UNTERSUCHUNGEN

UEBER

DIE SUMMEN VON QUADRATEN

VON

RUDOLF LIPSCHITZ

BONN
VERLAG VON MAX COHEN & SOHN (FR. COHEN)
1886

Inhalt.

Einleitung.

In einem Aufsatze, der unter dem Titel: Principes d'un calcul algébrique qui contient, comme espèces particulières, le calcul des quantités imaginaires et des quaternions, in den Comptes rendus der Pariser Academie vom 11. und 18. October 1880 veröffentlicht ist, habe ich aus der reellen Transformation einer Summe von beliebig vielen Quadraten in sich selbst die Regeln für die Rechnung mit symbolischen Ausdrücken abgeleitet, welche bei den Summen von zwei Quadraten in die mittelst des Zeichens $\sqrt{-1}$ gebildeten complexen Grössen, bei den Summen von drei Quadraten in die von Hamilton herrührenden Quaternionen übergehen. Die Beschaffenheit dieser symbolischen Ausdrücke ist wesentlich durch die Anzahl n der Quadrate bedingt, welche in der betreffenden Summe vereinigt sind, so dass ein zu der Summe von n Quadraten gehörender Ausdruck ein complexer Ausdruck der n-ten Ordnung genannt werden darf. Man gewinnt eine fortschreitende Einsicht in die Natur derselben, indem man ermittelt, welche Eigenschaften bei dem Wachsen der Ordnungszahl erhalten bleiben, und welche durch andere ersetzt werden. Bei der zweiten Ordnung ist das Resultat der Multiplication zweier Ausdrücke von der Reihenfolge der Operationen unabhängig, bei der dritten und den höheren Ordnungen von der Reihenfolge abhängig. In den Ausdrücken der zweiten und dritten Ordnung sind die linear auftretenden, mit Einheiten multiplicirten reellen Grössen von einander unabhängig vorauszusetzen, und die Anzahl dieser reellen Elemente beträgt bei den erstgenannten Ausdrücken zwei, bei den zweiten vier. Wofern aber die Zahl n den Werth drei übertrifft, haben die in den Ausdruck der n-ten Ordnung linear eingehenden, mit Einheiten multiplicirten reellen Grössen, deren Anzahl 2^{n-1} ist, die Eigenschaft, durch eine kleinere Anzahl, nämlich $1+\frac{n(n-1)}{2}$, von unabhängigen reellen Elementen rational ausgedrückt werden zu können. Das System von Einheiten, auf welches ich in der erwähnten Arbeit geführt worden bin, stimmt mit demjenigen überein, welches in der Abhandlung von W. K. Clifford: Applications of Grassmanns extensive Algebra (American Journal of Mathematics, Vol. 1, p. 350—358, und Mathematical Papers, p. 266—276) entwickelt ist, und das mir bei Veröffentlichung meiner Untersuchung nicht bekannt war. Die für die Ausdrücke von höherer als der dritten Ordnung erscheinende rationale Abhängigkeit der linear eingehenden reellen Grössen von einer kleineren Anzahl reeller Elemente ist indessen von Clifford nicht vorausgesetzt. Dieser Umstand unterscheidet meines Erachtens die bezeichneten Ausdrücke in charakteristischer Weise von allen mittelst eines Systems von Einheiten gebildeten Ausdrücken, die bisher untersucht worden sind.

Insofern jeder complexe Ausdruck der n-ten Ordnung in dem Begriff einer Summe von n Quadraten seine Quelle hat, werden die complexen Ausdrücke der n-ten Ordnung da eine Anwendung finden, wo der Begriff einer Summe von n Quadraten eine wesentliche Rolle spielt. Es ist nun unsere Anschauung des Raumes auf die Voraussetzung gegründet, dass das Quadrat des Linearelements im Raume gleich der Summe der Quadrate von drei Differentialen, mithin das Quadrat der Entfernung zweier Punkte gleich der Summe der Quadrate von drei rechtwinkligen relativen Coordinaten ist, und dem entspricht in der Theorie der Bewegung die Definition der lebendigen Kraft eines Punktes als das Product seiner Masse in die Summe der Quadrate der drei rechtwinkligen Componenten seiner Geschwindigkeit. Auf diesen Thatsachen beruht, wie ich nicht zweifeln kann, die Beziehung zwischen den complexen Ausdrücken der dritten Ordnung, oder den Quaternionen, zu der Geometrie und Mechanik. Ein eigenthümlicher Zusammenhang lässt sich zwischen den Quaternionen und dem Problem des grössten Tetraeders bei gegebenem Inhalt der Seitenflächen nachweisen, ein Problem, mit dessen Durchführung und Ausdehnung auf eine Mannigfaltigkeit von beliebig vielen

Dimensionen mein verewigter unvergesslicher Freund Borchardt sich ein so grosses Verdienst erworben hat.

Wenn man die unabhängigen reellen Elemente, mit Hülfe deren ein complexer Ausdruck der n-ten Ordnung gebildet wird, der Bedingung unterwirft, gleich Brüchen zu sein, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, so stellen die erzeugten Ausdrücke eine Verallgemeinerung der rationalen Zahlen dar, die für $n = 2$ mit den von Gauss eingeführten complexen rationalen Zahlen, für $n = 3$ mit denjenigen Quaternionen zusammenfällt, deren reelle Bestandtheile rationale Zahlen sind. Durch eine ferner hinzutretende Beschränkung entstehen hieraus für $n = 2$ die Gaussischen complexen ganzen Zahlen, für $n = 3$ die ganzzahligen Quaternionen, für grössere Werthe von n allgemeine complexe Ausdrücke der n-ten Ordnung mit reellen ganzzahligen Coefficienten. Zu jeder Vergrösserung des Exponenten n gehört demnach eine Erweiterung des Gebiets der Arithmetik, und zwar hängen die ganzzahligen complexen Ausdrücke der n-ten Ordnung vermöge ihres Ursprungs auf das genaueste mit den aus rationalen Zahlen gebildeten Substitutionen zusammen, durch welche eine Summe von n Quadraten in sich selbst verwandelt wird.

Bei jeder Untersuchung, welche sich das Ziel steckt, von einem gegebenen Grössengebiet zu einem neuen Grössengebiet zu gelangen, kann ein doppelter Weg eingeschlagen werden. Entweder wird eine gewisse allgemeine Beschaffenheit des neuen Grössengebiets schon vorausgesetzt, und verlangt, die Bedingungen zu ermitteln, welche erfüllt sein müssen, damit bei dem neuen Grössengebiet bestimmte Eigenschaften des ursprünglichen erhalten bleiben. Oder es wird innerhalb des ursprünglichen Gebiets eine Frage aufgeworfen, gelöst, und hierauf gezeigt, dass ihre vollständige Beantwortung gerade durch die Hervorbringung des neuen Grössengebiets den angemessenen Ausdruck findet. Nach meiner Auffassung bietet der letztere Weg eine Bürgschaft gegen die Discussion willkürlicher Forderungen, und einem solchen Wege folgend bin ich von dem Gebiete der reellen Grössen zu dem Gebiet der complexen Ausdrücke der n-ten Ordnung übergegangen. Da nun das Gebiet der complexen Ausdrücke der zweiten Ordnung, oder kürzer, der einfach complexen Grössen vorliegt, habe ich die entsprechende algebraische Aufgabe, nämlich die der Transformation einer

Summe von beliebig vielen Quadraten in sich selbst, auf dem Gebiet der einfach complexen Grössen erörtert. Es zeigte sich, dass die vollständige Lösung desselben zu den Regeln für die Rechnung mit symbolischen Ausdrücken führt, deren Bildungsgesetz aus dem Bildungsgesetz der früher definirten erhalten wird, indem die unabhängigen reellen Elemente durch unabhängige einfach complexe Elemente ersetzt werden. Die symbolischen Ausdrücke, welche auf dem bezeichneten erweiterten Gebiet zu der Transformation einer Summe von n Quadraten in sich selbst gehören, können bicomplexe Ausdrücke der n-ten Ordnung genannt werden, und schliessen sich in ihren Eigenschaften den complexen Ausdrücken der n-ten Ordnung durchaus an. Hierbei ergiebt sich für das Gebiet der reellen Grössen sehr leicht, wie die mit den Aggregaten von lauter positiven Quadraten angestellte Betrachtung auf Aggregate von Quadraten auszudehnen ist; von denen gewisse in die positive Einheit, die übrigen in die negative Einheit multiplicirt sind.

Im Vorstehenden bin ich bemüht gewesen, einige der Gesichtspunkte hervorzuheben, nach denen ich verschiedene Hauptfragen der Theorie der Summen beliebig vieler Quadrate behandelt habe. Drei der so entstandenen Untersuchungen, von denen die erste wesentlich arithmetisch ist, die beiden letzten wesentlich algebraisch sind, übergebe ich hiermit der Oeffentlichkeit, und hoffe, dass es mir vergönnt sein werde, denselben in einiger Zeit andere folgen zu lassen.

I

TRANSFORMATION EINER SUMME VON ZWEI ODER DREI QUADRATEN IN SICH SELBST DURCH REELLE SUBSTITUTIONEN.

Die von Gauss geschaffene Theorie der complexen ganzen Zahlen beruht auf der Erkenntniss ihrer Zerlegung in unzerlegbare complexe ganze Zahlen oder complexe Primzahlen. Mit diesem Mittel können auch die sämmtlichen Substitutionen dargestellt werden, welche eine Summe von zwei Quadraten in sich selbst transformiren und deren Coefficienten rationale Zahlen sind. Die Transformation einer Summe von drei Quadraten in sich selbst führt, wie in der Einleitung bemerkt ist, zu der Rechnung mit Quaternionen, die Betrachtung der bezüglichen Substitutionen, deren Coefficienten rationale Zahlen sind, zu der Untersuchung der ganzzahligen Quaternionen, und hier interessirt in erster Linie die Frage nach deren Zerlegung in unzerlegbare ganzzahlige Quaternionen. Diese Frage habe ich mir vorgesetzt zu erforschen, und theile das Ergebniss mit. Wie die Zerlegung einer complexen ganzen Zahl in Primfactoren von ihrer Norm abhängt, die eine Summe von zwei ganzzahligen Quadraten ist, so wird die Zerlegung eines ganzzahligen Quaternion durch die Beschaffenheit seiner Norm bedingt, die eine Summe von vier ganzzahligen Quadraten ist. Meine Arbeit stützt sich daher auf die vorhandenen Untersuchungen über die Darstellung der Zahlen als Summen von vier ganzzahligen Quadraten.

Nachdem Fermat als Bemerkung zu der 31. Aufgabe des 4. Buches des Diophant seinen berühmten Satz über die Darstellbarkeit jeder Zahl durch die Summe einer bestimmten Anzahl von Polygonalzahlen einer gewissen Art ausgesprochen, hat sich Euler mit dem Satze von der Darstellbarkeit jeder Zahl durch die Summe von vier Quadraten in der Abhandlung beschäftigt:

Demonstratio theorematis Fermatiani, omnem numerum primum formae $4n+1$ esse summam duorum quadratorum (N. Comm. Petrop. V, 1754, p. 3; Comm. ar. I, p. 210).

Diese Abhandlung enthält in Art. 93 den algebraischen Satz, der dazu dient, das Product zweier Summen von vier Quadraten als eine Summe von vier Quadraten darzustellen; aus demselben können die Regeln für die Rechnung mit Quaternionen direct abgeleitet werden. In dem Nachlasse von Gauss, Werke III, p. 384 ist eine andere Fassung dieses Satzes, bei der Paare von conjugirten complexen Grössen benutzt sind, mitgetheilt.

Der erste vollständige Beweis des Satzes, dass jede Zahl gleich der Summe von vier Quadraten ist, befindet sich in der Arbeit von Lagrange: Démonstration d'un théorème d'arithmétique (N. Mém. de l'acad. des sc. de Berlin, 1770, Oeuvres III, p. 189), und ist von Euler in dem Aufsatze: Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum (Acta Erudit. Lips. 1773, p. 193, Acta Petrop. I, II, 1775, p. 48, Exhib. 1772, Septbr. 21., Comm. ar. I, p. 538) ausführlich erörtert worden. Auf die Darstellung der Zahlen als Summen von vier Quadraten fiel ein neues Licht durch die von Jacobi aus der Theorie der elliptischen Functionen gewonnene Bestimmung der Anzahl der sämmtlichen Darstellungen einer gegebenen Zahl. Diese Bestimmung ist am Schluss der Fundamenta nova angegeben, in der Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre carrés (Crelle's Journal 3, p. 191, Werke I, p. 245) besonders herausgehoben, und in dem Aufsatze: De compositione numerorum e quatuor quadratis (Crelle's Journal 12, p. 167) rein arithmetisch bewiesen. Eine knappere Zusammenfassung dieses Beweises enthält der Aufsatz von Dirichlet: Sur l'équation $t^2+u^2+v^2+w^2=4m$ (Liouville's Journal, deuxième série, 1, p. 210), in welchem Dirichlet erwähnt, dass er schon lange einen Beweis dieses Satzes auf andere Principien gegründet habe, und dass dieser Beweis einen naturgemässen Platz in einer Arbeit finden werde, die ihn seit einiger Zeit beschäftige. Wie bekannt, ist er an der Veröffentlichung dieser Arbeit durch den Tod gehindert worden. Noch habe ich den von Cauchy gegebenen, in den ersten Band der Exercices p. 263 aufgenommenen vollständigen Beweis des allgemeinen die Polygonalzahlen betreffenden Fermat'schen Satzes anzuführen, sowie die der Darstellung der Zahlen durch vier Quadrate gewidmete Untersuchung des Herrn Hermite: Sur la théorie des formes quadratiques, second mémoire (Crelle's Journal 47, p. 343).

