Snellius, Willebrordus

VVillebrordi Snellii R.F. Cyclometricvs

Elzevir
Lugduni Batavorum
1621

books2ebooks – Millions of books just a mouse click away!

European libraries are hosting millions of books from the 15th to the 20th century. All these books have now become available as eBooks – just a mouse click away. Search the online catalogue of a library from the eBooks on Demand (EOD) network and order the book as an eBook from all over the world – 24 hours a day, 7 days a week. The book will be digitised and made accessible to you as an eBook. Pay online with a credit card of your choice and build up your personal digital library!

What is an EOD eBook?

An EOD eBook is a digitised book delivered in the form of a PDF file. In the advanced version, the file contains the image of the scanned original book as well as the automatically recognised full text. Of course marks, notations and other notes in the margins present in the original volume will also appear in this file.

How to order an EOD eBook?

Whereever you see this button, you can order eBooks directly from the online catalogue of a library. Just search the catalogue and select the book you need. A user friendly interface will guide you through the ordering process. You will receive a confirmation e-mail and you will be able to track your order at your personal tracing site.

How to buy an EOD eBook?

Once the book has been digitised and is ready for downloading you will have several payment options. The most convenient option is to use your credit card and pay via a secure transaction mode. After your payment has been received, you will be able to download the eBook.

Standard EOD eBook – How to use

You receive one single file in the form of a PDF file. You can browse, print and build up your own collection in a convenient manner.

Print

Print out the whole book or only some pages.

Browse

Use the PDF reader and enjoy browsing and zooming with your standard day-to-day-software. There is no need to install other software.

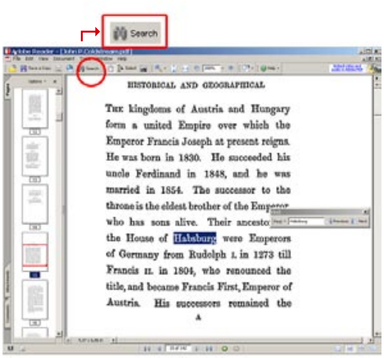
Build up your own collection

The whole book is comprised in one file. Take the book with you on your portable device and build up your personal digital library.

Advanced EOD eBook - How to use

Search & Find

Print out the whole book or only some pages.



With the in-built search feature of your PDF reader, you can browse the book for individual words or part of a word.
Use the binocular symbol in the toolbar or the keyboard shortcut (Ctrl+F) to search for a certain word. “Habsburg” is being searched for in this example. The finding is highlighted.

Copy & Paste Text

Click on the “Select Tool” in the toolbar and select all the text you want to copy within the PDF file. Then open your word processor and paste the copied text there e.g. in Microsoft Word, click on the Edit menu or use the keyboard shortcut (Ctrl+V) in order to Paste the text into your document.

Copy & Paste Images

If you want to copy and paste an image, use the “Snapshot Tool” from the toolbar menu and paste the picture into the designated programme (e.g. word processor or an image processing programme).

Terms and Conditions

With the usage of the EOD service, you accept the Terms and Conditions. EOD provides access to digitized documents strictly for personal, non-commercial purposes.
Terms and Conditions in English: http://books2ebooks.eu/odm/html/ubw/en/agb.html
Terms and Conditions in German: http://books2ebooks.eu/odm/html/ubw/de/agb.html

More eBooks

More eBooks are available at http://books2ebooks.eu

~~No. 378~~

~~248~~

~~28. d.~~

12

VVILLEBRORDI SNELLII R.F.

CYCLOMETRICUS,

De circuli dimensione secundum Logistarum abacos, & ad Mechanicem accuratissima; atque omnium parabilissima.

Eiusdemque usus in quarumlibet adscriptarum inventione longe elegantissimus, & quidem ex ratione diametri ad suam peripheriam data.

LUGDUNI BATAVORUM,
Ex Officinâ ELZEVIRIANA,

ANNO CIↃ IↃ CXXI.

In V. CL.

VVILLEBRORDI SNELLII

Librum

De quadratura circuli

PETRVS CVNÆVS I. C.

QVadrationem ſcrupuloſam circuli,
Natura ferre quam poteſt, ſed abdito
Tegit receſſu, nullus edidit dies
Nec edet unquam. Tanta vis inſcitiæ
Mortale pridem damnat ac tenet genus.
Sed illa laus eſt interim pulcherrima
Huc tendere uſque, quò poteſt mens progredi.
Id primus orbi Snellius *præſtat meus,*
Inuſitatis auſibus poſtquam vias
Emenſus omnes terminum ſcientiæ
Præfixit hominum, quem prius nec adſequi
Mens ulla potuit, nec poteſt excedere.

ILLVSTRISSIMO PRINCIPI

MAVRICIO *Principi Auraïco, Comiti Nassoviæ, Cattimœlibocorum, Moersæ, Viandæ, Dietzæ, Lingæ, Buræ, Leerdami: Marchioni Veræ, Vlißingæ: Domino & Baroni Bredæ, Gravæ, regionis Cuyck, Diestæ, Grimbergæ, Arlæi, Nozeroÿ, S. Viti, Daesburgi, Herstallæ, &c. Hereditario Vice-Comiti Antvverpiæ & Vesontionis: Provinciarum Fœderatarum Belgÿ Gubernatori, earundemq; Archistratego, & Archithalasso generali, &c.*

ILLVSTRISSIME PRINCEPS,

QVantus humano generi ſit innatus amor cognitionis & ſcientiæ, vel inde manifeſtum ſit, quod ad rerum ſubtiliſſimarum inveſtigationem hominum natura nullo emolumento invitata rapiatur: Et quemadmodum id in optima quaque indole maxime apparet; ita merito ab illo Philoſophorum Homero beatus etiam is judicatur, cui vel in ſenectute contigerit, ut ſapientiam & veras opiniones aſſequi poſſit. Natura quidem certe

 ani-

animũ ſenſibus ornavit ad res percipiendas idoneis, ſed tamen eoſdem tantis difficultatibus obſepſit, ut ad verum pervidendum non tam vitæ brevitas (etſi eam quoque viri ſummi cauſentur) ſed viſorum ambiguitas & fallacia maximè impedimento ſint, & aliovorſum à vero abducant. Id cum creberrimè in rebus naturalibus uſu veniat, ut luſu naturæ vario & multiplici indagantis induſtria fruſtra ſit: idem tamen profectò ubivis in alijs artibus, vbi paullum à conſuetis abieris omnes utique experimur. Nam & illæ ipſæ artes, quæ cogitationem à ſenſibus ſubducunt, & in recondito & ſubtili mentis ſacrario tranſiguntur, quamvis cæteris puriores & minus elementari fæce contaminatæ videantur, ſuas tamen habent difficultates inexplicabiles, in quibus plurimi non tantũ oleum & operam perdunt, tanquam ſi hic ſua tirocinia ponerent: ſed nominis quoque & exiſtimationis naufragium faciunt. Et ne longius diſcedam iſta ipſa quam nunc in manibus habemus circuli quadratura argumento nobis ſit: ſcopulus inquam iſte tot naufragijs infamis; ad quem viri nominis fama & doctrina celeberrimi, tanquam in brevia & ſaxa tempeſtate quadam abrepti, miſerè adhæſerunt: quorum exiſtimationi non eo derogatum, modò ne familiam ducant. Nocet enim plurimum

mum cum falsæ rei gravis auctor extitit. Poteram equidem & ego tantorum virorum exemplis ab instituto deterreri; cum hac in parte, Archimede excepto, nihil cuiquam ex voto successisset, nedum ut illius industriam quisquam superavisset. Sed enim dum honesto otio me oblecto, libuit etiam hic aliquid conari, & in re ardua atque difficili successum experiri. Et cum epichirêma ipsum partim demonstrationibus firmavissem, partim etiam calculi ratiocinio comprobavissem, laborem quoque ista opera dignum sumpsisse visus mihi sum. Nam & limites circuli perimetro (quod omnino palmarium videbatur) circumposui, & eosdem Archimedæis non paulo arctiores constitui. Quam enim rationem dimetientis ad suam circumferentiam ille à nonagintasexangulo assequitur, eandem ego inde à sexangulo exhibeo. Quos ille ex uno scrupulo exhibet, istos ego inde in uno gradu etiam supero. Atque isto in infinitum processu semper notarum in diametro assumptarum semisse ipsum anteverto: quod etsi forsan meritò haud contemnendum videatur; cum nunc demum tot exactis seculis novi, & Archimedæis angustiores limites sint inventi. Non tamen unquam me tantopere hæc ipsa res oblectavisset, aut inventi dulcedine delinivisset: nisi usus qui inde

 deri-

derivatur uberrimus & jucundissimus voto atque spei conceptæ respondisset. Ut enim mechanica factionis commoda hic omittam, illud utique haud quaquam aspernandum existimo, quod anguli dati trianguli absque ullo triangularium canonum usu adeò accuratè hinc explicentur, quam per ipsos canones, & persæpe quidem haud operosius quoque: quod præterea inscriptæ cujuscunque datæ peripheriæ hinc tam accuratè inveniantur, quam erit ratio diametri ad suam peripheriam data, aliaque quæ nunc non recenseo. Vereor ne quibusdam portenta loqui, & supra fidem dicere aliquid videar. Sed dictis fidem res ipsa faciet. Obiter tantum, Princeps Illustrissime, hujus nostri fundi utilitatem indicavi, ut si ista polito limatoque tuo judicio probentur, nullius deinceps censuram aut notam pertimescant. Neque tantilla operis exilitate aut mole deterritus, sed contra utilitate potius instigatus T. C. hoc consecrare non sum veritus. Et quidem tanto majore fiducia, & spe certiore: quanto omnes tot retro seculis, non minus belli gloria, quam mathematum divina cognitione longè antecellis. Ut, quod illi votis optavisse, & fabulis confictis post venturis persuadere conati sunt, id divinitus à supremo numine T. C. concessum, & cumulatè tributum videatur. Cum igitur

artes

artes istæ tanto in pretio apud te sint, Princeps Illustrissime, ut, sive bellicum Mars increpuit, hæ semper tecum medijs in prælijs & urbium expugnationibus versentur & pernoctent: sive bellici animorum motus pace reddita consederint, ad omnium utilitatem, ornatum, totiusque reipublicæ εὐταξίαν à te versari & tractari gaudeant. Nefas fuerit dubitare nostram istam εὐφημίαν, cum sit animi venerantis cultus, T.C. minus gratam fore. quæ, ut ab omnibus & patriæ, & veræ libertatis amantibus T.C. debetur, ita quoque nostram

——— Hanc sine tempora circum
Inter victrices hederam tibi serpere lauros.

Quod summis votis obnixe contendit

Tuæ Celsitudini

addictissimus

VVILLEBRORDVS SNELLIVS R. F.

Lectori benevolo.

POstquam Mathesis ex Ægypto in Græciam traiecit Pythagora & Thalete facti adeò auspicati ducibus, confestim omnes Philosophorum diatribæ mirabili tam præclaræ artis amore incensæ flagrarunt; ut summa contentione novorum epichirematum inventionibus certatum sit: Dum alij ad cœli & siderum motus, solisque conversiones, & illa quæ in vulgus plausum mereri, & majorem hominum vitæ opportunitatem allatura videbantur scrutanda animum adjiciunt: alij verò ad γεωμετρικὴν θεωρίαν ut istam vel ornarent, vel augerent, vel planiore & commodiore via demonstratam in vulgus efferrent, incubuerunt. in quibus multa scitu jucunda, usu non utilia solum, sed necessaria quoque eruerunt. Et reliqua quidem cum bellè atque ex voto procederent, & ita maximis accessionibus hanc ipsam scientiam quotidie amplificarent, duo scopuli in hoc Oceano illis objecti sunt, è quibus tanquam è vortice vix, ac nè vix quidem quisquam sine nominis atque existimationis suæ jactura explicare se potuit, ubi semel horum cupiditate implicati & amore irretiti istis adhæserant. Cubi inquam duplicatio, & circuli quadratura. Sed illa tamen aliquousque processit, & quam per naturam potuit à summus viris lu-

cem

cem accepit; istius autem investigatio & publicatio adeò infortunata suis auctoribus accidit, ut lepidissimus Comicus sub Metonis nomine hanc traducere, atque eandem à subtilissima Geometrica theoria, ad infimum mechanicæ epharmoseos subsellium & pragmatiam detrudere non sit veritus, his verbis:

Ὀρθῷ μετρήσω κανόνι, προσθιτεὶς, ἵνα
Ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος.

Atque ita nobilissimum problema comico proscenio ludibrium debuit, ob infelices multorum ψευδογραφίας, *qui suæ existimationis naufragium hic fecerunt; dum alia atque alia via ad ejus investigationem involare conantur. Eodem enim fere tempore hanc incudem tuditarunt Bryso, Antipho, Hippocrates Chius, Dinostratus Eudoxi auditor. Menechmi frater; & alij præterea innumerabiles, quorum nomina & infelices conatus ipsa longinqui temporis vetustas obliteravit, quos Conon Hamæus & inde Archimedes, hosque secuti Appolonius Pergæus, Philo Gaditanus & Claudius Ptolomæus exceperunt. Neque ullo adeò seculo ab hujus rei inquisitione temperatum. Arabes quoque huc curam suam verterunt; & res eadem patrum ac nostra memoria plurimos exercuit. Libet igitur majoris evidentiæ causâ pseudographiam à veritate dispungere, & eos qui regia grassati sunt via, ab illis qui in diverticulo oberraverunt segregare, ut nostri laboris utilitas ista comparatione clarius*

rius elucescat. Atque ideo rem ipsam altius paulo arcessere fuerit operæ pretium.

Veteres illi οἱ εἰς τὸ ἄκρον ταύτης τῆς παιδείας ἐληλυθότες *Geometricorum problematum materiem prout solutioni apta esset & accommodata, ita trifariam distinxerunt, in plana, solida & linearia. Ad Plana enim ea omnia referebant quæ linearum rectarum ductu, aut circuli circumferentia explicantur: cujusmodi sunt ea, quæ primis elementis, aut inde eâdem serie derivatâ factione expediuntur, hoc est, quæ à constituta* στοιχειώσει *per circinum & regulam suum effectum sortiuntur. Nam & recta & circulus in plano, tanquam in suo genuino solo primum designantur. Secundum autem genus quod solidum vocant, illam solidorum doctrinam requirit, quam Plato primus attigisse putatur: certè ejus difficultatem, & obscuritatem non semel inculcat, ejusque rationes minus explicatas in libris de republica quiritatur,* ὅτι οὐδεμία πόλις ἐντίμως αὐτὰ ἔχει, ἀσθενῶς τε ζητεῖται, χαλεπὰ ὄντα. *Nec enim à quoquam nisi secretioribus mathematum sacris initiato pervideri aut intelligi queunt. Et enim ideò plus habent difficultatis, quod effectum suum sortiantur à lineis è corporum solidorum, utpote coni & cylindri sectione ortis; unde & lineæ solidæ vocantur, quæ instigante primùm Platone, certatim postea & magno studio à viris summis excultæ fuerunt. Tertium verò & ultimum genus tum demum adhiberi & frequentari solet, cum ex antecedentibus*

locis

locis ad propositi solutionem nihil afferri poterit, aut explicatio nimis operosa, & minus erit catholica. Nam hic lineæ assumuntur, quæ non quidem ex ulla corporum sectione, sed ex duarum linearum in una superficie sese intersecantium motu & communis sectionis vestigio delineantur. Prout autem horum motuum erunt variæ & intricatæ leges, & ipsæ præterea superficies variæ, ita varietas harum & perplexa designatio multiplex erit & varia; qua in re multi veterum ingenium suum potius ostentarunt, quam ut hinc usum ullum oportunum etiam summo conatu exprimere potuerint. Credo ad harum contemplationem ab ipsa natura invitatos, quæ istiusmodi helicibus ubique ludit, etiam suas curas & cogitationes huc vertisse. Inde, opinor, factum, ut illi qui circulum ἐπιστημονικῶς quadrare animum induxissent, cum viderent nullum hic locum proportioni esse aut similitudini: alij ad ἐφάρμωσιν, alij ad τεμαχισμὸν, alij denique ad helicas confugerent. Est enim ἐφάρμωσις luculentissimum Geometricæ suppellectilis instrumentum, suis tamen limitibus diligentissimè coërcenda, ne quo à veritate abeat diversa. lubrica enim est, atque hos qui ipsa violenter utuntur, aut fidentur abutuntur in profundissimum errorum barathrum agit præcipites. Et quia mente sola constant hæc sacra, contra eos, qui rebus physicis atque corporeis eam admiscent merito dicam instituerit Divinus Plato; quippe τῆς γεωμετρίας οὕτως ἀπὸ τῶν ἀσωμάτων καὶ νοητῶν ἀποδιδρασκούσης

 ἐπὶ

ἐπὶ τὰ αἰσθητὰ, *cum Geometria hoc pacto à rebus incorporeis, & nudis animi conceptibus nimiũ impurè ad sensuum arbitrium traducatur. Talis utique est mechanica circuli cujusque revolutio, donec ad idem peripheriæ punctum recurrat, unde circumduci occeperat; quæ illud quidem arguit, & tanquam ob oculos ponit, rectam aliquam lineam circuli perimetro revera æqualem exhiberi posse,* εἶναι γὰρ τινὰ τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ πρὸς οὐδενὸς ἔτι ζητούμενον, *ait Eutocius. At quisnam ideo quæso ex ista revolutione æqualitatem definiet? quis circulum tanquam Sysiphi aliquod saxum volvet & revolvet, ut ex opere mechanico Geometricam &* ἀποδεικτικὴν *veritatem eruat? nisi qui incertior multò velit esse, quam fuerat dudum, & sui nominis atque existimationis suæ sit omnino prodigus. Quamobrem etsi illud jam inde ab initio haud difficulter esset notatum & animadversum, circulum æquari triangulo, cujus basis peripheriæ, altitudo autem eiusdem radio esset æqualis; omnes huc suam curam studiumque verterunt, ut rectam lineam cum circuli circumferentia paria facientẽ nobis exhiberent: ita enim rectilineum ejusdem areæ æquale dari posse nemo dubitabat. Cumque hac mechanica revolutione nihilum ad istam æqualitatem profici apud saniores constaret, ideo altius omnia sibi repetenda censuerunt. Festivi enim & lepidi illi homines, qui ad hanc revolutionem perpetuò provocant, profectò de cœno hauriunt, neque plus operæ aut industriæ* *huc contulerunt, quam aurigæ aut cisarij solent, qui assiduò ambitum rotarum subjectæ orbitæ ἐφαρμόζουσι; & istorum profanitas à sacratissimis Geometriæ adytis longissimè est arcenda. Cum, inquam, ludicrum istud nimis lubricum viris perspicacibus videretur; ideò postquam hac non succederet alia sibi via tentandum rati, ut rectilineum dato circulo exhiberent æquale. Bryso quidem assumpto quadrato inter inscriptum & circumscriptum quadratum proportione medio. Atqui istud octangulo in eundem circulum inscripto æquatur, & ideo circulo dato minus est. Quia* inter figuras ordinatas & similes eidem circulo adscriptas, inscripta duplo laterum numero media proportionalis est. *Ita hic conatus in ipsa (quod ajunt) herba oppressus, postea in manifestiorem τιμαχισμὸν erupit. Et hic alij quidem è perpetua peripheriarum bisectione, tanquam minutali aliquo rectam dato circulo bene Geometricè æqualem exhiberi sunt arbitrati. Hoc enim Antipho secutus est, qui hac continuata sectione eò putavit perveniri, ut segmentum novissimum suæ subtensæ tandem æquaretur. Sed hujus alogistiæ & ψευδαρίῳ postmodū à Leontio, Theudio & veteribus στοιχειώταις oppositus est murus aheneus, theorema illud longe elegantissimum,* Rectam quamcumque duo quælibet peripheriæ puncta connectentem cadere intra circulum. *In eo igitur haud leviter hallucinatus, quod τὸ συνεγγὺς vero proximum pro ipso vero aßumpserit; cætera haud* omnino aspernandus: Nam alijs occasionem præbuit hunc τεμαχισμὸν ita temperandi, ut inde figurarum adscriptionem intra & extra circulum huic fini oportunam adhiberent; ut hoc saltem pacto fugacem & labilem rotundi naturam intra hos limites coërcerent concluderentque, quod primus fecit, certè omnium primus prodidit ἀστὴρ ἀρίζηλος, ocellus ille, & Mathematum deliciæ Archimedes Syracusanus. Cum enim ad accuratam peripheriæ inventionem nulla essent è proportione aut similitudine vestigia in promptu, & tamen nihilominus constaret circuli circumferentiam inter inscripti & circumscripti polygoni ambitum quantitate esse intermediam, docuit qua ratione inscribi posset polygonum quantumlibet continuata bisectione, & præterea circumscribi: atque ita inter horum laterum magnitudines peripheriam circuli, tanquam circumpositis limitibus, circumscripsit: non autem definivit mediam, ut perperam Bryso; neque subtensas inscriptis æquari, ut Antipho. Hanc itaque viam quicumque sequitur nusquam à veritate deflectet. Et propterea istam quadraturam limatissime olim expoliverunt, atque subtilissimo epilogismo ad multas myriadum myriadas produxerunt. Magnus ille Apollonius Pergæus & Philo Gaditanus, è recentioribus etiã viri summi Franciscus Vieta & Adrianus Romanus, quorum omnium accuratam diligentiam longe superavit Ludolphus à Ceulen, logista subtilis. Quamobrem Archimedæa ratio non à solis

nume-

numeris, ſed etiam geometricis demonſtrationum monimibus bene accuratè adverſus omnes inſultus munita, ab omni antiquitate approbata, laudata & expreſſa eſt. Hic igitur Lydius verè lapis, & regula Leſbia eſto, ad quam omnium inventa ſint exigenda: ut quantum ab hoc examine abludunt, tantundem eoſdem à veritate diverſos abire certum ſit. Eamque adeò vel ſolam ob cauſam, novos iſtos quadratores perpetuò ſibi habuit infeſtos. Cum enim à vero longe abirent diverſi, & ideo quoque cum iſto ſibi minus convenire cernerent, hos tot retro ſeculis rei Quadratariæ ſacros limites convellere conati ſunt, ut nullis repagulis coërciti vago curſu & lapſante veſtigio impunè oberrare poſſent. Et tum demum ſe triumphare crederent, cum, θεσπεσίῳ Archimedi obloquerentur aut maledicerent, cujus inventum tamen à quoquam temeraria audacia ſollicitari aut convelli nequaquam eſt ferendum. Atque iſta prima eſt claſſis epichirematum quibus circuli quadratura per regulam & circinum tentata eſt. Porrò ſolidum hoc problema à quoquam veterum judicatum, aut ita tentatum nuſquam me legere commemini: niſi forſan hoc divino Archimedi venerit in mentem cum circulo ellipſin comparavit. Sed id potius ad ellipſis quadrationem, quam ipſius circuli referendum videatur. Veruntamen cum nihilominus Geometricas ſpeculationes ad hoc genus ſatis virium habere crederent, inde ſe ad helicas & earum motus contulerunt, quarum contem-

platio etsi minus difficilis sit, earum tamen effectio non perinde expedita est & facilis. Helicum autem ad diversos usus diversa sunt excogitata genera, qua de re singulares & eruditi libri olim extabant, quos ætas obliteravit. Nam Demetrius Alexandrinus scripserat περὶ γραμμικῶν ἐπιστάσεων. *Philo Tyanæus* περὶ πλεκτοειδῶν: *inter quas Menelao Geometræ una visa erat peculiari digna tractatu, quæ ob stupendas & incredibiles affectiones eidem admiranda vocatur. Neque tamen in sola superficie plana istæ omnes describuntur; sed aliæ in sphærica, conica, cylindracea, aliæ etiam in alijs superficiebus delineantur. Verum ex his cylindracea, ob illustrem quoque ejus in mechanicis machinationibus usum, singularibus libris à Gemino & Apollonio fuit explicata. Huc aggregandæ sunt* κισσοειδεῖς κογχοειδεῖς, *aliæque præterea infinitæ. Sed quæ ad circuli affectiones explicandas conducant, duæ maximè celebrantur,* τετραγωνίζουσα *quadrataria delumbata, &* τεταγμένη *ordinata. Illius inventio Dinostrato tribuitur, is inquam volutam hanc delumbatam primus excogitavit, quam Nicomedes & Hippias deinde excoluerunt. Est autem istius Genesis reliquarum haud dissimilis, quæ omnes gemini motus concursu fere describuntur. Si enim concipias rectam circulum contingentem radio jacenti parallelam, motu* ὁμαλῶς *& parallelo situ ad hunc radium descendere eodem temporis spatio & pari velocitate, quo radius alter à contactu circuli quadrantem*

per-

percurrit; utriusque hujus lineæ communis sectio helicem lienam describet, cujus terminus tamen ad radium subjectum pertingere non potest, quia istic hactenus se secantes lineæ mutuo sibi congruunt: ut ita punctum illud, & quadratariæ limes quæsitus ante evanescat, quam existat. Quod si tamen is hoc imaginario motu designari posset, tum absumptum hoc radij segmentum, radius ipse & quadrans peripheriæ eßent continuè proportionales. Atque ideo hinc jam recta datæ peripheriæ æqualis, aliaque id genus compluria præstari possent, quemadmodum Pappus συναγωγῆς Μαθηματικῆς *libro 3. demonstravit. Veruntamen, ut dixi, huius volutæ verum limitem inveniri posse verissimè iam tum negabat Sporus Nicenus, quia tandem radius ille motus & parallela descendens, cum radio jacente omnino congruunt. Atque ita in extremo termino, quo maxime fuerat opus, sectio omnis evanescit. Hæc igitur linea ad justæ quadraturæ factionem omnino fuerit inutilis: quamvis eadem in numeris suam dignitatem quoque tueatur. Eam ob causam Conon Hamæus Archimedis æqualis & ab eodem laudatus, aliam excogitavit volutam ordinatam per æqualia radij spatia æqualiter excrescentem, cujus latentes & occultas affectiones mirabili ingenio explicavit Archimedes, inde obliterata inventoris memoria Archimedea vocatur. Verum utraque ad operis exegesin adeò est intricata, ut satius fuerit & certius circulum* μηχανικῶς *revolvere, quam istas helicas*

cas

cas machinari. Quæcunque enim motu imaginario in mathematicis construuntur, arguunt illa quidem sui inventoris ἀγχίνοιαν; sed quia ἀΰλως concipiuntur, neque per regulam & circinum effectum sum sortiuntur, quanto subtiliora tanto ab usu communi sunt remotiora. Qui verò his delineandis novum syrma inducunt, atque per puncta disposita istas delineant, idque Geometrice, ut ipsi de se prædicant, nimis audacter faciunt. At cum eam delineationem cum conicis sectionibus conferunt, audaciæ etiam impudentiam addunt, & nimium secure in veterum scriptis versati umbras rerum non res ipsas æstimarunt. Nam illud quidem genus semper postremum est habitum, ut re desperata ad γραμμικὰς ἐπιστάσεις, tanquam sacram anchoram confugerent. Cum enim neque per plana, neque per solida quæsiti solutionem legitimam assequi possent, tum istis demum locus erat, tanquam re omnibus modis desperata. Post Archimedem nemo novo epichiremate hanc rem ἐπιστημονικῶς explicavit; etsi enim multi hanc incudem tuditarint, eorum tamē industria in hoc pulvere minus feliciter est versata. Quorum nomina, ob honestos conatus, silentio transmitti satius sit, quam publicando eorundem existimationi quidquam derogare. Cum multi eorum de literis & hoc ipso pulvere aliquando bene sint meriti.

Quamobrem tanto demum intervallo Archimedem secuti primi nos limites novos hic præfiximus, intra quos circularis

cularis

cularis peripheriæ modulus staret; sed non paulo arctiores Archimedeis. Cum eosdem terminos jam à sexangulo exhibeamus, quos ille vix in nonaginta sexangulo post quartam bisectionem assequatur. Quin adeo ex illo ipso 96 angulo mihi nascitur ratio diametri ad peripheriã, quæ 10000000 ad 31415926 minor, & 31415927 maior vera; unde Archimedis abacus vix summo conatu expresserit rationem 7 ad 22, hoc est 1000 ad 3142: sed hæc in ipso opere fusius à nobis sunt exposita. Quod etsi non leve forsan videatur: tamen neque illa contemnenda existimo, quod secundum geometricam factionem cuicumque datæ lineæ peripheriam, aut contra cuicumque peripheriæ rectam lineam æqualem expeditissime exhibere liceat. Hac igitur re omnium factionibus nostrum epichirema anteferendum sit: cum hinc insuper mirifica scitissimorum problematum ubertas existat. Verum ista mihi hic palmaria videntur, quod cuicunque angulo aut peripheriæ sinum debitũ exhibere nobis haud operose liceat, & quidem ex data ratione peripheriæ ad suam diametrum. Quæ res quanti sit momenti haud existimo ignotum esse ijs posse, qui unquam ad triangularium Canonum compositionem seriò manum admoverunt. Nunc autem aliquem è media turba sinum eligere tibi licet, & eiusdem integritatem absque ambagibus explorare. Quod cuivis invento contra comparandum credo futuros qui contendant. Nam & hinc tangentium atque secantium lubricitati facile censura,

&

& manus medicæ admoveri possunt absque longa περιεργείᾳ. Ad extremum, quam facile è dabus trianguli rectanguli lateribus, neglectis tabulis, angulorum quantitas inveneatur, vix dici posset, nisi rem ipsam auctorem daremus. Sed cum plura sint hujus generis illò lectorem studiosum remittere satius existimo, ne singula verbosè inculcando te diutius morer. Quamobrem etsi initio huius editionem non nimis maturare instituissem, cum tamen cernerem plurimos, infelices suos conatus huic eriduto seculo, absque ullo usu commodo, etiamsi id quod conabantur effecißent, obtrudere: non putaui æquum esse me, si quid felicius paulò hic expressissem, id publico diutius debere. Quin potius epichirema nostrum, non minus utilitate sua, quam inventi novitate commendatum, in publicam lucem exire passus sum. Vale.

