den beiden aequivalenten Formen

$$a) \quad \int_0^\infty \frac{cos\, b z}{z^\lambda}\, dz = \frac{\pi b^{\lambda - 1}}{2\,\Gamma(\lambda)\, cos \frac{1}{2} \lambda \pi}, \quad -\infty < \lambda < 1$$

$$\int_0^\infty \frac{sin\, b z}{z^\lambda}\, dz = \frac{\pi b^{\lambda - 1}}{2\,\Gamma(\lambda)\, sin \frac{1}{2} \lambda \pi}; \quad -\infty < \lambda < 2$$

$$b) \quad \int_0^\infty z^{\mu - 1}\, cos\, b z\, dz = \frac{\Gamma(\mu)\, cos \frac{1}{2} \mu \pi}{b^\mu}, \quad 0 < \mu < +\infty$$

$$\int_0^\infty z^{\mu - 1}\, sin\, b z\, dz = \frac{\Gamma(\mu)\, sin \frac{1}{2} \mu \pi}{b^\mu}, \quad -1 < \mu < +\infty$$

zu wiederholen. Der Reciprocität aller Factoren der beiden Formen entspricht, wie wir gesehen, eine gewisse Reciprocität der Formen selbst. Wir haben die Form $b$) eben aus der Form $a$) hergeleitet. Es muss möglich sein $a$) aus $b$) mittelst derselben Stellvertretung zu erhalten. Die Integrale linker Hand von $b$) mögen zu Fourier'schen Integralen erweitert werden. Hierzu dienen die Functionen auf der rechten Seite von $b$) und man hat sofort

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos bz\, dz \int_a^b \cos zu \frac{\Gamma(u) \cos \frac{1}{2}\mu\pi}{u^u} du = \int_0^\infty z^{\mu-1} \cos bz\, dz,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin bz \int_a^b \sin zu \frac{\Gamma(u) \sin \frac{1}{2}u\pi}{u^u} du\, dz = \int_0^\infty z^{\mu-1} \sin bz\, dz.$$

Von Interesse ist hier, wie man alsbald erkennt, die Grenzenbestimmung $a = 0$, $b = \infty$. Zwar divergiren jetzt die Integrale nach $u$; es handelt sich jetzt aber auch nicht um die Fourier'schen Doppelintegrale, sondern um ihre Correction, um die Elimination ihrer Divergenz zum Zwecke der Herstellung der Integrale rechts. Dies geschieht bei Anwendung der stellvertretenden Function Gamma und man ist zur Annahme der Formeln $a$) für positive $\lambda < +\infty$ genöthigt, deren rechtsseitige Werthe jetzt nichts anderes als die Hauptwerthe der linksseitigen Divergenzen sind.

In möglichster Kürze schliessen wir an diese Betrachtungen die Erweiterung jener umfassenden einfachen bestimmten Integrale, welche erst nach dieser Erweiterung befähigt sind, auch die Formeln 0) in ihrer neuen Gestalt als specielle Fälle zu enthalten. Es sind dies die Integrale Cauchy's:

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-bzi}}{(a+zi)^\alpha} dz, \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(k+zi)^\alpha (l+zi)^\beta}$$

und die Integrale Dirichlet's:

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-bzi}}{(\beta^2+z^2)} \cdot \frac{dz}{(a_1+zi)^{\alpha_1} (a_2+zi)^{\alpha_2} \ldots}$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-bzi}}{(\beta^2+z^2)} \left[\frac{1}{(k_1+zi)^{\varkappa_1}} \cdot \frac{1}{(k_2+zi)^{\varkappa_2}} \ldots\right] \left[\frac{1}{\{l(q_1+zi)\}^{\lambda_1}} \cdot \frac{1}{\{l(q_2+zi)\}^{\lambda_2}} \ldots\right] dz,$$

deren Constanten $\alpha$, $\varkappa$ und $\lambda$ nach dem Vorhergehenden an die Bedingung, positiv zu sein, nicht gebunden sind. Diese Integrale, welche gleichfalls auf dem Wege der Cauchy'schen Integrationsmethode gewonnen werden, erlauben auch dieselbe Behandlung wie die Euler'schen

Integrale. Nur das Integral 2), bei welchem $b = 0$ ist, bedarf der Bedingung $\alpha + \beta > 1$; es gehört zugleich zu den wenigen Fällen, bei welchen die Stellvertretung der Gammafunction bereits durchgeführt ist. Eine Folge dieses Integrales sind die Formen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)^{p-1} \frac{\cos}{\sin} q\vartheta \, d\vartheta, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\vartheta)^{p-1} \frac{\cos}{\sin} q\vartheta \, d\vartheta,$$

welche wir bei Gelegenheit des Parseval'schen Lehrsatzes benutzt haben.