Bezüglich des Ganges meiner Untersuchung möchte ich noch eine allgemeine Bemerkung machen. Die Zerlegung der complexen Zahlen in Primfactoren haftet, wie mir scheint, an dem Umstande, dass bei diesen Zahlen das Resultat der Multiplication von der Anordnung der Operationen unabhängig ist. Auch bei den allgemeinsten algebraischen Zahlen hat die zur Anwendung kommende Multiplication die genannte Beschaffenheit, und es bleiben nach Einführung der geeigneten Begriffe die Gesetze der Zerlegung bestehen, wie Herr Dedekind gezeigt hat (Vorlesungen Dirichlet's über Zahlentheorie, zweite und dritte Auflage, und: Sur la théorie des nombres entiers algébriques, Darboux's bulletin, 1877). Der Nachweis der Existenz der idealen Primfactoren in der von Herrn Kummer herrührenden Theorie der aus der Kreistheilung entspringenden complexen ganzen Zahlen gründet sich auf gewisse Congruenzen, welche in einfacher Gestalt bei der Zerlegung der complexen ganzen Zahlen von der Gestalt $a + b\sqrt{-1}$ auftreten. Für die Theorie der algebraischen Zahlen hat Herr Dedekind die entsprechenden Congruenzen in der Anzeige der zweiten Ausgabe der erwähnten Vorlesungen in den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom 20. September 1871 mitgetheilt. Nun stellte sich heraus, dass die Erzeugung der ganzzahligen Quaternionen durch Multiplication von nicht zerlegbaren ganzzahligen Quaternionen ebenfalls auf dem Vorhandensein von gewissen Congruenzen beruht, jedoch so, dass dabei die Reihenfolge der Operationen eine entscheidende Bedeutung behält. Da somit an das Gebiet der Gaussischen complexen Zahlen auf der einen Seite das Gebiet der sämmtlichen algebraischen Zahlen, auf der andern Seite das Gebiet der ganzzahligen Quaternionen anschliesst, und da sich hier nach verschiedenen Richtungen Uebereinstimmungen und Gegensätze geltend machen, so werde ich zur Beleuchtung dieser Verhältnisse zunächst auch auf die Zerlegung der Gaussischen complexen Zahlen eingehen. Ich beginne mit der reellen Transformation einer Summe von zwei Quadraten in sich selbst, um die Rechnung mit complexen

Grössen zu begründen und hierauf zu dem Gebiet der complexen ganzen Zahlen zu gelangen. Dann werde ich die reelle Transformation einer Summe von drei Quadraten in sich selbst betrachten, dadurch die Rechnung mit Quaternionen begründen, und zu den ganzzahligen Quaternionen übergehen.

1.

Es sei eine lineare mit den reellen Coefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ versehene Substitution gegeben, welche die reellen Variabeln x_1 und x_2 als Functionen der reellen Variabeln y_1 und y_2 darstellt und die Quadratsumme der ersteren in die Quadratsumme der letzteren transformirt, so dass die Gleichungen bestehen

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}\, y_1 + \alpha_{12}\, y_2 \\ x_2 = \alpha_{21}\, y_1 + \alpha_{22}\, y_2, \end{cases}$$

$$(2)\qquad x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2.$$

Die Substitutionsdeterminante, welche gleich $+1$ oder -1 sein kann, wird gleich $+1$ vorausgesetzt. Nun lässt sich aus der vorliegenden Substitution eine zweite zu demselben Zwecke geeignete von derselben Determinante ableiten, indem man die vier Coefficienten mit der negativen Einheit multiplicirt. Jedem der beiden Systeme von Elementen ist ein anderes zugeordnet, das entsteht, wofern in der von oben links nach unten rechts laufenden Diagonale zu jedem Element die Einheit addirt wird. Die Determinanten dieser beiden Systeme

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+1, & \alpha_{12} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}+1 \end{vmatrix}, \qquad (3\,\mathrm{a})\qquad \begin{vmatrix} -\alpha_{11}+1, & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21}, & -\alpha_{22}+1 \end{vmatrix}$$

besitzen die leicht zu beweisende Eigenschaft, dass sie nicht gleichzeitig verschwinden können. Da nämlich ihre beiden Werthe respective gleich

$$(4)\qquad 2+\alpha_{11}+\alpha_{22}, \qquad (4\,\mathrm{a})\qquad 2-\alpha_{11}-\alpha_{22}$$

sind, so ist deren Summe gleich 4, woraus das behauptete nothwendig folgt. Wenn also bei der gegebenen Substitution das System (3) eine verschwindende Determinante hat, so ist dies bei dem System (3 a) sicher nicht der Fall. Es darf daher vorausgesetzt werden, dass bei dem von jetzt ab zu betrachtenden

System von Coefficienten die zugehörige Determinante (3) nicht gleich Null sei.

Die bezeichnete Determinante tritt auf, sobald man aus der Substitution (1) die Gleichungen ableitet, durch welche die Summen $x_1 + y_1$ und $x_2 + y_2$ als Functionen von y_1 und y_2 dargestellt werden,

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 + y_1 = (\alpha_{11} + 1)\, y_1 + \alpha_{12} y_2 \\ x_2 + y_2 = \alpha_{21} y_1 + (\alpha_{22} + 1)\, y_2. \end{cases}$$

Nach der getroffenen Voraussetzung werden y_1 und y_2 durch die Auflösung eindeutig bestimmt, und man erhält die Differenzen $x_1 - y_1$ und $x_2 - y_2$ durch die Summen $x_1 + y_1$ und $x_2 + y_2$ so ausgedrückt

$$(6) \qquad \begin{cases} x_1 - y_1 = \dfrac{(\alpha_{11} - \alpha_{22})(x_1 + y_1) + 2\,\alpha_{12}(x_2 + y_2)}{2 + \alpha_{11} + \alpha_{22}} \\[2ex] x_2 - y_2 = \dfrac{2\,\alpha_{21}(x_1 + y_1) + (\alpha_{22} - \alpha_{11})(x_2 + y_2)}{2 + \alpha_{11} + \alpha_{22}}. \end{cases}$$

Wegen der Voraussetzung $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$ ist

$$\alpha_{11} - \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{12} + \alpha_{21} = 0.$$

Bestimmt man daher für eine beliebig aber von Null verschieden gewählte Grösse λ_0 die Grössen λ_{12}, λ_{21} durch die Gleichungen

$$(7) \qquad \frac{\alpha_{12}}{1 + \alpha_{11}} = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_0}, \quad \lambda_{12} + \lambda_{21} = 0,$$

so erhält (6) die Gestalt

$$(8) \qquad \begin{cases} x_1 - y_1 = \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_0}(x_2 + y_2) \\[2ex] x_2 - y_2 = \dfrac{\lambda_{21}}{\lambda_0}(x_1 + y_1), \end{cases}$$

oder auch

$$(9) \qquad \begin{cases} \lambda_0\, x_1 + \lambda_{21} x_2 = \lambda_0\, y_1 + \lambda_{12}\, y_2 \\ \lambda_{12} x_1 + \lambda_0\, x_2 = \lambda_{21} y_1 + \lambda_0\, y_2. \end{cases}$$

Wenn hier die erste Gleichung mit der Einheit, die zweite mit einem symbolischen Factor i_{12} multiplicirt und zu der ersten addirt wird, so können beide Seiten als Producte dargestellt werden, indem man vorschreibt, dass

$$(10)\quad \begin{cases} (\lambda_0+i_{12}\lambda_{12})(x_1+i_{12}x_2) = \lambda_0 x_1+\lambda_{21}x_2+i_{12}(\lambda_{12}x_1+\lambda_0 x_2) \\ (y_0+i_{12}y_2)(\lambda_0-i_{12}\lambda_{12}) = \lambda_0 y_1+\lambda_{12}y_2+i_{12}(\lambda_{21}y_1+\lambda_0 y_2) \end{cases}$$

sein soll. Zu diesem Zwecke genügt es, für das Symbol i_{12} die einzige Gleichung

$$(11)\qquad i_{12}^2 = -1$$

vorauszusetzen. Die Eigenschaften dieses Symbols fallen hiernach mit den Eigenschaften des Symbols $\sqrt{-1}$ zusammen, und es zeigt sich, dass das Ergebniss der Multiplication von zwei *complexen Ausdrücken*

$$(\lambda_0+i_{12}\lambda_{12})(x_1+i_{12}x_2)$$

bei der Vertauschung der Factoren ungeändert bleibt. Durch die Gleichsetzung der Producte (10) entsteht die Gleichung

$$(12)\qquad (\lambda_0+i_{12}\lambda_{12})(x_1+i_{12}x_2) = (y_1+i_{12}y_2)(\lambda_0-i_{12}\lambda_{12}),$$

in welcher die beiden Gleichungen (1) zusammengefasst sind. Die Multiplication mit dem zu $\lambda_0+i_{12}\lambda_{12}$ conjugirten Ausdruck $\lambda_0-i_{12}\lambda_{12}$ liefert die Gleichung

$$(13)\qquad (\lambda_0^2+\lambda_{12}^2)(x_1+i_{12}x_2) = (y_1+i_{12}y_2)(\lambda_0-i_{12}\lambda_{12})^2,$$

auf deren linker Seite *die Norm von* $(\lambda_0+i_{12}\lambda_{12})$

$$(13^*)\qquad N(\lambda_0+i_{12}\lambda_{12}) = \lambda_0^2+\lambda_{12}^2$$

als Factor auftritt.

Nimmt man zwei beliebige reelle Elemente λ_0 und λ_{12}, und zwar λ_0 von Null verschieden, und bildet mit denselben eine Gleichung nach dem Schema (12), so folgt aus der zugehörigen Gleichung (13) ein System von linearen Ausdrücken der Variabeln x_1 und x_2 durch die Variabeln y_1 und y_2, welches die Gleichung (2) befriedigt. Hierbei werden die Coefficienten durch die Gleichungen

$$(14)\qquad \alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{\lambda_0^2-\lambda_{12}^2}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2},\quad \alpha_{12} = -\alpha_{21} = \frac{2\lambda_0\lambda_{12}}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2}$$

bestimmt, und die zugehörige Determinante (4) erhält den Werth

$$(15)\qquad \frac{4\lambda_0^2}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2},$$

welcher wegen der über λ_0 getroffenen Annahme nicht verschwinden kann. Also bringen alle complexen Ausdrücke $\lambda_0+i_{12}\lambda_{12}$, in denen λ_0 von Null verschieden ist, in (12) eingeführt, lineare Substitutionen (1) hervor, bei denen die Determinante (4) nicht verschwindet.

Es möge jetzt i_{12} durch i ersetzt und eine zweite lineare Substitution betrachtet werden, bei der die Variabeln y_1, y_2 von den Variabeln z_1, z_2 so abhängen, dass

(16) $$y_1^2+y_2^2=z_1^2+z_2^2$$

ist. Zuerst nehme ich die specielle Substitution

(17) $$y_1=-z_1,\ y_2=-z_2,$$

welche durch die eine Gleichung

(18) $$i(y_1+iy_2)=(z_1+iz_2)(-i)$$

ersetzt wird. Durch Verbindung von (1) und (17) folgt

(19) $$\begin{cases} x_1=-\alpha_{11}z_1-\alpha_{12}z_2 \\ x_2=-\alpha_{21}z_1-\alpha_{22}z_2, \end{cases}$$

durch Verbindung der entsprechenden Gleichungen (12) und (18) kommt

(20) $$i(\lambda_0+i\lambda_{12})(x_1+ix_2)=(z_1+iz_2)(-i)(\lambda_0-i\lambda_{12}).$$

Wenn also in (12) statt $\lambda_0+i\lambda_{12}$ der Ausdruck $i(\lambda_0+i\lambda_{12})$ eingesetzt wird, so verwandelt sich die Substitution (1) in eine solche (19), bei der die vier Coefficienten mit der negativen Einheit multiplicirt sind. Weil nun alle hier in Betracht zu ziehenden linearen Substitutionen aus den Substitutionen (1), für welche die Determinante (4) von Null verschieden ist, erhalten werden, indem man diejenigen hinzufügt, bei denen die betreffenden Coefficienten mit der negativen Einheit multiplicirt werden, so sind alle bezeichneten linearen Substitutionen durch die Gleichungen (12) und (20), zusammengenommen, repräsentirt. Die complexen Ausdrücke $\lambda_0+i\lambda_{12}$ und $i(\lambda_0+i\lambda_{12})$, bei denen λ_0 von Null verschieden ist, stellen aber alle complexen Ausdrücke ohne Ausnahme dar, deren Norm nicht gleich Null ist. Daher werden alle Substitutionen (1) durch die Gleichung (12), beziehungsweise die Gleichungen (14), dargestellt, wofern der complexe Ausdruck $\lambda_0+i_{12}\lambda_{12}$ nur die selbstverständliche Bedingung erfüllt, dass beide reellen Elemente nicht gleichzeitig gleich Null sind, oder dass seine Norm nicht gleich Null ist.