ERRATA.

Pagina 1. versu 5. radium, lege radio. p.4. v.32. complementum, d. p.5. v.11. quinquies, l. quater. p.7. v.21. ex l. &. p.9. v.3. vicissimus, l. vicesimus. p.13. v.19. ım, l. im. v.25. gradium, l. graduum. v.28. pla sinus, l. pla dimidij. p.14. v. sunt o, l. sunto. p.22. v.28. & excessus, l. excessu. p.23. v. recta linea, l. magnitudo. v.28. major, l. minor. p.25. v.6. major, l. minor. p.27. v.29. pars culi, l. sit circulus ipse & pars. p.28. v.1. re, d. p.29. v.15. hic, l. hoc. v.30. mutatis, l. unitatis. p.43. v.11. faciat, d. p.44. v.15. *ar*, l. *ay*. p.45. v.2. metu, l. motu. v.13. æquare, l. quare. p.46. v.20. eandem, l. eadem. p.78. v.28. proportionis, l. proportione. p.81. v.19. percetur, l. peccetur. Interpunctionum redundantium, aut defectum ipse per te facile aut supplebis aut tolles.

WIL-

VVILLEBRORDI SNELLII

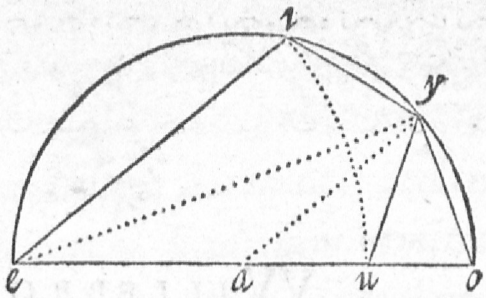
CYCLOMETRICVS

PROPOSITIO I.

Rectangulum sub inscriptæ à diametro differentia & radium comprehensum, æquatur quadrato inscriptæ dimidii complementi ad semicirculum.

E Ptolomei magni operis L. 1. cap. 6. ad inscriptarum compendiosam bisectionem oportunum. Ut si in expositum semicirculum *eiyo* inscripta sit *ei*, cui æqualis ponatur *eu*, & bisecetur reliqua peripheria *io* in *y*. Ajo rectangulum ex radio *ao* & reliquo segmento *ou* æquari quadrato ipsius *oy*, quæ dimidio complemento est inscripta. Iungatur enim inscripta *ey*, & radius *ay*. hic anguli *iey uey* per fabricam æquicruri

 & æqua-



& æqualibus peripheriis insistentes efficient bases *iy yu* inter se æquales. sed *iy yo* quoque æquantur: triangulum igitur *uyo* æquicrum; & quia cum triangulo *yao* æquicruro communem habeat angulum ad *o*, eidem quoque erit simile. atque ideo latera *ao oy ou* circa eundem angulum proportionalia. quadratumque igitur à media *oy* æquatur rectangulo sub radio *ao* & dicta differentia *ou* comprehenso.

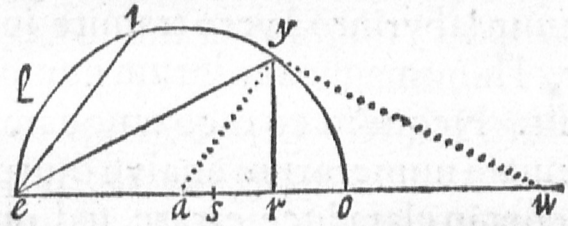
Atque ita facile dato latere trianguli æquilateri dabitur latus dodecanguli, quæ est dimidium complementi ejus à semicirculo. Vt posita diametro 2 latus trianguli æquilateri potens triplum circularis radii erit $\sqrt{3}$, id de diametro deductum relinquet $2 - \sqrt{3}$, qui numerus per radium, multiplicatus tantundẽ facit $2 - \sqrt{3}$ pro quadrato lateris dodecanguli, cujus radix $\sqrt{.2 - \sqrt{3}}$ ipsissimum dodecanguli latus ad hunc radium exhibebit. Idem in numeris absolutis, hoc modo, latus trianguli æquilateri est $1\frac{7320508}{10000000}$ id de diametro deductum relinquit $\frac{2679492}{10000000}$, numerus iste per radium, qui hic unitas multiplicatus nihil demutat: Radix ex eo numero eruenda erit latus optatum dodecanguli. quod ut ad totidem millesimas redeat, erunt tam nomini quam numero septem nullę postponendæ, quot initio sunt adhibitæ. & dabitur latus $\frac{5176380}{10000000}$. Hinc ad latus quatuor & vigintanguli, opus esset complemento dodecanguli. atque ita porrò in infinitum analogia consimili. Atqui cum polygoni latus aliquod postulabitur in quo sæpiculè esset bisecandum & complementa laterum inventorum indaganda, haud insolens foret in tanta operis varietate & complementorum reciprocatione aliquem

aliquem invitum in errorem abduci. Eam ob causam hoc theorema ad bisectarum peripheriarum complementa continuè inveniendum haud inutile fore existimavi.

PROPOSITIO II.

Rectangulum sub recta à diametro plus inscripta & radio comprehensum æquatur quadrato inscriptæ quæ & datam & dimidium ejus complementum ad semicirculum simul subtendit.

DAta esto peripheria *eli* cujus subtensa *ei*, eique æqualis diametro adjiciatur *ou*. & bisecetur *io* complementum ejus in *y*. Ajo rectangulum sub tota *eu* & radio *ea* comprehensum æquari quadrato inscriptæ *ey*, quæ datam peripheriam *eli* & *iy* dimidium complementi ejus simul subtendit. sit enim ipsi *ei* æqualis *es*. constat itaque ex theoremate an-



tecedente *sy oy* rectas inter se æquales: atque ideò *yr* perpendicularem bisecare lineam *os*. totasque ideò *er ru* inter se æquari. & propterea *ey yu* angulorum rectorum subtensas æquales esse. Triangula igitur æquicrura *uye eay* communem habentia augulum ad *e* erunt similia, & eam ob causam latera *ue ey ea* circa eundem angulum proportionalia. quadratum igitur mediæ *ey* æquatur rectangulo extremarum *ue* in *ea*. quod demonstrasse oportuit.

Atque hinc adeò nullo negotio invenies complementum quodlibet optatæ bisectionis. Ut si quæram complementum

mentum octo & quadragintanguli; facto itaque à triangulo initio, addito latus trianguli æquilateri $\sqrt{3}$ ad diametrum 2 totus erit $2+\sqrt{3}$, qui per radium 1 multiplicatus nihil demutat, ejus igitur latus $\sqrt{.2+\sqrt{3}}$ pro recta inscripta quæ subtendit $\frac{1}{3}$ peripheriæ & insuper reliqui ad semicirculum complementi dimidium, quæ est $\frac{1}{12}$. hoc est, quæ subtendit: $\frac{5}{12}$ totius circuli. id autem est complementum lateris dodecanguli. iterum eodem modo dabitur $\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{3}}}$. Complementum quatuor & vigintanguli. & $\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{3}}}}$ complementum octo & quadragintanguli. atque ita porrò in infinitũ. Quod si itaque nunc hinc postules latus sex & nonagintanguli, iste inventus numerus per antecedens theorema de diametro deductus dabit tibi $2 - \sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{3}}}}$ pro quadrato dicti lateris, cujus radix ipsum latus exprimet $\sqrt{.2-\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{3}}}}}$. Hic modus utilissimus est in istis notis, ut tanquam cynosura operis tui formulam dirigat, ne te in tanto extractionum labyrinto à vero tramite incautum abducat. Atque vel hinc magna surdorum numerorum utilitas liquere possit. Neque id eò dico tanquam eundem tramitem continuata numerorum analysi usurpare haud liceat. nam hoc esset in clara luce errare. sed quod ita facilius & planius trames tuus ante oculos expressus videatur. Verum exemplo hujus theorematis utilitatem quoque comprobare fuerit operæ pretium. Ut si postuletur complementum polygoni quatuor & quadraginta bisectionibus à latere quadrati continuati; id verò polygonum esset 70368744177664 laterum. cum itaque latus quadrati sit $\sqrt{2}$, per hoc ipsum theorema dabitur complementum inscripti octanguli $\sqrt{.2+\sqrt{2}}$, & sedecanguli complementum $\sqrt{.2+\sqrt{.2+\sqrt{2}}}$, inde duo & trigintanguli complementum

complemen-

complementum $\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd 2$ hinc quatuor & sexagintanguli complementum $\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd 2$ atque ita porro quater & quadraginta continuando in venies complementum polygoni dicti $\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+$ $\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+$ $\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+$ $\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+$ $\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+$ $\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+$ $\surd.2+\surd.2+\surd 2$ ubi 2 ab ultimo $\surd 2$ quinquies & quadragies antecedentibus semper universitatis signo nectitur. horum itaque hæc est vis & potestas ut primum è novissimo quadrato 2 latus ad quotlibet millesimas eruatur, ut puta ad 5, 10 aut quotlibet notas: hic si quinque tantum usurpemus latus esset 1 $\frac{41421}{100000}$. ut inde porrò progrediaris numerus iste inventus ad binarium antecedentem addatur, atque è summa ex utroque conflata, iterum latus ut ante erutum dabit 1 $\frac{84776}{100000}$. qui numerus exprimit valorem $\surd.2+\surd 2$ sive complementi lateris octanguli ad semicirculũ. Atq; id ita continue per antecedentes characteres iterando tandẽ numeri sub his notarum griphis & involucris reconditũ valorem explicabis. Ego syllabum subjicio in quo ad lateris æstimationem eruendam adhibitæ sunt quatuor & quinquaginta circuli: ubi ideò singulæ inscriptę exhibentur ad taxationem diametri 20000,00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 0000.

	20000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000
1	14142	13562	37309	50488	01688	72420	96980	78569	67187	53769	4807
2	18477	59065	02257	35122	56366	37879	35765	73644	83325	17272	8497
3	19615	70560	80646	08982	52364	47226	84780	73947	86746	17866	7219
4	19903	69453	34439	37724	89673	90621	89598	43150	94973	74597	1412
5	19975	90912	41034	47854	29543	20951	82013	88886	40722	94092	2373
6	19993	97637	39240	84402	31531	29933	23443	93700	12216	25154	5928
7	19998	49403	67828	90818	43292	98239	27664	48701	21293	76044	3566
8	19999	62350	56520	22853	13980	37545	71354	32347	83450	18886	7018
9	19999	90587	61915	38430	23160	25140	02397	99105	97526	72443	75308
10	19999	97646	20340	38198	58051	42034	30520	38096	53584	57795	30078
11	19999	99411	72576	43383	20456	43547	75313	54232	52779	86986	03203
12	19999	99852	93143	57022	89462	96141	47757	13896	40231	13778	45532
13	19999	99963	23285	85876	16693	83080	58194	29010	15210	24855	60705
14	19999	99990	80821	46257	81943	86627	92122	97917	78860	63789	05647
15	19999	99997	70205	36551	25346	61558	91082	16801	07483	23885	64246
16	19999	99999	42551	34136	98827	94443	72835	52178	17891	58365	70505
17	19999	99999	85617	83534	19550	19176	77009	80510	96066	62190	31603
18	19999	99999	96409	45883	54565	24829	55682	14759	27837	49925	51601
19	19999	99999	99102	36470	88621	76834	59946	48880	02923	29306	28122
20	19999	99999	99775	59117	72154	03310	35050	73007	69844	38210	45219
21	19999	99999	99943	89779	43038	42958	94391	68904	03601	90000	60424
22	19999	99999	99985	97444	85759	60247	94574	73516	42108	62934	67729
23	19999	99999	99996	49361	21439	90031	24954	73459	75063	78970	30419
24	19999	99999	99999	12340	30359	97505	89133	12432	47791	06699	11536
25	19999	99999	99999	78085	07589	99376	35276	68362	34074	20515	87894
26	19999	99999	99999	94521	26897	49844	08068	75856	47401	45163	47312
27	19999	99999	99999	98630	31724	37461	01970	28886	98655	54414	81278
28	19999	99999	99999	99657	57931	09365	25489	6409	92589	20986	39953
29	19999	99999	99999	99914	39482	77341	31372	22702	36763	52051	762
30	19999	99999	99999	99978	59870	69335	28430	45305	53556	79597	4925
31	19999	99999	99999	99994	64676	73338	32107	60610	73491	55574	1355
32	19999	99999	99999	99998	66241	91833	45802	69010	79556	67862	32066
33	19999	99999	99999	99999	66560	47958	36450	67252	41934	13151	39062
34	19999	99999	99999	99999	91640	11989	59112	66813	08736	34299	46077
35	19999	99999	99999	99999	97910	02997	39778	16703	27074	88638	09101
36	19999	99999	99999	99999	99477	50749	34944	54175	81761	89663	47436
37	19999	99999	99999	99999	69869	37687	33736	13543	95440	04759	86557
38	19999	99999	99999	99999	99967	34421	83434	03385	98859	98523	96620
39	19999	99999	99999	99999	99991	83605	45858	50846	49714	99464	36654
40	19999	99999	99999	99999	99997	95901	36464	62711	62428	74855	67757
41	19999	99999	99999	99999	99999	48975	34116	15677	90607	18713	26851
42	19999	99999	99999	99999	90999	87243	83529	03919	47651	79678	27644
43	19996	90999	99999	99999	99999	96810	95882	25979	86912	94919	56656
44	19999	99999	99999	99999	99999	99202	73970	56494	96728	23729	89148
45	19999	99999	99999	99999	99999	99800	68492	64123	74182	05932	47286
46	19999	99999	99999	99999	99999	99950	17123	16030	93545	51483	11821

Quod ſi ex hujus canonis numeris aliquod polygonum expetas, ubicunque tibi collibitum erit opus inſtitues. Ut ſi quæram latus polygoni cujus complementum ſit numerus in hoc ſyllabo nonus & viceſimus, quod eſt latus polygoni 1073741824. Ad eam rem numerus ſyllabi octavus & viceſimus tibi erit adhibendus, namque ſi hujus à diametro differentia 342420689063474510359080741079013600047 per radium multiplicetur, facti latus quadratum 585167231706863871585646093813791180 4 126020 erit dicti polygoni latus optatum: ubi tamen noviſſimæ ſex & ſequentes ſi continuentur notæ omnino à veris ſunt alienæ, cum in differentia ſupraſcripta duntaxat octo & triginta notæ accuratæ & ſignificantes dentur, quarum ultima lubrica eſt, & tantum veræ proxima. ut latus dicti polygoni detur 5851672317068638715856460938137911 8041 duntaxat & proximè minus vero, ad taxationem radii particularum 100000, 00000,00000 ,00000,00000, 00000,00000, 00000, 00000, 00000,

Libet etiam alterum ſyllabum à ſexagintanguli complemento tricies continuatum huc adſcribere latus ſexagintanguli in numeris ſurdis ex inexplicabilibus datur $\surd.2 - \surd\frac{15}{16} - \surd\frac{3}{16} - \surd.\frac{5}{8} - \surd\frac{5}{64}$. Vel etiam $\surd.2 - \surd.1\frac{3}{4} + \surd\frac{5}{16} + \surd.1\frac{7}{8} + \surd\frac{45}{64}$. Hos enim numeros inter ſe pariare quantumvis diverſi videantur, res ipſa & analyſis docet. hujus complementum itaque eſto $\surd.2 + \surd.1\frac{3}{4} + \surd\frac{5}{16} + \surd.1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$. quare biſectione complementorum novies & vicies continuata dabitur $\surd.2 + \surd.1\frac{3}{4} + \surd.\frac{5}{16} - \surd.1\frac{7}{8} - \surd\frac{45}{64}$ complementum polygoni 32212254720 laterum.

Syllabus

Syllabus complementorum ad ſemicirculum initio facto à complemento inſcripti ſexagintanguli quantarum diameter erit.

	20000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	0
1	19972	59069	50914	77475	68984	11687	88731	61181	8
2	19993	14649	95111	45600	73521	77673	53597	51899	7
3	19998	28655	14801	40694	49784	40949	09568	10715	81
4	19999	25716	33282	58404	65016	26281	79826	21895	83
5	19999	89290	80339	28781	70043	22845	28584	39443	7
6	19999	97322	69905	62344	56638	83981	94473	25217	6
7	19999	99330	67465	20595	08810	79505	66081	79690	2
8	19999	99832	66865	60149	32532	73652	05380	52267	1
9	19999	99958	16716	35662	36582	16062	91268	38427	9
10	19999	99989	54179	08642	15610	95820	62673	32062	6
11	19999	99997	38544	77143	44931	82594	55315	31005	9
12	19999	99999	34636	19284	79422	27435	10979	12234	3
13	19999	99999	83659	04821	13179	90095	37737	33586	4
14	19999	99999	95914	76205	27877	74601	13098	64463	7
15	19999	99999	98978	69051	31943	35967	61314	84895	0
16	19999	99999	99744	67262	82984	21011	73643	70316	7
17	19999	99999	99936	16815	70745	95066	67368	11239	9
18	19999	99999	99984	04203	92686	48130	02714	35225	7
19	19999	99999	99996	01050	98171	91992	71670	60832	4
20	19999	99999	99999	00262	74542	90495	69229	65334	7
21	19999	99999	99999	75065	68635	72623	76764	41341	5
22	19999	99999	99999	93766	42158	93155	93219	66585	8
23	19999	99999	99999	98441	60539	73288	98244	20162	1
24	19999	99999	99999	99610	40134	93322	24357	25572	7
25	19999	99999	99999	99902	60033	73330	56139	07676	4
26	19999	99999	99999	99975	65008	43332	64034	75436	80
27	19999	99999	99999	99993	91252	10833	16008	68766	55
28	19999	99999	99999	99998	47813	02708	29002	17185	847
29	19999	99999	99999	99999	61953	25677	07250	54296	0998
30	19999	99999	99999	99999	90488	31419	26812	63574	00233

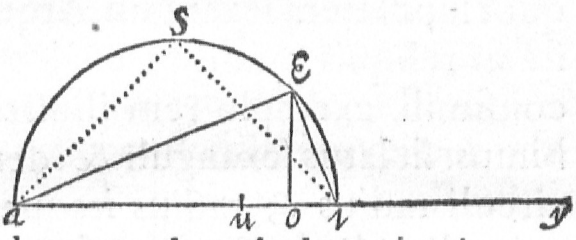
Et hæc

Et hæc omnia ad taxationem diametri 2 postpositis circulis quadraginta. Est itaque numerus penultimus sive nonus & vicissimus in hoc syllabo complementum polygoni 1610612736 laterum. qui de diametro subductus relinquet 38046743229274945 7039, numerum vero minorem; idem per radium multiplicatus æquabitur quadrato dimidii sui complementi, cumque hic tantum sint unum & viginti notæ latus ejus saltem ultra vigesimam notam non poterit tutò produci. quamobrem latus polygoni 3221225472 laterum dabitur 19505574390228795747 proximè minus verò ad taxationem diametri 200000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000 particularum. Quem usum isti numerorum syllabi nobis præstent infra clarius liquibit, ne temere tantam numerorum molem huc aggregasse videar.

itaque

Inscripta minor ad suum in semicirculo complementum eam habet rationem, quam inscripta peripheriæ duplæ ad suum complementum diametro auctum.

Esto semicirculus *asei* & inscripta *ei*, hujus complementum *ea*, inscripta peripherię initio datæ *is*, ejusdemq; complementum *as*.



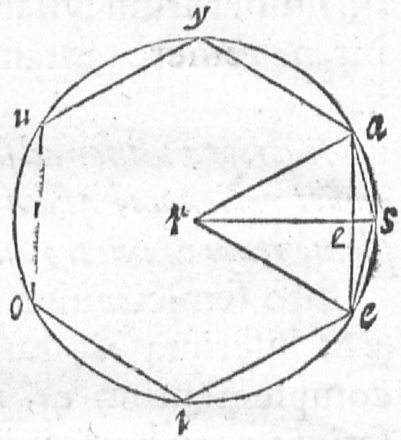
Ajo *ie* ad *ea* eandem habere rationem, quam *is* ad *sa* & *ai* simul: sint enim *au* & *iy* sigillatim ipsi *as* æquales. hinc demittatur perpendicularis *eo*, ea bisecabit segmentum *ui* per ea quæ prima propositione sunt demonstrata. Et *eo* dimidia erit inscriptæ *is*, quia *ie* dimidia est peripheriæ *ies*. Erit itaque *ie* ad *ea* inscriptam, ut *eo* ad *oa*, hoc est ut istarum duplæ *is* ad *ay*. quæ ex diametro *ia* & inscripta *as* conflata fuerat, quod erat demonstrandum.

PROPO-

PROPOSITIO III.

Rectangulum è figuræ ordinatæ circulo inscriptæ latere uno & totidem radiorum semissibus, quot ipsum habet latera, æquatur areæ polygoni ordinati sub duplo laterum numero in eodem circulo.

SIt in exposito diagrammate *ae* latus sexanguli circulo inscripti, *as se* duo latera dodecanguli, & ducatur *sr* radius is latus sexanguli bisecabit in *l*. hic rectangulum sub dimidio radio *sr*, & dimidio latere sexanguli *el* comprehensum æquatur uni dodecanguli triangulo *ers*, & duo triangula *ars ers* rectangulo sub toto latere *ae* & dimidio radio *sr*. pro toto igitur dodecangulo idem rectangulum sexies erit iterandum, quot sunt latera sexanguli. Atque ita in reliquis omnibus analogia consimili. exemplo rem illustrabimus. sit latus sexanguli & idem circuli radius 6, radius itaque sexies sumptus efficiet 36, cujus dimidium 18; quare factus à latere sexanguli 6, & 18 erit 108 area dodecanguli eidem circulo inscripti. etenim dodecanguli inscripti latus per propositionem primam invenietur $\sqrt{54} - \sqrt{18}$, quare perpendicularis à centro in latus ejusdem dabitur $\sqrt{13\frac{1}{2}} + \sqrt{4\frac{1}{2}}$, à quibus factus erit duplum unius trianguli dodecanguli 18, dimidium 9 *is* duodecies additus, quot sunt triangula, dabit ut ante 108 aream totius dodecanguli.



PROPOSITIO IV.

Dodecangulum æquatur quadrato à latere trianguli æquilateri in eundem circulum inſcripti.

CUm enim latus trianguli æquilateri poſſit triplum circularis radii, tria autem radii quadrata æquentur rectangulo ſub latere ſexanguli & ſex radiorum ſemiſſibus, ſeu tribus radiis, & hoc porrò rectangulum per antecedentem propoſitionem areæ dodecanguli æquale ſit: efficitur aream dodecanguli æquari quadrato ſuper latere trianguli æquilateri deſcripto.

PROPOSITIO V.

Sexangulum eſt duplum trianguli æquilateri in eodem circulo.

SExangulum enim per theorema tertium ęquatur rectangulo ſub latere trianguli æquilateri & ſeſquialtero radio: atqui tanta quoque eſt perpendicularis à vertice trianguli æquilateri. hoc igitur rectangulum trianguli eſt duplum. atque ideo quoque ipſum, ſexangulum.

PROPOSITIO VI.

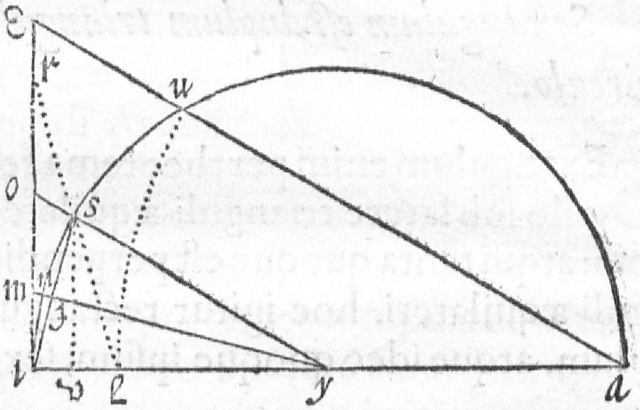
Dodecangulum eſt ſeſquialterum quadrati eidem circulo inſcripti, & ſubſeſquitertium circumſcripti.

POſita enim diametro circuli partium duarum, erit latus trianguli inſcripti $\surd 3$, latus inſcripti quadrati $\surd 2$, circumſcripti 2. quantarum igitur area dodecanguli erit partium 3, tantarum area inſcripti quadrati 2, & circumſcripti 4.

PROPOSITIO VII.

Triens lateris trianguli æquilateri circulo inſcripti, æquatur ſemiſſi lateris circumſcripti ſexanguli.

SIt *au* in expoſito ſemicirculo inſcripta latus trianguli æquilateri, idque continuatum occurrat tangenti *ie* in *e*: ſitque *ins* pars totius peripheriæ duodecima, & ideo tangens ejus *io* dimidium circumſcripti ſexanguli latus, atq; eadem *io* erit dimidia totius *ie*, quia in triangulis rectangulis ſimilibus *iyo iae*, radius *iy* dimidius ſit diametri *ia*, & *io* igitur dimidia *ie*.



Ajo eandem *oi* æquari trienti lateris *au*. Cum enim ab *e* puncto *ei ea* eductæ illa circulum tangat hæc ſecet, rectæ *ea ei eu* continuè proportionales erunt. eſt autem *ei* dimidia dimidia ipſius *ae*. quia *eai* dimidium eſt trianguli æquilateri: quare *eu* quoque erit dimidia ipſius *ei*, & ipſi *io* æqualis; & pars quarta totius *ae*, tertia autem pars lateris *au*. quod erat demonſtrandum.

PROPO-

PROPOSITIO VIII.

Differentia diametri à latere inſcripti trianguli æquilateri æquatur lateris dodecanguli circumſcripti dimidio.

STatuatur enim in eodem diagrammate *al* æqualis lateri inſcripti trianguli æquilateri *au*. & biſecetur *is* peripheria in *n*, & continuetur *yn* radius ad tangentem in *m*. ut *im* ſit dimidium circumſcripti dodecanguli latus, & *ij* inſcripti. Inde ab *l* per *s* recta educta occurrat tangenti in *r*. conſtat itaque è demonſtratione. propoſitionis primæ *sl si* inter ſe æquari. atque ideo *sv* perpendicularem dimidio lateris ſexanguli æqualem biſecare rectam *il*: & propterea, ut *lv* dimidia eſt totius *il*, ita *sv* dimidiam eſſe ipſius *ir*. cunq; angulus *rli* angulo *jiy*, hoc eſt ipſi *imy* ſit æqualis & angulus *i* ad contactum rectus & *ri* radio *iy*, triangula *yim ril* erunt æquiangula & æquilatera. atque *il* differentia lateris inſcripti trianguli à diametro æqualis tangenti *im* circumſcripti dodecanguli lateris dimidio. Sit nobis *ai* diameter 2, latus inſcripti trianguli æquilateri *au* erit $\sqrt{3}$: atque inde dabitur *il* ſive im $2-\sqrt{3}$. è canonibus adſcriptarum datur *im* tangens 15 gr. 267949072431 poſito radio 1000000000000 particularum. atqui ſi latus trianguli æquilateri 1732050927569 de diametro 2000000000000 deducas tantundem relinquetur pro ſegmento *il*.

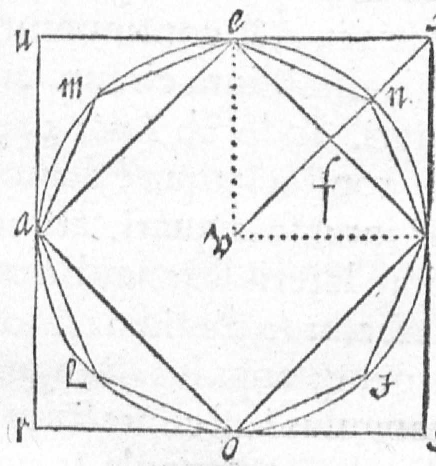
itaque.

Secans 15 gradium æquatur quadruplo ſinus ejuſdem

Namque *rl*, æqualis ſecanti *my*, demonſtrata eſt æquari duobus inſcripti dodecanguli lateribus. & ideo quadrupla ſinus ejuſdem. ſinus 15 gradium ad eandem diametrum datur $258819045102\frac{1}{2}$, cujus quadruplum 103527618041o æquatur ſecanti ejuſdem peripheriæ.

PROPOSITIO IX.

Inter figuras ordinatas ſimiles eidem circulo adſcriptas, inſcripta duplo laterum numero media proportionalis eſt.



Ita ſexangulum inſcriptum inter inſcriptum & circumſcriptum triangulum proportionale eſt. dodecangulum inter ſexangula, decangulum inter quinquangula. Sit circulus *aeio* & quadratum eidem inſcriptum, circumſcriptum autem *uysr*, octangulum inſcriptum, id enim duplo plura habet latera quam quadratum ſit *a menio*. ajo hoc inter quadratum inſcriptum & circumſcriptum eſſe proportionale. recta enim à centro *v* ad *y* angulum quadrati circumſcripti biſecabit latus quadrati inſcripti & peripheriam ſubtenſam, atque per angulum octanguli *n* tranſibit. & ſunt *o* radii *ev vi* ad contactum *e i*. erit itaque *yve* triangulum rectangulum, & *ef* in baſin *vy* perpendicularis: quare *yv ve*, id eſt *vn*, & *vf* continuè proportionales. & ideo triangula *evf evn evy* ſuper iſtis baſibus æque alta itidem continuè proportionalia. & eorum igitur octupla, id eſt quadratum inſcriptum, octangulum, & quadratum circumſcriptum continuè erunt proportionalia.

Poſita itaque diametro partium 2, area inſcripti quadrati erit 2, octanguli $\surd$ 8, quadrati circumſcripti 4.

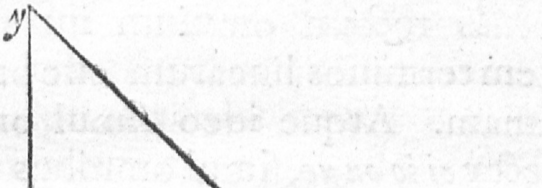
Dodecangulum ad octangulum eidem circulo inſcriptum ſe habet ut 3 ad $\surd$ 8. hoc eſt ut tres radii ad duo latera inſcripti ra inſcripti quadrati. ſunt enim iſta ex antecedentibus manifeſta.