Wir schliessen diese Betrachtungen über die Stellvertretung mit einer Discussion der Definitionsgleichungen der Gammafunction. Ihre dominirende Bedeutung für die Integral-, ja selbst für die Differentialrechnung ist kein Umstand mehr geeignet anschaulich zu machen als die Existenz dreier, gleich allgemeiner, gleichberechtigter Definitionen. Die Fruchtbarkeit dieser letzteren wird ausserdem durch die ausgezeichnete Eigenschaft gesteigert, dass ihr Argument das gesammte positive wie negative Bereich der reellen Zahl beherrscht.

Man kann in der Gleichung

$$\Gamma(\lambda)\,\Gamma(1-\lambda) = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi}, \; -\infty < \lambda < +\infty$$

nach Belieben $1 - \lambda$ mit $\lambda$ und umgekehrt vertauschen, ohne mit den übrigen Definitionen, der Reductionsformel zweier um die Einheit des Arguments verschiedener Gammafunctionen, sowie der Gauss'schen Limitendefinition in Widerspruch zu gerathen. Für positive gebrochene $\lambda$ existirt nun überdies ein der Gammafunction aequivalentes bestimmtes Integral. Es ist aber, um es am besten zu sagen, ein Scheinmanöver. wenn die Analysis die angegebene Beschränkung von $\lambda$ gerade hier fordert. Sie selbst widerlegt hundertmale diese Forderung und zeigt die Continuität der Integralbeziehung gleichfalls für das ganze reelle Gebiet des Arguments. So macht sie es auch unerlässlich, jene Beschränkung zurückzunehmen und die Erscheinung dahin zu fixiren, dass die Integralbeziehung durch das Princip der Stellvertretung und Hauptwerthssubstitution erhalten wird. Damit ist dann die vierte und letzte Fundamentaldefinition der Function Gamma gänzlich hergestellt.

Aber es gibt, so einfach und klar diese Auseinandersetzungen auch scheinen, immer noch eine Klippe, welche umschifft werden muss, wenn die Lehre von der Stellvertretung nicht scheitern soll. Die allgemeinste Definition der Gammafunction hat die Aufgabe zu lösen, die Discontinuität der Integrationsmethode Cauchy's zu überbrücken. Aber diese Definition enthält selbst Discontinuitäten. Wie die zuletzt angesetzte Gleichung zeigt, finden diese statt für alle ganzen, positiven und negativen Werthe von $\lambda$ mit Einschluss der Null. Gerade im Momente, da die Integrationsformel Cauchy's die erste Divergenz enthält, für $\lambda = 0$, wird die stellvertretende Function gleichfalls divergent. Sie macht wie die Tangente einen

Sprung, indem sie $-\infty$ verlässt, um mit $+\infty$ wieder anzusetzen. Es ist merkwürdig, dass gerade bei diesen Stellen, wie wir gezeigt, die Cauchy'sche Formel wieder eintritt, um ein anderweitig bekanntes Resultat zu liefern. Wir müssen demnach bei den einfachsten oscillirenden, den Euler'schen Integralen von Neuem anknüpfen. Denn es ist klar, dass bei solchem gleichzeitigen Eintreten der Divergenz von den Momenten derselben auf alle Zwischenstellen kein Schluss erlaubt und also die Methode der Substitution illusorisch ist. Das Bedenken schwindet erst, wenn dargethan ist, dass auch für Zwischenwerthe des Arguments Resultate entspringen, deren Richtigkeit ebenfalls von andersher feststeht. Ist dieser Beweis gegeben, so ist mit der Sicherstellung der Methode sofort auch ihre unbeschränkte Geltung erwiesen. Man muss also auf die erste Genesis der Formeln 0) zurückgehen; wir erhielten diese für die Werthe

$$\lambda = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \text{ etc.} \ldots$$