Wenn eine zweite Substitution mittelst eines beliebigen complexen Ausdrucks $\mu_0+i\mu_{12}$ durch die nach dem Schema (12) formulirte Gleichung

(21) $$(\mu_0+i\mu_{12})\ (y_1+iy_2)=(z_1+iz_2)\,(\mu_0-i\mu_{12})$$

dargestellt wird, so erhält man für die aus der successiven Anwendung der beiden Substitutionen hervorgehende Substitution die Gleichung

(22) $$(\mu_0+i\mu_{12})\,(\lambda_0+i\lambda_{12})\,(x_1+ix_2)=(z_1+iz_2)\,(\mu_0-i\mu_{12})\,(\lambda_0-i\lambda_{12}).$$

Hier tritt das Product der complexen Ausdrücke $\mu_0+i\mu_{12}$ und $\lambda_0+i\lambda_{12}$ auf, dessen Norm von Null verschieden sein muss, weil dies für jeden der beiden Factoren der Fall ist, und es folgt zugleich, dass bei der Zususammensetzung der Substitutionen die Reihenfolge beliebig vertauscht werden darf, ohne dass das Ergebniss sich ändert.

2.

Ich komme jetzt zu der Aufgabe, wenn eine positive ganze Zahl m gegeben ist, zu entscheiden, unter welchen Bedingungen dieselbe gleich der Norm einer *complexen ganzen Zahl* $\lambda_0+i\lambda_{12}$ sein könne, für den Fall der Möglichkeit alle betreffenden complexen ganzen Zahlen $\lambda_0+i\lambda_{12}$ aufzustellen, und jede derselben auf alle Arten durch Multiplication von unzerlegbaren complexen ganzen Zahlen hervorzubringen. Man kann die complexen ganzen Zahlen $\lambda_0+i\lambda_{12}$ in solche eintheilen, bei denen für die ganzen Zahlen λ_0 und λ_{12} kein gemeinsamer Theiler, und in solche, bei denen ein gemeinsamer Theiler vorhanden ist. Es mögen die ersteren *eigentliche*, die zweiten *uneigentliche complexe ganze Zahlen* genannt werden, und es werde die gestellte Aufgabe auf die eigentlichen complexen ganzen Zahlen beschränkt. Da bei einer solchen Zahl $\lambda_0+i\lambda_{12}$ die ganzzahligen Elemente λ_0 und λ_{12} nicht gleichzeitig gerade sein können, so muss die Norm $\lambda_0^2+\lambda_{12}^2$ entweder ungerade oder das Doppelte einer ungeraden Zahl sein. Es sei nun

(1) $$\lambda_0^2+\lambda_{12}^2=m,$$

und p^γ irgend eine in m enthaltene Potenz einer ungeraden Primzahl p. Dann lässt sich immer ein Paar Zahlen ξ_1 und ξ_2 angeben, die den Congruenzen

$$(2)\qquad \begin{cases} \lambda_0\, \xi_1 + \lambda_{21}\, \xi_2 \equiv 0 \pmod{p^\gamma} \\ \lambda_{12}\, \xi_1 + \lambda_0\, \xi_2 \equiv 0 \end{cases}$$

genügen und nicht beide durch p aufgehen. Keine der Zahlen λ_0 und λ_{12} kann durch p aufgehen; denn wenn die eine so beschaffen wäre, müsste es wegen (1) auch die zweite sein, mithin würden dann beide gegen die Annahme durch p theilbar sein. Hieraus folgt, dass jede der beiden in (2) enthaltenen Congruenzen für sich allein erfüllt werden kann, und man schliesst auch leicht durch Zuziehung von (1), dass aus der Gültigkeit der einen die Befriedigung der anderen folgt. Desgleichen ergiebt sich, indem die erste mit ξ_1, die zweite mit ξ_2 multiplicirt und addirt wird, weil λ_0 durch p nicht theilbar ist, die Congruenz

$$(3)\qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 \equiv 0 \pmod{p^\gamma}.$$

Legt man in der ersten Congruenz (2) der Zahl ξ_2 den Werth der Einheit bei, so wird der zugehörige Werth $\xi_1 \equiv \omega$ durch die Congruenz

$$(4)\qquad \lambda_0\, \omega + \lambda_{12} \equiv 0 \pmod{p^\gamma}$$

eindeutig bestimmt. Bei einem beliebig gewählten, durch p nicht theilbaren Werth ξ_2 erhält dann ξ_1 die unzweifelhafte Bestimmung

$$(5)\qquad \xi_1 \equiv \omega\, \xi_2 \pmod{p^\gamma},$$

und für ω kommt die bekannte Congruenz

$$(6)\qquad \omega^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^\gamma}.$$

Wenn also alle Paare von Zahlen (ξ_1, ξ_2), die den Congruenzen (2) genügen, die nicht gleichzeitig durch p aufgehen, und aus den Zahlen eines Paares durch Multiplication mit derselben Zahl erhalten werden können, als aequivalent betrachtet und in eine Classe zusammengefasst werden, so gehört zu jeder eigentlichen complexen Zahl $\lambda_0 + i_{12}\, \lambda_{12}$ eine vollkommen bestimmte *Classe von Auflösungen der Congruenzen* (2), *der Congruenz* (3) und, was damit zusammenfällt, eine vollkommen bestimmte *Wurzel der Congruenz* (6). Es muss daher diese Congruenz möglich sein, damit die Gleichung (1) bestehen kann. Hier beziehe ich mich auf die bekannten Sätze, dass die Congruenz (6) möglich ist oder nicht, je nachdem die ungerade Primzahl p, durch 4 getheilt, den Rest 1 oder 3 lässt, und dass diese Congruenz im ersten Falle stets zwei Wurzeln hat. Demnach werden die Zahlen m, welche

Primtheiler von der Gestalt $4r+3$ haben, von der Darstellbarkeit als Normen eigentlicher complexer ganzer Zahlen ausgeschlossen, und es bleiben nur die Zahlen übrig, welche keine anderen ungeraden Primtheiler als solche von der Gestalt $4r+1$ enthalten. Aus diesem Grunde treten die Primzahlen von der Gestalt $4r+3$, welche bekanntlich in dem Gebiete der complexen ganzen Zahlen die Eigenschaft von Primzahlen behalten, in der anzustellenden Betrachtung überhaupt nicht auf.

Ich werde jetzt zeigen, dass jede Primzahl p von der Form $4r+1$ durch die Gleichung (1) in der Weise dargestellt werden kann, dass die betreffende complexe Zahl $\lambda_0+i\lambda_{12}$ zu einer beliebig gegebenen Classe von Auflösungen der Congruenz

$$(3^*) \qquad \xi_1^2+\xi_2^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

oder zu der entsprechenden Wurzel der Congruenz

$$(6^*) \qquad \omega^2+1 \equiv 0 \pmod{p}$$

gehört. Weil die gesuchte complexe Zahl $\lambda_0+i\lambda_{12}$ nicht gleich dem Product von zwei complexen ganzen Zahlen sein kann, deren Normen von der Einheit verschieden sind, so ist sie eine unzerlegbare complexe Zahl oder eine complexe Primzahl. Mit einer bestimmten Wurzel ω von (6^*) und einer beliebigen durch p nicht theilbaren Zahl ξ_2 bilde man das System von Zahlen

$$(7) \qquad \xi_1 \equiv \omega\xi_2, \quad \xi_2 \pmod{p},$$

und wähle ein Paar denselben respective congruente Zahlen so, dass jede derselben numerisch kleiner als $\frac{1}{2}p$ ist. Diese Zahlen können nicht gleichzeitig durch p aufgehen. Ich werde dieselben mit Herausheben ihres grössten gemeinsamen Theilers τ, der dann auch nicht durch p theilbar sein kann, folgendermassen bezeichnen:

$$(8) \qquad \tau\varrho_0 \equiv \xi_1, \quad \tau\varrho_{21} \equiv \xi_2 \pmod{p},$$

$$(9) \qquad \varrho_{12}+\varrho_{21} = 0.$$

Nunmehr hat die Norm $\tau^2(\varrho_0^2+\varrho_{12}^2)$ die Eigenschaft, durch p aufzugehen und kleiner als $\frac{1}{2}p^2$ zu sein, mithin hat auch der Factor $\varrho_0^2+\varrho_{12}^2$ diese Eigenschaft.

Demnach besteht für die eigentliche complexe Zahl $\varrho_0+i\varrho_{12}$ die Gleichung

$$(10) \qquad \varrho_0^2+\varrho_{12}^2 = pt,$$

wo die Zahl t kleiner als $\frac{1}{2}p$ ist, und es gelten die Congruenzen

$$(11)\qquad \begin{cases} \varrho_0\,\xi_1+\varrho_{21}\xi_2\equiv 0 \pmod{p} \\ \varrho_{12}\,\xi_1+\varrho_0\,\xi_2\equiv 0. \end{cases}$$

Man kann jetzt aus der eigentlichen complexen Zahl $\varrho_0+i\varrho_{12}$ eine andere eigentliche complexe Zahl $\varrho_0^{(1)}+i\varrho_{12}^{(1)}$ ableiten, welche den in (10) und (11) ausgedrückten Bedingungen genügt, und bei der auf der rechten Seite von (10) der Factor von p kleiner als t ist. Es mögen zwei Zahlen φ_0 und φ_{12} gewählt werden, die den Congruenzen

$$(12)\qquad \varphi_0\equiv\varrho_0,\ \varphi_{12}\equiv\varrho_{12} \pmod{t}$$

genügen und numerisch kleiner oder höchstens gleich $\frac{1}{2}t$ sind. Dann hat man eine Zahl

$$(13)\qquad \varphi_0^2+\varphi_{12}^2=t\,t^{(1)},$$

bei der $t^{(1)}\leqq\frac{1}{2}t$ ist, und die, weil $t<\frac{1}{2}p$ ist, keinenfalls durch p aufgeht. Wird jetzt das Product $(\varphi_0-i\varphi_{12})(\varrho_0+i\varrho_{12})$ gebildet, so müssen die reellen Bestandtheile desselben durch t aufgehen; da ferner die Norm des Products gleich $p\,t^2\,t^{(1)}$ ist und deshalb durch p, aber nicht durch p^2 aufgeht, so hat der grösste gemeinsame Theiler jener reellen Bestandtheile die Gestalt $\tau^{(1)}t$, wo $\tau^{(1)}$ nicht durch p theilbar sein kann. Demnach wird eine eigentliche complexe Zahl $\varrho_0^{(1)}+i\varrho_{12}^{(1)}$ durch die Gleichung

$$(14)\qquad (\varphi_0-i\varphi_{12})(\varrho_0+i\varrho_{12})=\tau^{(1)}t\,(\varrho_0^{(1)}+i\varrho_{12}^{(1)})$$

definirt. Aus (11) erhält man durch Multipliciren und Addiren die Congruenzen

$$(15)\qquad \begin{cases} \tau^{(1)}t\,(\varrho_0^{(1)}\,\xi_1+\varrho_{21}^{(1)}\,\xi_2)\equiv 0 \pmod{p} \\ \tau^{(1)}t\,(\varrho_{12}^{(1)}\,\xi_1+\varrho_0^{(1)}\,\xi_2)\equiv 0, \end{cases}$$

welche, da weder t noch $\tau^{(1)}$ durch p aufgehen, die Congruenzen

$$(16)\qquad \begin{cases} \varrho_0^{(1)}\,\xi_1+\varrho_{21}^{(1)}\,\xi_2\equiv 0 \pmod{p} \\ \varrho_{12}^{(1)}\,\xi_1+\varrho_0^{(1)}\,\xi_2\equiv 0 \end{cases}$$

nach sich ziehen. Andrerseits folgt aus (10), (13), (14) die Gleichung

$$(17) \qquad (\varrho_0^{(1)})^2 + (\varrho_{12}^{(1)})^2 = p\,\frac{t^{(1)}}{(\tau^{(1)})^2},$$

wo der Factor $t^{(1)}$, mithin auch der Factor $\frac{t^{(1)}}{(\tau^{(1)})^2} < \frac{1}{2}t$ ist. Wie behauptet worden, haben die mit der eigentlichen complexen Zahl $\varrho_0^{(1)} + i\varrho_{12}^{(1)}$ gebildeten Relationen (16), (17) respective die Gestalt von (11), (10), und der Factor $\frac{t^{(1)}}{(\tau^{(1)})^2}$ ist jedenfalls kleiner als der Factor t. Somit kann das angegebene Verfahren wiederholt werden, um den auf der rechten Seite von (10), beziehungsweise (17), erscheinenden Factor von p mit jedem Schritte mehr herabzudrücken, bis derselbe für eine eigentliche complexe Zahl $\varrho_0^{(s)} + i\varrho_{12}^{(s)}$ gleich der Einheit wird. Dann aber gelten die Relationen

$$(18) \qquad (\varrho_0^{(s)})^2 + (\varrho_{12}^{(s)})^2 = p,$$

$$(19) \qquad \begin{cases} \varrho_0^{(s)}\,\xi_1 + \varrho_{21}^{(s)}\,\xi_2 \equiv 0 \pmod{p} \\ \varrho_{12}^{(s)}\,\xi_1 + \varrho_0^{(s)}\,\xi_2 \equiv 0, \end{cases}$$

welche eine zu der *gegebenen Congruenzlösung* (ξ_1, ξ_2) gehörende Darstellung der Primzahl als *Norm der complexen Primzahl* $\varrho_0^{(s)} + i\varrho_{12}^{(s)}$ enthalten. Die complexen Zahlen, welche aus der vorliegenden durch Multiplication mit einer Einheit hervorgehen, entsprechen derselben Congruenzlösung; von diesen vier complexen Primzahlen ist eine herauszuheben und zur Anwendung zu benutzen. Offenbar liefert die conjugirte complexe Primzahl $\varrho_0^{(s)} - i\varrho_{12}^{(s)}$ durch ihre Norm eine Darstellung der Primzahl p, welche zu der anderen Classe von Congruenzlösungen $(\xi_1, -\xi_2)$ gehört; denn es kann niemals (ξ_1, ξ_2) mit $(\xi_1, -\xi_2)$ aequivalent sein, weil sonst $2\xi_2$ durch p theilbar sein müsste, was unmöglich ist. Die complexen Zahlen, die aus $\varrho_0^{(s)} - i\varrho_{12}^{(s)}$ durch Multiplication mit einer Einheit entstehen, entsprechen selbstverständlich wieder der gleichen Congruenzlösung, und auch von diesen vier complexen Primzahlen ist eine bestimmte herauszuheben und zur Anwendung zu bestimmen.