Atque hinc etiam eorum error eſt manifeſtus, qui aream circuli inter quadratum inſcriptum & circumſcriptum medio loco proportionalem conſtituunt.

PROPOSITIO X.

Differentia radii circularis à latere inſcripti quadrati æquatur lateris octanguli circumſcripti dimidio.

SIt ſemicirculus *ajue* ſuper *ae* diametro deſcriptus, quem *ui* recta radio æqualis contingat, atque ad contactum adjungatur radius *ou*. itaque *ou* quæ duplum poteſt radii erit æqualis lateri inſcripti quadrati, & eadem quoque ſemidiagonius quadrati circumſcripti, cui æqualis ſit *im*. Ajo *um* differentiam æquari dimidio lateris octanguli circumſcripti. Enimverò cũ angulus *oim* ſit recti dimidius, angulus *moi* erit dimidius ſeſquirecti, ſive $\frac{3}{4}$ unius recti, & *uoi* recti itidem dimidius: quare *mou* $\frac{1}{4}$ recti æquabit. atque ideo erit tangens *mu* dimidium latus octanguli. quod demonſtraſſe oportuit. Poſito itaque radio partis unius, erit *oi* $\sqrt{2}$, & *ei* vel *um* $\sqrt{2}-1$, & *ai* $\sqrt{2}+1$. Unde ratio *ai* ad *ei* datur quæ $\sqrt{2}+1$ ad $\sqrt{2}-1$, vel etiam quæ quadrati *ai* ad quadratum



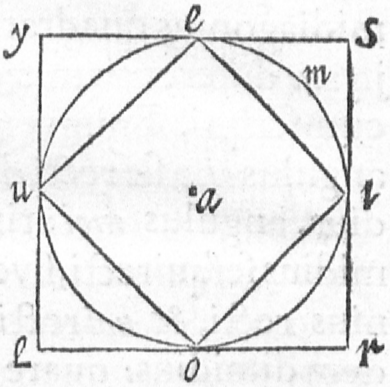
ui, hoc

ui, hoc eſt quæ $3 + \sqrt{8}$ ad 1. hujus theorematis uſus infra nobis erit. Hactenus adſcriptarum figurarum comparatio inter ſe dicta fuit: ſequitur earundem comparatio cum circulo.

PROPOSITIO XI.

Ambitus rectilinei circulo inſcripti ejus peripheriæ cedit: circumſcripti verò eandem excedit.

In circulum expoſitum *emiou* inſcribatur rectilineum *eiou* & circumſcribatur *ysrl.* illius ambitus peripheriæ cedet, hujus vero eandem excedet. Cum enim propter rectæ lineæ definitionem ea ſola inter ſuos limites æqualiter interjaceat, ambitioſa autem contra. merito ex hac luce ab Archimede in libro de ſphæra & cylindro poſtulatur τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν rectam omnium intra eoſdem terminos linearum eſſe breviſſimam. Atque ideo ſimul omnes rectæ *ei io ou ue*, ſimul omnibus peripheriis quas ſubtendunt minores erunt. Porrò ambitum polygoni circumſcripti peripheriâ majorem id Archimedes ibidem ex eadem luce generali aſſumpſit potius quam demonſtravit. & nos eadem claritate contenti minorem eſſe aſſumemus. quia videlicet *emi* peripheria interiore & ordinato ambitu meat, & rectæ *ei* propior ſit quam *es* & *si.* unde efficitur totam peripheriam minorem eſſe toto circumſcripti rectilinei ambitu. Atque ideò aliquot polygonorum inſcriptorum



rum & circumſcriptorum ambitus quantitatem numeris expreſſam ſubjiciam, ut inde liquidò pateat intra quos terminos ratio diametri ad perimetrum ſecundum Archimedem paulatim cogatur.

Poſita itaque diametro partis unius, tum

Perimeter octogintanguli inſcripti erit major quam $3\frac{1404}{10000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{1418}{10000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 160 laterum erit major quam $3\frac{14136}{100000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{14202}{100000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 320 laterum erit major quam $3\frac{1414}{10000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{1418}{10000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 640 laterum erit major quam $3\frac{14157}{100000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{14162}{100000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 1280 laterum erit major quam $3\frac{14158}{100000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{141606}{1000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 2560 laterum erit major quam $3\frac{1415918}{10000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{141595}{1000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 5120 laterum erit major quam $3\frac{1415924}{10000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{1415952}{10000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 10240 laterum erit major quam $3\frac{1415926}{10000000}$, circumſcripti autẽ minor quam $3\frac{14159281}{100000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 40960 laterum erit major quam $3\frac{14159265}{100000000}$, circumſcripti autem minor quã $3\frac{14159266}{100000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 81920 laterum erit major quam $3\frac{141592528}{1000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{1415}{10000}$-
$\frac{92656}{00000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 163840 laterum erit major quam $3\frac{14159265331}{100000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{14}{100}$-
$\frac{159265398}{000000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 327680 laterum erit major quam $3\frac{14159265354}{100000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{14}{100}$-
$\frac{159265369}{000000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 655360 laterum erit major quam $3\frac{141592653577}{1000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{14159265362}{100000000000}$.

Perimeter polygoni inſcripti 1310720 laterum erit major quam $3\frac{141592653586}{1000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{141592653596}{1000000000000}$.

Perimeter inſcripti polygoni 2621440 laterum erit major quam $3\frac{1415926535889}{10000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{1415926535898}{10000000000000}$.

Perimeter inſcripti polygoni 5242880 laterum erit major quam $3\frac{141692653589}{1000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{14159265391}{100000000000}$.

Perimeter inſcripti polygoni 10485760 laterum erit major quam $3\frac{1415926535896}{10000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{141592653589798}{1000000000000000}$.

Perimeter inſcripti polygoni 1073741824 laterum erit major quam $3\frac{141592653589793225}{1000000000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{141592653589793245}{1000000000000000000}$.

Perimeter inſcripti polygoni 6442450944 laterum erit major quam $3\frac{1415926535897932383}{10000000000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{1415926535897922388}{10000000000000000000}$.

Perimeter inſcripti polygoni 32212254720 laterum erit major quam $3\frac{141592653589793238453}{1000000000000000000000}$, circumſcripti autem minor quam $3\frac{141592653589793238469}{1000000000000000000000}$.

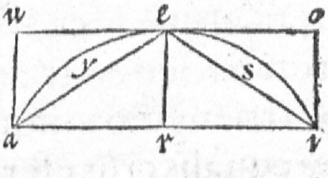
Atque ita experiunti porrò circuli perimetrum intra iſtiuſmodi terminos concludere eâdem viâ licebit per primum & ſecundum hujus libri theorema, quæ perpetuis adſcriptorum laterum biſectionibus eadem in minimas quaſque particulas concidunt. ſemper enim circuli peripheria minor erit ſumma omnium laterum circumſcriptorum, major autem inſcriptorum laterum omnium congerie. Atque hæc materia non olim ſolum Apollonium Pergæum,

gæum, Philonem Gaditanum, & Claudium Ptolomæum quoque: sed hoc seculo etiam Franciscum Vietam, Adrianum Romanum, & Ludolphum nostrum exercuit, qui omnes Archemedęam & Regiam viam ingressi intra inscripti & circumscripti polygoni ambitum circularis peripheriæ modulum solide concluserunt. reliquorum enim ψευδογραφίας nunc missas facio, qui aut à veritatis tramite longe exorbitaverunt, aut intra minorem & majorem terminum peripheriæ modulum concludere non potuerunt; id enim solum in hoc genere erat palmarium.

PROPOSITIO XII.

Sectio semicirculo non major cedit trianguli æquicruri sibi inscripti duplo.

ETsi hujus theorematis veritas etiam ad quasdam sectiones semicirculo majores pertineat, cum tamen haud liqueat ubi ultimus ille limes sit constituendus; & nobis ad id quo intendimus ista sufficiant, abunde satis erit de sectionibus semicirculo non majoribus ejus veritatem comprobavisse. Exponatur itaque *ayi* sectio semicirculo non major, & in eo triangulum æquicrucrum *aei*; est igitur *ayi* peripheria bisecta in *e*. & eam ob causam *re* perpendicularis quoq; secabit inscriptam *ai*, & recta *uo* in *e* puncto peripheriam contingens erit eidem inscriptæ parallela; hinc *ue eo* ipsis *ar ri* æquales constituantur & compleantur rectangula parallelogramma, *auer ioer*: cum igitur & semicirculi & minorum sectionum anguli recto cedant, anguli autem *uar oir* recti sint, rectæ

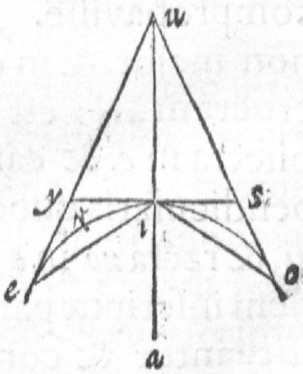


ua io extra circulum cadent, & totum parallelogrammum *auoi* totam ſectionem *ayes* comprehendet, eâdemque major erit: ſed *auoi* parallelogrammum duplum eſt trianguli *aei* in eadem baſi æquealti, quamobrem ſectio *ayesi* minor erit ejuſdem trianguli duplo.

PROPOSITIO XIII.

Spatium à duabus ex eodem puncto tangentibus & peripheria comprehenſum minus eſt duplo trianguli æquicruri ab earundem ſegmentis & tertia eandem peripheriam tangente comprehenſi.

REctæ *ue uo* ex eodem puncto eductæ tangant peripheriam *eio* in *e* & *o*: tum recta *ys* eandem peripheriam contingens in *i*, abſumat *yus* trangulum æquicrurum. ajo hoc majus eſſe dimidio ſpatii *eiou* à tangentibus & peripheria comprehenſi. Cum enim *uy us* æquentur, & reliquę ideo *ye so* æquales erunt, & iiſdem rectæ *si yi* quoque æquabuntur. cum *si so*, *yi ye* ex iiſdem punctis circulum contingant. cumque anguli ſub baſin æquentur, triangula quoque *eyi osi* erunt æquilatera, atque ideo totum triangulum *eiu* toti *oiu*. ſed *eyi* triangulum æquealtum *yiu* triangulo minus eſt baſi; quia *yi* ipſi *ye* ęqualis crus eſt rectanguli *uiy*, & propterea minus baſe ejuſdem *yu*. Quare *eyi* triangulū minus eſt quam *yiu* : & ideo idē *uiy* triangulum majus eſt dimidio trianguli *eiu*, & idem multo erit majus quam dimidium



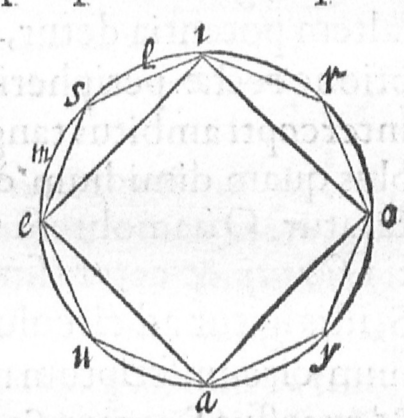
ſpatii

ſpatii *eriu*. Atque ideò totum triangulum *ysu* dimidio totius ſpatii *eri ou* majus erit. quod erat demonſtrandum.

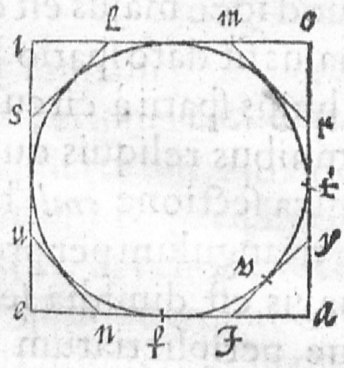
PROPOSITIO XIV.

Rectilineum circulo inſcribi poteſt majus dato quocunque ſpatio, quod eodem circulo ſit minus: & aliud circumſcribi minus dato quocunque ſpatio, quod eodem circulo ſit majus.

SIt enim ſpatium quodcunque datum R minus expoſito circulo; *aueioy*, in quem inſcribatur quadratum *aeio*, quod ideo majus eſt circumſcripti circuli dimidio. hoc ſi majus ſit dato ſpatio R rem factam habes. ſin minus, ſit dati hujus ſpatii à circulo defectus S, atque id ideo minus eſt omnibus reliquis quadrati ſectionibus. & quarta ejus pars unica ſectione *emli* hinc biſecetur peripheria in *s*, quare *esi* triangulum per propoſitionem 12 majus eſt dimidia ſectione *eilm*. eaque peripheriarum biſectio & inſcriptio tantiſper continuetur donec reliquæ ſectiones inter latera polygoni & circuli peripherias comprehenſæ minores ſint dicto defectu S. id enim fieri poſſe conſtat cum magnitudinum ſectio infinita ſaltem potentia detur, & hac inſcriptione ſemper majus quam dimidium è reliquis ſectionibus auferatur. Quamobrem ſit jam eò deventum ut reliquæ ſectiones *ems sli* & ceteræ ſimul minores ſint dicto defectu *S*: inde iſtis à



circulo deductis sequitur relinqui majus polygonum inscriptum, quam sit datum spatium R, quod ex hypothesi circulo minus statuebatur. Atque ita pars prima constat: secunda quoque haud operosius adstruetur. Sit enim in secundo diagrammate quadratum circulo exposito circumscriptum, id si minus sit dato spatio rem factam habes. sin majus sit, tum dati R spatii excessus supra circulum assumatur spatium S, erunt itaque quatuor illa spatia à convexis peripheriis & tangentibus comprehensa (cujusmodi unum est *fvta*) majora dato excessu S. quamobrem recta tangens peripheriam interceptam in medio absumat triangulum æquicrurum *jya*, atque id in reliquis ita factum intelligatur, id igitur ipsum per proposit 13 majus erit dimidio spatii comprehensi *fvta*; eaque linearum adscriptio tantisper continuetur donec reliqua spatia omnia à peripheriis & tangentibus comprehensa dicto excessu minora sint. id autem fieri posse constat: cum magnitudinum sectio infinita saltem potentia detur, & hâc adscriptione rectæ peripheriam in medio intercepti ambitus tangentis semper

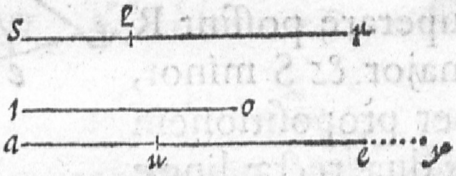


plus quam dimidium è reliquo extra circulum spatio auferatur. Quamobrem sit jam eò deventum ut reliqua spatia *fjvvty* & cetera simul omnia minora sint dicto excessu S, istis igitur ad circulum additis sequitur totum polygonum circumscriptum minus esse area, ex eodem circulo & excessus S composita, hoc est quam sit spatium initio expositum R. Quod erat demonstrandum. Hoc ad circulorum quoque sectores extendi, neque alia demonstratione dissimili indigere Archimedes monuit. Pars hujus propositionis prima est è secunda propositione libri duodecimi *eucl.*

mi *eucl.* ſecunda autem ad eandem analogiam à nobis expreſſa. Archimedes quoque etſi in ſua κύκλȣ μετρήσει hoc ipſum tantum poſtulaviſſe videatur, id tamen in libris de ſphæra & cylindro ſollicitè inculcat: quæ theoremata cum non parum momenti ad hunc locum illuſtrandum habere mihi videantur, huïc operi, tanquam emblemata à nobiliſſimo autore profecta inſerenda exiſtimavi. ea igitur quam potero breviſſimè hic explicabo, & initium faciam à ſecundo.

PROPOSITIO XV.

Duæ rectæ lineæ inveniri poſſunt, quarum major ad minorem rationem habeat minorem, quam data magnitudo quælibet major ad minorem.

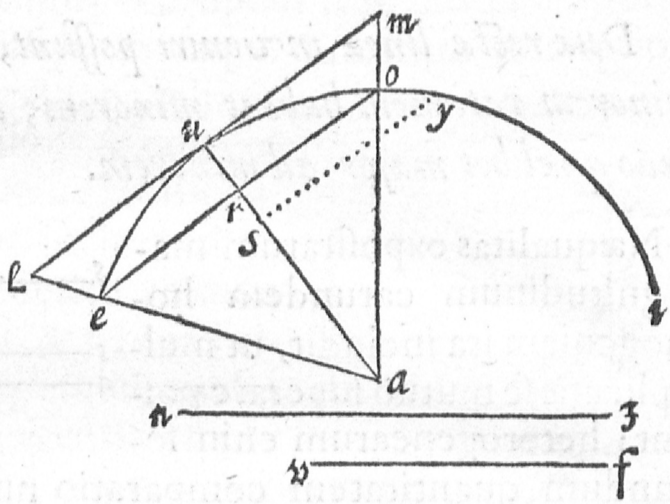


INæqualitas expoſitarum magnitudinum earundem homogeniam ita includit, ut multiplicatæ ſe mutuo ſuperare poſſint: heterogenearum enim ſecundum quantitatem comparatio nnlla inſtitui poteſt. Eſto itaque *ae* magnitudo major & *io* datarum minor: ajo duas rectas inveniri poſſe, quæ faciant quod imperatur. Auferatur eim *ue* de majore *ae* æqualis minori datarum *oi*, & ſi earum differentia ſit minor quam data *io*, tum ea toties ſibi ipſi addatur donec *ay* compoſita major ſit data *ae*. Et inde aſſumatur recta linea *sr* tam multipla quoque ſuæ partis *sl*: erit itaque ut *rs* ad *sl*, ita *ya* ad *au*, & diviſim *sr rl*, *ay yu* quoque proportionales erunt. Et cum *ay* major ſit quam *io*, ratio *ay* ad *yu*, hoc eſt *sr* ad *rl*, major erit quam *ae* ad eandem

dem *io*. Quamobrem sunt jam inventæ duæ rectæ lineæ secundum leges propositas.

PROPOSITIO XVI.

Datæ peripheriæ duo similium multangulorum latera ita adscribi possunt, ut latus circumscriptum ad inscriptum minorem habeat rationem, quam major datarum magnitudinum ad minorem.



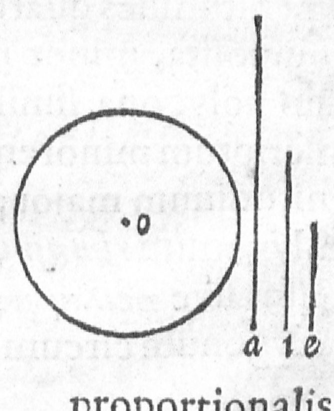
EXpositæ sunto quęlibet duę inæquales magnitudines ita ut multiplicatæ se mutuò superare possint R major & S minor, per propositionem 15 duæ rectæ lineæ constituantur *nj* major *vf* minor, ut ratio illius ad istam minor sit quam R ad S. sitque data peripheria *eoi* cui duo latera adscribere oporteat, quemadmodum imperatur. fiat itaque ut *nf* ad *vf*, ita radius circuli *ua* ad *as*. Et ab *s* perpendicularis excitata absumat peripheriam *uy*. & bisecetur tota data peripheria *ei* primum in *o* & inde rursum *eo* in *u*, idque tantisper continuando donec ultimum bisegmentum minus sit quam *uy*. id enim fieri posse constat: quamobrem sit jam eo deventum, atque id segmentum esto *uo*, cui sit æqualis *eu*, & connectatur *eo*, huic

huic *lm* peripheriam in *u* contingens erit parallela, & agantur rectæ *aom ael*, erit itaque *lm* latus multanguli datæ peripheriæ circumſcripti, & *eo* latus ſimilis multanguli inſcripti: cumque *eo* longius à centro deſtet quam *sy*, perpendicularis *ar* major erit quam *as*, atque ideo ratio *ua* ad *ar*, hoc eſt *lm* ad *eo* major erit, quam *ua* ad *as*, hoc eſt quam *nj* ad *vf*; atque ideò latus circumſcriptum *lm* ad inſcriptum *eo* multo minorem habebit rationem quam data magnitudo R ad S. Quod facere oportuit. Neque alia demonſtrandi formula erit ſi integra circuli peripheria proponatur. Atque ita circuli peripheria intra illos limites quantumvis auguſtos facile cogi poteſt, cum inſcriptæ & circumſcriptæ lineæ longius inter ſe diſtent, quam utraque à circuli intermedia peripheria. quod etiam numeris ad eandem analogiam omninò explicare perfacile eſt.

PROPOSITIO XVII.

Circulo duæ ſimiles figuræ ita adſcribi poſſunt ut circumſcripta ad inſcriptam majorem habeat rationem, quam data quælibet magnitudo major ad minorem.

EXponatur circulus *o*, & magnitudines duæ R major S minor. & ſunto duo polygona alterum circumſcribendum alterum inſcribendum, ut illius ad hoc ratio minor adhuc ſit quam R ad S. conſtituantur duæ rectæ *a* major *e* minor, quarũ ratio minor adhuc ſit quam R ad S, interque has inveniatur media



 proportionalis

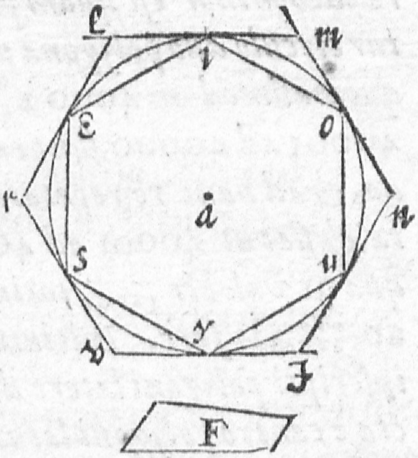
proportionalis *i*, quæ ideo minor erit quam *a*. Hinc per propositionem 16 dato circulo duo similia polygona adscribantur ut circumscripti latus ad latus inscripti similis minorem habeat rationem quam *a* ad *i*. quare figuræ ipsæ erunt in duplicata ratione homologorum laterum: sed & ratio *a* primæ ad *i* tertiam est duplicata ipsius *a* ad *e*, erit igitur ratio polygoni circumscripti ad inscriptum minor quam *a* ad *e*; & ideo quoque multo minor quam R ad S. Quemadmodum imperatum fuerat. Res omnino eadem esset si pro integro circulo sectorem duntaxat assumas.

PROPOSITIO XVIII.

Circulo dato polygonum circumscribere ut spatia ab ejus lateribus & peripheriæ convexo comprehensa minora sint dato quocunque spatio.

QVod de circulo dicimus idem quoque in sectore quovis dato locum habere intelligatur. Datus esto circulus *a*, & datum sit spatium *F*. Ajo circulo posse polygonum circumscribi ut excessus quo datus circulus à polygono superatur minor sit dato spatio F. Intelligantur enim duæ magnitudines quarum major sit ex dato spatio & circulo composita, minor ipse circulus; & adscribantur circulo duo polygona, similia *rlmn* & *eiou*, ut circumscriptum ad inscriptum minorem habeat rationem quam dictarum magnitudinum major ad minorem. ajo illud circumscriptum polygonum *rlmnjr* esse quæsitum cujus supra circulum excessus sive περιλείμματα minora sint dato spatio. Cum enim polygonum circumscriptum ad inscriptum minorẽ habeat

rationem



rationem, quam datũ ſpatium & circulus ſimul ad ipſum circulum, circulus autem inſcripto polygono major ſit, efficitur circumſcriptum polygonum ad circulum multò minorem adhuc rationem habere, quam datum ſpatium cum circulo ad ipſum circulum. eamque ob cauſam polygonum circumſcriptum minus eſſe dato ſpaſpatio & circulo ſimul; atque ideo ſublato utrimque circulo reliqua περιλείμματα ſive exceſſum polygoni ſupra circulum dato ſpatio F minus eſſe. Quod feciſſe oportuit.

Potuit conſectarium fieri propoſitionis 14. ſed quia hoc argumento quoque Archimedes nobis muniit viam ad circuli aream tam vero proximam conſtituendam quam cuique erit libitum, etiam ratione diametri ad peripheriam ignorata, huc quoque id referre oportunum judicavi: Et ſimul ad logiſtarum abacos provocabo. Eſto enim area circuli tam veræ proxima invenienda ut ne quidem una decies milleſima ſui parte peccetur. Conſtat autem figuram inſcriptam minorem eſſe circulo, atque ideo ejus $\frac{1}{10000}$ *minorem* $\frac{1}{10000}$ *circuli. Eſto itaque circuli diameter in numeris taxata* 2. *area dodecanguli æquatur tribus radii quadratis, quemadmodum propoſitione, à nobis demonſtratum eſt. ea igitur erit* 3. *hujus pars præſcripta ſunt* $\frac{3}{10000}$, *ea ad quamcunque figuram circumſcriptam addita, ut puta quadratum* 4 *conflabit* $4\frac{3}{10000}$. *cum itaque* $\frac{3}{10000}$ *ſunt minores parte præſcripta, &* 4 *majora area circuli; utique ratio* $4\frac{3}{10000}$ *ad* 4, *minor erit quam pars milleſima circuli ad ipſum circulum. Aſſumantur termini dehinc quivis alii, ut ratio majoris ad minorem minor adhuc, ſic quã* $4\frac{3}{10000}$ *ad* 4, *id eſt quam* 40003 40000. *ut puta* 40002 $\frac{1}{40001}$ *&* 40000 *inter has media proportionalis inveniatur* 40001. *Quare ideo* *re ideo minor est quam prima* 4000 $2\frac{1}{40000}$. *Quare adscribantur circulo duo polygona ut ratio circumscripti ad inscriptum sit quemadmodum* 4000 $2\frac{1}{40000}$ *ad* 40001, *hoc est quemadmodum* 40001 *ad* 40000, *sunt enim rationes eædem. Id autē fiet hoc modo, & ad hanc rē repetatur diagramma propositionis dicimæsextæ, & fiat ut* 40001 *ad* 40000, *ita* au 1, *ad* ar $\frac{40000}{40001}$: *quare reliqua* ur *valebit* $\frac{1}{40001}$ *totius* au. *id est si ad millesimas revoces pro* ar $\frac{9999750}{10000000}$ *ferè. Initium itaque bisectionis fiat à cujuscunque inscripti polygoni latere dato, & tantisper continuetur, donec recta è centro polygoni latus bisecans* ar *major sit quam* as. *in hoc exemplo à sexangulo initium fiat, per dodecangulum, inde* 24, *tum* 48, 96, 192, 384, *quæ nondum sufficiunt, primum igitur occurrit perpendicularis in latus polygoni* 768 *laterum, cujus duplum in numeris inexplicabilibus valet* $\surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd.2 + \surd 3$. *qui ad explicabiles reductus per millesimas* 10000000000, *dabit ipsam perpendicularem* ar *ferè* $\frac{9999916334}{10000000000}$ *at si pro novissima nota* 5 *reponas justum excedet: latus autem polygoni hinc quoq; dabitur* $\frac{81812080}{10000000000}$ *ferè, quare planum est collatis numeris* as $\frac{9999750}{10000000}$, *&* ar $\frac{9999916334}{10000000000}$ *hunc illo majorem esse. fiat itaque ut* ar *ad* co, *ita* au *radius ad* lm *circumscripti polygoni latus*, $\frac{81812764}{10000000000}$ *ferè, & si pro* 4 *in fine* 5 *reponas numerus erit justo major. & cum* au *radius sit unitas dabitur area unius trianguli* lam $\frac{40906382}{10000000000}$, *quæ per* 768 *numerum laterum polygoni multiplicata dabit aream quæsitam* $3\frac{1416101376}{10000000000}$ *minorem, &* $3\frac{1416101760}{10000000000}$ *majorem vera: nam unitas ultima in latere* lm *vacillabat. ajo itaque rejectis notis dubiis* $3\frac{1416101}{10000000}$ *non abesse à verâ circuli area* $\frac{1}{10000}$ *parte, quemadmodum imperabatur. nam circuli area, ut postea liquebit, veræ proxima esset* $3\frac{1415926}{10000000}$ *minor, & si* 7 *in fine reponas major vera. atqui hæc ab illa distat* $\frac{175}{10000000}$ *duntaxat unius unitatis, quæ non essent* $\frac{550}{1000000000}$, *id est* $\frac{1}{18181}$ *pars totius circuli.*

Quare constat polygonum numeris expressum circulo ita esse

circum-

circumſcriptum ut ne quidem $\frac{1}{10000}$ circularis areæ eandem ſuperet. itaque licet hinc

Circulo dato polygonum inſcribere ut reliqua circuli ſegmenta minora ſint ſpatio quocunque dato.

Nam cum per antecedentem propoſitionem polygona duo ita circulo adſcripſeris, ut circumſcriptum ad inſcriptum rationem habeat minorem, quam datum ſpatium & circulus ad ipſum circulum: ſit autem circumſcriptum polygonum demonſtratum minus circulo & dato ſpatio ſimul; differentia inſcripti & circumſcripti minor erit differentia circuli à dato ſpatio & circulo ſimul, id eſt ipſo dato ſpatio. Atque ideo inſcripti polygoni à circulo differentia, hoc eſt reliqua ſegmenta dato ſpatio multo erunt minora. quod erat faciendum.