aus der Aequivalenz der folgenden Integrale

$$-\int_0^\infty e^{-2bx} \cos(x^2)\, dx = \int_b^\infty \sin(b^2 - x^2)\, dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-2bx} \sin(x^2)\, dx = \int_b^\infty \cos(b^2 - x^2)\, dx;$$

$$\int_0^\infty e^{-2bix} \cos(x^2)\, dx = \int_0^\infty \sin(b^2 + x^2)\, dx - \int_0^{bi} \sin(b^2 + x^2)\, dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-2bix} \sin(x^2)\, dx = \int_0^\infty \cos(b^2 + x^2)\, dx - \int_0^{bi} \cos(b^2 + x^2)\, dx,$$

indem wir sie in convergente Potenzreihen nach der Constanten $b$ entwickelten. Hierin sind nun schon die gebrochenen Werthe von $\lambda$ solche, für welche eine Discontinuität der Gammafunction nicht eintritt und zugleich solche, die die Anwendung der Cauchy'schen Integrationsmethode direct verbieten.

Wieder sind wir genöthigt, ein fundamentales Hilfsmittel zur Bewältigung der im Gebiete des Reellen typischen Discontinuitäten dadurch zu legitimiren, dass wir Resultate der Theorie von den Functionen complexer Variabeln zur Bekräftigung unserer Folgerungen heranziehen. Die angesetzten Hilfsgleichungen, die am natürlichsten mittelst geschlossenen Integrationen dargestellt werden, zeigen selbst die Spaltung ursprünglich reeller und imaginärer Bestandtheile. Die grosse Classe der oscillirenden Integrale besitzt eine tiefere Wurzel in der complexen Variabelntheorie, und fügt sich nur schwer den Methoden der reellen Integralrechnung. Es wäre dies übrigens ihr kleinerer Fehler. Aber sie betrachtet von Anfang an analytische Formen getrennt, die nur mit- und durcheinander ein wahres Leben und Ausdruck gewinnen. Sie muss so hauptsächlich die Formen mit geradem von denen mit ungeradem Index sondern, die ursprünglich unterschiedslos sind. Mit der complexen Functionentheorie dagegen theilt sie die Schwierigkeit, die in der bisher unaufgehobenen Discontinuität jener Gesammtfunctionen, welche discrete Reihen von Differentialquotienten mit lediglich ganzem reellen Index umfassen, besteht. Wenn die Gammafunction mit ganzem Argument diese discontinuirlichen Functionen charakterisirt, so scheint dagegen die Gammafunction mit gebrochenem Argument bestimmt zu sein, die zweifellos existirende Brücke zwischen den einzelnen discreten Differentialquotienten herzustellen. Es können die Fundamentalformeln der Lehren von den geschlossenen Integrationen und den Fourier'schen Doppelintegralen, wie sie in den vorstehenden Betrachtungen unter ζ) und 21) dargestellt sind, vielleicht eine Vorstellung von jener Verbindung gewähren. Von dieser aber allein kann eine Aufhebung der Discontinuität der Methoden der Differential- und der Integralrechnung selbst erwartet werden.

---

## Berichtigungen.

Seite 9, Zeile 3 und 4 von unten bezeichne die Formeln durch $h'$).
„ 16, „ 1 „ „ lies $\tau$ statt $\sigma$ und streiche den Punkt.
„ 20, „ 14 und 15 „ „ „ $e^{oi}$ statt $e^{oi\vartheta}$ und $re^{\pm i\vartheta}$ statt $\vartheta e^{\pm i\vartheta}$.
„ 21, „ 1 „ „ „ $h'$ statt $h$.
„ 25, „ 2 „ „ „ $+ 2$ statt $+$.
„ 30, „ 7 von oben „ $\gamma_p^1$ statt $\gamma_0^p$.
„ 70 — 72 lies unter den Zeichen $\varphi$ und $f$ durchgängig $h+1$ statt $h$ und $k-1$ statt $k$.
„ 75, Zeile 8 und 9 von oben vertausche $f$ und $\varphi$.
„ 94, „ 10 von oben lies $a^2 - x^2$ statt $a^2 + x^2$ und $e^{-b^2x^2}$ statt $\overset{2}{e}{}^{-b^2x}$.

# Inhalts - Uebersicht.