Es ist jetzt wesentlich, die nothwendigen und hinreichenden

Bedingungen dafür aufzusuchen, dass in dem Product von zwei eigentlichen complexen Zahlen $\lambda_0+i\lambda_{12}$ und $\mu_0+i\mu_{12}$ die beiden reellen Bestandtheile durch die Potenz einer ungeraden Primzahl p^γ theilbar sind. Aus den zu befriedigenden Congruenzen

$$(20)\qquad \begin{cases} \mu_0\lambda_0-\mu_{12}\lambda_{12}\equiv 0 \pmod{p^\gamma} \\ \mu_0\lambda_{12}+\mu_{12}\lambda_0 \equiv 0 \end{cases}$$

folgen die Congruenzen

$$(21)\qquad \mu_0(\lambda_0^2+\lambda_{12}^2)\equiv 0,\ \mu_{12}(\lambda_0^2+\lambda_{12}^2)\equiv 0 \pmod{p^\gamma}$$

$$(22)\qquad (\mu_0^2+\mu_{12}^2)\,\lambda_0\equiv 0,\ (\mu_0^2+\mu_{12}^2)\,\lambda_{12}\equiv 0 \pmod{p^\gamma}.$$

Weil aber μ_0 und μ_{12} ohne Theiler sind, muss die Norm $\lambda_0^2+\lambda_{12}^2$, weil λ_0 und λ_{12} ohne Theiler sind, die Norm $\mu_0^2+\mu_{12}^2$ durch p^γ aufgehen. Nach dem Früheren gehört also die eigentliche complexe Zahl $\lambda_0+i\lambda_{12}$ zu einer bestimmten Classe von Congruenzlösungen (ξ_1,ξ_2) modulo p^γ, desgleichen die eigentliche complexe Zahl $\mu_0+i\mu_{12}$ zu einer bestimmten Classe von Congruenzlösungen (η_1,η_2) modulo p^γ. Setzt man fest, dass eine complexe Zahl für eine reelle Zahl als Modul congruent der Null heissen soll, wofern die beiden reellen Bestandtheile durch die reelle Zahl theilbar sind, so lassen sich die zu der Definition der Congruenzlösungen (ξ_1,ξ_2) dienenden Congruenzen (2) in die eine Congruenz

$$(23)\qquad (\lambda_0+i\lambda_{12})(\xi_1+i\xi_2)\equiv 0 \pmod{p^\gamma}$$

zusammenfassen, und die Congruenzen (20) in

$$(24)\qquad (\mu_0+i\mu_{12})(\lambda_0+i\lambda_{12})\equiv 0 \pmod{p^\gamma}.$$

In Folge von (23) muss die Lösung (ξ_1,ξ_2) mit $(\lambda_0,-\lambda_{12})$, die Lösung (η_1,η_2) mit $(\mu_0,-\mu_{12})$ aequivalent sein. Aus (24) ergiebt sich aber, dass die Lösung (μ_0,μ_{12}) mit der Lösung $(\lambda_0,-\lambda_{12})$ aequivalent ist. Es besteht also die gesuchte nothwendige Bedingung darin, dass jede der Normen $\lambda_0^2+\lambda_{12}^2$ und $\mu_0^2+\mu_{12}^2$ durch p^γ theilbar ist, und dass die Congruenzlösungen (μ_0,μ_{12}) und $(\lambda_0,-\lambda_{12})$ aequivalent sind; ferner zeigt die umgekehrte Wiederholung derselben Betrachtungen, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind.

Mit Hülfe dieses Satzes kann man für jede Potenz einer ungeraden Primzahl p^γ eine zu einer beliebig gegebenen Congruenzlösung (ζ_1, ζ_2) gehörende Darstellung als Norm einer eigentlichen complexen Zahl ableiten, wofern eine zu der Congruenzlösung (ξ_1, ξ_2) gehörende Darstellung der Primzahl p als Norm der complexen Primzahl $\varrho_0+i\varrho_{12}$ vorliegt. Die modulo p^γ gegebene Lösung (ζ_1, ζ_2) kann modulo p betrachtet werden, und muss dann entweder mit (ξ_1, ξ_2), oder mit $(\xi_1, -\xi_2)$ aequivalent sein. Ich nehme das erstere an, da im zweiten Falle die conjugirte Zahl $\varrho_0-i\varrho_{12}$ zu der Lösung (ξ_1, ξ_2) gehört und statt $\varrho_0+i\varrho_{12}$ genommen werden kann. Aus dem soeben bewiesenen Lemma ergiebt sich nun, dass, wenn von $\varrho_0+i\varrho_{12}$ die successiven Potenzen gebildet werden, die reellen Bestandtheile der hervorgehenden complexen Zahlen nicht gleichzeitig durch p theilbar sein können, mithin überhaupt ohne gemeinsamen Theiler sind, und dass $(\varrho_0+i\varrho_{12})$ zu der gegebenen Congruenzlösung (ζ_1, ζ_2) gehört. Es folgt nämlich aus der Congruenz

(25) $$(\xi_1+i\xi_2)^2 \equiv 2\xi_1(\xi_1+i\xi_2) \pmod{p},$$

dass eine beliebige γ'te Potenz der Zahl $\varrho_0+i\varrho_{12}$ zu einer Congruenzlösung gehört, welche modulo p mit der Congruenzlösung (ξ_1, ξ_2) aequivalent ist. Die gegebene Congruenzlösung (ζ_1, ζ_2) ist aber nach der Annahme modulo p mit (ξ_1, ξ_2) aequivalent, während modulo p^γ ausser (ζ_1, ζ_2) nur noch die zweite Congruenzlösung $(\zeta_1, -\zeta_2)$ existirt, die modulo p mit $(\xi_1, -\xi_2)$ aequivalent ist.

Für eine ungerade Zahl m, die ein Product von ungeraden Primzahlen der Form $4r+1$ sein muss,

$$m = p^\gamma q^\delta \cdots,$$

ergiebt sich eine Darstellung, die zu den für die Moduln $p^\gamma, q^\delta, \ldots$ gegebenen Congruenzlösungen gehört, in entsprechender Weise, indem man für die Primzahlen $p, q, \ldots$ die den correspondirenden Congruenzlösungen zugeordneten complexen Primzahlen $\varrho_0+i\varrho_{12}$, $\sigma_0+i\sigma_{12}, \ldots$ aufsucht, und das Product

$$(\varrho_0+i\varrho_{12})^\gamma (\sigma_0+i\sigma_{12})^\delta \cdots = a+ib$$

bildet. Dann ist $a+ib$ die gesuchte eigentliche complexe Zahl, bei der a und b modulo 2 ungleichartige Zahlen sind, und welche die Gleichung

$$a^2+b^2=m$$

erfüllt. Um endlich das Doppelte einer ungeraden Zahl $\frac{m}{2}$ in der analogen Weise darzustellen, muss $\frac{m}{2}$ ein Product von ungeraden Primzahlen von der Form $4r+1$ sein. Man hat dann nach dem angegebenen Verfahren eine eigentliche complexe Zahl $a'+ib'$ zu bestimmen, für welche

$$a'^2+b'^2=\frac{m}{2},$$

ist, und die Zahlen a' und b' modulo 2 ungleichartig sind. Da ferner die Norm der Zahl $1+i$ gleich 2 ist, so ist $1+i$ eine complexe Primzahl, und es wird die bezeichnete Aufgabe durch das Product $(1+i)\,(a'+ib')=a+ib$ gelöst. Es sind somit für alle Zahlen, welche Normen von eigentlichen complexen Zahlen sein können, eigentliche complexe Zahlen, die zu den sämmtlichen möglichen Congruenzlösungen gehören, als vorhanden nachgewiesen, und durch Multiplication von complexen Primzahlen dargestellt. Es wird sich zeigen, dass, wenn man zu jeder der bezeichneten complexen Zahlen eine der vier Einheiten als Factor hinzufügt, alle eigentlichen complexen Zahlen erhalten werden, welche die Gleichung (1) erfüllen, und zwar jede ein Mal.

Wenn eine eigentliche complexe Zahl $\lambda_0+i\lambda_{12}$ gegeben ist, deren Norm m entweder ungerade oder das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, so erhält man die Darstellung dieser Zahl durch Multiplication von complexen Primzahlen folgendermassen.

Man suche für die in m enthaltenen ungeraden Primzahlpotenzen p^γ, q^δ, ..., wo die sämmtlichen Primzahlen p, q, .. von der Gestalt $4r+1$ sein müssen, die Congruenzlösungen auf, denen $\lambda_0+i\lambda_{12}$ zugehört, nehme für die einzelnen Primzahlen p, q, ... respective die complexen Primzahlen $\varrho_0+i\varrho_{12}$, $\sigma_0+i\sigma_{12}$, .., welche nach den Moduln p, q, ... zu den correspondirenden Congruenzlösungen gehören, und nach einer obigen Bemerkung eindeutig ausgewählt sind, und bilde das Product der Potenzen

$$(\varrho_0+i\varrho_{12})^\gamma\,(\sigma_0+i\sigma_{12})^\delta\ldots,$$

zu welchem, wenn m das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, noch der Primfactor $1+i$ hinzugefügt wird. Das Ergebniss der Multiplication heisse $a+ib$. Dann folgt aus dem Vorhergehenden, dass der reelle und imaginäre Theil des Products

$$(\lambda_0+i\lambda_{12})\ (a-ib)$$

durch m theilbar sein muss. Weil andrerseits die Norm dieses Products gleich m^2 ist, so ist dasselbe gleich dem Product der Zahl m in eine complexe Zahl von der Norm Eins, d. h. in eine der vier Einheiten 1, -1, i, $-i$. Wenn die Zahl m gleich einer ungeraden Primzahl p ist, so folgt hieraus, dass die betreffende Zahl $\lambda_0+i\lambda_{12}$ gleich dem Product von einer der vier Einheiten in die zu der gleichen Congruenzlösung gehörende eindeutig ausgewählte complexe Primzahl $\varrho_0+i\varrho_{12}$ sein muss. Allgemein wird die gegebene eigentliche complexe Zahl als ein Product aus einer der vier Einheiten in ein Product von complexen Primzahlen dargestellt, welche eindeutig ausgewählt und abgesehen von ihrer Reihenfolge vollständig bestimmt sind. Durch diese Betrachtung wird bewiesen, dass in der obigen Aufstellung in der That alle eigentlichen complexen Zahlen enthalten sind, welche die Gleichung (1) befriedigen, und zwar wird jede auf alle Arten durch Multiplication von complexen Primzahlen erzeugt, indem die complexen Primzahlen in ihrer Anordnung auf alle möglichen Arten vertauscht werden. Zugleich ergiebt sich für die Anzahl der betreffenden Zahlen die bekannte Bestimmung, gleich dem Vierfachen derjenigen Potenz von Zwei zu sein, deren Exponent gleich der Anzahl der in m enthaltenen verschiedenen ungeraden Primzahlen p, q ... ist.

Aus (7) des vorigen art. ist zu schliessen, dass alle Substitutionen von der Determinante 1, welche eine Summe von zwei Quadraten in sich selbst transformiren, und deren Coefficienten rationale Zahlen sind, auf eine eigentliche complexe ganze Zahl $\pm(\lambda_0+i\lambda_{12})$ zurückführen; man erhält also alle betreffenden Substitutionen, indem man in die dortigen Gleichungen (14)

$$\alpha_{11}=\alpha_{22}=\frac{\lambda_0^2-\lambda_{12}^2}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2},\quad \alpha_{12}=-\alpha_{21}=\frac{2\lambda_0\lambda_{12}}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2}$$

alle eigentlichen complexen ganzen Zahlen einsetzt. Es lässt sich leicht entscheiden, unter welchen Umständen bei diesen Ausdrücken die Zähler mit dem Nenner $\lambda_0^2+\lambda_{12}^2$ einen gemeinsamen Theiler haben. Jeder solche Theiler muss gleichzeitig in $2\lambda_0^2$ und $2\lambda_{12}^2$ enthalten sein; weil λ_0 und λ_{12} keinen gemeinsamen Theiler haben, so sind auch λ_0^2 und λ_{12}^2 ohne einen solchen, mithin kann jener gemeinsame Theiler nur Eins oder Zwei sein. Wenn $\lambda_0^2+\lambda_{12}^2$ gleich einer ungeraden Zahl ist, wird der Zähler des Ausdrucks von α_{11} ungerade, wenn $\lambda_0^2+\lambda_{12}^2$ das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, wird der Zähler von α_{11} gerade, während der Zähler von α_{12} stets gerade ist. Es erscheint demnach im ersten Falle kein gemeinsamer Theiler, im zweiten Falle der grösste gemeinsame Theiler Zwei, der sich forthebt, so dass wieder eine ungerade Zahl als Nenner bleibt. Für jede Substitution mit rationalen Coefficienten, welche zwei Quadrate in sich selbst transformirt, muss also der kleinste gemeinsame Nenner, auf den die Coefficienten gebracht werden können, eine ungerade Zahl sein, deren sämmtliche Primfactoren von der Form $4r+1$ sind.