Quamobrem idem hic numerorum calculo ex antecedente exemplo comprobare haud admodum difficile fuerit. ut ſi poſtuletur polygonum inſcriptum quod à vera circuli area non abſit $\frac{1}{10000}$. aſſumatur tantum idem laterum inſcripti polygoni numerus qui illic circumſcripti 784, hoc igitur polygonum quæſito ex demonſtratis ſatisfaciet. Latus inſcripti illic inventum fuit $\frac{8181208}{10000000000}$ minus & $\frac{818112081}{1000000000000}$ vero majus, unde area polygoni dabitur $3\frac{141583872 0}{1000000000000}$ minor & $3\frac{1415839104}{10000000000}$ vera major, rejectis itaque notis dubiis dabitur $3\frac{141583}{1000000}$ minor, & ſi pro nota ultima 3 tantum 4 reponas vera major. Atque hæc erit illa area inventa, quæ ſecundum demonſtrata ne quidem $\frac{1}{10000}$ circuli ipſo minor ſit. Ante autem inventa area circumſcripti polygoni $3\frac{141610}{1000000}$ non erat tantillo quoque major, nam neque iſtæ ipſæ tantilla parte inter ſe diſtant, quemadmodum demonſtrationi calculus conſentiens planiſſime coarguit, cum ea non ſit $\frac{27}{10000000}$ unius mutatis, vel ne quidem circumſcripti polygoni pars $\frac{84}{1000000}$ vel $\frac{1}{11904}$ ut proximè. eſt autem circumſcriptum polygonum circulo majus. Quare exhibita ſunt duo polygona

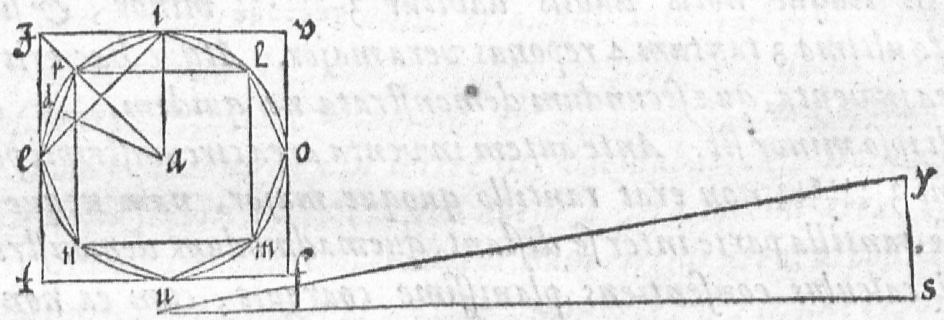
$3\frac{141383}{1000000}$ *&* $3\frac{1415610}{10000000}$ *inscriptum & circumscriptum, quæ neque à se mutuo, multò minus à circulo intermedio distent* $\frac{1}{10000}$ *parte.*

Hæc omnia adeò Archimedeæ demonstrationis lineamenta secutus pressius per numeros explicavi: ut vel hinc saltem illi quoque suum errorem agnoscant, qui rationem diametri ad peripheriam nihil ad areæ ejus inventionem facere existimant. Eosdem tamen Archimede duce ista, quæ sequitur propositione solidè & apodicticè quoque refutare constitui.

PROPOSITIO XIX.

Circulus æquatur triangulo, cujus altitudo radio basis peripheriæ ejusdem sit æqualis.

ARchimedis est de dimensione circuli propositio prima. Exponatur enim circulus ex *a* centro decircinatus, & triangulum cujus altitudo *ys* radio *ai*, basis autem *us* peripheriæ *ioue* æqualis sit. Ajo hoc ipsum dato circulo pariter æquari. Etenim si inæqualis æstimetur, sit ergò primum circulus major triangulo, & inscribatur polygo-



num quodlibet *erilomun* majus dato triangulo, id enim fieri posse propositione 14 jam patuit. in cujus latus ex *a* centro demittatur perpendicularis *ad*, ea igitur altitudine trianguli

trianguli erit minor: atqui inſcriptorum laterum ſumma minor eſt ambitu circuli cui tamen baſis expoſiti trianguli ponitur æqualis. atque ideo area inſcripti polygoni (quæ itidem triangulo rectangulo è ſua perpendiculari & perimetro comprehenſo æqualis eſt) expoſito triangulo multo eſſet minor. quod abſurdum fuerit.

Secundò jam circulus ipſo triangulo ſtatuatur minor, & ei circumſcribatur polygonum *rilomune* minus expoſito triangulo, id enim fieri poſſe propoſ. 4 jam patuit. hinc radius *ar* ad contactum ductus, lateri ejus perpendicularis inſiſtet. atque ideo triangulum, cujus altitudo radio baſis autem rectilinei circumſcripti perimetro æquatur, majus eſſet expoſito triangulo, quod itidem abſurdum per ſe eſt manifeſtum. relinquitur itaque hoc triangulum cum expoſito circulo paria facere.

itaque

Factus è radio & dimidia peripheria eſt area circuli.

Rectangulum æquatur triangulo æquealto baſique duplo. atque hinc igitur data area & radio dabitur peripheria. Ut in propoſitionis decimæoctavæ conſectario poſita diametro partium 2, datur area circuli $3\frac{141583}{1000000}$ minor vera, & $3\frac{141610}{1000000}$ major vera, quare utrâque per radium 1 diviſâ dabitur dimidia peripheria $3\frac{14158}{100000}$ minor, & $3\frac{14161}{100000}$ major quarum duplum totam peripheriam definiet $6\frac{28316}{200000}$ mnorem, & $6\frac{28322}{100000}$ majorem vera. Et contra data perimetro dabitur area tam veræ proxima quam iſta peripheria concedet. Ut diametro iiſdem partibus taxata è catalogo inductionum ad propoſitionem undecimam annotato datur perpheria circuli minor quam $6\frac{2831853071795865}{10000000000000000}$, major autem quam $6\frac{2831853071795864}{10000000000000000}$. atque ideo hujus dimidium $3\frac{1415926535897932}{10000000000000000}$ minus, illius autem $3\frac{2031853071795865}{20000000000000000}$ vel etiam quod pauxillò ſit majus $3\frac{1415926535897933}{10000000000000000}$ longe majus erit vera circuli area.

Eadem

Eadem ratio & demonſtratio in quibuſlibet circuli ſectoribus locum habet, æquantur enim triangulo, cujus altitudo radio, baſis eorundem peripheriæ in quam inſiſtant æqualis ſit. analogia inquam demonſtrationis ex antecedentibus poti poteſt. Horum omnium veritas tantò mihi magis vindicanda & ſtabilenda fuit, quod omnes ii, quorum rationibus cum Archimedea & regia via minus convenit, è veſtigiò has ex adſcriptione deductas demonſtrationes, & verè κυρίας δόξας ſtolidè oppugnent, & pari impudentia apud ſui ſimiles traducant. tanquam nullum circulo æquale ſpatium dari, aut inter curvum & rectum propter heterogeniam ulla comparatio poſſit inſtitui. Atqui illos omnes Hippocrates Chius, ex mercatore philoſophus, luculenter refutavit, qui lunulæ æquale triangulum comparavit. ſed quoſdam etiam ſubmuſſitantes ſubaudio, dari angulum rectilineum minorem angulo ſemicirculi, dari item majorem: at æqualem nullum dari.

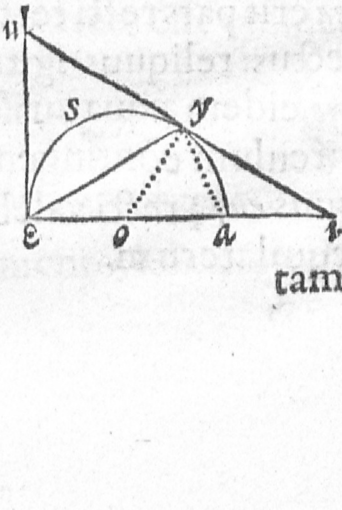
Verum iſti vim & robur demonſtrationum Archimedearum haud quaquam mihi ſatis percepiſſe videntur. neque enim ita ſuam ἀπόδειξιν inſtituit atque illi cenſent, rectilineum aliquod circulo majus dari, dari etiam minus, atque ideò æquale aliquod dari poſſe. hoc enim Bryſonis, olim fuerat argumentum. Hic autem longe ſolidius, rectangulum triangulum circulo æquari oſtendit, cujus altitudo radio, baſis peripheriæ ſit æqualis: quia eo ipſo neque major neq; minor ſit. ſequitur itaq;, ſi ulla recta linea ſit perimetro dati circuli æqualis, jam omnino triangulum dato circulo æquale conſtrui, atque id in quadratum haud difficulter transformari poſſe. Rectam autem aliquam lineam datæ peripheriæ æqualem exiſtere à nemine unquam eſt dubitatum, εἶναι γάρ τινα τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ πρὸς οὐδενός ἐστι ζητούμενον ait Eutocius. non

quod

quod mechanica æreі circuli revolutione recta linea ejus circumferentiæ æqualis possit constitui: sed quod ἐφάρμωσις geometrica, quæ sola mentis acie & in ejus abaco est concipienda, neque physicis, aut corporeis rebus admiscenda, eam æqualitatem hujusmodi revolutione arguat & evincat. Hactenus itaque negotium quadratarium res suas sibi sartas & tectas habet; etiamsi nemo mortalium eam æqualitatem per circinum & regulam explicare potuerit. neque enim divinus Archimedes in comparatione perimetri figurarum adscriptarum aliud secutus est, quam ut his limitibus circumpositis (cujusmodi undecima propositione expressimus) circularis gæodæsiæ usum parabilem & facilem nobis expediret. Atque ita contra quorundam temeritatem, & futilem ἀγεωμετρησίαν, horum veritas tandem nobis satis munita nunc esto; ut ad nostrorum epichirematum explicationem deinceps securus transeam.

PROPOSITIO XX.

Si diameter radio æqualiter continuetur, & recta à termino continuatæ circulum contingat, segmentum convexi à contactu ad diametrum erit totius circuli sextans, reliquum triens.



SIt enim diameter *ea* continuata in *i*, ut *ai* radio æqualis sit, & ab *i* educatur *iy* recta circulum contingens. Ajo *ya* circuli convexum segmentum esse totius partem sex-

tam,

tam, & *ye* trientem. connectantur enim *yo ya*. Erunt itaque *eya oyi* triangula rectangula, hic ob contactum, ille quia in semicirculo est. atque ideo rectæ à basis medio ad recti verticem *oy ay* ipsarum basium bisegmentis æquales erunt. atqui bisegmenta *eo ai* ex hypothesi æquantur : itaque *oy ay* inter se quoque æquabuntur, quare *ay* radio circuli æqualis latus erit inscripti sexanguli, & *ey* latus trianguli. atque ideo quoque peripheriæ ab his subtensæ, hæc triens, illa totius circuli sextans erit.

PROPOSITIO XXI.

Si à termino diametri radio æqualiter continuatæ recta circulum contingens, rectæ in reliquo diametri termino eundem contingenti occurrat, intercipiet ab ea ad contactum rectam æqualem inscriptæ utriusque contactum connectenti.

DIameter *ea* in propositionis antecedentis diagrammate continuetur intervallo *ai* ejusdem radium æquante. & ab *i* puncto tangens *iy* educta occurrat tangenti *eu* in *u*. ajo rectam *eu* inscriptæ *ey* utriusque contactum connectenti æqualem esse. cum enim *ya* sit pars sexta circuli, angulus *yea* erit pars recti tertia. totus autem *uei* est ob contactum rectus; reliquus igitur *uey* valet recti duas tertias: atqui *uye* eidem æquatur; sunt enim rectæ *ue uy* ob eodem puncto circulum contingentes æquales : quamobrem etiam reliquus *euy* $\frac{2}{3}$ recti valebit, & ideo totum triangulum *uye* erit æquilaterum.

CONSE-

CONSECTARIVM I.

itaque

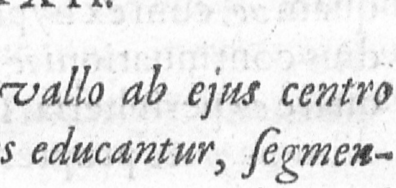
Perpendicularis à vertice trianguli æquilateri circumſcripti eſt tripla radii circuli inſcripti.

VT in eodem diagrammate *uei* eſt dimidium trianguli æquilateri, quia *euy* valet ⅔ recti, & *ui* dupla ſit ipſius *uy* vel *ue*. perpendicularis autem à vertice in baſin eſt ipſa *ei*. Hinc illud quoque ſi neceſſe eſſet inferri poſſet. triangulum circumſcriptum, duplum eſſe ſexanguli, & quadriplum trianguli in eundem circulum inſcripti.

PROPOSITIO XXII.

Si à puncto quod diametri intervallo ab ejus centro diſtat, duæ rectæ peripheriam ſecantes educantur, ſegmentum peripheriæ convexum ab iis interceptum minus eſt concavi dimidio, majus triente.

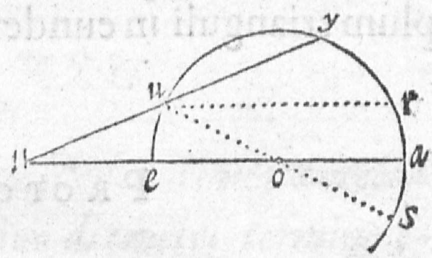
SIt ſemicirculus *aue* cujus diameter radio æqualiter continuetur in *i*. ſi recta *iu* ab *i* puncto educta circulum ſecet, & in peripheriæ concavum producatur uſque in *y*; Ajo *ue* convexi ſegmentum ab his duabus lineis interceptum minus eſſe dimidio concavi *ya*, majus autem eſſe ejuſdem triente. ducatur enim radius *oy*, & inſcripta *ey*; cum itaque angulus *iyo* ſit à ſecante & radio comprehenſus, & ideo acutus, recta *ey* à medio baſis *io* ad verticem major erit ejus biſegmento, hoc eſt radio



eo vel,

eo, vel etiam continuatione *ei*. Et propterea in triangulo *iey* erit angulus *yie* à majore latere ſubtenſus major angulo *iye*. ſit jam *ys* parallela contra diametrum, atque ideo *syu* æqualis ſibi alterno *yie*, major quoque erit angulo *uye*. quare peripheria *su* in quam major angulus inſiſtit major erit quam peripheria *eu*. & propterea *eu* minor quam dimidia *es*, vel quod idem ſit, quam dimidia *ay*.

Eadem tamen *ue* major eſt triente *ya*. ſit enim in hoc diagrammate *ur* contra diametrum *ae* parallela, & ab *u* agatur diameter *us*. erit itaque *yur* angulus angulo *yia* æqualis, & *sur* ipſi *uoe*, & propterea *sar* peripheria dupla ipſius *ue*, & *yr* dupla ejus quę competeret angulo *yur* ſive *uio* in centro poſito. Sed *uio* eſt minor quam *uoi*: quia in triangulo *iuo* latus *ui* majus eſt quam *uo*, cum ex hypotheſi *uo* radius continuationi *ie* ſit æqualis.

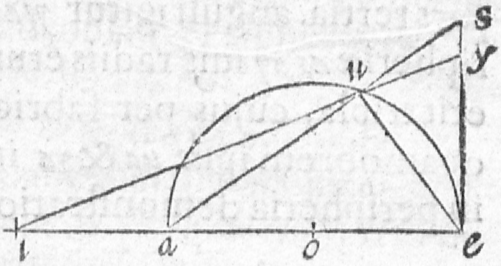


quare *eu* peripheria, ſive eidem æqualis *as* major eſt quam dimidia *yr*. & propterea etiam *ra* ſeu *eu* major quam tertia pars totius *ay*. cum *ra* & *as*, ſive *eu* inter ſe ſparient. Quamobrem erit quidem *eu* ſemper major triente ipſius *ya*, ſed minor tamen ejuſdem ſemiſſe. quod demonſtrandum fuerat.

PROPOSITIO XXIII.

Si à termino diametri radio æqualiter continuatæ, recta per peripheriam educta eundem in reliquo diametri termino tangenti occurrat, abſumet ad contactum rectam majorem, quam ſit ea quæ peripheriæ abſumptæ eſt inſcripta.

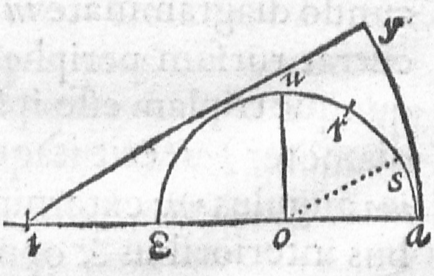
EXponatur centro *o* peripheria *aue*, cujus diameter *ea* continuetur in *i*, ut *ai* radio æqualis ſit, inde in *e* diametri termino tri termino tangens excitetur *es*. ajo rectam quæ ab *i* educta peripheriam secat in *u* & tangenti occurret in *y*, absumere à tangente segmentum *ye* majus inscripta *ue*. recta enim ab *a* termino contiuationis per *u* occurrat tangenti in *s*. in triangulo igitur *uys* externus angulus *uye* duobus interioribus & oppositis *suy* & *usy* æqualis est. atqui *suy* suo ad verticem *iua* æquatur: & *usy* (ob similitudinem rectangulorum triangulorum *aue eus*) ipsi *aeu*: Sed *yue* major est angulo *eyu*. æquatur enim internis & ipsi oppositis *uie* & *ieu*: porrò *uie* est major angulo *iua*, cum *au* inscripta major sit radio, seu quod idem sit ipsa *ai* per propos. 22. secat enim *iu* peripheriam ex hypothesi. quare *uia* & *ieu* seu *use*, hoc est totus *yue* major erit quam *usy* & *suy* simul, hoc est quam angulus *uye*. In triangulo igitur *uey* angulus major subtendetur à latere majore, & *ye* tangentis segmentum majus erit quam inscripta *ue*. quod demonstrasse oportuit.



PROPOSITIO XXIV.

Circulorum peripheriæ, quorum anguli in centro peripheriave suis radiis sunt reciprocè proportionales, sunt æquales.

ESto peripheria *au* cujus centrum *o*, radius *ao*, & radius secundæ peripherię *ai* sit verbi gratia prioris triplus. ajo si vicissim angulus *uoa* statuatur triplus anguli *yia* peripheriam *ya* periphe-

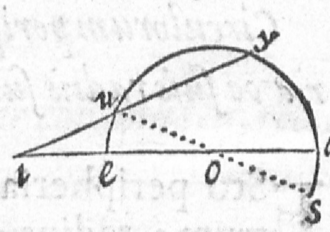


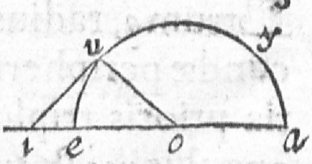
riæ *ua* æqualem esse. sumatur enim *as* datæ peripheriæ *au* pars tertia. anguli igitur *yia soa* inter se æquabuntur, & peripheriæ *as ay* suis radiis erunt proportionales, & *ya* ipsius *sa* erit tripla, cujus per fabricam tripla quoque est ipsa *ua*. quamobrem ipsæ *ua* & *ya* inter se æquantur. De angulis in peripheria demonstratio huic est affinis.

PROPOSITIO XXV.

Si recta inter peripheriæ convexum & diametrum continuatam sit radio æqualis, segmentum concavi inter eas interceptum erit convexi triplum. & contra.

SIt semicirculus *eua*, & recta *iu* inter ejusdem convexum & diametrum continuatam intercepta radio æqualis primum peripheriam tangat, hinc radius *uo* ad contactum ductus faciet angulum *iuo* rectum, & ideò anguli ad *i* & *o* erunt recti semisses; & quare *eu* peripheria quadrans semicirculi *eua*, & reliqua *uya* erit ejusdem semicirculi dodrans; atque ideò ipsius *eu* tripla. Et hinc quidem hujus theorematis explicatio primum inventa videtur. Namque etsi *iu* recta peripheriam expositam non tangat, sed porròsecet, veritas omnino eadem fuerit, ut in secundo diagrammate *iu* continuata occurrat rursum peripheriæ in *y*. ajo *ya* quoque triplam esse ipsius *ue*. sit enim diameter *uos*. erit itaque in triangulo *iuo* angulus *yus* externus æqualis duobus interioribus & oppositis *uio uoi*. cumque anguli ad *o* & *i* inter





i inter se æquentur, & *uoe* angulus in centro sit, sequitur *yus* insistere in peripheriam *yas* quadruplam peripheriæ *eu*, seu quod idem sit ipsius *as*: quare reliqua *ya* ipsius *as*, seu *ue* tripla erit. Et contra, si peripheria *ay* sit tripla *ue*, recta per *y* & *u* educta diametro continuatæ occurrens intercipiet rectam *ui* radio æqualem. etenim *as* peripheria ipsi *ue* ponatur æqualis: erit itaque angulus *eou* dimidius anguli in peripheria *yus*, quia *yas* quadrupla sit peripheriæ *ue*. atqui *yus* æquatur duobus interioribus & oppositis in triangulo *iou*. quare reliquus *uio* dimidius quoque erit externi *yus*, & ideo æqualis angulo *uoi*, ipsumque adeò triangulum *iuo* æquicrurum. Quod demonstrasse oportuit.

LEMMA.

Diameter circuli major est quinque lateribus circumscripti sedecanguli.

VEl quod eodem redit. Complementum lateris inscripti sedecanguli majus est ejusdem lateris quintuplo. Cum enim per consectarium propositionis tertiæ latus sedecanguli inscripti ad suum complementum sit, ut latus octanguli ad suum complementum diametro auctum. latus autem octanguli ad suum complementum, ut latus quadrati ad latus quadrati diametro auctum. Ut itaque à novissimo incipiamus, cum latus inscripti quadrati statuetur 5, diameter major erit quam 7: quare ratio lateris quadrati inscripti ad latus & diametrum simul erit minor quam 7 ad 5 & 7, hoc est, ad 12. si itaque latus inscripti octanguli statuatur 5 ejus complementum majus esset quam 12. Et propterea diameter major esset quam 13. Rursum autem

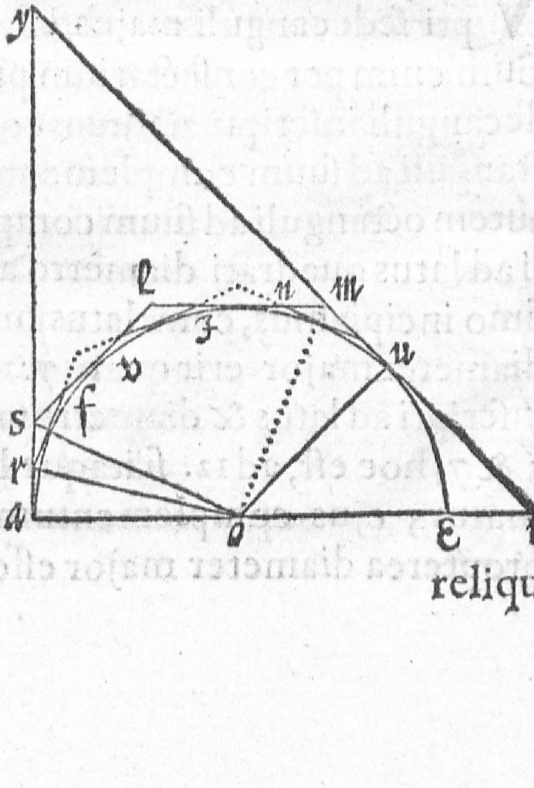
ut latus

ut latus octanguli ad suum complementum plus diametro, ita latus sedecanguli se habet ad suum complementum. Atque ideo ex demonstratis minor esset quam 5 ad 12 & 13, quæ conflant 25. quamobrem vicissim ratio complementi ad latus sedecanguli major est quam 25 ad 5. Ratio itaque radii ad latus dimidium circumscripti sedecanguli, vel diametri ad totum latus est major quam quintupla. quod demonstrasse oportuit.

PROPOSITIO XXVI.

Si recta inter diametrum continuatam & peripheriæ contactum radio æqualis, occurrat rectæ circulum in remotissimo diametri termino contingenti, absumet rectam majorem peripheria inter has tangentes comprehensa.

SIt *ya* perpendicularis extremæ diametro in *a*, & altrinsecus *iu* tangens radio æqualis, quæ cum priore concurrat in *y*, erit igitur angulus *uio* recti dimidius, & *ya* tangens ipsi *ai* æqualis. & *uoi* angulus recti dimidius, & *ya* tangens ipsi *ai* æqualis, atque angulus illi deinceps *aou* sesquirectus, quę sunt totius circuli $\frac{3}{8}$: & ideo peripheria *avju* tribus octanguli, vel sex sedecanguli lateribus apta. Atqui cum *oi* æquetur lateri inscripti quadrati, & *oe* sit radius



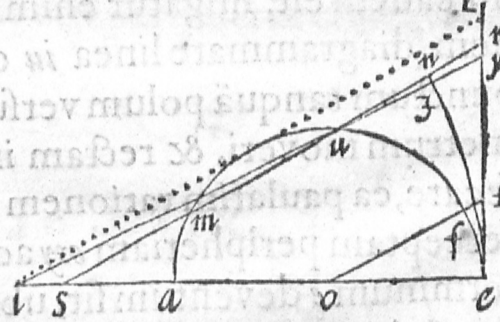
reliqua

reliqua *ei* erit latus dimidium circumſcripti octanguli per propoſitionem decimam, & ideo major latere uno ſedecanguli. Eſt autem diameter *ae* major quinque citcumſcripti ſedecanguli lateribus, quare tota *ai* ſive huic æqualis *ay* tangens major multo eſt ſex circumſcripti ſedecanguli lateribus, quibus circumſcribendis apta eſt peripheria *avju*. quare *ay* hac ipſa peripheria multo erit major. Quod demonſtraſſe oportuit.

PROPOSITIO XXVII.

Si à termino diametri radio æqualiter continuatæ recta per peripheriam educta, tangenti eam in reliquo diametri termino occurrat, abſumet rectam minorem quam ſit trientis concavæ peripheriæ inter eas interceptæ tangens tripla.

SIt *ia* continuatio radio æqualis, & per *u* peripheriæ punctum agatur recta *iuy*, quæ abſumat à contingente ſegmentum *ye*. Ajo *ye* minorem eſſe recta quæ compoſita ſit è tribus tangentibus quę pertinent ad trientem peripheriæ *ue*. Sit enim *am* æqualis peripheriæ *ef*, hoc eſt trienti ipſius *ue*: & *mu* utrimque continuetur ut illic tangenti *my*, hic diametro continuatæ occurrat in *s*. atque ideo erit *ms* radio æqualis per propoſitionem 25. & *sa* recta minor quam *sm* hoc eſt quam ipſa *ai*. Porrò autem ut *se* ad *oe*



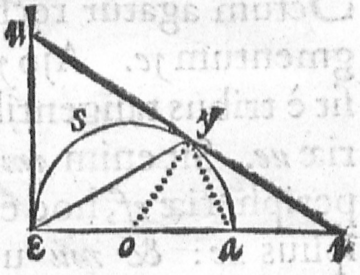
 radius

radius ad radium, ita peripheriæ angulorum æqualium *ne* ad *ef*. atqui radius *se* est minor quam tripla ipsius *fe*; & *ne* igitur peripheria non erit tripla *ef*. nec adscripta *er* adscriptæ *et*. sed *ye* quæ intercipitur ab *iuy* adhuc minor est, quam *er*. quare *ey* multò adhuc erit minor quam *et*.

PROPOSITIO XXVIII.

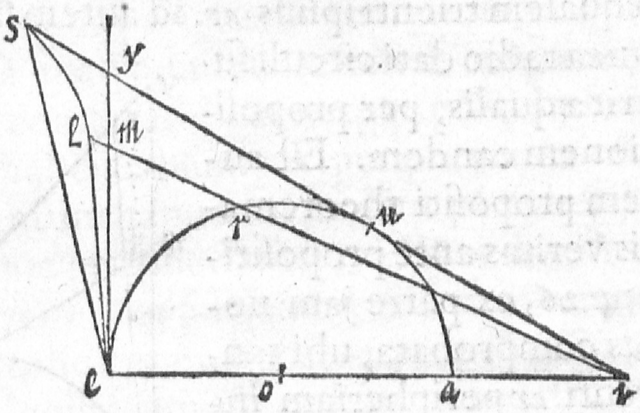
Si à termino diametri radio æqualiter continuatæ rectæ per peripheriam educta tangenti eam in reliquo diametri termino occurrat absumet rectam minorem quam sit peripheria inter easdem intercepta.

ID supra propositione 21 ex parte comprobatum jam nobis est. si recta à termino diametri radii intervallo continuatæ circulum contingat, tum rectam interceptam inscriptæ æquari. ut illic *ue ey*, atque inde planum est eandem peripheria *esy* necessariò esse minorem. Atqui si secet veritas omnino eadem est. fingatur enim in eodem diagrammate linea *iu* circa *i* punctum tanquã polum versus diametrum moveri, & rectam in diametri termino tangentẽ secare, ea paulatim rationem tangentis absumptæ *eu* ad interceptam peripheriam *esy* adaugebit, donec ad ultimum terminum *e* deventum sit, ubi recta peripheriæ æqualis fieret; sed æqualitas ista in unicum punctum evanescit, atque



ita quanto

ita quanto minor erit peripheria intercepta, tanto ejuſdem ab abſumto tangentis ſegmēto differentiæ ratio erit minor Inſuper adeò ſi animo & mente concipiamus rectam peripheriæ *eru* æqualem, qualis hic eſt *es* cum *iu* continuata concurrere in *s*, id utique punctum ultra *y* cadet, cum *es* major ſit quam *ey* per propoſitionem 21, hujuſmodi occurſu linea helix *sle* decircinata eſto, ut recta ab *i* circulum ſecans helici occurrens ut *il* faciat rectam ab occurſu ad contactũ, qualis inter *el* intelligitur, efficiat abſumptæ peripheriæ *er* æqualem: atque ita porrò in omnibus locis intermediis. hoc ductu helix linea deſcribetur cujus principium in *s* extra tangentem, finis autem ſit in ipſo contactus puncto *e*. quæ tota uſque ad *e* communem terminum ultra tangentem neceſſario jacebit, cum ordinato ductu inter *s* & *e* puncta ſit deſcripta, & principium *s* extra tangentem ſit poſitum. atqui ſemper *me* tangentis ſegmentum minus eſt, quam ſit *le*: quare tangentis ita abſumptæ ſegmentum ſemper minus erit peripheriæ concavo inter dictas lineas intercepto.



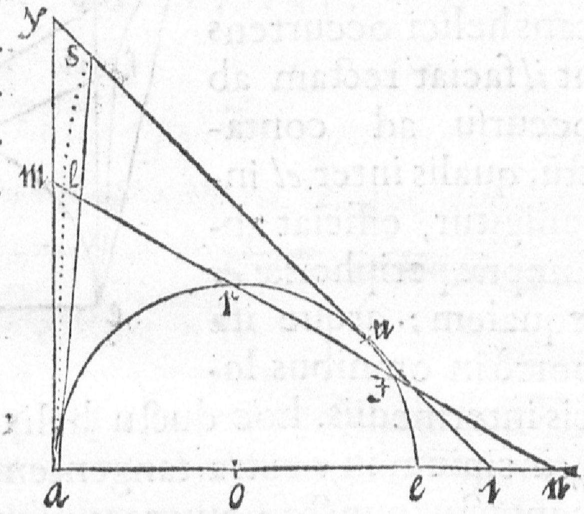
PROPOSITIO XXIX.

Linea quæ à limite triſectionis cujuſque peripheriæ rectæ in reliquo diametri termino tangenti occurrit, abſumet

 è tangente

è tangente segmentum majus quam sit peripheriæ concavum inter ipsam & diametrum interceptum.

TRisectionis limitem cujusque peripheriæ voco, ex argumento propositionis 25, punctum in diametro continuata, unde recta ad terminum datæ peripheriæ reliquum educta ut hic *nr* absumit peripheriam convexam ei æqualem trienti ipsius *ar*. id autem singulis evenit, cum *ui* linea radio dati circuli fuerit æqualis, per propositionem eandem. Est autem propositi theorematis veritas ante propositione 26, ex parte jam nobis comprobata, ubi tangenti *ar* peripheriam intermediam *aru* cedere fuit demonstratum. Esto nobis expositum diagramma in quo *ui* recta



radio æqualis peripheriam contingens tangenti *ay* occurrat in *y*, est itaque *eu* convexum triens concavi *ura*. atque ideo *i* limes trisectionis hoc casu, & *ay* recta major eadem *aru* peripheria, cui æqualis fingatur recta *as*, ea igitur citra *y* terminabitur in linea *is*. Atque idem reliquis omnibus minoribus, qualis *ar*, factum intelligamus, cui *al* æqualis sit intercepta à recta *nr*, quæ *n* ab limite trisectionis peripheriæ *ar* educta est. certe limes trisectionis paulatim ita retroagetur donec *en* diametrus continuata radio æquetur, ubi omnis trisectio per *a* punctum evanescit. Nam circa minimas peripherias limes trisectionis minimo intervallo abest à termino diametri radio æqualiter continuatæ:

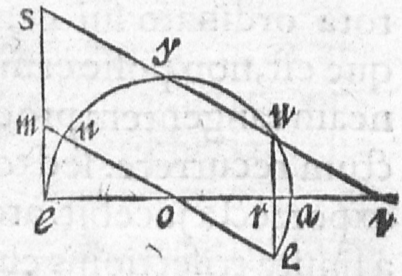
illis

illic autem sectionem frustra fatigamus. Cum itaque helix linea hoc metu decircinetur cujus initium sit ab *s* citra tangentem, & finis ejusdem in *a* contactus puncto, sitque tota ordinato sui generis ductu delineata, evidens utique est, non posse eam flexuoso sinuamine, & vago extra lineam tangentem procurrere, atque inde ad contactus punctum recurrere: sed tota inter tangentem & peripheriam exporrecta jacebit. atqui tangentis segmentum per rectam à limite trisectionis cujusque peripheriæ absumtum, ut *am*, majus semper erit recta *al* ab ejusdem & helicis communi sectione ad contactum connexa. Hæc autem recta helici inscripta ex lege hujus helicis absumptæ peripheriæ *ar* est æqualis æquare segmentum tangentis eâdem peripheriâ majus erit. Vides itaque peripheriam intra duos limites per hanc & antecedentem propositionem obsessam teneri, quorum hic major sit, ille minor. hoc solum porrò restat, ut quantum facilitatis logistarum abacis hinc accedat deinceps calculo explicemus, cujus tœdium etiam factionis aliqua concinnitate in hoc novissimo levare placet.

PROPOSITIO XXX.

Linea recta quæ à limite trisectionis peripheriam in reliquo diametri termino tangenti occurrit absumit ex ea segmentum duobus sinibus & uni tangenti, qui ad ejusdem trientem pertinent, æqualem.

SIt in exposito diagrammate recta *ui* inter peripheriæ concavum & diametrum radio æqualis, tumque per propositionem 25 *au* æquabitur trienti concavi *ey*, eidem quoque æquales statuantur *al* & *en* peripheriæ, & connectatur inscripta *ul*, ea diametro *ae* perpendicularis tangenti *es* erit parallela, denique *ln* diameter producta occurrat tangenti in *m*; cum itaque *ny ul* peripheriæ sint æquales etiam inscriptæ *uy nl* inter se erunt parallelæ, atque ideò oppositæ *ms* & *lu* æquales. est autem *lu* dupla sinus *ur*; denique *em* tangens est trientis *en*: quare duo sinus cum tangente, qui pertinent ad trientem datæ peripheriæ *ey* æquantur rectæ *es*. quod demonstrasse oportuit.



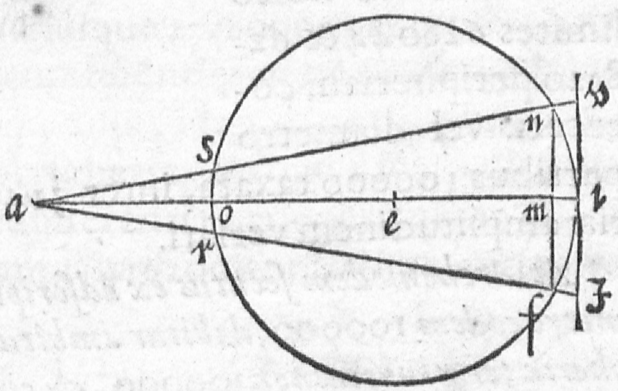
Exemplum in numeris tale esto. In diagrammate propositionis 29 tangens *ay* æquatur ipsi *yu*, & tota *aru* peripheria est sesquiquadrans 135 gr. quare ipsa *ay* erit tangens 67 gr. 30 scr. ea ex tabulis datur 24142137. valet autem peripheriæ *aru* triens 45 gr. cujus tangens 10000000, sinus autem ejusdem 7071068, qui duplicatus 14142136 & ad tangentem additus dabit *ay* 24142136, quæ ante inventæ *ay* tam accurate consentit quam canonum symmetria hic admittet. In cæteris omnibus veritas est eandem.

PROPOSITIO XXXI.

Rationem diametri ad suam peripheriam secundum expositos limites tam accuratè quam cuique collibitum erit definire.

POlygonorum adscribendorum rationem tanquam notam hic assumemus; calculi autem hujus initium à sexangulo faciam. Sit igitur in exposito diagrammate *nf* inscripti

ſcripti ſexanguli latus in *m* puncto normaliter biſectum à diametro *io*, quæ in *a* porrò continuetur, ut tota continuata tribus radiis æqualis ſit. & ducatur tangens *vj* lateri inſcripto parallela. & ab *a* puncto rectæ per vertices inſcriptæ *nf* actæ occurrant tangenti in *v* & *j*. conſtat itaque per propoſitionem 28 *vj* rectam minorem eſſe peripheria *nif*. hanc itaque in numeris nobis inveſtigandam proponamus. Latus inſcripti ſexanguli *nf* radio æquale eſto 100000, hujus dimidium *mn* 50000, & *em* ſinus complementi earundem 86602. unde tota *am* datur 286602.

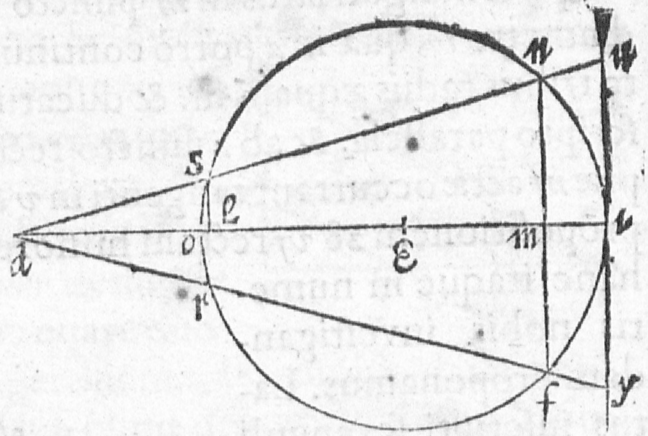


Hinc proportio, ut *am* diameter plus ſinu complementi, ad *nf* inſcriptam, ita *ai* radii triplum 300000 ad *vj* 104674 rectam minorem ipſa *nif* totius peripheriæ ſextante, cujus ideo ſextuplnm 628044 minus erit ambitu circuli. Hic igitur terminus eſt minor; majorem autem aſſequeris hoc modo.

Sit in hoc altero diagrammate *nf* inſcripta ut ante itidem latus ſexanguli æquilateri à diametro *oi* biſectum in *m*, & tangens inſcriptæ parallela *uy*. hinc *os* peripheria ſtatuatur æqualis trienti ipſius *ni*, recta *ns* ad diametrum productam continuata intercipiet ſegmentum *ds* radio æquale per propoſitionem 25. his ita conſtitutis recta *ui* æquatur duobus ſinibus ipſius *os* & uni tangenti. Peripheria autem *ni* eſt gradium 30, hujus triens 10, tangens 17632, ſinus ejuſdem 17364, hujus duplum 34728 ad tangentem ejuſdem additum dabit quantitatem tangentis *ui* 52360 minorem peripheria *ni* per propoſitionem 29. & duplum ejus *uy*

104720

104720 minorem toto sextante *nif*, cujus sextuplũ 628320 majus erit ambitu circuli. Constat itaque posita diametro partium 200,000 intra hosce limites 628044 & 628320 peripheriam cõerceri: vel diametro partibus 100000 taxata, inter 314022 & 314160 peripheriæ amplitudinem versari.



At Archemedem secutus ex adscriptione sexanguli posita diametro eadem 100000, *dabitur ambitus inscripti sexanguli, peripheriæ terminus minor* 300000, *& circumscripti terminus major* 346410. *qui immane quantum inter se distant. Atque ad illam vicinitatem, quam nos ab initio statim ex ipso sexangulo derivamus, demum per inscriptionem polygoni* 96, *& circumscriptionem polygoni* 192 *laterum potuit pertingere. quam rem in sua* κύκλου μετρήσει *ut demonstrationibus firmissimis, ita calculo accuratissimo comprobabit. rationem enim diametri ad peripheriam istic ita explicavit, ut majorem esse doceat quam* 1 *ad* $3\frac{10}{71}$, *minorem autem quam* 1 *ad* $3\frac{10}{70}$; *quod si hos numeros ad centies millesimas revoces termini isti erunt minor* 314084, *& major* 314285. *nihilo angustiores nostris, quos primo impetu expressimus, ille autem post quartam aut quintam bisectionem sit assecutus. Sed eandem facilitatem & ubertatem aliquot deinceps exemplis comprobare operæ fuerit pretium. & quidem Archimedis vestigia relegentes latus sexanguli nunc bisecemus.*

Sit itaque in primo diagrammate *nif* uncia totius peripheriæ, atque ideo graduum 30, cujus dimidium *ni* gr. 15, hujus sinus *nm* 2588190, & sinus complementi *me* 9659258; unde

unde tota *am* datur 29659258. Atque inde proportio, ut *am* 29659258 ad *mn* 2588190, ita *ai* 30000000 ad *vi* 2617924, hujus duplum æquatur rectæ *vj* 5235848. & id minus est peripheria *nif*. cujus ideo duodecuplum 62830176 minus erit tota circuli circumferentia. Et in secundo diagrammate si *ni* itidem sit totius peripheriæ semuncia, tum *so* erit graduum 10. cujus sinus duplum est 1743114, tangens autem 874886, summa utriusque 2718000 major peripheria *ni*, quę hic est totius circumferentię semuncia, ejus duplum 5236000 majus uncia *nif*; cujus ideo duodecuplum 62832000 majus erit tota peripheria. Atque ideo posita diametro 100,00000 circumferentia major erit quam 31415088, minor autem quam 31416000. proxima autem veræ esset $31415926\frac{1}{2}$.

Archimedi hinc confieret 32153904 terminus major, & 31058280 terminus minor. vel sic; posita diametro 10 peripheria erit major quam 31, minor quam 32. qui termini vix in ulla mechanice usurpari possent.

Tertiò si *nf* concipiatur latus quator & vigintanguli, inde posita diametro 1000,00000, ut ante, dabitur ex analogia factionis antecedentis recta *vj* 13089947, & tota circumferentia in partibus iisdem 314158728 vera minor. Et in secundo diagrammate ex analogia factionis antecedentis $13089971\frac{7}{10}$, & hinc tota circuli peripheria $31415932\frac{8}{10}$ major vera. est enim veræ proxima $31415926\frac{1}{2}$.

Quarto sit *nf* latus octo & quadragintanguli inscripti posita diametro 100000, 00000, hinc ex analogia primi exempli dabitur *vj* 654498352 minor peripheria *nf*, hujus duo-de-quinquagecuplum 31415920896 minus erit totius circuli ambitu. Haud aliter esto in secundo diagrammate *nf* latus inscripti duodequinquagintanguli, & *nif* peripheria graduum $7\frac{1}{2}$, & ideo ex analogia exempli secundi dabitur

bitur *os*, $1\frac{1}{4}$ gr. & contingens *uy* 31415926848: cum veræ proxima sit $31415926535\frac{8}{10}$.

Sed cum secundo modo qui per peripheriæ trisectionem majorem terminum exhibet multo propius ad verum accedatur, quam primo; ita deinceps calculum comparabo ut in secundo diagrammate *os* tanta assumatur, quanta *ni* in primo. Nam neque semper triens peripheriæ datæ ita commodè exhiberi potest.

Sit itaque in primo *nif* peripheriæ pars sexta & nonagesima, erit itaque ea 3 gr. 45 scr. & *ni* 1 gr. 52 scr. 30 sec. hujus sinus *nm* 327190828, & sinus complementi *em* 9994645875, & tota *am* 29994645875; atque hinc deinceps ex primi diagrammatis analogia recta *vj* 327249232 minor peripheria *nif*, cujus sex & nonagecuplum 31415926272 minus erit tota circumferentia circuli. In secundo autem diagrammate statuatur *os* peripheria $\frac{1}{96}$ semicirculi; erit itaque ejus sinus *sl* 327190828, cujus duplum 654387656, ad ejusdem tangentem 327366104 additum dabit rectam *iu* 981747760, quæ major est quam peripheria *ni*, hæc autem tripla est ipsius *os*. est igitur *ui* major $\frac{1}{96}$ in est $\frac{1}{32}$ semipheripheriæ, hujus itaque duo & ttigecuplum 31415928320 majus erit semipheria ad taxationem diametri 20000000000; aut tota, posita diametro 10000000000.

Sexto si eodem modo periculum facias in latere inscripti centum & octogin-tanguli. hic posita diametro 10000000000 dabitur *vi* in primo diagrammate $174532924\frac{75}{100}$, quod 180 sumptum dabit 31415926455, minus circuli peripheria. rursum sit in secundo diagrammate *sr* peripheria $2\frac{1}{2}$ gr. & *os* 1 gr. hinc dabitur *uy* 52359877, quæ major sit peripheria *nif*. ea autem $\frac{3}{180}$ habet totius, quare hujus sexagecuplum 31415926620 majus est vera peripheria, cum veræ proxima sit $31415926535\frac{8}{100}$.

Septimo

Septimo si *ni* in primo diagrammate sit peripheria dimidij gradus, ut *nf* sit inscripta polygoni 360 laterum. hic maiores terminos assumere est necesse, quia vulgatæ tabulæ ad taxationem diametri decē notarum non sufficiunt. assumam itaque sinus in partibus radii 100000, 00000, 00000. quamobrem sinus dimidii gradus *mn* in primo diagrammate dabitur 872653549 8374, & *em* sinus complementi 99996192306 4171: unde tota *am* datur 29999619-23064171, atque inde *vi* 8726646259690, quæ minor est peripheria *in*, is numerus per 360 multiplicatus dabit 314-1592653488400, minorem semiperipheria *inso* ad istam diametrum, aut minorem tota circumferentia posita diametro 100000, 00000, 00000. Et rursum in secundo diagrammate sit *os* peripheria o gr. 30 ser. ejus sinus ut ante 8726535498374 duplum 17453070996748, ad tangentem ejusdem 8726867791138 additum, dabit 26179938787886 rectam *vi*, minorem quam sit peripheria 1 gr. 30 scr. quæ valet $\frac{3}{720}$ totius, aut $\frac{3}{360}$ dimidii circularis ambitus. quare ille centies vicies assumptus dabit limitem peripheria majorem 314159, 26545, 46320 ad taxationem diametri 100-000, 00000, 00000. Veræ enim proxima hic fuerit 314-159, 26535, 89793 $\frac{2}{10}$.

Denique ultimus hic è tabulis labor nobis surgat, ut in primo diagrammate *ni* peripheria o sit gr. 1 scr. & *nf* inscripta duplæ peripheriæ, latus polygoni 10800 laterum. tumq; radius assumatur 100000, 00000, 00000, 00000, 00000, & sinus o gr. 1 scr. 2908882045634245 96374, & sinus complementi *me* 9999999576, 92025, 32795, 12624, & tota *md* 299999, 99576, 92025, 32795, 12624: atque inde *vi* recta minor quam peripheria *ni* o gr. 1 scr. dabitur 29088820866-5721584582 9 qui numerus per 10800 multiplicatus dabit terminū semiperipheria minorem 31415926535 8979311 34-

 9532

953200. vel tota perimetro, si diameter assumatur partium 100000, 00000, 00000, 00000, 00000. Et rursum in secundo diagrammate statuatur *os* itidem o gr. 1 scr. & sinus ejus qui supra 29088820456342459637 4, is duplicatus & ad tangentem ejusdem 29, 0888, 21687, 03159, c8121 additus dabit 87266462599716510089 pro recta *ni* in secundo diagrammate, quæ major est quam *ni* peripheria tripla ipsius *os*. atqui *ni* valet $\frac{5}{10800}$ semiperipheriæ *inso*, numerus igitur inventus per 3600 multiplicatus dabit 314159265358979436312 majorem semipheripheria, vel etiam tota posita diametro partium 100000,00000,00000,00000. Quamobrem ex utriusque comparatione datur circuli peripheria major quam 31415926535 8979, minor autem quam 314159265358980, posita diametro partium 10000, 00000, 00000,

Atqui Archimedea via ex uno minuto in sexto circulo desinet: ex inscriptis namque dabuntur 314159260, *ex circumscriptis autem* 314159274. *quare posita diametro* 1000000 *dabitur terminus minor* 3141592, *major autem* 3141593. *tanto itaque nostri limites Archimedeos semper antevertunt, & tam longe ultra eos provehuntur. Cum nos vel ex unius gradus sinu hanc rationem etiam ad septimam notam producamus. illinc enim nobis existunt termini* 3141592 6 *minor, &* 3141592 7 *major, diametro partibus* 10000000 *taxata. Vt semper amplius duplo characterum numero illum antevertamus. ubi illi ad sextum circulum ratio diametri ad suam peripheriam desinit, nobis ad decimumquartum facile excurrat. si ille decimum attingat, nos ultra vigesimum provehamur. atque ita continuo in omnibus majoribus & minoribus constanti operis processu. quod cum horum omnium & aliorum complurium inductione verum probari possit, unum istud duntaxat subjiciam, neque amplius aut abacos nostros, aut benevolum lectorem tanto numerorum tædio deinceps fatigabo.*

E syl-

E syllabo numerorum primo propositionis secundæ, in quo complementa ad semicirculum, laterum è continua quadrati inscripti bisectione ortorum, annotavimus, assumatur nunc numerus duodetricesimus 19999, 99999, 99999, 99657, 57931, 09365, 25489, 64091, 92589, 20986, 39953. qui est complementum lateris inscripti polygoni 536870912 laterum, hic numerus de diametro subductus relinquet 342, 42068, 90634, 74510, 35908, 07410, 79013, 60047, hic porrò per radium multiplicatus dabit nnmerum æqualem quadrato à latere polygoni duplo laterum numero 1073741824. peracta igitur radicis investigatione dabitur ipsum latus 585, 16723, 17068, 63871, 58564, 60938, 13791, 18041 & amplius, ad taxationem diametri 200000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, cum enim diametri & inscriptæ differentia habeat duntaxat octo & triginta notas significantes, hic ultima & penultima sublubricæ sunt, & si pro unitate binarium in fine reponas tum certe ut minimum illo auctoriolo justo erit major; & si demas minor. hinc idem latus circulo circumscriptum dabitur 585, 16723, 17068, 63874, 09031, 31775, 44168, 40209 minus justo, & si unitate augeas justo majus.

Hinc itaque si proportio instituatur in primo diagrammate, ut *am* 29999, 99999, 99999, 99657, 57931, 09365, 25489, 64091, 92589, 20986, 39953, ad *nf* 5851672317068638715856460938137918041, ita *ai* diametri sesquiplum ad rectam *vj* 585, 16721, 17068, 63872, 42053, 51217, 23916, 90859, vera proximè minorem, & si unitate augeas majorem; hæc autem per propositionem 28 minor est peripheria *nif*. quare is numerus per 1073741824 multiplicatus dabit nobis peripheriam circuli 62831, 85307, 17958, 64769, 25286, 76655, 90056, 58559 vera minorem, posita diametro partium 20000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000. Porrò autem in diagrammate ſecundo ſit *sr* idem latus inſcripti polygoni, & propterea *uy*, per 30 propoſitionem, duobus inſcriptis & uni circumſcripto jam ante invento æquale. horum ſumma conflat nobis 17555016-95120591617261605365171750762 $9\frac{1}{4}$ & paulo minus, quæ major eſt peripheria *nif* per propoſitionem 29, atque ea valet triplum ipſius *or*, quæ habet $\frac{3}{1073741824}$ totius peripheriæ: quare tota peripheria minor erit, quam 628318530717958647692528676655900579 1514. Quamobrem poſita diametro partium 20, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000, 00000 erit peripheria minor quam 62831853071795864769252867665590057 91514. major autem quam 62831 85307179586476925286766559005658559.

Hoc eſt poſita diametro partis unius, tum peripheria erit minor quam $3\frac{14}{100},\frac{15926}{00000},\frac{53589}{00000},\frac{79323}{00000},\frac{84626}{00000},\frac{43383}{00000},\frac{27950}{00},\frac{28952}{00000}$ major autem quã $3\frac{14}{100},\frac{15926}{00000},\frac{53589}{00000},\frac{79323}{00000},\frac{84626}{00000},\frac{43383}{00000},\frac{27950}{00000},\frac{28293}{00000}$ vides itaque uſque ad quintum & triceſimum circulum has notas conſentire. Ludolphus per inſcriptionem & circumſcriptionem hujus ejuſdem polygoni duntaxat aſſecutus eſt hos limites $3\frac{14159265358979323}{100000000000000000}$ majorem, & $3\frac{14}{100}\frac{15926535897932}{00000000000000}$ minorem, nos ad triceſimum quartum circulum ex eodem loco produximus. vides itaque nos in omnibus ultra duplum milleſimarum vel circulorum aſſumprorum numerum conſuetam rationem ſemper antevertere. Quinimo priuſquam Archimedea adſcriptione ad adeò amplos & arctos limites devenias, opus erit longe ulterius latera adſcriptarum continuari. diligentiſſimus logiſta, Ludolphus noſter, initio facto à latere quadrati eandem inſcriptarum inventionem ſexagies continuavit, ad taxationem diametri quinque & ſeptuaginta circulorum, & inde demum iſtos limites nobis ſummo cum labore expreſſit.

preſſit, quos ideò ſepulchro ſuo tanquam exantlatorum laborum teſtes inſculpi juſſit.

$$3\frac{14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50289}{100000,00000,00000,00000,00000,00000,00000}$$

$$3\frac{14159\,26533\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288}{100000,00000,00000,00000,00000,00000,00000}$$

vides ipſum adeo immani labore duntaxat unica nota nos ſuperare, & nos in triceſimo quarto circulo, illum in triceſimo quinto deſinere. ego ex 30 & 31 noſtri ſyllabi numero ipſum una aut altera etiam nota anteverterem, ſi diameter ſecundum quam inſcriptæ illæ taxantur, duobus tribuſve circulis fuiſſet auctior. illa enim in priore duntaxat quatuor & quinquaginta circulorum fuit aſſumpta. Tantam itaque utilitem, tantamque adeò facilitatem Logiſtarum abacis noſtrum epichirema inducit. quod tamen longe minimum mihi videatur, præ iſtis, quæ hinc deinceps poſtea deducemus.

PROPOSITIO XXXII.

Diametro binario & poſtpoſitis quotlibet circulis taxatâ, ratio diametri ad peripheriam in duplo tot circulis conſtans erit; quot novenarii continui à principio in inſcripta complementi dati lateris invenientur.

DEmonſtratio tota ab inductione pendet. & quamvis de utraque quam inſtitimus via theorema ſit verum, ſatis fuerit de prima demonſtraviſſe. nam & ſecundæ ratio non fuerit abſimilis, & prima via in ſequentibus longe maximam utilitatem nobis afferet. Quamobrem theorematis argumentum ita habet. Sumamus latus octo & quadragintandragintanguli cujus complemontum ad ſemicirculum dabitur 1995717846 4 quantarum diameter 1000000000, & quia hujus initium 199, ubi novem bis continuatur, ajo rationem diametri ad peripheriam ut minimum ad quatuor circulos, hoc eſt, ad decies milleſimam diametri partem veram dari: namque inde jam ante expreſſimus hos terminos ut 1 ad $3\frac{141592}{1000000}$. Eodem modo ſubtenſæ unius gradus complementum ad ſemicirculum eſt 19999238461, hic quatuor ſunt novenarij continui. ajo itaque ad minimum uſque ad octavum circulum rationem diametri ad peripheriam in primo modo pertingere, id enim jam ſupra illinc fuit exhibitum $3\frac{141592653}{1000000000}$. Ita ex inſcripta duorum minutorum cujus complementum ad ſemicirculum habet ab initio continuos ſeptem novenarios, quemadmodum ſupra patuit; Ajo per primum modum, rationem diametri ad peripheriam ſuam conſtanter produci ad circulos quatuordecim ut minimum. hæc enim inde ſupra inventa eſt $3\frac{34159,26535,89793}{100000,00000,00000}$. Denique, ut verba conferam in compendium, in vigeſimo nono primi ſyllabi propoſitionis primæ numero ſunt continui novenarii ſeptendecim; atque hinc datur ratio diametri ad peripheriam ut 1 ad $3\frac{1415926535897932384626433832795028}{10000000000000000000000000000000000}$, ubi ad quartum & triceſimum circulum omnia accurate veris characteribus conſentiunt. In his autem ſi noviſſimæ notæ unius unitatis auctariolum accedat, è veſtigiò terminus ille eſt major futurus juſto: Eadem inductio ex ſecundi diagrammatis analogia inſtitui poſſit. ego iſtis abunde ſatisfactum exiſtimo. cum adeò conſtans horum exemplorum inductio hujus veritatem comprobârit, cujus uſus poſtea erit illuſtrior.

CON-

CONSECTARIVM

Licet itaque hinc, quo usque ratio diametri ad peripheriam bene accurate è singulis eruatur, quam proxime definire.

NAmque, cum per 31 propositionem constet, secundum modum priorem posita diametro partis unius dari peripheriam $3\frac{14}{100}$; & è dodecangulo $3\frac{1415}{10000}$; è quatuor & vigintangulo $3\frac{1415}{10000}$. ex octo & quadragintangulo $3\frac{141592}{1000000}$; è sex & nonagintangulo $3\frac{1415926}{10000000}$: atque ita porrò possint utcunque progressus æstimari ex antecedente theoremate, hic per peripheriæ decimas & centesimas progressum eum definiam. Atque ita constituo, Rationem diametri ad peripheriam secundum primum modum

A decangulo & ultra bene accurate definiri ut minimum ad taxationem diametri partium 100.

A quatuor & vigintangulo & supra non abesse unam diametri 10000.

A trigintangulo & supra non abesse unam 100000.

A quinquagintangulo & supra non abesse unam 10,00000.

A 100 tangulo & supra non abesse unam 100, 00000.

A 200 tangulo & supra non abesse unam 1000, 00000,

A 400 tangulo & supra non abesse unam 10000, 00000,

A 800 tangulo & supra non abesse unam 100000, 00000.

A 1600 tangulo & supra non abesse unam 10, 00000, 00000.

A 3200 tangulo & supra non abesse unam 100, 00000, 00000.

A 6400 tangulo & supra non abesse unam 1000, 00000, 00000.

A 12800 tangulo & ſupra non abeſſe unam 10000, 00000, 00000.

Atque ita porrò quantumlibet continuando. Vides hic in noviſſimo ad quatuordecim notas me tantum hanc rationem producere. Cum revera docuerim ſupra ex ſubtenſa duorum ſcrupulorum quæ totam peripheriam 10800 ambit, jam eandem rationem ad decimamquintam notam per primum modum bene accurate exhiberi. malui autem intra veritatis limites me coërcere. Et ſi de aliquo intermedio accuratius quidquam definire poſtules, neque illud utique per 32 propoſitionem erit arduum. Vt ſi quæratur de latere polygoni 499783 laterum, quam propè ad verum me ducat primæ factionis modus: video hunc numerum intercidere inter polygonum 262144 & 524288, prioris porrò complementum eſſe numerum decimumſeptimum in ſyllabo primo propoſitionis ſecundæ, atque illic novem novies continuo ordine ab initio iterari, quare tutò & fidenter pronunciabo ut minimum hinc rationem legitimis numeris produci ad circulum decimumoctavum. Atque ita porrò in reliquis analogia conſimili. quod omnino annotaviſſe operæ pretium fuit viſum. Sed geometricam factionem ad circuli peripheriam ſua parabilitate & ἀκριβείᾳ arithmeticæ æmulam hic ante expediam, quam ad reliqua progrediar.