3.

Um die Regeln für die *Rechnung mit Quaternionen* aus der *Transformation einer Summe von drei Quadraten in sich selbst* zu entwickeln, sei eine lineare mit den reellen Coefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{33}$ versehene Substitution gegeben, welche die reellen Variabeln x_1, x_2, x_3 als Functionen der reellen Variabeln y_1, y_2, y_3 darstellt,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2+\alpha_{13}y_3 \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2+\alpha_{23}y_3 \\ x_3 &= \alpha_{31}y_1+\alpha_{32}y_2+\alpha_{33}y_3\,, \end{aligned}\right.$$

und die Gleichung

$$(2)\qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2 = y_1^2+y_2^2+y_3^2$$

befriedigt; die Substitutionsdeterminante sei gleich der positiven Einheit. Offenbar bleibt die Gleichung (2) erfüllt und der Werth der Determinante ungeändert, wenn man eine andere Substitution anwendet, welche aus der gegebenen hervorgeht, indem die Coefficienten von irgend zwei Verticalreihen negativ genommen werden. Bildet man für jede dieser Substitutionen ein zugeordnetes System, bei dem zu jedem Element, das sich in der von oben links nach unten rechts laufenden Diagonale befindet, die Einheit addirt wird, und vergleicht die vier entsprechenden Determinanten

$$(3)\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+1, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}+1, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33}+1 \end{vmatrix}, \qquad (3\,\mathrm{a})\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+1, & -\alpha_{12}, & -\alpha_{13} \\ \alpha_{21}, & -\alpha_{22}+1, & -\alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & -\alpha_{32}, & -\alpha_{33}+1 \end{vmatrix},$$

$$(3\,\mathrm{b})\quad \begin{vmatrix} -\alpha_{11}+1, & \alpha_{12}, & -\alpha_{13} \\ -\alpha_{21}, & \alpha_{22}+1, & -\alpha_{23} \\ -\alpha_{31}, & \alpha_{32}+1, & -{}_{33}+1 \end{vmatrix}, \qquad (3\,\mathrm{c})\quad \begin{vmatrix} -\alpha_{11}+1, & -\alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ -\alpha_{21}, & -\alpha_{22}+1, & \alpha_{23} \\ -\alpha_{31}, & -\alpha_{32}, & \alpha_{33}+1 \end{vmatrix},$$

so zeigt sich, dass dieselben nicht sämmtlich gleich Null sein können. Weil bei der Substitution (1) jedes Element dem gleichnamigen adjungirten Element gleich ist, erhalten die vier Determinanten beziehungsweise die Werthe

$$(4)\quad 2+2\alpha_{11}+2\alpha_{22}+2\alpha_{33}, \qquad (4\,\mathrm{a})\quad 2+2\alpha_{11}-2\alpha_{22}-2\alpha_{33},$$

$$(4\,\mathrm{b})\quad 2-2\alpha_{11}+2\alpha_{22}-2\alpha_{33}, \qquad (4\,\mathrm{c})\quad 2-2\alpha_{11}-2\alpha_{22}+2\alpha_{33},$$

deren Summe gleich der Zahl 8 ist. Es muss daher wenigstens eine der Determinanten einen von Null verschiedenen Werth haben. Mithin kann aus jedem gegebenen System ein System (1) erhalten werden, bei dem die zugeordnete Determinante (3) nicht gleich Null ist, und diese Annahme wird von jetzt ab gemacht werden.

Ich werde jetzt auf Grund von (1) die Differenzen x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3 als Functionen der Summen x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3 ausdrücken.

Man erhält aus (1) die Gleichungen

$$(5)\quad \begin{cases} x_1+y_1 = (\alpha_{11}+1)\,y_1 + \alpha_{12}\,y_2 + \alpha_{13}\,y_3 \\ x_2+y_2 = \alpha_{21}\,y_1 + (\alpha_{22}+1)\,y_2 + \alpha_{23}\,y_3 \\ x_3+y_3 = \alpha_{31}\,y_1 + \alpha_{32}\,y_2 + (\alpha_{33}+1)\,y_3, \end{cases}$$

welche eine eindeutige Bestimmung von y_1, y_2, y_3 durch x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3 liefern, da die zugehörige Determinante (3) nach der getroffenen Voraussetzung von Null verschieden ist. Somit entstehen die Resultate

$$
(6)\quad \begin{cases}
x_1-y_1=\dfrac{(a_{12}-a_{21})(x_2+y_2)+(a_{13}-a_{31})(x_3+y_3)}{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}\\[2ex]
x_2-y_2=\dfrac{(a_{21}-a_{12})(x_1+y_1)+(a_{23}-a_{32})(x_3+y_3)}{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}\\[2ex]
x_3-y_3=\dfrac{(a_{31}-a_{13})(x_1+y_1)+(a_{32}-a_{23})(x_2+y_2)}{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}.
\end{cases}
$$

Die vorliegenden Coefficienten, die ein schiefes System bilden, stelle man als Brüche mit einem beliebigen von Null verschiedenen Nenner λ_0, wie folgt, dar

$$
(7)\quad \begin{cases}
\dfrac{a_{12}-a_{21}}{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}=\dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_0},\ \dfrac{a_{13}-a_{31}}{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}=\dfrac{\lambda_{13}}{\lambda_0},\ \dfrac{a_{23}-a_{32}}{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}=\dfrac{\lambda_{23}}{\lambda_0},\\
\lambda_{12}+\lambda_{21}=0,\qquad \lambda_{13}+\lambda_{31}=0,\qquad \lambda_{23}+\lambda_{32}=0,
\end{cases}
$$

wodurch (6) die Gestalt erhält

$$
(8)\quad \begin{cases}
x_1-y_1=\dfrac{\lambda_{12}(x_2+y_2)+\lambda_{13}(x_3+y_3)}{\lambda_0}\\[2ex]
x_2-y_2=\dfrac{\lambda_{21}(x_1+y_1)+\lambda_{23}(x_3+y_3)}{\lambda_0}\\[2ex]
x_3-y_3=\dfrac{\lambda_{31}(x_1+y_1)+\lambda_{32}(x_2+y_2)}{\lambda_0},
\end{cases}
$$

oder nach Multiplication mit λ_0

$$
(9)\quad \begin{cases}
\lambda_0\, x_1+\lambda_{21}\, x_2+\lambda_{31}\, x_3=\lambda_0\, y_1+\lambda_{12}\, y_2+\lambda_{13}\, y_3\\
\lambda_{12}\, x_1+\lambda_0\, x_2+\lambda_{32}\, x_3=\lambda_{21}\, y_1+\lambda_0\, y_2+\lambda_{23}\, y_3\\
\lambda_{13}\, x_1+\lambda_{23}\, x_2+\lambda_0\, x_3=\lambda_{31}\, y_1+\lambda_{32}\, y_2+\lambda_0\, y_3.
\end{cases}
$$

Die Determinante der Coefficienten hat sowohl links als rechts den Ausdruck

$$
(9^*)\qquad \lambda_0(\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2).
$$

Multiplicirt man die drei Gleichungen (9) der Reihe nach mit λ_{23}, λ_{31}, λ_{12} und addirt, so entsteht nach Weglassung des von Null verschiedenen Factors λ_0 die Gleichung

$$
(10)\qquad \lambda_{23}\, x_1+\lambda_{31}\, x_2+\lambda_{12}\, x_3=\lambda_{23}\, y_1+\lambda_{31}\, y_2+\lambda_{12}\, y_3,
$$

welche zu (9) als vierte hinzuzufügen ist.

In dem auf diese Weise vervollständigten System enthält jede Vertikalreihe der Coefficienten auf der linken und rechten

Seite die vier Elemente, nur in verschiedener Folge und zum Theil mit der negativen Einheit multiplicirt. Man kann daher, nachdem die Ausdrücke derselben Seite successive mit der Einheit und drei Symbolen i_{12}, i_{13}, i_{23} multiplicirt und addirt sind, Rechenregeln für die Symbole aufsuchen, durch welche das links und rechts resultirende Aggregat die Gestalt eines Products annimmt. Damit das Aggregat der linken Seite dem Product

$$(11) \qquad (\lambda_0+i_{12}\lambda_{12}+i_{13}\lambda_{13}+i_{23}\lambda_{23})\,(x_1+i_{12}x_2+i_{13}x_3),$$

das Aggregat der rechten Seite dem Product

$$(12) \qquad (y_1+i_{12}y_2+i_{13}y_3)\,(\lambda_0-i_{12}\lambda_{12}-i_{13}\lambda_{13}+i_{23}\lambda_{23})$$

gleich werde, hat man für die Symbole i_{12}, i_{13}, i_{23} die Relationen festzusetzen

$$(13) \qquad \begin{cases} i_{12}^2=-1, & i_{13}^2=-1, \\ i_{12}\,i_{13}=i_{23}, & i_{12}\,i_{23}=-i_{13}, \quad i_{13}\,i_{23}=i_{12} \\ i_{13}\,i_{12}=-i_{23}, & i_{23}\,i_{12}=i_{13}, \quad i_{23}\,i_{13}=-i_{12}. \end{cases}$$

Unter der Annahme des *associativen Gesetzes* für die Symbole folgt die Relation

$$(13^*) \qquad i_{23}^2=-1.$$

Indem ich ferner annehme, dass

$$(14) \qquad i_{21}=-i_{12}, \quad i_{31}=-i_{13}, \quad i_{32}=-i_{23}$$

sein soll, werden alle Relationen von einer Vertauschung der Zeiger 1, 2, 3 unabhängig. Bei der Bezeichnung

$$(15) \qquad i=i_{12}, \quad j=i_{23}, \quad k=-i_{13}$$

gehen die aufgestellten Relationen in die Regeln über, welche Hamilton für die Rechnung mit den Einheiten der Quaternionen eingeführt hat, und der Ausdruck

$$(16) \qquad \lambda_0+i_{12}\lambda_{12}+i_{13}\lambda_{13}+i_{23}\lambda_{23}$$

verwandelt sich in die Darstellung des Quaternions

$$(17) \qquad \lambda_0+i\lambda_{12}+j\lambda_{23}+k\lambda_{31}.$$

Die in (13), (13*) und (14) enthaltenen Regeln lassen sich dahin zusammenfassen, dass man die Einheiten i_{12}, i_{13}, i_{23} durch drei *Primitivzeichen* k_1, k_2, k_3 so ausdrückt

$$(18) \qquad i_{12}=k_1k_2, \quad i_{13}=k_1k_3, \quad i_{23}=k_2k_3,$$

und festsetzt, *es solle für die Primitivzeichen das associative Gesetz gelten und für jeden Zeiger a*

(19) $$k_a^2 = -1,$$

für jedes Paar verschiedener Zeiger a und b

(20) $$k_b k_a = -k_a k_b$$

sein.

Aus dem Bisherigen geht hervor, dass die Gleichungen (9) und (10) mit Hülfe der Bezeichnungen

(21) $$\begin{cases} \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23} = \varDelta, & x_1 + i_{12}x_2 + i_{13}x_3 = X \\ \lambda_0 - i_{12}\lambda_{12} - i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23} = \varDelta_1; & y_1 + i_{12}y_2 + i_{13}y_3 = Y \end{cases}$$

in die eine Gleichung zusammengefasst werden können

(22) $$\varDelta X = Y \varDelta_1.$$

Die festgesetzten Regeln haben zur Folge, dass die Multiplication zweier Quaternionen wieder ein Quaternion liefert, dass durch die Aenderung der Reihenfolge der Factoren eine Aenderung des Resultats bedingt wird, und dass bei der Multiplication mehrerer Quaternionen das associative Gesetz gilt, vermöge dessen das Ergebniss durch eine Aenderung der Zusammenfassung der Factoren mit Beibehaltung der Reihenfolge nicht geändert wird. Ferner ergiebt sich, dass das Product eines Quaternions $\varDelta$ in das Quaternion

(23) $$\varDelta' = \lambda_0 + i_{21}\lambda_{12} + i_{31}\lambda_{13} + i_{32}\lambda_{23},$$

welches *das zu $\varDelta$ conjugirte Quaternion* genannt wird, bei jeder der beiden Anordnungen der Multiplication dieselbe reelle Grösse liefert, *die Norm des Quaternions $\varDelta$*,

(24) $$N(\varDelta) = \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2,$$

welche in dem Ausdruck (9*) als zweiter Factor enthalten ist. Offenbar ist dem Quaternion $\varDelta'$ wieder das Quaternion $\varDelta$ conjugirt, und $N(\varDelta') = N(\varDelta)$ (S. Hamilton, Lectures on Quaternions, p. 87).

Von einer Substitution (1) ausgehend, bei der die zugeordnete Determinante (3) nicht verschwindet, habe ich die Gleichung (22) abgeleitet, in welcher λ_0 eine von Null verschiedene Grösse bedeutet. Nimmt man umgekehrt ein beliebiges Quaternion, in dem λ_0 nicht gleich Null ist, und bildet damit nach der Vorschrift von (22) eine Gleichung, so stellt dieselbe den Inbegriff der Gleichungen (9) und (10) dar, bei denen (10) eine Folge von (9) ist. Aus (9) ergiebt sich leicht, dass die Gleichung (2) erfüllt sein muss, ferner erhält man, da die Determinante (9*) nicht verschwindet, eine vollständig bestimmte Substitution (1), deren Determinante gleich der positiven Einheit ist, und deren Coefficienten die folgenden zuerst von Euler gegebenen Ausdrücke haben,

$$
(25)\quad \begin{cases}
x_1 = \dfrac{\lambda_0^2-\lambda_{12}^2-\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}\,y_1 + \dfrac{2(\lambda_0\lambda_{12}-\lambda_{13}\lambda_{23})}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}\,y_2 + \dfrac{2(\lambda_0\lambda_{13}+\lambda_{12}\lambda_{23})}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}\,y_3 \\[2ex]
x_2 = \dfrac{2(-\lambda_0\lambda_{12}-\lambda_{13}\lambda_{23})}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}\,y_1 + \dfrac{\lambda_0^2-\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}\,y_2 + \dfrac{2(-\lambda_0\lambda_{23}-\lambda_{12}\lambda_{13})}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}\,y_3 \\[2ex]
x_3 = \dfrac{2(-\lambda_0\lambda_{13}+\lambda_{12}\lambda_{13})}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}\,y_1 + \dfrac{2(\lambda_0\lambda_{23}-\lambda_{12}\lambda_{13})}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}\,y_2 + \dfrac{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2-\lambda_{13}^2-\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2}\,y_3
\end{cases}
$$

Für die betreffende Abhandlung Eulers, Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile (N. Comm. XV, 1770, p. 75. Exhib. 1770, Mart. 5, Comm. ar. I, p. 427) hat Jacobi in einem Aufsatze ein besonderes Interesse an den Tag gelegt, der aus seinem Nachlasse unter dem Titel: Bemerkungen zu einer Abhandlung Eulers über die orthogonale Substitution, in dem dritten Bande der gesammelten Werke veröffentlicht ist.

Die zugeordnete Determinante (3) bekommt den Werth

$$
(26)\qquad \frac{8\lambda_0^2}{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2},
$$

der von Null verschieden ist. Alle Quaternionen, bei denen λ_0 nicht Null ist, führen also auf solche Substitutionen (1) zurück, bei denen die entsprechende Determinante (3) nicht verschwindet.

Da eine Substitution (1), bei welcher die zugeordnete Determinante (3) nicht gleich Null ist, aus einer beliebig gegebenen erhalten wird, indem man eventuell die Coefficienten von zwei Vertikalreihen mit der negativen Einheit multiplicirt, so entstehen alle Substitutionen (1) überhaupt, wofern man die bis jetzt betrachteten Substitutionen mit denjenigen Substitutionen zusammensetzt, welche bewirken, dass bei irgend einem Paar von Vertikalreihen die Coefficienten mit der negativen Einheit multiplicirt werden. Für die zweite und dritte Vertikalreihe leistet dies die Substitution

$$
(26)\qquad y_1 = z_1,\; y_2 = -z_2,\; y_3 = -z_3,
$$

welche durch die eine Gleichung ersetzt werden kann

$$(27)\qquad i_{23}(y_1+i_{12}y_2+i_{13}y_3)=(z_1+i_{12}z_2+i_{13}z_3)\,i_{23}\,.$$

Für die dritte und erste Reihe kommt in gleicher Weise

$$(27\,\mathrm{a})\qquad i_{31}(y_1+i_{12}y_2+i_{13}y_3)=(z_1+i_{12}z_2+i_{13}z_3)(-i_{31}),$$

für die erste und zweite

$$(27\,\mathrm{b})\qquad i_{12}(y_1+i_{12}y_2+i_{13}y_3)=(z_1+i_{12}z_2+i_{13}z_3)(-i_{12}).$$

Es sei nun

$$(28)\qquad z_1+i_{12}z_2+i_{13}z_3=Z,$$

und beziehungsweise

$$(29)\qquad \begin{cases} J=i_{23}, & i_{31}, & i_{12} \\ J_1=i_{23}, & -i_{31}, & -i_{12}, \end{cases}$$

dann erhalten (27), (27 a), (27 b) die Gestalt

$$(30)\qquad JY=ZJ_1,$$

und es folgt aus (22), indem links mit J multiplicirt wird, nach dem associativen Gesetze das Resultat

$$(31)\qquad J\varLambda X=ZJ_1\varLambda_1.$$

In dieser Gleichung, welche aus (22) hervorgeht, indem man $J\varLambda$ für $\varLambda$ einsetzt, und die (22) umfasst, sobald $J=1$, $J_1=1$ genommen wird, ist nach dem Vorhergehenden jede Substitution von der Determinante 1 dargestellt, welche die Gleichung (2) befriedigt. Aus einem Quaternion $\varLambda$, in welchem λ_0 von Null verschieden ist, gehen durch den links hinzugefügten Factor $J=i_{23}$, i_{31}, i_{12} solche Quaternionen von derselben Norm hervor, in welchen respective der Factor von i_{23}, i_{31}, i_{12} von Null verschieden ist. Weil aber in jedem Quaternion, dessen Norm nicht gleich Null ist, wenigstens ein reeller Bestandtheil von Null verschieden ist, so wird jedes Quaternion, dessen Norm nicht verschwindet, entweder, wie in (22), durch $\varLambda$, oder, wie in (31), durch $J\varLambda$ ausgedrückt.

Wenn man daher festsetzt, dass in (22) das Quaternion $\varLambda$ nur die eine Bedingung erfülle, dass seine Norm nicht Null sei, so wird (31) von (22) eingeschlossen, und (22) repräsentirt alle Substitutionen (1), deren Determinante gleich 1 ist; mithin kommt dann den Ausdrücken (25) unbeschränkte Gültigkeit zu.

Vermittelst eines beliebigen Quaternions von nicht verschwindender Norm

$$(32)\qquad \mu_0+i_{12}\mu_{12}+i_{13}\mu_{13}+i_{23}\mu_{23}=M$$

möge eine zweite Substitution (1) nach der Art von (22) dargestellt werden, welche von den Variabeln y_1, y_2, y_4 zu den Variabeln z_1, z_2, z_3 führt,

$$(33) \qquad M\,Y = Z\,M_1.$$

Alsdann liefert die auf (22) angewendete Multiplication vermöge des associativen Gesetzes die Gleichung

$$(34) \qquad M\varLambda\,X = Z\,M_1\,\varLambda_1,$$

bei welcher in Folge der Zusammensetzung der Substitutionen das Product der Quaternionen

$$M\,\varLambda$$

eingetreten ist. Wie sich leicht ergiebt, ist demselben das Quaternion

$$\varLambda'\,M'$$

conjugirt. Die Norm des Products $M\varLambda$ erhält demnach den Werth

$$(35) \qquad N(M\varLambda) = M\varLambda\varLambda'\,M' = N(M)\,N(\varLambda),$$

das heisst, ***die Norm eines Products ist gleich dem Product der Normen der Factoren.*** Da vorausgesetzt worden ist, dass $N(\varLambda)$ und $N\,(M)$ von Null verschieden sind, so muss auch $N\,(M\varLambda)$ von Null verschieden sein. Hier möchte ich nicht unterlassen, zu bemerken, dass die Gleichung (35) mit dem erwähnten Satze aus Art. 93 der Abhandlung Eulers: Demonstratio theorematis Fermatiani etc. den gleichen Inhalt hat, und dass bei dem Vornehmen, von dem Eulerschen Satze durch Anwendung der Multiplication zu der Gleichung (35) zu gelangen, die Regeln für die Rechnung mit Quaternionen erhalten werden (S. Hamilton a. a. O., preface, p. 47).

Nach den bisherigen Betrachtungen gehört jedes Quaternion $\varLambda$ zu einer Gesammtheit von Quaternionen, die aus denselben reellen Bestandtheilen gebildet sind, dieselbe Norm haben, und in ähnlicher Weise eingetheilt werden können, wie Gauss in der Abhandlung über die biquadratischen Reste die complexen Grössen $a+ib$ eingetheilt hat. Daselbst werden in der Gesammtheit der 8 zusammengehörigen complexen Grössen diejenigen associirt genannt, welche aus einem Individuum durch Multiplication mit einer der vier Einheiten entstehen, dagegen je zwei conjugirt, welche denselben reellen Theil und den entgegengesetzten Factor von i haben. Wenn man bedenkt, dass zu jedem

Quaternion Λ in (22) eine bestimmte Substitution (1), zu $-\Lambda$ aber wieder dieselbe Subtsitution gehört, so kann man die Gesammtheit der zu einander gehörigen Quaternionen nach den Veränderungen eintheilen, welche durch die Einsetzung eines anderen Quaternions in die Gleichung (22) bei der Substitution (1) hervorgerufen werden. Es ist schon oben bemerkt, dass, wenn von Λ respective zu $i_{23}\Lambda$, $i_{31}\Lambda$, $i_{12}\Lambda$ übergegangen wird, die Coefficienten der zwei durch die Indices bezeichneten Vertikalreihen in (1) mit der negativen Einheit multiplicirt werden. Die Zahl der auf diese Weise zusammengehörigen Quaternionen ist gleich 8. Was die Quaternionen anlangt, welche aus einem gegebenen

$$\Lambda = \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23}$$

entstehen, indem der reelle Theil λ_0 ungeändert bleibt, bei den übrigen reellen Bestandtheilen aber die Vorzeichen beliebig gewechselt werden, so hat man nach der eingeführten Bezeichnungsweise

$$\begin{aligned}
\Lambda' &= \lambda_0 - i_{12}\lambda_{12} - i_{13}\lambda_{13} - i_{23}\lambda_{23},\\
\Lambda_1 &= \lambda_0 - i_{12}\lambda_{12} - i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23} = i_{23}\Lambda i_{32},\\
\Lambda'_1 &= \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} - i_{23}\lambda_{23} = i_{23}\Lambda' i_{32},\\
\Lambda_2 &= \lambda_0 - i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} - i_{23}\lambda_{23} = i_{13}\Lambda i_{31},\\
\Lambda'_2 &= \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} - i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23} = i_{13}\Lambda' i_{31},\\
\Lambda_3 &= \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} - i_{13}\lambda_{13} - i_{23}\lambda_{23} = i_{12}\Lambda i_{21},\\
\Lambda'_3 &= \lambda_0 - i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23} = i_{12}\Lambda' i_{21}.
\end{aligned}$$

Die Wirkung auf die Substitution (1) besteht aber darin, dass durch die Einsetzung von Λ_1 die erste horizontale und vertikale Reihe, von Λ_2 die zweite horizontale und vertikale Reihe, von Λ_3 die dritte horizontale und vertikale Reihe ihre Vorzeichen umkehren, während durch die Einsetzung von Λ' statt Λ die horizontalen und vertikalen Reihen gleicher Ordnung mit einander vertauscht werden. Die Gesammtzahl der bei der Combination von beiden Operationsweisen erhaltenen zusammengehörigen Quaternionen beträgt 64, die Gesammtzahl der correspondirenden Substitutionen 32; dieselben werden durch das angegebene in sich abgeschlossene System von Veränderungen aus einer einzigen abgeleitet.

4.

Die so eben dargelegte Eintheilung findet ihre Anwendung bei den *Quaternionen*

(1) $$A = \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} i + {}_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23},$$

deren reelle Elemente λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} *ganze Zahlen sind*, und zu deren Untersuchung ich mich jetzt wende. Damit die Norm eines solchen Quaternion gleich der Einheit sei, muss eines der betreffenden Elemente gleich ± 1 sein, während die übrigen gleich Null sind. Es wird also die gestellte Forderung nur von den 8 Quaternionen

(2) $$\pm 1, \ \pm i_{12}, \ \pm i_{13}, \ \pm i_{23}$$

erfüllt, welche schon vorher *Einheiten* genannt worden sind. Bezeichnet man irgend eine derselben mit J, so gilt die schon früher angewendete Gleichung

(3) $$N(JA) = N(A).$$

Es lässt sich nun zunächst nachweisen, dass die 8 Quaternionen JA stets von einander verschieden sind, wofern $N(A)$ nicht gleich Null ist. Denn wenn für zwei verschiedene Einheiten $J^{(a)}$ und J die Gleichung

$$J^{(a)}A = JA$$

gelten sollte, so müsste

$$(J^{(a)} - J)\,A = 0,$$

mithin auch

$$N(J^{(a)} - J)\,N(A) = 0$$

sein, also $J^{(a)} = J$, gegen die Voraussetzung.

Je nachdem die in dem Quaternion A auftretenden ganzen Zahlen λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} einen gemeinsamen Theiler haben oder nicht, werde ich das ganzzahlige Quaternion ein *eigentliches* oder *uneigentliches* nennen. Aus dieser Definition folgt sogleich, dass die Norm eines eigentlichen ganzzahligen Quaternion entweder eine ungerade Zahl, oder das Doppelte oder das Vierfache einer ungeraden Zahl sein muss. Denn wenn die Norm gerade sein soll, so müssen unter den vier Zahlen λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} entweder nur zwei ungerade oder alle vier ungerade sein; im ersten Falle hat die Norm die Gestalt $4r + 2$, im zweiten die Gestalt $8r + 4$.