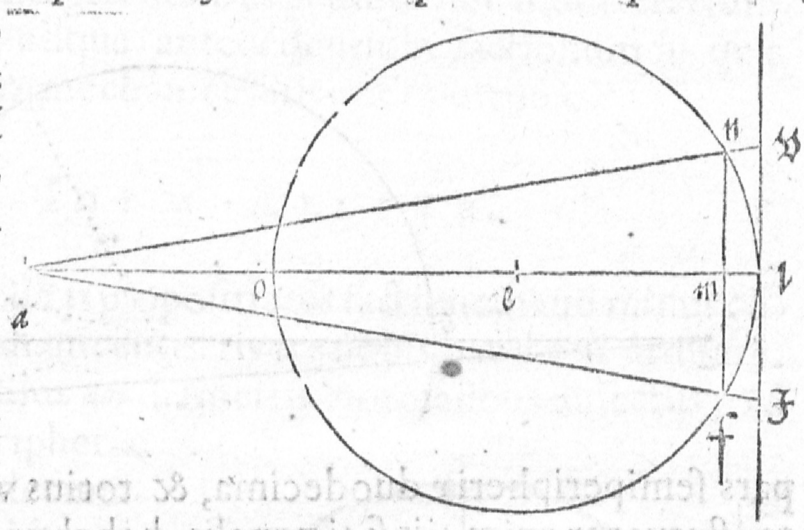
PROPOSITIO XXXIII.

Lineam datæ peripheriæ quam libet proximè æqualem exhibere.

HVjus fabricæ utilitatem ex theoremate 31 repetere haud eſt difficile, & cum duæ illic viæ proponantur altera

altera per datæ peripheriæ trisectionem, ut recta inter convexum & diametrum continuatam radio sit æqualis, altera ut diameter radio æqualiter continuetur, nos utramque pro sua parabilitate hic adhibebimus. Et quidem ab hoc novissimo facto initio.

Exponatur itaque circulus *onf*, cui recta postuletur æqualis; inscribito ei latus sexanguli *nf*, idque à diametro *io* bisecetur in *m*, atque continuetur radio æqualiter in *a*: hinc in altro diametri termino *i* recta *vj* circulum contingat. tumque rectæ ab *a* per *n* & *f* eductæ ab ea intercipiant rectam *vj*. ea peripheriâ *nif* minor & proximè æqualis erit; atque ideo eadem sexies iterata totã circumferentiam proximè æquabit. Id enim propositione 31. est demonstratum, hac via dari rationem diametri ad peripheriam quæ 1000 ad 3140. quę tam propinqua è veræ est quam Archimedea vulgaris 7 ad 22: nam ea exhibet 3142. Cum veræ proxima sit 3141. Hæc prima esto & levissima in minimis etiam circulis factio, & ad eorundem mechanicen aptissima.

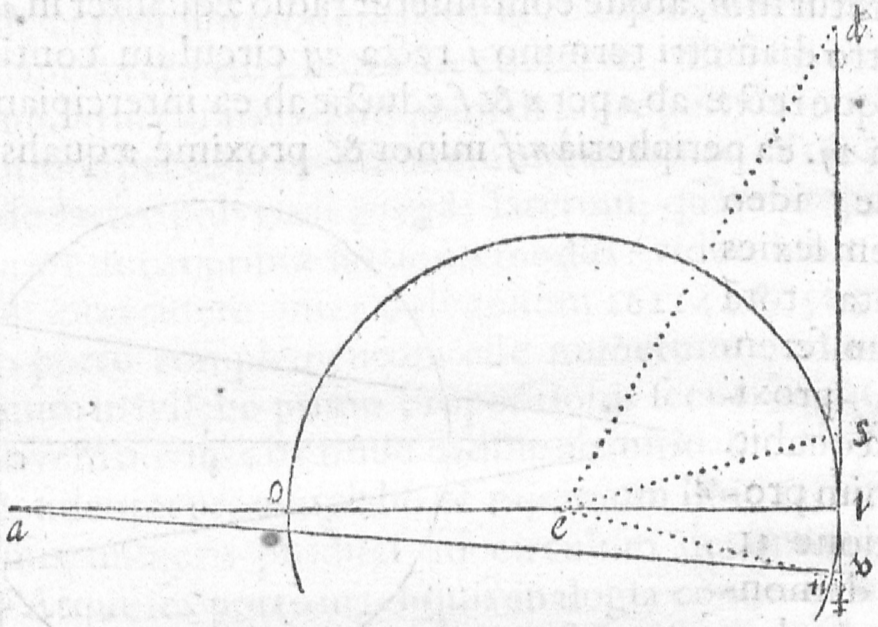


Eâdem viâ si *nf* sit latus inscripti dodecanguli, erit *vj* æqualis duodecimæ parti totius peripheriæ, cujus duodecuplum totam peripheriam ut proxime æquabit. erit enim ratio quæ 10000 ad 31415, cum veræ proxima sit ut 10000 ad $31415\frac{9}{10}$ ut ita ne quidem $\frac{1}{10000}$ diametri abeatur à vero:

 cujus

cujus ideo mechanicem concinnitate quadam juvabo.

Sit igitur expoſitus circulus *osn*, quem in *i* contingat recta *id*, & ſit per centrum recta infinita *oi*: inde ex *e* centro *ea ed* rectæ, & ipſa *dt* diametro conſtituantur æquales, & connectatur *et*, quæ peripheriam ſecet in *n*; recta ab *a* per *n* tangenti occurrens in *v* abſumet ſegmentum tangentis *vi* peripheriæ *ni* ut proximè æquale. Eſt autem *ni*



pars ſemiperipheriæ duodecima, & totius viceſima quarta. ſtatuatur enim *si* ipſi *ti* æqualis. habebunt itaque æquicrura triangula *edv ves*, communem angulum ad *v*, atque ideò erunt ſimilia. cumque *ed* ſit dupla *ei*, etiam *dt* poterit triplum ipſius *ei*; quare *edi* triangulum erit dimidium trianguli æquilateri: atque *edi* ideo $\frac{1}{3}$ recti; & *sev* huic æqualis itidem fuerit recti $\frac{1}{3}$, & quatuor rectorum $\frac{1}{24}$, atque ideo *iv* quatuor & vicies ſumpta dabit rationem diametri ad peripheriam quæ 10000 ad 31415. Si propius ad verum poſtules accedere aſſumatur in primo diagrammate *nf* latus inſcripti quatuor & vigintanguli. & dabitur ratio quæ 100000 ad 314158$\frac{7}{19}$, cum vera ſit 314159$\frac{2}{19}$.

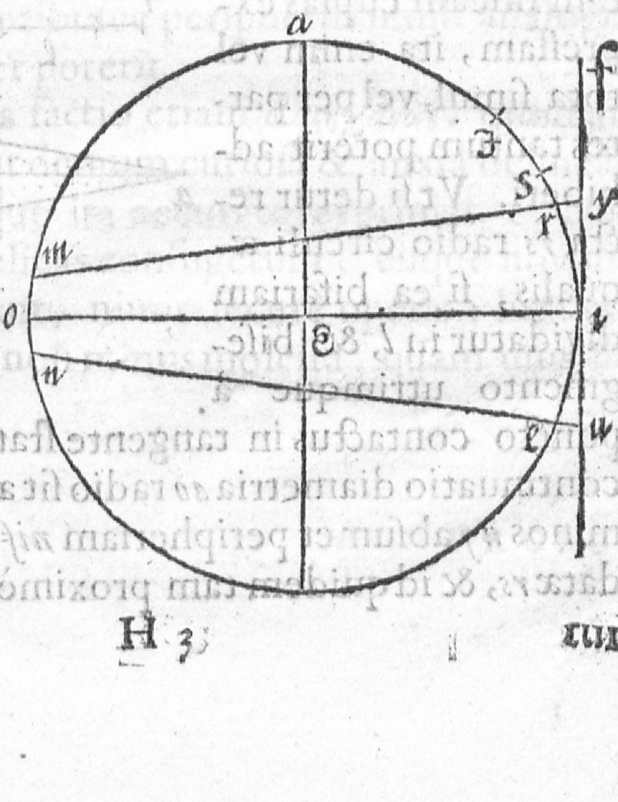
Si verò

Si verò majuſculus detur circulus ut *nf* commodè ſit latus octo & quadragintanguli, dabitur *vj* pars quadrageſima octava peripheriæ, & inde tota; ut ratio diametri ad peripheriam hinc exſurgat accurata quæ 1000000 ad 3141592. quod profectò ante hac ex ulla alia mechanice ſperare improbum videri poterat.

Vt ſi concipiamus circulum cujus diameter ſit centum miliarium, hac via in ejus ambitu non peccetur $\frac{1}{10000}$ milleſima unius miliaris. miliare autem noſtrum horarium habet pedes 18000. unde efficitur in toto ambitu definiendo non integris duobus pedibus hoc modo erratum. Quamobrem aliqua antecedentium factionum in quacunque tandem mechanice ſatis erit oportuna.

IDEM ALITER.

SEd & è ſecunda 31 propoſitionis factione, haud minus cõcinnam mechanicen derivare nobis haud erit arduum. Sit igitur circulus *aoi* diametris normalibus diſſectus, & ſit *as* totius peripheriæ ſexta & *ir* pars decimaſexta, atque ideo *sr* pars quadrageſima octava: huic autem ſtatuatur æqualis *om*, & ſit tangens *if*. recta *mr* tangenti occurrens abſumet *iy*, ea erit proxime major ipſa *ir* peripheria. eſtque *om* tertia pars peripheriæ *ir*. atque ita altrinſecus aga-

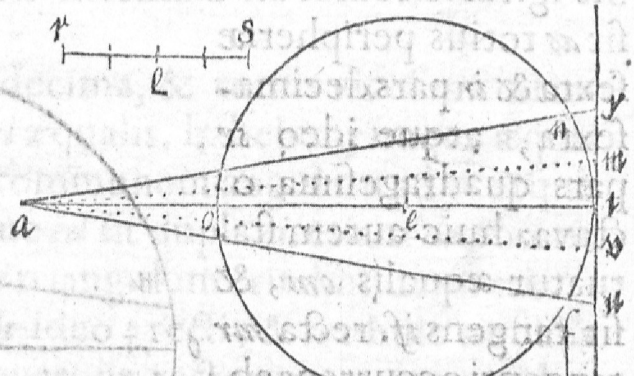


tur *nu*: quare tota *uy* æquabitur octanti totius, & duplum quadranti. datur autem hinc ratio diametri ad peripheriam quæ 10000 ad $31416\frac{3}{10}$. Sed illa quæ per inscriptionem dodecanguli absolvitur è mechanice priore, ut facillima, ita huic certitudine vix cedit.

PROPOSITIO XXXIV.

Datæ rectæ æquaiem peripheriam è dato circulo absumere. & contra.

ID nunc primum in lineis infra etiam in numeris expediam. Est autem ista mechanice ex antecedente propositione satis expedita. Detur recta *sr* cui æqualis peripheria sit absumenda è circulo *oi*. Hic primum illud expendendum data linea radione sit major an minor, & quam benè proximè vero istam lineam cupias expressam, ita enim vel tota simul, vel per partes tantum poterit adhiberi. Vt si detur recta *rs* radio circuli æqualis, si ea bifariam dividatur in *l*, & bisegmento utrimque à



puncto contactus in tangente statuantur æquales *iy iu*, & continuatio diametria *ao* radio sit æqualis, recta ab *a* in terminos *uy* absumet peripheriam *nif* æqualem rectæ *uy*, vel datæ *rs*, & id quidem tam proximè quam sinet ratio diametri 100 ad peripheriam 314. Si accuratius id ipſum exhiberi poſtules. biſecentur ipſa biſegmenta in *v* & *m*, & ab *a* adjungatur rectæ *am av*, eæ intercipient peripheriam æqualem *nv*, qui ſemiſſis eſt totius *uy*, & quidem tam proximè quam ſinet ratio diametri 10000 ad peripheriam 31415, & propius eo, Atque ita porro. res ex analogia 31 & 33 propoſitionis eſt manifeſta. Si linea major radio detur, toties iſta biſectio iterari poterit, quoad ſatis prope ad optatam rationem acceſſeris, ut ſi linea diametro detur æqualis, prima biſectione radio, ſecundâ dimidio, tertiâ quadranti æqualis conſtituetur atque inde jam non una decies milleſima diametri parte aberis à vero. ſi forte in nimium minutas partes concidatur continua biſectione, utere primum parte tertia, eamque biſecato ſi ſit opus. non poteſt operoſum videri qui regulâm & circinum modo tractare didicit. Sed & datæ peripheriæ recta æqualis dari poteſt. nam cum *nif* erit pars ſexta totius, biſeceur in *i*, recta *uy* erit æqualis parti ſextæ in ratione 100 ad 314. ſi propius velis biſeca utrumque biſegmentum dabitur *mv* æquale parti ejus dimidiæ. idque duplicatum toti erit æquale. |Hinc idem in majoribus minoribuſve peripheriis ſimili analogia exprimi haud difficulter poterit.

Præſtat itaque noſtra factio etiam ἀμηχανῶς, quod ab aliis fruſtra exigas, aut demum curioſa & anxia delineatione vix tandem, neque ita accurate exprimas. Nam qui ideo ad veterum helicas confugerunt, eiſque novum ſchema circumdederunt, nimis ſecurè operam ludunt: cum earum delineatio non minus moleſta, quam uſus ſit periculoſus.

PROPO-

PROPOSITIO XXXV.

Datam peripheriam data ratione secare.

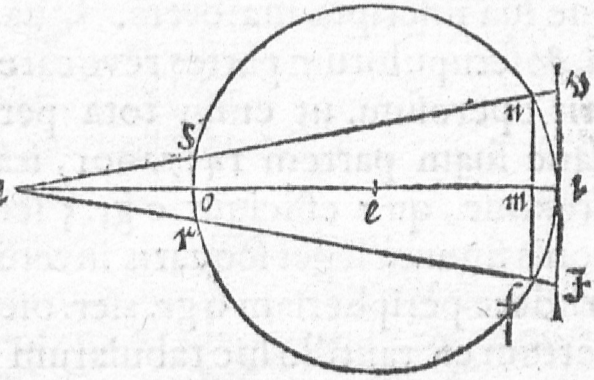
ID postea etiam in numeris præstabitur quam accuratissime, nunc linearum mechanicen tantum consectamur. fuerit autem hoc ipsum ex antecedenti theoremate haud operosum. cum enim rectam aliquam lineam datæ peripheriæ per propositionem 34 posueris æqualem, eâ in optatas partes aut secundum datam rationem divisâ, tum istis partibus rursum æquales peripheriæ per eandem propos. constitui poterunt. atque ita data peripheria secundum datam rationem erit secta. Et si tota major sit quam ut simul unicâ factione voto satisfaciat, assumantur partes ejus dimidia, tertia, quarta & cæteræ, quibus peripheria constituatur æqualis, eædemque peripheriæ toties iteratæ optatæ rationis terminum exhibebunt. Posset hac via quoque figurarum ordinatarum adscriptio explicari; sed illarum major utilitas ad abacos logisticos in numeris postea redundabit. mechanice autem per circinum quem *proportionum* vocant tunc fuerit expeditior. quamobrem hic manum de tabula aliquando tollendam existimo.

PROPOSITIO XXXVI.

Datæ inscriptæ debitam peripheriam tam veræ propinquam in numeris exhibere, quam erit ratio diametri ad suam peripheriam data.

PRopositione secunda & tricesima ejusdemq; consectario satis clarè jam fuit à nobis demonstratum, si *ao* continuatio

tinuatio radio ſtatuatur æqualis & *nf* inſcripta lateri ſexan guli, tum *nif* peripheriam rectæ *vj* reſpondere quantarum diameter aſſumetur ſpatium 100; et ſi *nf* ſit latus dodecanguli, in partibus 10000; ſi *nf* ſit latus trigintanguli in partibus 100000; ſi ſit latus duodequinquagintanguli in partibus 1000000; ſi ſit latus ſex & nonagintanguli in partibus 10000000, ſi ducentanguli in partibus 100000000, atque ita porrò. cujus explicatio à 32 propoſitione & ejuſdem conſectario dependet. quod ſi itaque inſcripta detur æqualis radii dimidio, ea minor erit latere dodecanguli, atque ideò poſita diametro 10000, ejus veritas ut minimum ad hos numeros reſpondebit. ſi *nf* detur æqualis parti



centeſimæ ipſius radii, tum inter *vj* & *nif* nulla intercedet differentia, diametro etiam 100, 00000 partibus taxata. Atque ita continuo ordine ſecundum expoſita in reliquis procedendo. Eſto igitur inſcripta *nf* partium 14572, quantarum radius 1000000, quæritur in quot radii milleſimis peripheria ei congrua bene accurate explicari & inveniri poſſit, idque nulla alia circumitione aut περιεργείᾳ. Experire quota hæc radii ſit pars, iſta hic eſt fere $\frac{1}{689}$, atque ideò inſcripta iſta minor multò latere polygoni 689 laterum; atqui è conſectario propoſitionis 32 conſtat à quadringentangulo, & ſupra, ad novem circulos adſcriptam *vj* peripheriæ *nif* bene accuratè congruere, ab octingentangulo autem ad decem. quare planum eſt hic ad veritatem etiam ultra nonum circulum accedi. Itaque ſi quis infra decimum circulum à me hujus conſenſum exigat nihil me erraturum intelligo. ſive radius ponatur partium

10000, vel 100000, vel 1000000, vel 10000000, atque ita porrò, quorum extremus & ultimus hic sit 10000000000. Cujus inveniendi via hæc est; sit *nf* inscripta 14572, ejus dimidium *nm* 7286 posito radio 1000000, vel posito radio 1000000000, tum sinus *nm* fuerit 7286000. erit itaque sinus complementi 9999997346 ut proxime. Hinc proportio, ut *am* 2999999346 ad *nf* 14572000, ita *ai* 30000000000 ad *vf* 14572001 $\frac{2}{10}$. atque adeò tantam ajo esse peripheriam *nif* posita diametro 20000000000. tantillo utique sua inscripta majorem. Quam si ad gradus, scrupula, & scrupulorum partes revocare expetas, id adeò haud erit operosum. ut enim tota peripheria 62831853071 ad hanc suam partem 14572001, ita 360 gradus $\frac{83497}{1000000}$ ut proximè, quæ efficiunt 0 gr. 5 scr. 0 sec. 34 $\frac{27}{100}$ tert. si canonis sinuum leges sequaris invenies hanc inscriptam subtendere peripheriam 0 gr. 5 scr. 0 sec 34 $\frac{15}{100}$ tertiorum. atqui certum est tantillo hic tabularum rationem per differentiarum consuetum epilogismum à vero deficere. cum hæc ipsa, ea qua docui via, ut minimum ad 1000,00000, 00000 partes ne hilum quidem peccet. & hic non ultra decimum circulũ adhibuerim. est enim supra demonstratũ ex inscripta duorũ scrupulorũ ad quindecim circulos nihil peccari; atq; inde in quatuor scrupulis ad quatuordecim perveniri; in octo scrupulis autẽ, ad tredecim constans ratio est.

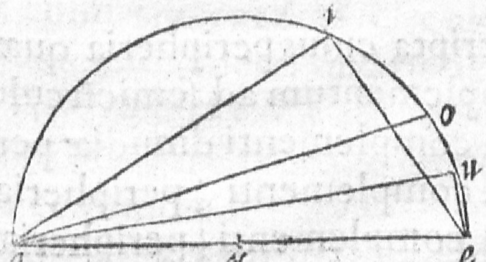
Atqui si peripheriæ veritas etiam in pluribus notis postuletur, quam simplici hac via præstari possit, tum secundi theorematis usus huc tibi quoque erit advocandus. Exemplum tale esto. Detur inscripta 1391 5470410. quantarum diameter 200000, 00000. & quæratur peripheria huic inscriptæ debita. Principio cum inscripta exposita ad latus inscripti quadrati proximè accedat, certum est peripheriam ei debitam quadrante minorem esse; si vero ma-

jor

jor esset quadrante ejus complementum pro ipsa huc ad vocarem porrò autem cum ex inscripta dimidii gradus ratio diametri ad suam peripheriam in decem notis demum accurata exsculpi possit, video mihi hanc peripheriam proximam tantisper concidendam, ne hinc quidquam lubrici nobis suboriatur. Atque ita agam

90 gr.	
45 gr.	
22 gr.	30 scr.
11 gr.	15 scr.
5 gr.	$37\frac{1}{2}$ scr.
2 gr.	$18\frac{3}{4}$ scr.
1 gr.	$98\frac{3}{8}$ scr.
0 gr.	$34\frac{11}{16}$ scr.
0 gr.	$17\frac{11}{32}$ scr.

quamobrem octava bisectione ad scrupuli unius quadrantem ut proximè est deventum. & ideo peripheria datæ inscriptæ debita etiam post octavam bisectionem istac esset minor. vides itaque opus primæ & secundæ propositionis huc advocandum. sed ne operis varietas novissimas notas in errorem impellat; opus ipsum ad taxationem diametri duodecim circulorum instituam, quas binas redundantes notas, ut abundantes, ad extremum deteram. Esto jam nobis semicirculus *aei* cui inscribatur *ei*, atque datæ subtensæ magnitudinem referat nempe 1, 39154, 70410, ad taxationem radii 100000, 00000, vel 139, 15470, 41000 ad taxationem radii 100, 00000, 00000. hinc in iisdem partibus dabitur inscripta complementi *ai* 143, 65224, 78942. bisecetur deinde peripheria *ei* in *o*, sitque inscripta com-



plementi *au*; atque id ita octies hoc casu continuatum intelligatur. Iam per propositionem secundam, si rectam ex inscripta *ai* & *ae* diametro per radium multiplices, facti latus erit inscripta *ao*, quæ subtendat peripheriam *ai* & præterea *io* reliquæ dimidium. addantur itaque *ae* & *ai*, harum summa 339154704100, per radium 100000000000 multiplicata efficiet 33915470410000000000000 quadratum inscriptæ *ao*, quæ hinc longitudine datur 184775-9065022. secundo si hæc inventa ad diametrum addatur, summa per radium multiplicetur, facti latus 19629948956-22 repræsentabit inscriptam *au*, quæ subtendit peripheriam *aio* & præterea *ou* semissem reliquæ *oue*. atque ita simili modo continuando dabitur 1990755185434 complementum tertiæ bisectionis: hinc complementum quartæ bisectionis 1997687459398: tum quintæ 1999421781265: inde sextæ 1999855440092; dehinc septimæ 199996444-0252: denique etiam octavæ bisectionis complementum 1999990964903, in quo novem ab initio quinquies continuatur, quod ex argumento propositionis 32 indicio est, hic peripheriam à sua recta ad radium decem circulorum ne quidem unico charactere peccare, sed eatenus ad amussim consentire. Etsi forsan in septima bisectione nihil ad decimam usque notam veritati decessisset, malui tamen in illam partem peccare, ut hoc exemplo numerorum securitati caveatur. sed istos numeros brevi syllabo complectar.

Data inscripta cujus peripheria quæritur	13915470410.00
Ejus complementum ad semicirculum	14365224789. 42
1. Inscripta complementi dimidiæ peripheriæ quæsitæ	18477590650.22
2. Inscripta complementi $\frac{1}{4}$ peripheriæ quæsitæ	19629948956.22
3. Inscripta complementi $\frac{1}{8}$ peripheriæ quæsitæ	19907551854. 34

Inscripta

4. Inscripta complementi $\frac{1}{16}$ peripheriæ quæsitæ 19976874593. 98
5. Inscripta complementi $\frac{1}{32}$ peripheriæ quæsitæ 19994217812. 65
6. Inscripta complementi $\frac{1}{64}$ peripheriæ quæsitæ 19998554400.92
7. Inscripta complementi $\frac{1}{128}$ peripheriæ quæsitæ 19999638596. 96
8. Inscripta complementi $\frac{1}{256}$ peripheriæ quæsitæ 19999909649.03

Porrò si jam septimæ bisectionis complementum 19999638596962 de diametro 20000000000000 deducas, & reliquum 36140304 per radium multiplices, hujus facti 361403040000000000000 latus 6011680630 erit per propositionem primam complementum bisectionis octavæ quantarum radius 1000000000000. & detritis novissimis duabus notis, quæ lubricæ sunt, erit ea 6011680630, quantarum radius 10000000000 initio erat propositus. His ita constitutis repetatur diagramma hujus propositionis primum, sitque illic *em* dimidium octavi complementi ad semicirculum 9999954824, & tota *am* 29999954824, & *nf* sit inscripta octavæ bisectionis paulo ante inventa 6011680630. unde proportio instituatur ut ante. quemadmodum *am* ad *nf*, ita *ai* radii triplum ad *vj* 6011689680, cui æquatur peripheria *nif*. Est igitur *vj* $\frac{1}{256}$ peripheriæ ad quam pertinet inscripta data. quare iste numerus per 256 multiplicatus dabit nobis optatam peripheriam datæ inscriptæ debitam, ad optatam diametri decem circulorum taxationem 1538992565 8. Atque inde facile erit si libebit eandem peripheriam ad gradus, minuta, secunda, etiam tertia & quarta revocare. Vt enim 31415926536 circuli semiperipheria secundum hujus semidiametri taxationem, ad inventam peripheriam 15389925658: ita 180 gradus ad $88\frac{1777832544}{10000000000}$. qui sunt 88 gr. 10 scr. 40 sec. atque ita porro in cæteris omnibus analogia consimili.

Cæterum ut te isto reductionis opere absque difficultate expedias, & datos gradus atque minuta in peripheriam, ad taxationem radii particularum 10000000000; vel contra, datam secundum hanc æstimationem peripheriam in gradus & minuta reducas canonion hoc tanquam πρόχειρον hic subtexu. tu si ita expedire videatur & jam ad majorem radium idem hoc & in majoribus numeris producito.

grad.	peripheria	min		sec.	
1	174,532,925	1	2,908,882	1	48,481
2	349,065,850	2	5,817,764	2	96,963
3	523,598,776	3	8,726,646	3	145,444
4	698,131,701	4	11,635,528	4	193,925
5	872,664,626	5	14,544,410	5	242,407
6	1,047,197,551	6	17,453,292	6	290,888
7	1,221,730,476	7	20,362,174	7	339, 370
8	1,396,263,402	8	23,271,057	8	387, 851
9	1,570,796,327	9	26,179,938	9	436, 332
10	1,745,329,252	10	29,088,821	10	484,814
20	3,490,658,504	20	58,177,641	20	969,627
30	5,235, 987, 756	30	87,266,462	30	1,454, 441
40	6,981,317,008	40	116, 355, 283	40	1, 939, 255
50	8,726,646,260	50	145, 444, 104	50	2,424,068
60	10,471, 975, 512				
70	12, 217,384,764				
80	13,962,634,016				
90	15,707,963, 268				
180	31, 415, 926, 536				

Vsus ignotus omnino esse non potest. Vt si quæratur inventa peripheria 1538992565 8, quot gradibus & minutis respondeat. hic primum constat eam esse quadrante minorem,

norem, majorem tamen gradibus 80; qua peripheria subducta reliqua est peripheria 1427291642, major 8 gradibus & relinquuntur 31028240, quæ major est 10 scrupulis, unde reliqua fiunt 1939419 quæ, peripheria æquat 40 secunda, ut proxime. formula operis ita habet.

	15389925658
gr. 80.	13962634016
	1427291642
gr. 8.	1396263402
	31028240
scr. 10.	29088821
	1939419
sec. 40.	1939255
	164

Atque hinc vicissim data peripheria in gradibus scrupulis & secundis, peripheria ipsi debita secundum expositam diametri taxationem inveniri possit. res exemplo non eget, cum ex analogia exposita per se sit manifesta.

Adeo grandes numeros adhibui, ut exemplo ostenderem, si fortè etiam ejusdem peripheriæ quantitatem ad majorem diametrum, & in plures circulos concissum usurpari opus sit, quomodo tutò & securè eò deveniri possit. fere enim, ubi bisectiones crebriusculæ erunt adhibendæ, nota una aut altera diameter auctior erit assumenda, quas notas postea recîdas. Sed hæc si quando summa λεπτολογίᾳ erit instituenda; alias, cum nulla tantæ diligentiæ caussa suberit, etiam minore labore istoc opere defungi possis.

Quamobrem ad peripheriam dato sinui debitam inveniendam, absque nullo canonum triangularium subsidio πρόχειρον *&* *compen-*

compendium utilissimum hinc derivari possit quod in scrupulis primis ne quidem hilum peccet. Cum enim è latere trigintanguli ratio diametri ad peripheriam in quinque circulis legittima detur, sinus autem è radio quinque notarum ad scrupulorum primorum semisses & quadrantes satis accurate dentur. etiam nos ex isto theoremate rem haud difficulter deducemus.

Principio enim omnibus datis sinibus, qui non majores erunt dimidio trigintanguli latere vel sinu 6 gr. Est autem hoc latus inscriptum majus quinta radii parte, & dimidium decima ejusdem. quamobrem in omnibus sinibus non majoribus decima radii parte veritas peripheriæ unica preportione concludetur, & inde amplitudo optata in gradibus & minutis dabitur. Exemplum tale esto. detur sinus 958457, *quantarum radius* 10000000, *quæritur peripheria eidem debita. sit in figura antecedente is sinus* nm, *ejus quadrato de diametri quadrato sublato dabitur sinus complementi ejus* em 9953962: *fiat itaque ut* em *plus diametro, id est tota* am 29953962, *ad* mn *datum sinuum* 958457, *ita tres radii* 30000000 *ad* iv, *hoc est* in *peripheriam* 959930. *quare fiat ut* 31415925 *semiperipheria ad* 959930 *inventam, ita* 180 *gradus ad* $5\frac{49999}{100000}$ *gradus hoc est* 5 *gr.* $29\frac{999}{1000}$ *scr. cum is sinus sit* 5 *gr.* 30. *scr. ut hic non una millesima unius scrupuli sit peccatum. Et qui potuit propius ad verum ipsum adiri, cum tabulæ ipsæ in ultima nota defectu aut excessu aliquo minimo peccent?*

Quin adeò, cum è quatuor & vigintangulo ratio diametri ad peripheriam ista detur quæ 100000 *ad* $314158\frac{1}{10}$, *cum debeat esse* $314159\frac{2}{10}$ *vides hic non integra unitate errari in tota: quamobrem jam inde infra quartam semiradii partem sinuum peripheriæ ad scrupulorum etiam sextantes accurate investigabuntur. Si majores dentur huc erunt revocandæ. Vt si detur* 9945219, *is cum propemodum radio sit æqualis, inveniam sinum dimidiæ peripheriæ, ut supra de inscriptis docui,* 6691306, *& rursum* 3583679, *deinde* 1822355, *denique* 915016, *hic minor est quarta im-*

quant

quinta parte dimidii radii, atque ideo quemadmodum antea est constitutum hic desinam, & ejus complementum inveniam, videlicet 9958049, *cui diameter addita dabit* 29958049. *hinc proportio ut supra, quemadmodum* 29958049 *ad* 915016, *ita* 30000000, *ad peripheriam huic ultimo sinui debitam* $916297\frac{1}{2}$, *cujus sedecuplum exhibet peripheriam dato ab initio sinui debitam* 14660760.