Ein ganzzahliges Quaternion, dessen Norm eine Primzahl ist, kann nur das Product von zwei ganzzahligen Quaternionen sein, von denen das eine die Primzahl selbst, das andere die Einheit zur Norm hat, mithin selbst eine der 8 Einheiten (2) ist. In sofern ist jedes ganzzahlige Quaternion, dessen Norm eine Primzahl ist, als unzerlegbar zu betrachten, und kann ein *Primquaternion* genannt werden.

Gesetzt, es sei ein eigentliches ganzzahliges Quaternion $\varDelta$ gegeben, dessen Norm gleich einer Zahl m ist, und es bedeute p^ν die Potenz einer in m enthaltenen ungeraden Primzahl p. Weil nun nicht alle vier Zahlen λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} durch p theilbar sein können, so lässt sich immer ein Quaternion $J\varDelta$, dessen Norm ebenfalls gleich m ist, angeben, dessen reeller Theil nicht durch p aufgeht, und man darf daher voraussetzen, dass in dem vorgelegten Quaternion $\varDelta$ die Zahl λ_0 nicht durch p theilbar sei. Alsdann kann man für den Modul p^ν das System von Congruenzen bilden

$$(4)\qquad \begin{cases} \lambda_0\,\xi_1+\lambda_{21}\,\xi_2+\lambda_{31}\,\xi_3 \equiv 0 \pmod{p^\nu} \\ \lambda_{12}\,\xi_1+\lambda_0\,\xi_2+\lambda_{32}\,\xi_3 \equiv 0 \\ \lambda_{13}\,\xi_1+\lambda_{23}\,\xi_2+\lambda_0\,\xi_3 \equiv 0, \end{cases}$$

und zeigen, dass dasselbe durch ein System von drei Zahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3 lösbar ist, die nicht sämmtlich durch p aufgehen. Ich betrachte das System von Unterdeterminanten

$$(5)\qquad \begin{cases} \lambda_0^2+\lambda_{23}^2,\ \lambda_{32}\,\lambda_{13}-\lambda_{12}\,\lambda_0,\ \lambda_{12}\,\lambda_{23}-\lambda_{13}\,\lambda_0 \\ \lambda_{23}\,\lambda_{31}-\lambda_{21}\,\lambda_0,\ \lambda_0^2+\lambda_{31}^2,\ \lambda_{13}\,\lambda_{21}-\lambda_{23}\,\lambda_0 \\ \lambda_{21}\,\lambda_{32}-\lambda_{31}\,\lambda_0,\ \lambda_{31}\,\lambda_{12}-\lambda_{32}\,\lambda_0,\ \lambda_0^2+\lambda_{12}^2. \end{cases}$$

Wären die drei in der Diagonale befindlichen Quadratsummen durch p theilbar, so müssten wegen der Gleichung

$$(6)\qquad \lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2=m$$

die Quadratsummen

$$\lambda_{12}^2+\lambda_{31}^2,\ \lambda_{12}^2+\lambda_{23}^2,\ \lambda_{23}^2+\lambda_{31}^2$$

ebenso beschaffen sein, mithin auch

$$2\lambda_0^2,\ 2\lambda_{12}^2,\ 2\lambda_{13}^2,\ 2\lambda_{23}^2,$$

also, weil p eine ungerade Primzahl ist, ebenfalls die vier Basen der Quadrate, was gegen die Voraussetzung läuft. Jede in (5) enthaltene Horizontalreihe liefert beziehungsweise drei Zahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3, die den Congruenzen (4) genügen, und da wenigstens eine in der Diagonale stehende Zahl nicht durch p aufgeht, so giebt die betreffende Horizontalreihe ein System von drei Zahlen, die nicht sämmtlich durch p theilbar sind. Ist z. B. $\lambda_0^2+\lambda_{12}^2$ nicht durch p theilbar, so kann man für ξ_3 eine beliebige durch p nicht theilbare Zahl setzen, und es werden ξ_1 und ξ_2 aus der ersten und zweiten Congruenz (4) folgendermassen eindeutig bestimmt:

$$(7) \quad \lambda_{21}\lambda_{32}-\lambda_{31}\lambda_0 \equiv \omega_1(\lambda_0^2+\lambda_{12}^2),\ \lambda_{31}\lambda_{12}-\lambda_{32}\lambda_0 \equiv \omega_2(\lambda_0^2+\lambda_{12}^2) \pmod{p^\gamma}$$

$$(8) \qquad \xi_1 \equiv \omega_1\,\xi_3 \quad , \qquad \xi_2 \equiv \omega_2\,\xi_3 \pmod{p^\gamma}.$$

Wie im vorigen Art. aus (9) die Gleichung (10) abgeleitet ist, folgt aus den Congruenzen (4), da λ_0 nicht durch p aufgeht, die Congruenz

$$(9) \qquad \lambda_{23}\,\xi_1+\lambda_{31}\,\xi_2+\lambda_{12}\,\xi_3 \equiv 0 \pmod{p^\gamma}.$$

Wenn den Congruenzen (4) und (9) ausser dem so eben bestimmten System Zahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3, noch ein zweites System $\xi_1^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$, $\xi_3^{(1)}$ genügt, bei dem nicht alle Individuen durch p theilbar sind, so erkennt man leicht aus dem Gesagten, dass immer eine durch p nicht theilbare Zahl g existirt, vermöge deren die Congruenzen

$$\xi_1^{(1)} \equiv g\,\xi_1,\quad \xi_2^{(1)} \equiv g\,\xi_2,\quad \xi_3^{(1)} \equiv g\,\xi_3 \pmod{p^\gamma}$$

erfüllt werden. Zwei solcher Systeme ξ_1, ξ_2, ξ_3 und $\xi_1^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$, $\xi_3^{(1)}$, von denen das eine aus dem anderen durch Multiplication mit einer durch p nicht theilbaren Zahl erzeugt werden kann, mögen *aequivalent* genannt und in *eine Classe* zusammengefasst werden.

Aus den Congruenzen (4) folgt ferner, indem dieselben der Reihe nach mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 multiplicirt und addirt werden, weil λ_0 nicht durch p theilbar ist, die Congruenz

$$(10) \qquad \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p^\gamma}.$$

Es gehört also zu den Congruenzen (4) und (9) eine bestimmte *Classe von Auflösungen*, welche zugleich eine *Classe von Auflösungen der Congruenz* (10) ausmacht.

Wenn man mit den drei Zahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3 den Ausdruck bildet

$$(11) \qquad \xi_1+i_{12}\,\xi_2+i_{13}\,\xi_3 = \Xi,$$

so liefert das Aggregat der linken Seiten von (4) und (9), nachdem dieselben der Reihe nach mit 1, i_{12}, i_{13}, i_{23} multiplicirt sind, das Product $\mathit{A}\Xi$. *Es möge nun ein ganzzahliges Quaternion, dessen sämmtliche reelle Bestandtheile durch eine gewisse reelle Zahl theilbar sind, nach dieser Zahl als Modul congruent der Null genannt werden.* Dann lassen sich die Congruenzen (4) und (9) zu der einen Congruenz

$$(12) \qquad \mathit{A}\Xi \equiv 0 \pmod{p^\gamma}$$

zusammenfassen. Wie leicht zu sehen, bleibt dieselbe auch noch erfüllt, wenn A durch $J\mathit{A}$ ersetzt wird, so dass die 8 in der Bezeichnung $J\mathit{A}$ enthaltenen Quaternionen zu derselben Classe von Congruenzlösungen ξ_1, ξ_2, ξ_3 modulo p^γ gehören.

Die Congruenzlösungen, zu denen respective die Quaternionen $\mathit{A}i_{12}$, $\mathit{A}i_{13}$, $\mathit{A}i_{23}$ gehören, werden erhalten, indem man aus (12) die Folgerungen ableitet

$$(12^*) \qquad \begin{cases} \mathit{A}i_{12}\ (i_{21}\,\Xi\, i_{12}) \equiv 0 \pmod{p^\gamma} \\ \mathit{A}i_{13}\ (i_{31}\,\Xi\, i_{13}) \equiv 0 \pmod{p^\gamma} \\ \mathit{A}i_{23}\ (i_{32}\,\Xi\, i_{23}) \equiv 0 \pmod{p^\gamma}. \end{cases}$$

Es ist aber

$$(12^{**}) \qquad \begin{cases} i_{21}\,\Xi\, i_{12} = \xi_1 + i_{12}\,\xi_2 - i_{13}\,\xi_3 \\ i_{31}\,\Xi\, i_{31} = \xi_1 - i_{12}\,\xi_2 + i_{13}\,\xi_3 \\ i_{32}\,\Xi\, i_{23} = \xi_1 - i_{12}\,\xi_2 - i_{13}\,\xi_3, \end{cases}$$

so dass zu der Lösung ξ_1, ξ_2, ξ_3 diejenigen hinzutreten, welche bei festgehaltenem ξ_1 durch die Zeichenwechsel von ξ_2 und ξ_3 entstehen. Die 4 Congruenzlösungen gehören zu vier verschiedenen Classen, so lange keine der Zahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3 durch den Modul aufgeht, hingegen nur zu zwei Classen, wofern eine der Zahlen durch den Modul aufgeht.

Für diejenigen eigentlichen Quaternionen, welche gleich dem Doppelten einer ungeraden Zahl sind, ist es nothwendig, die Betrachtung der Congruenzen (4) und (9) auch auf den Modul Zwei auszudehnen. Da in diesem Falle, wie schon bemerkt, unter den Zahlen λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} zwei gerade und zwei ungerade sind, so kann man mittelst der Einheit J erreichen, dass in $J\mathit{A}$ der reelle Theil ungerade ist, und darf daher voraussetzen, dass in A die Zahl λ_0 ungerade sei. Alsdann müssen in (5) unter den in der

Diagonale stehenden Quadratsummen zwei ungerade und eine gerade sein. Wofern z. B. $\lambda_0^2+\lambda_{12}^2$ ungerade ist, muss ξ_3 ungerade genommen werden, und es werden ξ_1 und ξ_2 modulo 2 eindeutig bestimmt. Es zeigt sich also, dass die Congruenzen (4) durch ein einziges System ξ_1, ξ_2, ξ_3 modulo 2 befriedigt werden, bei welchem nicht alle drei Zahlen gerade sind. Dasselbe System erfüllt dann auch modulo 2 die Congruenz (9) und die Congruenz (10). Die Congruenzlösungen, zu denen beziehungsweise $\mathcal{A}i_{12}$, $\mathcal{A}i_{13}$, $\mathcal{A}i_{13}$ gehören, werden auch jetzt durch (12**) dargestellt, sind aber offenbar aequivalent. Mithin gelten die gefundenen allgemeinen Resultate bei allen eigentlichen Quaternionen für jede Potenz einer ungeraden Primzahl als Modul, und bei den eigentlichen Quaternionen, deren Norm das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, auch für den Modul Zwei.

5.

Die bisherige Betrachtung hat gelehrt, dass, wenn die Norm eines eigentlichen Quaternion gleich einer Zahl m ist, für jede in m enthaltene Potenz p^γ einer ungeraden Primzahl die Congruenz

(1) $$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p^\gamma}$$

eine Auflösung haben muss, bei der nicht alle drei Zahlen durch p aufgehen, und die ich eine *eigentliche Auflösung* nennen werde. Demnach wird die Lösbarkeit dieser Congruenz zu erörtern, und die *Anzahl der vorhandenen Classen eigentlicher Auflösungen* zu bestimmen sein.