Hinc igitur fiat ut 31415925 *ad inventam peripheriam* 14660760, *ita* 180 *gradus ad* $83\frac{99971}{100000}$ *gr. vel* 83 *gr.* 59 *scr.* $58\frac{2}{10}$ *sec. cum hunc numerum ab initio propositum* 9945219 *exacte è tabulis pro sinu* 84 *gr. assumpserim. sed is error è calculi continuatione obrepsit in fine. neque tamen unum secundum scrupulum excedit.*

Hinc igitur constat maximi etiam cujusque sinus peripheriam ad secunda usque posse accurate explicari, quatuor radicum extractionibus ob bisectiones, & una ad complementi inventionem, denique duabus divisionibus: nam minutulas per unam aut alteram notam multiplicationes in hunc censum non advoco.

Si sit sinus 45 *gr. non major, tribus ob bisectionem extractionibus, & una ad complementi inventionem, & denique divisionibus duabus.*

Si sit sinus non major 22 *gr.* 30 *scr. duabus extractionibus ob bisectionem, una ad complementi inventionem, & divisionibus duabus.*

Si sit sinus non major 11 *gr.* 15 *scr. unica extractione ad bisectionem, unica ad complementi investigationem, & divisionibus duabus.*

Si sit sinus datus non major 5 *gr.* $37\frac{1}{2}$ *scr. unica ad complementi inventionem, & divisionibus duabus.*

Quamobrem Canonicis triangulorum tabulis destituto hoc est epichirema nobilissimum, & quoad ejus fieri potest brevissimum, ut tam accuratè tamen dati sinus peripheriam exhibeas, quam ipsæ tabulæ. Inventum sanè ab omnibus semper desideratum: sed *à nemine hactenus utiliter aut feliciter explicatum. Et quidem quod magis mirere ex ipsa ratione diametri ad suam peripheriam.*

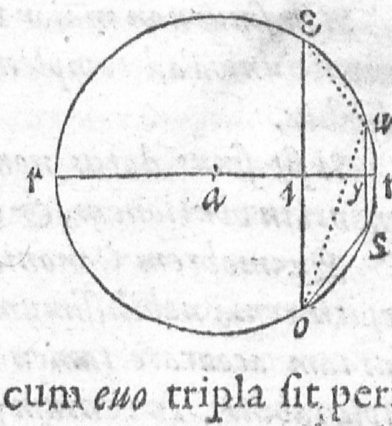
Neque ad modum difficile fuerit tangentes & secantes ad easdem leges revocare. Etenim non obscurum est quomodo data tangente ejusdem peripheriæ sinus inveniatur. atqui ex dato sinu peripheriæ quantitatem nunc explicatam habes. Idem de secantibus judicium esto.

Sed Archimedæam ἀκρίβειαν & diligentiam imitari etiam hic libet, ut in rebus majoris momenti præcisè constet secundum majorem & minorem terminum, quæ peripheria datæ adscriptæ debeatur. quam ad rem hujusmodi lemma prævium concipio.

LEMMA, *ad id quod sequitur.*

Triens sinus datæ peripheriæ minor est sinu trientis datæ peripheriæ.

SIt peripheria *euo*, cujus trientes *eu*, *us*, *so*; & sunto inscriptæ iis subtensæ itemque *ou*. quare *oe* minor est quam *eu* & *uo*; & *ou* minor quam *us* & *o* atque ideo *oe* multò minor quam *eu us so*. & propterea quoque *ei*, dimidia *oe*, minor omnium semissibus, hoc est triplo *uy*. Ptolomæus generaliter illud demonstravit lib. 1. c. 9. majorem esse rationem peripheriarum quam inscriptarum: unde



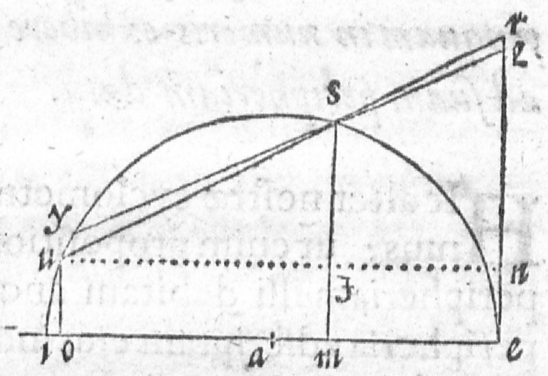
hoc quoque nobis assumere licuit; cum *euo* tripla sit peripheriæ

pheriæ *urs*, inſcriptam *eo* minorem eſſe tripla *us*; ſed ſpeciale iſtud Lemmation hic nobis ſufficiet.

PROPOSITIO XXXVII.

Si duorum ſinuum utrimque à centro eidem diametro perpendicularium ille hujus ſit triens, recta per eorum vertices lineæ in hoc diametri termino tangenti occurrens abſumet ſegmentum tangentis majus peripheria ſibi contigua.

IN ſemicirculo *esui* ſit *uo* ſinus, triens ipſius *ms*, & ſit contingens *el*. ajo rectam *usr* abſumere è contingente ſegmentum *er* majus peripheria *es*. Sit enim *iuy* peripheria triens peripheriæ *es*, & ideo major quam *iu* per lemma premiſſum. recta ab *y* per *s* continuata, donec tangenti occurrat in *l*, abſumet ſegmentum *el* majus peripheria *es* per propoſitionem 29, quare *er* eadem *es* multo erit major.

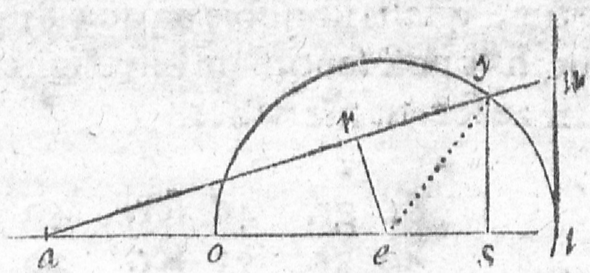


Hinc adeò dato ſinu dabitur peripheria major quam ipſi competat. ut in noviſſimo antecedentis theorematis exemplo ubi poſtulatur peripheria debita ſinui 9945219, *illic poſt quartam biſectionem deventum eſt ad ſinum* 915016, *is igitur eſto ſinus* sm, *hujus triens* uo 305005 : *ſinus complementi* sm *eſt* am 9958049; *ſinus complementi* uo *eſt* ao 9995347 *: quare tota* om *ſive* uj *dabitur* 19953396; *datur autem* sj *bes ipsius* sm, *vel dupla sinus* uo 610018. *Cum igitur triangula* ujs unr *ob parallesimum laterum* sj nr *similia sint, erit quemadmodum* uj 19953396 *ad* js 610011, *ita* un 19995347 *ad* nr 611293$\frac{1}{2}$; *hæc ad* en *addita dabit totam* er 916298$\frac{1}{2}$ *majorem peripheria* es; *quin &* er *per propositionem* 30 *daretur* 916297$\frac{901}{1000}$ *itidem major dicta peripheria* es. *peripheria autem proxime minor theoremate præmisso est inventa* 916297$\frac{1}{2}$. *vides itaque quam parum hæ notæ ad taxationem radii* 10000000, *à se mutuo abludant, ut vix unica unitate inter se distent; & id quidem in sinu* 5 *gr.* 15 *scr.*

PROPOSITIO XXXVIII.

Datæ cuicunque peripheriæ inscriptam veræ tam propinquam in numeris exhibere, quam erit ratio diametri ad suam peripheriam data.

HIc alter nostræ cyclometrices fructus est longe utilissimus: ut enim propositione 36 & 37 ex adscripta data peripheriam illi debitam anquisivimus; ita hic contra ex peripheria adscriptam ejus indagamus. Postuletur enim latus inscripti *millanguli*. Exponatur itaque semicirculus *oyi*, & detur *yi* peripheria pars totius circumferentiæ bismillesima; sitque *ao* intervallum radio æquale, & ad *i* reliquum diametri terminum excitetur perpendicularis circulum contingens *iu*, hinc recta ab *a* puncto per *y* educta occurrat tangenti in *u*. Iam per propositionem 28 & 31 *ui* proximè minor erit peripheria *iy*. & quia *iy* pars est totius bismillesima, illæ inter se ad diametri particulas 1000000000, ut



00, ut minimum consentient per consectarium propositionis 32. sit itaque sinus *ys* diametro *oi* perpendicularis, & à centro recta *er* perpendicularis in eductam *au* demittatur. Iam *iy* vel *iu* pars circumferentiæ bismillesima posito radio partium 100000, 00000 erit 62831853. est autem tota *ai* earundem 300000, 00000. Hinc cum *aiu* triangulum sit rectangulum, & *ai ui* crura anguli recti dentur, dabitur quoque ejusdem basis *au* 30000016449. Hinc ob similitudinem rectangulorum triangulorum *aui aer* erit, ut *au* 30000016449 ad *ui* 62831853, ita *ae* 20000000000 ad *er* 20943939. Inde è differentia quadratorum ab *ae* & *er* dabitur *ar* 1999989034: & è differentia quadratorum ab *ye* & *er* dabitur *ry* 9999978067. atque hinc tota *ay* 29999967101. Denique ob similitudinem triangulorum *aer ays* erit, quemadmodum *ae* 20000000000 ad *er* 20943939, sic *ay* 29999967101 ad *ys* 31415874, cujus duplum 62831748 latus inscripti millanguli. certè posita diametro 2000, 00000, 00000, idem esset partium 62831749717 minus vero, & 62831949718 majus vero. vides itaque illic tantum in ultima nota commissum. atque ideo si major aliqua diligentia requiratur diametrum una aut etiam altera nota majorem usurpandam, ne ille error ad optatos limites proserpat.

Atque ita quidem in isto nobis exemplo nulla fuit objecta mora, quo minus è vestigiò inscriptam imperatam assecuti simus. id enim ob peripheriæ exilitatem manifestum erat secundum positas leges ista exploranti omnino sequi debere. at verò si peripheria detur majuscula, cujus inscripta ad eandem radii taxationem 100000, 00000 postuletur,

letur, qualis sit nobis ea quæ 81 gr. 46 scr. 40 sec. subtendit, hæc post septimam bisectionem devolvetur ad 0 gr. 38 scr. 20 sec. ut hic vides.

81	gr.	46	scr.	40	sec.
40	gr.	53	scr.	20	sec.
20	gr.	26	scr.	40	sec.
10	gr.	13	scr.	20	sec.
5	gr.	6	scr.	40	sec.
2	gr.	33	scr.	20	sec.
1	gr.	16	scr.	40	sec.
0	gr.	38	scr.	20	sec.

Hic igitur ne quis error lubricitasve extremæ notæ ex operis hujus multiplici varietate nobis obrepat, utar diametro duabus notis majore 200, 00000, 00000. ad istam taxationem 0 gr. 38. scr. 20 sec. valent 1115071466 5; hujus igitur dimidium esto recta *ui* 5575357332. quare in triangulo rectangulo *aui* datis cruribus *ai* 300,00000,00000 & *ui* 5575357332 dabitur basis *au* 300000518 0764. & ob similitudinem erunt *au* 300000518 0764, *ui* 5575357332, *ae* 2000000000000, & *er* 3716898469 latera proportionalia. porrò autem ex differentia quadratorum *ae* & *er* dabitur quoque *ar* 1999996546163: itemque ex differentia *ye* & *er* dabitur *yr* 999993092309. unde tota *ay* conflatur 2999989638472. denique ob similitudinem *aer ays* triangulorum dabitur *ys* 5575328447 sinus 0 gr. 19 scr. 10 sec. atque ideo eadem *ys* duplicata dabit inscriptam 0 gr. 38 scr. 10 sec. 11150656894, Hinc, ut deinceps inscripta optata 81 gr. 46 scr. 40 sec. inveniri possit factio è propositionis secunda nobis erit deducenda, & complementum dati numeri erit inveniendum, quæ inscripta est 179 gr. 21 scr. 40 sec. 199,99689,15472. hujus quajus quadratum 39998756628542478809827 84 per radium 100000000000 divisum dabit 3999875662854. hinc diameter 200000000000 deducta relinquet 1999875662854 inscriptam subtensam datæ peripheriæ minus suo complemento, hoc est 178 gr. 43 scr. 20 sec. Inde eadem formula dabitur subtensa 178 gr. 43 scr. 20 sec minus suo complemento quæ est inscripta 177 gr. 26 scr. 40 sec. namque si inscriptam 178 gr. 43 scr. 20 sec. quadres, quadratumque per radium dividas, à quoto totam diametrum deducas, reliquus numerus 1999502666864 erit inscripta 177 gr. 26 scr. 40 sec. atque ita deinceps continuando devenies ad inscriptam 98 gr. 13 scr. 20 sec. 1511960851764: atque id est complementum datæ peripheriæ 81 gr. 46 scr. 40 sec. unde ipsa quoque datur 1309188844302 sed ipsas inscriptas inventas cum suis peripherijs hic subjicio.

peripheria			*inscripta.*
0 gr.	38 scr.	20 sec.	11150656894.
179 gr.	21 scr.	40 sec.	1999968915472.
178.	43.	20.	1999875662854.
177	26	40.	1999502666870.
174	53	20.	1998010914802.
169	46	40.	1992047615642.
159	33	20.	1968253702942.
139	6	40	1874022639094.
98	13	20.	1511960851778.
81	46	40.	1309188444302.

Atque ita inventa est optatæ peripheriæ inscripta ad taxationem diametri præscriptam. quantarum enim diameter est 200000,00000, tantarum est inscripta bene accurate vera 130918,84443. Certe si diameter assumatur partium

tium

tium 20000,00000,00000 inscripta 81 gr. 46 scr. 40 sec. subtensa major est quam 13091, 88444, 33140. minor autem quam 13091, 88444, 33141. vides itaque ob multiplicem operis varietatem diametro duabus notis auctiore opus fuisse quam initio proponebatur, ne ultimarum notarum lubricitas etiam in notam ultimam proserperet. si longius etiam ista bisectio continuanda esset, vt puta vicies triciesve, tres utique notæ omnino satis forent. vides itaque cuicunque peripheriæ inscriptam debitam hac via exhiberi posse, idque secundum imperatam diametri taxationem.

Quamobrem ad sinum datæ peripheriæ debitum inveniendum absque ullo canonum triangularium subsidio compendium ultissimum hinc derivari possit.

Cum è demonstratis jam toties citatis liqueat à latere inscripti trigintanguli peripheriam rectæ interceptæ ita proximè adæquari, ut non una centies millesima radij parte peccetur. sequitur si iy *vel* iu *statuatur graduum 6, aut etiam pauciorum, semper in istis ut minimum in* 100000 *radij particulis verum numerum addici. cujus rei nobis exemplum tale esto. postuletur sinus graduum 5. principio 5 graduum peripheria in partibus diametri* 2000000 *valet* 87266 *ut proximè. assumpsi autem diametrum una nota majorem, quam initio imperabatur, ne extremæ notæ lubricitas in antecedentes quoque redundaret. igitur ut ante factitavimus, in exposito intio diagrammate, sit* ui *recta æqualis peripheriæ quinque graduum, atque ideo partium* 87266. *& cum* ai *sit tripla radij dabitur tota* au 3001268. *atque inde proportio, ut* au *ad* ui, *ita* ae 2000000 *ad perpendicularem* er 58152. *huius quadratum ab* ae *quadrato deductum dabit nobis rectam* ar 1999154; *& idem de* ey *quadrato deductum exhibebit* yr *rectam* 998307: *unde tota* ay *conflatur* 2997462.

Tumque ad extremum fiat, quemadmodum ae 2000000 *ad* er 58152, *ita* ay 2997462 *ad* ys 87154 *sinum optatum, qui competit*

petit peripheriæ graduum 5. certe posita diametro 10000000 datur ejusdem sinus è tabulis 871557. vides itaque nihil à nobis commissum ad taxationem radij quinque notarum.

Si forte sinus majoris peripheriæ quæratur opus erit eius bisectione, ut exemplo antecedente fuit exhibitum. verbi gratia detur peripheria 21 gr. cujus sinus quæratur ad radium 100000, itaque assumatur primum peripheria 10 gr. 30 scr. tum 5 gr. 15. scr. & hujus sinus quæratur. inde illorum, opere retrogado. Sed cum hoc quoque haud parum molestiæ & difficultatis habeat, aliam excogivimus viam, quæ usque ad 22 gr. 30 scr. primo impetu hos sinus legittimos exhibeat, neque ulla bisectione utatur. unica igitur bisectione, aut complementorum investigatione ad radium 100000, omnes sinus bene accurate deciduntur. Atque illud epicherema peculiari theoremate, quod hunc librum claudit, complexi sumus. atque ista de sinuum investigatione nunc dicta sufficiant.

Poterunt autem ordinatarum quoque omnium figurarum latera hoc modo tuto & constanter hinc definiri ad optatam diametri taxationem: quam diu enim ut minimum in notis inventis non percetur propositione 32 & eiusdem consectario fuit definitum, itaque cum terminus hoc modo inventus semper sit proxime minor, sequitur utique si illum locum unitate augeam mihi dari necessario terminum proximè majorem: quemadmodum tot exemplorum inductione illic jam patuit. Atque ita vitatis intricatissimarum æquationum scopulis, & earundem, ἀμφιβολίαις licet nobis accuratè & secure, inscriptam & peripheriam suam reciproce invenire, Quam enim pertentosus labor (ut trisectionem & quintusectionem nunc omittam) ex peripheriæ in septem, undecim, tredecim alijsque primorum numerorum sectionibus existat, ijs qui huic labori pertinacius affixi hæserunt haud ignotum esse potest. Et cum jam exemplorum abunde sit, duntaxat aliquot polygorum latera immani labore à nostro Ludolpho investigata hic adscribam. tu si libet eadem secundum posita præcepta quoque indigato.

Latera polygonorum inscriptorum quantarum diameter erit 20000,00000,00000.

Polygona.		Polygona.	
3	17320508075688 7	42	14946018717284
4	141421356237309	43	14599062932181
5	117557050458494	44	14267836639846
6	100000000000000	45	13951294748825
7	86776747823511	46	13648482672934
8	76536686473017	47	13358526749024
9	68404028665133	48	13080625846028
10	61803398874989	49	12814043996142
11	56346511368285	50	12558103905862
12	51763809020504	51	12312181226788
13	47863132857511	52	12075699484457
14	44504186791262	53	11848125578742
15	41582338163551	54	11628965785095
16	39018064403225	55	11417762161551
17	36749903563314	56	11214089447438
18	34729635533386	57	11017552071173
19	32918918056146	58	10827781717083
20	31286893008046	59	10644434968435
21	29808453235234	60	10467191248588
22	28462967654657	61	10295750954069
23	27233329819249	62	10129833767742
24	26105238444010	63	9969177132139
25	25066646712860	64	9813534865483
26	24107336051064	65	9662759051014
27	23218582850460	66	9516383164748
28	22392895220661	67	9374452493988
29	21623803684788	68	9236691729147
30	20905692653530	69	9102919826592
31	20233664397486	70	8972966970063
32	19603428065912	71	8846669345075

33 | 190

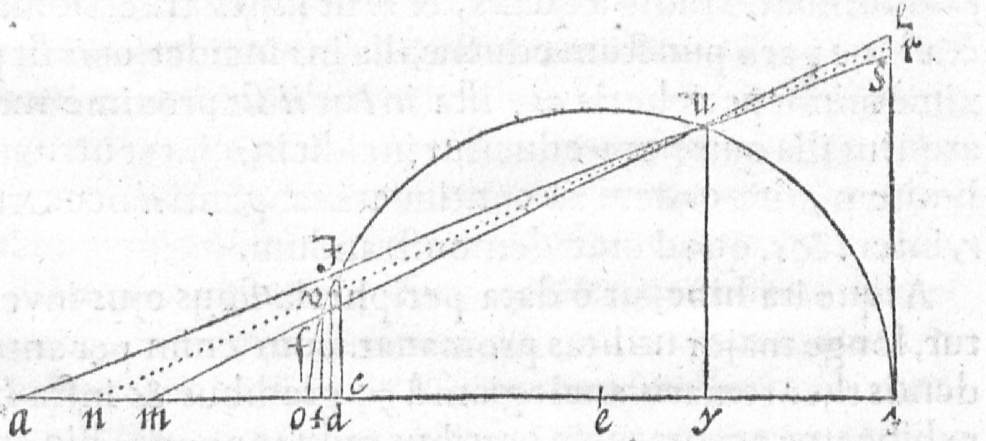
33	1901120866083 6	72	8723877473067
34	18453671892660	73	8604446600906
35	17927861780608	74	8488240639229
36	17431148549531	75	8375130745839
37	16961184895101	76	8264994849762
38	16515869094466	77	8157717212317
39	16093313743345	78	8053188021883
40	15691819145568	79	7951303019385
41	15309850567299	80	7851963151813
		81	7755074251363

Ad extremum aliquid hactenus positis accuratius hic quoque tentare libet & huic negotio finem imponam.

PROPOSITIO XXXIX.

Si trienti datæ peripheriæ sinus æqualis ultra centrum constituatur, recta utriusque verticem connectens & continuata occurret diametro continuatæ intra limitem trisectionis & diametri continuationem radio æqualem.

SIt semicirculus *iuo* cujus diameter *io* continuetur in *a* radio æqualiter, & assumatur peripheria *iu*, cujus sinus



sit *uy*, rectaque *um* ita sit educta ut *mf* radio æquatur. itaque *m* punctum per propositionem 25 erit limes trisectionis

nis peripheriæ datæ *uy*, & *fo* peripheriæ ejusdem triens: porrò recta ab *a* puncto ad *u* connexa absumet *jfo* peripheriam majorem triente *ui* per propositionem 22. eademque cum *il* tangente concurrat in *s*; si igitur ad *o* quoque tangens alia excitetur donec *aj* intersecet, ea æqualis erit trienti *ir*; est enim *ao* triens totius *ai*. cumque *ir* proxime secundum definitos nobis limites æquetur peripheriæ interceptæ *ui*, sequitur *cj* sinum in iisdem terminis majorem esse triente peripheriæ *ui*; atque ideò si assumatur peripheriæ *ui*, vel ipsius *ri* triens, ille major erit sinu *tf*, minor autem sinu *je*; ea igitur nobis esto *vd*. cujus vertex *v* inter *f* & *j* intercidat. quare recta ab *u* per *v* educta in *n* inter *a* & *m* limites intercidet.

itaque

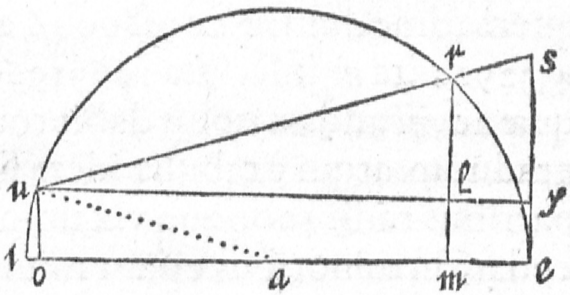
Si trienti datæ peripheriæ sinus æqualis ultra centrum constituatur, recta tangenti in datæ peripheriæ termino occurrens absumet lineam majorem illa quæ rectæ à termino radii continuati, minorem verò ea quæ recta à limite trisectionis educta intercipitur.

Res ex antecedente demonstratione plana est. sit enim *oa* continuatio radio æqualis, & *m* sit limes trisectionis, rectæ hinc per *u* punctum eductæ, illa in *s* incidet, ut *ir* sit proximè minor peripheria *ui*, ista in *l* ut *il* sit proximè major: atqui ut illa quæ per *v* educitur incidit in *n*, inter utrumque limitem, ita eadem *nu* continuata tangenti *il* occurret in *r*, inter *l* & *s*. quod erat demonstrandum.

Atque ita hinc, ut è data peripheria sinus ejus inveniatur, longe major utilitas promanat. cum enim per antecedentis theorematis analogiam à $7\frac{1}{2}$ gradibus & infra sinus exhibeatur accuratus in partibus radii 1000000, hic etiam eadem veritas & ἀκρίβεια inde à decimo quinto gradu existet.

Quin

Quin adeo, quod majus est, jam inde à sinu 30 graduum in partibus radii 10000 non integra particula verum excedit. Sed utriusque generis exempla proponantur. Sit *ae* radius 1000000, *er* peripheria 30 gr. pars ista ad diametri taxationem revocata erit particularum 523598, cui æqualis sit recta *es*, hujus triens 174532 ut proximè, inter hujus & radii quadratum differentia 969538580976, cujus latus 984651 erit ipsa *ao* sinus complementi. jam quadratum ab *oe* tota 1984651 & *ys* $\frac{2}{3}$ ipsius *es* dabit quadratum *us*, & inde ipsam *us* longitudine 2017346. Sed compendio utrumque quadratum *oe* & *ys* inveniri potest, quadratum enim *ao* additum ad



quadratum radii *ae* plus duobus rectangulis *oa in ae* dabit quadratum ab *oe*, præterea cum *ys* dupla sit *uo* quadratum illud hujus erit quadruplum. & quadratum ab *es* quadrati ab *uo* noncuplum.

Hinc *es* tangentis quadrato per totam *us* divisio quotus erit *rs* 135897; unde reliqua inscripta *ur* datur 1881449. Atque inde, & ob similitudinem triangulorum *usy url*, ut *us* 2017346 ad *sy* 349065, ita *ur* 1881449 ad *rl* 325550, quæ ad *lm* trientem *es* addita dabit totam *rm* 500082 sinum 30 graduum, quantarum radius 1000000. vides itaque hic posito radio partium 10000 sinum fore 5000$\frac{82}{100}$, ut non una decies millesima radii à vero abeamus diversi. Quamobrem si quando hoc satis sit ad trigesimum gradum hæc via constans erit, & si complementa hinc inquiras, etiam supra sexagesimum. ut in gradibus intermediis tantum unica peripheriæ subdivisione opus sit. quemadmodum præmisso theoremate explicavi.

Secundo ſit in eodem diagrammate *er* peripheria 15 graduum, cujus ſinus quæratur in partibus radii 1000, 00000. Erit itaque *es* pars peripheriæ quarta & viceſima earundem 26179938. & *ye* vel *uo* ſinus hujus triens 8726646, unde ſinus complementi *oa* datur 99618500. hinc è quadrato *uy* & *ys* quadrato dabitur longitudine *us* 200380046; deinde quadrato tangentis *es*, quod noncuplum eſt quadrati *ou*, per *us* diviſo dabitur ſegmentum exterius *rs* 3420446. unde inſcripta *ur* datur 196959600. Atque hinc proportio: quemadmodum *us* 200380046 ad *sy* (beſſem totius *es*) 17453292; ita *ur* inſcripta 196959600, ad rectam *rl* 17155368, quæ ad *ml* addita nobis dabit totam *mr* 25882014 ſinum 15 graduum. atqui è tabulis idem ſinus datur 25881904; ut in partibus radii 1000000 vix unica unitate verum ſinum excedat, in minoribus etiam minus.

Si *es* vel *er* peripheriam, totius circuli partem ſextamdecimam ſtatuas, qui ſunt gradus 22½. jam vel hinc uſque in partibus radii 100000, ne quidem unicam unitatem aberrari certum quoque eſt. Quamobrem ſi in peripheriis majoribus quam 45 gr. complementa quoque adhibeantur, unica biſectione ſinum optatum ad quinque notas uſque adſequeris. Quod utique notaviſſe fuerat operæ pretium.

Vides itaque ſinum *rm* hoc modo inventum majorem eſſe quam illle qui competat poſitæ peripheriæ: atque ideo peripheriam *re* majorem quoque eſſe quam illam, quæ ſit propoſita. quare peripheria *er* pauxillo aliquo major eſt, quam ſit *es* contingentis interſegmentum. nam & illud quoque monere haud abs re eſſe exiſtimavi. Atque hic tandem Cyclometricorum elementorum finis eſto.

FINIS.

AD V. CL.

WILLEBRORDVM SNELLIVM
ejusque Cyclometriam.

TV circinoque circuloque præpotens
Versator artis Archimedeæ, facis
Quæ nullus ante prodidisse noscitur:
Stagira quondam quem Lyceo tradidit
Quæsivit ista, seduloque hæc egerat,
Dum curva quadris quadra mutat orbibus;
Sed hic quid arte possit aut industria
Vel mente docta calculoque perfici
Quæsivit ille, præstitit sed SNELLIVS.

IOH. ISACIVS PONTANVS.

APPENDICVLA,

ET

CYCLOMETRICES VSVS.

VIdebar jam munere meo defunctus, & ſatis oportunè omnia explicuiſſe; non ignarus induſtrium lectorem multa hinc cum ad numerorum logiſticam, tum etiam ad Geometricam factionem poſſe traducere; neque ideo neceſſe exiſtimabam iſta pluribus verboſe inculcare: ſed aliorum judicio & petitioni mihi hic quoque fuit obſecundandum; maximè voluntati viri Nobiliſſimi D. Ioannis à Mathenes Domini in Opmeer, qui mirifice harum artium cognitione afficitur: neque quidquam adeò reconditum in iſtis exiſtimat, quod non ſummam voluptatem cum pari utilitate habeat conjunctam. Is igitur ita judicabat, cum etiam alia theoremata his noſtris eſſent permixta, quæ ad conſequentium πίστωσιν & demonſtrationem adhiberentur, ad uſum autem ex ipſa cyclometria derivandum non eſſent neceſſaria: haud male me operam collocaturum, ſi, quemadmodum iſta noſtra cyclometria illis neglectis ad praxin traduci poſſet, quaſi digito intento demonſtrarem: ut ſimul, quidnam noſtro labore & induſtria præſtitum eſſet tanto planius liqueret. Et, ut ingenuè fatear, ludum hunc ludere mihi quoque volupe fuit. Neque tamen omnia selegi quæ hinc exprimi poterant; sed pauculis istis contentus, plura tibi nostro exemplo tuo usui derivanda reliqui, cujus generis sunt ista.

Datis quotcunque etiam diversorum circulorum sectoribus, sectionibus, triangulis, geometrica factione integrum circulum, vel circuli partem definitam ijs æqualem exhibere.

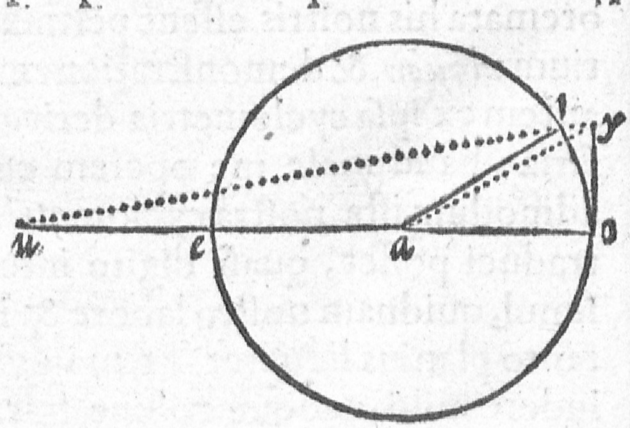
Data ratione peripheriæ ad suam subtensam (cum ea non major erit radio circuli) & peripheriam & subtensam invenire.

Atque alia hujus generis infinita, quæ hinc facillime & expeditissime derivari possunt. Tu itaque, benigne lector, si quid hic sit quod te quoque oblectet, illi imputato, cujus impulsu hoc auctariolum, tanquam mantissa operi cyclometrico accessit.

I. PROBLEMA.

Triangulum dato sectori æquale construere. & contra.

DAtus esto sector *aoi*, & per cyclometrici propositionẽ 34 fiat *oy* tangens peripheriæ *oi* æqualis. & si *oi* sit $\frac{1}{12}$ totius, jam ejus quantitas in tangente expressa erit iis terminis, quæ est diametri peripheriam 100 ad 314. si in istis artionem æqualitatem postules bisectur *io*, & secundum leges



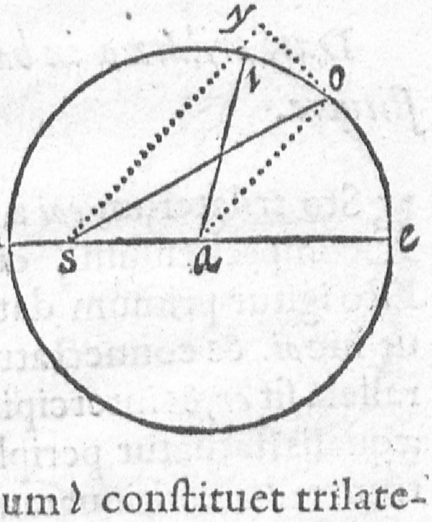
positas

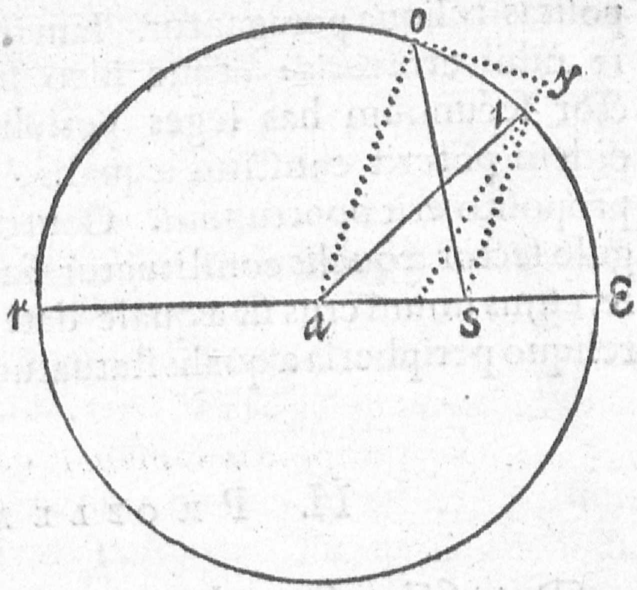
positas reliqua peragantur. Iam in ratione 10000 ad 314-15 nihil erraveris: atque ideo si majusculus detur sector secundum has leges peripheria bisecari & recta eidem poterit constitui æqualis, quemadmodum operi proposito erit oportunum. Contra autem, ut dato triangulo sector æqualis constituatur, fiat triangulũ dato æquale, cujus unum crus sit æquale dati circuli radio, & cruri reliquo peripheria æqualis statuatur per propositionem 34.

II. PROBLEMA.

Dato sectori super data peripheria æquale trilaterum construere.

OPortet autem sectorem datum non esse minorem sectione à data peripheria & ejus inscripta comprehensâ. Exponatur sector *iae* & detur peripheria *oe*, major an minor data nihil interest, constituatur igitur per propositionem antecedentem triangulum *ayo* æquale sectori *iao*. & per verticem perpendicularis *y* parallela contra *ao* radium secet *ae* diametrum in *s*. recta *so* connexa comprehendet trilaterum *ose* dato sectori *iae* æquale: namque *aoi* sector triangulo *aos* æqualis additus demptusve (prout *o* punctum datum extra aut intra basin dati sectoris erit situm) constituet trilaterum *ose* dato *iae* æquale. Et quidem tam proxime quam





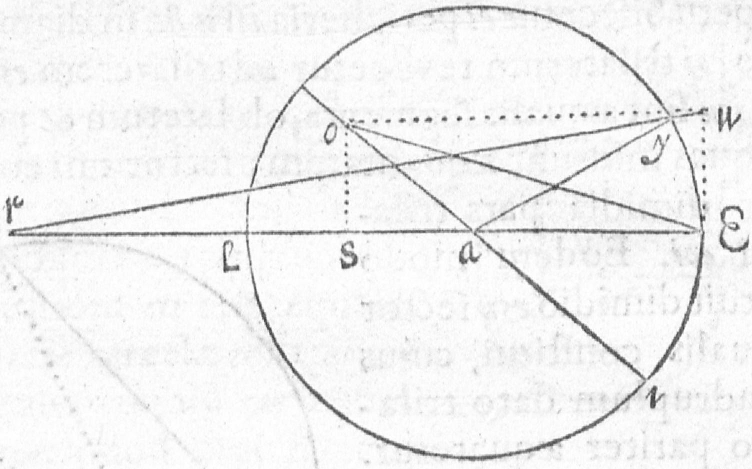
circuli amplitudo id sinet. ut propositione superiore expressum fuit. Hæc altera est mechanice, quam ita geometrice ab ulla alia quadratione frustra expostules. Nam helicum ratio omnino & morosa, & ob suæ delineationis perpetuos amfractus ad hujusmodi explicationes inepta est. ut hic rem longe ante perfectam habeas, quam illi suam helicen adornent & exprimant.

III. PROBLEMA.

Dato trilatero in basi circulari æqualem sectorem constituere.

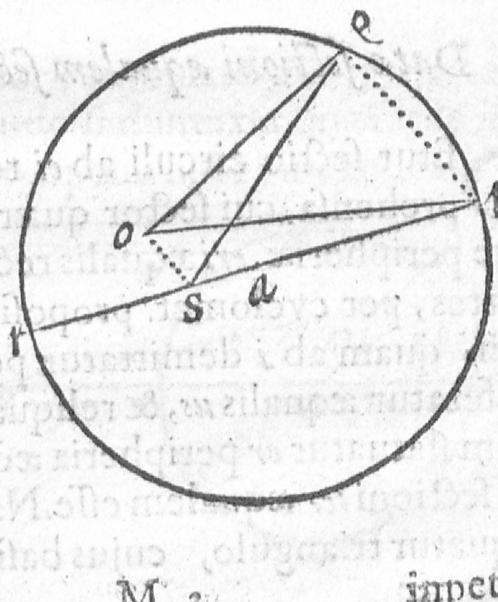
Esto trilaterum *eoi* à basi circulari & rectis duabus *eo oi* comprehensum, cui sector æqualis sit exhibendus; Esto igitur primum datarum altera segmentum diametri, ut hic *oi*. & connectatur radius *ae*, cui per punctum *o* parallela sit *or*, & intercipiat segmentum tangentis *ue*, huic *ue* æqualis statuatur peripheria *ye*. nam recta ab *u* ad *r* diametrum radio continuatam connexa absumet peripheriam *ye* æqualem datæ rectæ *ue*. per cyclometrici propositionem.

34 Ajo

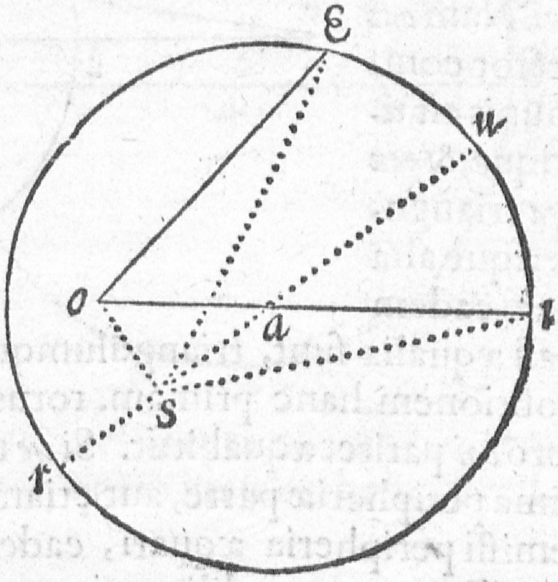


34 Ajo *yai* sectorem ęquari trilatero dato *eoi*. Nam *eai* sector communis est utrique, & *oea eua* triangula æque alta & in eadem basi æqualia sunt, triangulumque *eua* sectori *yae* per propositionem hanc primam. totus igitur sector *yai* toti trilatero *eoi* pariter æquabitur. Si *ue* recta major fuisset duodecima peripheriæ parte, aut etiam medio radio, potuit ejus semissi peripheria æquari, eademque duplicata toti. aut pro illa accurata diligentia, quam in hoc opere exiges. Idem de sequentibus quoque dictum intelligatur.

Secundo si neutra rectarum *oe oi* per centrum transeat, ut hic. sit igitur ab termino *i* recta *ia* per centrum, & contra basi inscriptam *ei* parallela per *o* verticem educta secet diametrum in *s*, tum rectæ connexæ *es si* comprehendent spatium *esi* dato *oei* æquale: quia *esi eoi* triangula æquealta in eandem basin insistunt.



Aut si malis & accuratius omnia velis exsequi uno impetu bisecetur *ei* peripheria in *u* & sit diameter *ur*. tumque *eoi* trilaterum revocetur ad trilaterem *esi*. cum igitur *esu isu* sint æqualia segmenta, ob laterum & peripheriarum in quas insistunt æqualitatem, sector uni eorum æquatus erit dimidia pars trilateri *eoi*. Eodem modo potuit dimidio *esu* sector æqualis constitui, cujus quadruplum dato trilatero pariter æquaretur. Sed istud opus consectaberis pro ea quam postulas ἀκριβείᾳ ita enim non $\frac{1}{100000}$ partem in hoc circulo, imò eo etiam adhuc minus, peccabitur.

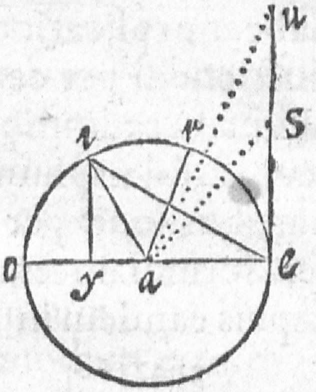


IV. PROBLEMA.

Datæ sectioni æqualem sectorem constituere.

DEtur sectio circuli ab *ei* recta & peripheria *eri* comprehensa, cui sector quæratur æqualis. statuatur itaque peripheriæ *eri* æqualis recta *eu*, seu tota simul, sive per partes, per cyclomet. propositionem 34, & sit diameter *eo* in quam ab *i* demittatur perpendicularis *iy*, cui ab *ue* auferatur æqualis *us*, & reliquæ *es* per eandem propositionem statuatur *er* peripheria æqualis. Ajo sectorem *rae* datæ sectioni *ier* æqualem esse. Namq; area totius sectoris *iae* æquatur triangulo, cujus basis peripheria, altitudo sit radius,

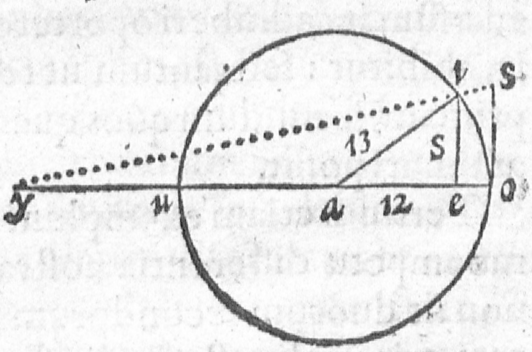
dius, per ea quæ ad Cyclomet. prop. 19. nobis dicta sunt: triangulum autem *eia* æquatur triangulo cujus basis sit perpendicularis *iy* & altitudo itidem radius *ae*. si igitur à triangulo *uae* tollatur triangulum *uas*, reliquum triangulum *sae* sectioni *eir* erit æquale. & cum peripheria *er* rectæ *se* sit posita æqualis, triangulum quoq; *sae* æquabitur sectori *rae*. quod erat faciendum. vides itaque solo linearum ductu quoque tam prope hic ad verum haud difficulter accedi, quam cuique erit oportunum.



V. PROBLEMA.

Datis trianguli rectanguli lateribus ejus angulos invenire.

SIt triangulum rectangulum *aei*, cujus latera *ai* 13 *ae* 12. *ei* 5. hujus angulorum amplitudo si duntaxat quæratur in scrupulis primis facilem & promptam habebit explicationem. namque centro *a* intervallo *ai* circulus describatur, & *ou* dimeter radio æqualiter continuetur in *y* recta *yis* continuata absumet *os* tangentem, æqualem peripheriæ *oi* ut proxime, per propositionem



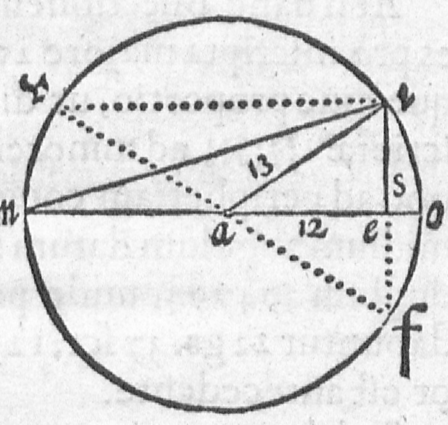
ſitionem cyclometr. 38. Sed ut ea peripheria faciliorem habeat explicationem, & ad gradus ac ſcrupula ſua reductionem per canonion propoſit. 36. pag. 70. poſitum, aſſumam radium partium 10000000; & fiat ut *ye* 38 ad *ei* 5, ita *ao* radij triplum 30000000 ad *os* 3947368 in iiſdem radii partibus. quæ per dictum canonion reſpondent 22 gr. 37 ſcr. formulam ſemel omnino hic exprimam ne ſit neceſſe ſæpius eandem in ſequentibus iterare. hoc modo erit.

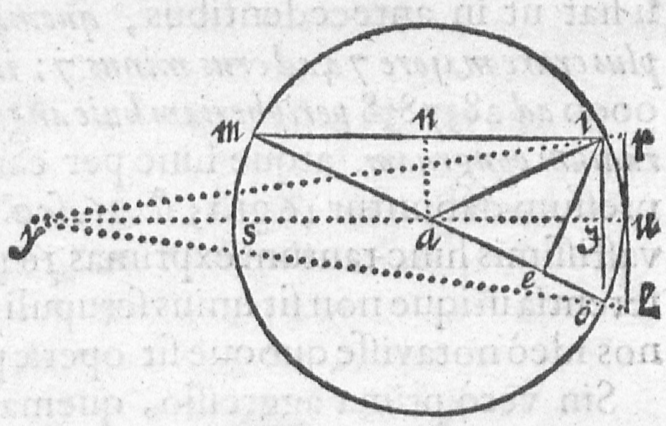
3947368	
3490658	20 gr.
456710	
349066	2 gr.
107644	
87266	30 ſcr.
20378	
20362	7 ſcr.
16	

itaque amplitudo anguli *eai* iſta eſt quam dixi 22 gr. 37 ſcr. quæ per tabulas ſinuum ſeptem nontarum etiam ſcrupuloſiſſimè ſcrutanti invenitur 22 gr. 37. ſcr. 11½ ſec. ut non abſis ab iſta ſcrupuloſa inveſtigatione unius ſcrupuli primi parte quinta. quæ differentia perquam exigua eſt, & omnino contemnenda. atque hinc jam acutus reliquus dabitur ſatis accuratè 67 gr. 23 ſcr. Quin adeo ſi vel unum ut proxime minutum etiam negligi poſſit, jam è triangulo rectangulo cujus latera erunt 3. 4. 5. acutus minimo cruri oppoſitus dabitur 36 gr. 50. ſcr. cum verus angulus vix ſit 36 gr. 52 ſcr. ut hic primo impetu vix primis duobus ſcrupulis à vera quantitate abſis. neq; adeò hoc ideò adfero, quod exiſtimem iſta ad uſum ita adhiberi oportere, cum integris ſcrupulis à vero abibitur: ſed tantum ut terminos rationis minimos exprimam, ſecundum quos quam prope ad verum accedatur æſtimari poſſit.

Tertium etiam exemplum huc libet aggregare, ubi primo impetu differentia noſtra à tabulis etiam vaſtiſſimis non ſit duorum ſecundorum ſcrupulorum. ut in iſto. ſi latera trianguli rectanguli aſſumantur 25. 24. 7. Hic itaque ſi fiat ſi fiat ut in antecedentibus, *quemadmodum duplum baſis plus crure majore 74 ad crus minus 7; ita triplum radij* 30000000 *ad* 2837838 *peripheriam huic angulo ſecundum expoſitum radium congruam.* atque hinc per canonion pagina 70 expreſſum dabuntur 16 gr. 15 ſc. 36. ſec. cum è tabilis ſinuum vaſtiſſimis hinc tantum exprimas 16 gr. 15 ſcr. $36\frac{3}{4}$ ſc. ut differentia utique non ſit unius ſcrupuli ſecundi, quos terminos ideò notaviſſe quoque ſit operæ pretium.

Sin verò prima aggreſſio, quemadmodum è terminis expoſitis liquere poteſt tibi omnino non ſatisfaciat, utendum erit peripheriarum biſectarum inſcriptis & earundem complementis, ſecundum leges prima & ſecunda propoſitione expoſitas. ſed exemplo res erit illuſtrior. ſit *aei* triangulum datum cujus latera *ai* 13, *ae* 12, *eis*. hic primum centro *a* intervallo baſis *ai* deſcribatur circulus, & ſit diameter *om*; jam per propoſitionem ſecundam, inveniatur inſcripta *vo* ſeu *mi*; (namq; ſi *vi* 24 quæ dupla eſt *ae* lateris 12,) addatur ad diametrum *mo* 26 totus 30 per radium *am* 13 multiplicatus exhibebit factum 650, æqualem quadrato inſcriptæ quæ peripheriam *vi* & *io*, hoc eſt *vo* ſimul ſubtendit, nempe *mi*, atq; inde ipſa *mi* dabitur 25 $\frac{49609}{100000}$, hoc primum. Tumque *vi* 24 de *vf* ſubducta relinquet 2, quæ per radium 13 multiplicata dabunt 26 pro quadrato inſcriptæ *io* per propoſit. primam, unde ipſa dabitur 5 $\frac{9902}{100000}$ partium. Iam rurſum in hoc altero diagrammate *aei* eſto rectangulum triangulum eadem laterum quantitate; & biſecetur peripheria *oi* in *u*, & continuetur *us* diameter radio



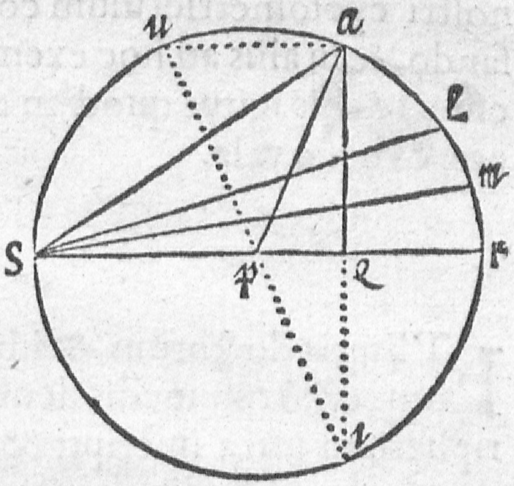


dio æqualiter in *y*. cum igitur *aj* perpendicularis ſit dimidia inſcriptæ *mi*, ea quoque dabitur earundem partium $12\frac{74754}{100000}$. hinc itaque fiat, ut prius, quemadmodũ diameter plus *aj* $38\frac{74754}{100000}$ ad $\frac{50962}{100000}$, ita *yu* 3000000 in partibus radij ad 394788 peripheriam quæſitam in partibus radij 1000000, inde ex canonio ante citato peripheria eadem dabitur 22 gr. 37. ſcr. 5. ſec.

At ſi hanc biſectionem adhuc ſemel continues invenies pro inſcripta majore $25\frac{87346}{100000}$ & pro minore $2\frac{56200}{100000}$. atque hinc proportio, ut diameter plus ſemiſſe majoris inſcriptæ $38\frac{93673}{100000}$ ad minorem $\frac{256200}{100000}$, ita radij triplum 3000000 ad peripheriam congruam 197397, quæ ſubtendit dimidium angulum datum in partibus radij 1000000; cujus duplum 394794, unde per canonion προχειρον paginæ 70 dabuntur 22 gr. 37 ſcr. 12 ſec. tantillo hic modus accuratior eſt antecedente.

Sed huius veritatem etiam alterius anguli quantitate inveſtigata libet explorare. ſit igitur etiam in iſto diagrammate perpendicularis *ae* 12, alterum recti crus *pe* 5, *ap* 13, & quærenda ſit amplitudo anguli acuti *epa*. inveniatur igitur ante recta *sa* $21\frac{63331}{100000}$, & biſetur pheripheria *ar* in *l*, & inveniatur inſcripta *sl* $24\frac{88439}{200009}$, & eodem modo recta *sm* $25\frac{71958}{1000000}$, biſecans peripheriam *lr* in *m*. ex *sl* autem per primam cyclometr. propoſitionem dabitur inſcripta *mr* $3\frac{30827}{100000}$. Atque hinc tandem proportio quemadmodum diameter 26 plus dimidia inſcripta *sm* $12\frac{85979}{100000}$ hoc eſt

$38\frac{85979}{100000}$



38 $\frac{89979}{100000}$ ad *mr* 3 $\frac{80827}{100000}$, ita tres radij 30000000 ad peripheriam *mr* 2940007 in iisdem istis radii partibus, cujus quadruplum pro tota peripheria *ar* 11760028, cui ex dicto canonio respondent 67 gr. 22 scr. 48 sec. pro angulo *aie*. atqui angulus alter *iae* ante inventus fuerat 22 gr. 37 scr. 12 sec. vides itaque accuratum utriusque partis consensum ne quidem in ipsis secundis desiderari. certè si unicam duntaxat bisectionẽ utrobiq; & hic & illic ultra continuare collibitum fuisset, omnium canonum quantumvis accuratissimam diligentiam nos non tantum in ipsis tertiis æquare verum etiam superare potuisse manifestum est. Vt istam laudem jure meritissimo noster cyclometricus tanquam propriam sibi vendicet.

VI. PROBLEMA.

Datis trianguli rectanguli angulis oppositorum laterum rationem invenire.

ID satis clarè propositione 38, & accuratius adhuc propositione 39 à nobis fuit propositum. itaque eo nobis ablegandus es, ut nihil videatur hoc quidem in genere excogitari potuisse planius, atque adeò facilius. tuum igitur erit (lector benevole) ista legendo & meditando tibi efficere utilia. & quemadmodum in his non ignobilem nostri cyclometrici usum commonstravi, ita eundem versando, & in aliis ad hoc exemplar exercendo illustriorem efficere. his igitur quod in commodum tuum vertat fruere, & bene vale.

ET literis doctorum, & libris jam publicatis ad me relatum est Archimedis demonstrationem, qua circuli peripheriam intra inscripti & circumscripti polygoni perimetrum concludit, tanquam bene geometricam, viris in hoc docto erudito pulvere accurate versatis probari quidem; sed eosdem tamen moveri, minus solidis argumentis, ut in eiusdem numerorum ratiocinio nescio quid desiderent, quod lateris quadrati investigatio in numeris non quadratis semper sit imperfecta: atque ideo ex istis erroribus, qui in singulis quidem negligendi & parvi videantur momenti, ad extremum tamen multiplici extractionũ labyrintho summulam conflari haud aspernandam. Hanc nempe igitur unam ob causam istos limites ab ipso præstitutos tanquam minus certos in dubium vocant; quod ipsum quoque haud dubio longe maximum momentum habere existimant, cum numeri irrationales & ἄῤῥητοι, quibus polygonorum adscriptorum latera explicantur, ad explicabiles per suas decimas centesimas aut millesimas revocantur. Sed istam sollicitudinem ipsorum animis eximere debuit Triangularis canonis constuctio, quo iidem adeò securè utuntur. Nam cum non sint nescii Regiomontanum primum eam per tot numerorum ambages circumductam ad novem notas initio construxisse, & novissimos duos characteres ob lubricitatem & incertitudinem duntaxat detrivisse: hunc tamen canonem tanquam

lydium

lydium lapidem, & arbitrum nunquam fallacem ad quæsiti ignorati solutionem adhibent. Quamobrem vel istinc ipsis polygonum quodvis licuit excerpere, & cum ista surdorum numerorum analysi comparare; &, si numeri utrique semper inter se congruant, profecto jam de analyseos veritate amplius dibitare fas non erat.

Sed libet hanc rem paulo altius arcessere, & causam ipsam plane ac perspicuè ante oculos ponere. Sit itaque latus sedecanguli propositum $\sqrt{.2 - \sqrt{.2 + \sqrt{2}}}$, qui numeri ad absolutos & explicabiles sint revocandi. Latus ultimi numeri 2 si ad 100000000 reducatur erit 141421356 vel $1\frac{41421356}{100000000}$ ut proximè, minus vero; de isto enim apud peritos & hujus modi gnaros nulla potest esse dubitatio. In succedente autem, quia hic inventus numerus secundum vinculorum leges ad 2 iterum addendus, & rursum latus hinc est investigandum, occasio dubitationis aliqua suboriri videatur, summa igitur ex utroque conflata $3\frac{41421356}{100000000}$ ad 100000000 millesimas quadratas reducta erit 3414213560000000, cujus latus 184775906, vel $1\frac{84775906}{100000000}$ idem omnino erit, cum eo numero, qui existeret si priorem extractionem ad duplo plures decumas produxisses, ut puta $1\frac{4142135623730950}{10000000000000000}$, atque hinc tum è 34142135623730950 latus eruisses. Causa ea est quod his numeris per sua columbaria dispunctis $\frac{3\,41\,42\,13\,56\,23\,73\,09\,50}{1\,84\,77}$ $\frac{3\,41\,42\,13\,56\,00\,00\,00\,00}{1\,84\,77}$ cum utrobique usque ad quintam sedem numeri iidem sint, eosdem quoque numeros esse reliquos sit necessum: atque ideo, cum per singulas notas divisor producatur nullam posse discrepantiam siboriri (si forte aliqua existat) ante quam divisor ad illam ipsam sedem devenerit, vel demum post eam. Adeo ut continuatis extractionibus ea lubricitas & incertitudo post quinquagesimam aut sexagesimam demum extractionem in ultimam aut penultimam notam, ut ſummum, proſerpere queat. Vt omnino nihil cauſæ ſubſit, cur extractiones iſtas ſagillent aut in dubium vocent. In poſito enim exemplo $\surd.\,2 - \surd.\,2 + \surd\,2$ ſinguli numeri ad æſtimationem radij 10000000 reducti valebunt.

$\surd\,2.$	141421356.	ſubtenſa	45 gr.
$\surd.\,2 + \surd\,2.$	184775906	ſubtenſa	135 gr.
$\surd.\,2 - \surd.\,2 + \surd\,2.$	39018065.	ſubtenſa	22 gr. 30 ſcr.

Id quam arcte cum canonibus Rhetici decem notarum conſentiat, ſi experiri libeat. deprehendes eoſdem planè ex duplicatis dimidiarum peripheriarum ſinibus

141421356	24
184775906	50
39018064	40

vides itaque reliquos quidem congruere, noviſſimum autem $\frac{60}{100}$ unius unitatis tantum abeſſe. cujus cauſa ex ipſa operis exegeſi facile repeti poteſt. nam lubricitas iſta illinc facile liquebit. Quare certum eſt & hic quoque Archimedeos abacos fruſtra in dubium vocari; cum ille etiam minimas particulas ſit conſectatus, quas nos in his majoribus merito negligimus. multa hic ſunt quæ operis factio facilius monebit, quam longis verborum ambagibus explicari queat. Et hæc quidem ad ſecuritatem illorum, qui minus his numeris tractandis aſſueverunt monuiſſe ſufficiat, ut ſimul & hunc illorum animis ſcrupulum eximiam, & noſtro ratiocinio quoque fidem adſtruam.

FINIS.

[illegible]

Moÿweer 1671 $\frac{11}{6}$ 31 fl