Es sei zunächst $\gamma = 1$, oder die Primzahl p selbst der Modul, und es werde mit denjenigen Lösungen begonnen, bei welchen ξ_3 nicht durch p aufgeht. Dann kann man $\xi_3 = 1$ nehmen, und mit Rücksicht auf (8) des vorigen Artikels statt (1) die Congruenz

(2) $$\omega_1^2+\omega_2^2+1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ins Auge fassen. Ihre Untersuchung lässt sich auf diejenige der Congruenz

(3) $$1+a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$$

zurückführen. Giebt man der letzteren die Gestalt

(4) $$1 \equiv (b-a)(b+a) \pmod{p},$$

so leuchtet ein, dass die Zahlen

(5) $$b-a=r,\ b+a=s$$

nur die beiden Bedingungen zu erfüllen haben

(6) $$r\equiv s\ (\text{mod. } 2),\ 1\equiv rs\ (\text{mod. } p).$$

Da wegen der zweiten die Zahl r nicht durch p aufgehen kann, so genügt man den Forderungen in der allgemeinsten Weise, indem man für r ein System der $p-1$ übrigen modulo p incongruenten Reste setzt, und für jedes r das zugehörige s modulo p so bestimmt, dass es mit r modulo 2 gleichartig wird. Man erhält somit $p-1$ Paare von Zahlen r, s und findet aus jedem derselben die Zahlen a und b eindeutig,

(7) $$b=\frac{r+s}{2},\ a=\frac{r-s}{2}.$$

Die Congruenz (3) ist also immer möglich und hat stets $p-1$ Auflösungen. Um nun zu der Congruenz (2) überzugehen, ist zu unterscheiden, ob die Primzahl $p\equiv 1$ oder $\equiv 3$ modulo 4 ist. Im ersteren Falle ist -1 quadratischer Rest von p, also existirt eine Zahl δ, für welche die Congruenz

(8) $$\delta^2\equiv -1\ (\text{mod. } p)$$

gilt. Mithin kann bei jeder Lösung von (2) die Folgerung

(9) $$1+\omega_1^2-\delta^2\omega_2^2\equiv 0\ (\text{mod. } p)$$

gezogen werden; es genügen also die Zahlen

(10) $$a\equiv \omega_1,\ b\equiv \delta\omega_2\ (\text{mod. } p)$$

der Congruenz (3), und umgekehrt liefert jede Lösung von (3) durch (10) ein Paar Zahlen ω_1, ω_2, welche (2) befriedigen. Die Anzahl der Lösungen von (2) beträgt daher ebenfalls $p-1$. Wenn dagegen $p\equiv 3$ (mod. 4) ist, so ist -1 quadratischer Nichtrest von p; daher kann bei den Lösungen von (3) die Zahl b niemals durch p aufgehen, während sich unter denselben stets die beiden Lösungen $a\equiv 0$, $b\equiv \pm 1$ (mod. p) befinden. Indem man diese beiden ausschliesst, bleiben von den vorhandenen $p-1$ Lösungen noch $p-3$ übrig, bei denen weder a noch b durch p aufgeht. Jede Gruppe von 4 Auflösungen $\pm a$, $\pm b$ stellt dann einen der Fälle dar, in welchem einer der $\frac{p-1}{2}$ quadratischen Reste, um die Einheit vermehrt, wieder einem quadratischen Rest gleich wird, und zwar werden auf diese Weise alle Fälle erschöpft. Es existiren somit genau $\frac{p-3}{4}$ quadratische Reste, welche die angegebene Eigenschaft haben. Wenn man jetzt einen der noch übrigen $\frac{p+1}{4}$ quadratischen Reste um eine Einheit vermehrt, so kann das Ergebniss nach dem Früheren weder durch p theilbar noch ein quadratischer Rest sein, und muss deshalb ein quadratischer Nichtrest sein. Weil nun jeder quadratische Rest dem Quadrat einer Zahl c, jeder quadratische Nichtrest gegenwärtig dem negativ genommenen Quadrat einer Zahl d gleich ist, jede der genannten Zahlen aber genau zwei Bestimmungen, respective $\pm c$ und $\pm d$, zulässt, so liefert jeder der erwähnten $\frac{p+1}{4}$ quadratischen Reste je vier zusammengehörige Lösungen der Congruenz

(11) $$1+c^2 \equiv -d^2 \pmod{p},$$

die mit (2) zusammenfällt. Die betreffende Congruenz hat demnach, wenn $p \equiv 3 \pmod{4}$ ist, stets $p+1$ Auflösungen. Für die Anzahl der Lösungen der Congruenz (2) ergiebt sich also, je nachdem $p \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod{4}$ ist, ein Unterschied, der auch bei der von Herrn Hermite in der angeführten Arbeit gegebenen Behandlung hervorgetreten ist. Bei der Frage nach der Anzahl der Classen von eigentlichen Auflösungen der Congruenz (1) gleicht sich indessen dieser Unterschied, wie sich zeigen wird, wieder aus.

Wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ ist, so kann in der Congruenz

(12) $$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

die Zahl ξ_3 auch durch p aufgehen; für diesen Fall darf dies aber nicht ausserdem für ξ_1 oder ξ_2 geschehen, weil man sonst keine eigentliche Lösung erhalten würde. Demgemäss liefert die Congruenz

(12*) $$\xi_1^2+\xi_2^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

wie bekannt und in Art. 2 ausgeführt ist, zwei Classen von eigentlichen Auflösungen. Diese beiden Classen, zu den vorhin gefundenen Classen hinzugefügt, geben die Gesammtzahl von $p+1$ Classen eigentlicher Auflösungen. Ist $p \equiv 3 \pmod{4}$, so würde die Voraussetzung $\xi_3 \equiv 0 \pmod{p}$ zu der Congruenz (12*) führen, welche nicht erfüllt werden kann, ohne dass auch diese beiden Zahlen durch p aufgehen. Es kommt daher zu den gefundenen Classen eigentlicher Auflösungen keine neue Classe hinzu, und die Gesammtzahl beträgt ebenfalls $p+1$.

Bildet man die Congruenz (12) für den Modul 2

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 \equiv 0 \pmod{2}, \tag{13}$$

so existiren offenbar nur die drei eigentlichen Auflösungen

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_1 \equiv 0,\ \xi_2 \equiv 1,\ \xi_3 \equiv 1 \pmod{2} \\ \xi_1 \equiv 1,\ \xi_2 \equiv 0,\ \xi_3 \equiv 1 \\ \xi_1 \equiv 1,\ \xi_2 \equiv 1,\ \xi_3 \equiv 0. \end{array}\right. \tag{14}$$

Mithin gilt der allgemeine Satz: *Die Congruenz* (12) *hat für jede Primzahl p die Anzahl* $p+1$ *von Classen von eigentlichen Auflösungen.*

Wenn ich mich nicht täusche, liegt in der unbeschränkten Gültigkeit dieses Satzes ein specifischer Charakter dieser Congruenz. Da in jeder Classe von eigentlichen Auflösungen $p-1$ Auflösungen zusammengefasst sind, so ist die Anzahl aller eigentlichen Auflösungen p^2-1, und fügt man die eine uneigentliche Auflösung

$$\xi_1 \equiv 0,\ \xi_2 \equiv 0,\ \xi_3 \equiv 0 \pmod{p}$$

hinzu, so ergiebt sich als Anzahl aller Auflösungen der Congruenz (12) für jede Primzahl p das Quadrat dieser Primzahl.

Die Frage nach der Lösbarkeit der Congruenz (1) und der Anzahl ihrer eigentlichen Lösungen für die Potenz einer ungeraden Primzahl als Modul kann beantwortet werden, indem man mit einer gewissen Potenz beginnt und zu einer höheren aufsteigt. Sei ξ_1, ξ_2, ξ_3 eine eigentliche Lösung von (1) modulo $p^{\gamma-1}$, so bilde ich mit drei Zahlen t_1, t_2, t_3 die Ausdrücke

$$\xi_1+t_1p^{\gamma-1},\ \xi_2+t_2p^{\gamma-1},\ \xi_3+t_3p^{\gamma-1},$$

und werde erreichen, dass ihre Quadratsumme durch p^γ aufgeht. Da $\gamma \geqq 2$, so ist $2(\gamma-1) \geqq \gamma$, mithin darf bei der Bildung der Quadratsumme das Vielfache von $p^{2(\gamma-1)}$ fortgelassen werden, und es leuchtet ein, dass die bezeichnete Summe durch p^γ aufgeht oder nicht, je nachdem der Ausdruck

$$\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}{p^{\gamma-1}}+2(t_1\xi_1+t_2\xi_2+t_3\xi_3) \tag{15}$$

durch p theilbar ist oder nicht. Wie schon oben bemerkt, kann von den Zahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3 nur eine durch p aufgehen. Sind z. B.

ξ_1 und ξ_2 nicht durch p theilbar, so kann man der Zahl t_3 alle incongruenten Werthe modulo p beilegen, einen beliebig gewählten Werth t_2 festhalten, und bekommt dann für t_1 eine modulo p eindeutige Bestimmung, indem verlangt wird, dass (15) durch p aufgehe. Ebenso wohl kann man aber auch eine Einrichtung treffen, vermöge deren (15) nicht durch p aufgeht und deshalb die zugeordnete Quadratsumme nicht durch p^γ theilbar wird. Da bei dem angegebenen Lösungsverfahren t_2 nicht geändert ist, so gehören die aus der gegebenen Lösung ξ_1, ξ_2, ξ_3 für den Modul p^γ abgeleiteten p eigentlichen Lösungen zu lauter verschiedenen Classen, und es zeigt sich, dass die Anzahl der Classen von eigentlichen Lösungen modulo p^γ genau p mal grösser ist, als die betreffende Anzahl modulo $p^{\gamma-1}$. Demnach ist die Congruenz (1) auch für eine beliebige Potenz einer ungeraden Primzahl immer möglich, und hat die *Anzahl*

$$p^{\gamma-1}(p+1)$$

von Classen eigentlicher Auflösungen.

Bei dem Uebergange von der Primzahl 2 zu ihrem Quadrat tritt aber eine Ausnahme ein. Weil eine eigentliche Auflösung der Congruenz

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 \equiv 0 \pmod{4} \tag{16}$$

erfordern würde, dass von den Zahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3 eine gerade ist und zwei ungerade sind, so müsste die Quadratsumme gleich dem Doppelten einer ungeraden Zahl sein, und kann deshalb nicht durch Vier aufgehen. Deshalb hat die Congruenz (16) *keine eigentliche Auflösung.*

6.

Nach den getroffenen Vorbereitungen lässt sich die Grundaufgabe aus der Theorie der ganzzahligen Quaternionen behandeln, wenn eine Zahl m gegeben ist, die entweder ungerade oder das Doppelte oder Vierfache einer ungeraden Zahl ist, dieselbe auf alle möglichen Arten als die Norm eines eigentlichen ganzzahligen Quaternion darzustellen, und jedes solche Quaternion auf alle möglichen Arten durch die Multiplication von Primquaternionen zu erzeugen.

Es sei für eine ungerade Primzahl p eine eigentliche Lösung der Congruenz

(1) $$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\equiv 0 \pmod{p}$$

gegeben. Dann werde ich die Existenz eines eigentlichen Quaternion nachweisen, dessen Norm die Primzahl p ist, und das zu der gegebenen Classe von Congruenzlösungen gehört. Mit Hülfe der Zahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3 bestimme man vier Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler τ heisse, durch die Congruenzen

(2) $$\tau\varrho_0\equiv\xi_1,\ \tau\varrho_{12}\equiv-\xi_2,\ \tau\varrho_{13}\equiv-\xi_3,\ \tau\varrho_{23}\equiv 0 \pmod{p}$$

so, dass jede derselben numerisch unter $\frac{1}{2}p$ liegt; der gemeinsame Theiler τ kann nicht durch p aufgehen. Setzt man jetzt

(3) $$\varrho_0+i_{12}\varrho_{12}+i_{13}\varrho_{13}+i_{23}\varrho_{23}=P,$$

(4) $$\xi_1+i_{12}\xi_2+i_{13}=\Xi,$$

so wird, da τ mit p ohne Theiler ist, durch die Werthe

$$\varrho_0=\lambda_0,\ \varrho_{12}=\lambda_{12},\ \varrho_{13}=\lambda_{13},\ \varrho_{23}=\lambda_{23}$$

das System Congruenzen (4) und (9) in Art. 4 erfüllt, das in (12) zusammengefasst ist. Demnach gilt gegenwärtig die Congruenz

(5) $$P\,\Xi\equiv 0 \pmod{p}.$$

Die Norm des Quaternion P ist gleich dem Aggregat von vier Quadraten, deren jedes unter der Grösse $\frac{1}{4}p^2$ liegt, mithin liegt der Werth selbst unter p^2. Da die Norm durch p aufgeht, so besteht die Gleichung

(6) $$N(P)=pt,$$

wo t kleiner als p ist. Wäre t gleich der Einheit, so würde das Quaternion P die gestellte Aufgabe direct lösen. Für den Fall, dass t nicht gleich der Einheit ist, bestimme man vier Zahlen so, dass sie den Congruenzen

(7) $$\varphi_0\equiv\varrho_0,\ \varphi_{12}\equiv\varrho_{12},\ \varphi_{13}\equiv\varrho_{13},\ \varphi_{23}\equiv\varrho_{23} \pmod{t}$$

genügen und sämmtlich nicht grösser als $\frac{1}{2}t$ sind. Weil ϱ_0, ϱ_{12}, ϱ_{13}, ϱ_{23} ohne gemeinsamen Theiler sind, können nicht alle numerisch gleich $\frac{1}{2}t$ sein, es sei denn, dass $t=2$ ist. Aber auch in diesem Falle können die Congruenzen

$$\varrho_0 \equiv 1,\ \varrho_{12} \equiv 1,\ \varrho_{13} \equiv 1,\ \varrho_{23} \equiv 1 \pmod{2}$$

deshalb nicht bestehen, weil sonst $N(P) \equiv 4 \pmod{8}$ sein müsste, während nach der Voraussetzung $N(P) = pt = 2p$ ist. Deshalb erfüllt das Quaternion

(8) $$\Phi = \varphi_0 + i_{12}\,\varphi_{12} + i_{13}\,\varphi_{13} + i_{23}\,\varphi_{23}$$

die Bedingung, dass $N(\Phi) < t^2$ ist, und man hat

(9) $$N(\Phi) = t\,t^{(1)},\ t^{(1)} < t.$$

Wird nun P links mit dem zu Φ conjugirten Quaternion Φ' multiplicirt, so ergiebt sich leicht, dass alle reellen Bestandtheile durch p aufgehen. Man erhält also, nach Absonderung des grössten gemeinsamen Theilers $\tau^{(1)}$,

(10) $$\Phi'\,P = \tau^{(1)}\,t\,(\varrho_0^{(1)} + i_{12}\varrho_{12}^{(1)} + i_{13}\varrho_{13}^{(1)} + i_{23}\varrho_{23}^{(1)}),$$

(11) $$P^{(1)} = \varrho_0^{(1)} + i_{12}\,\varrho_{12}^{(1)} + i_{13}\varrho_{13}^{(1)} + i_{23}\,\varrho_{23}^{(1)},$$

wo $P^{(1)}$ ein eigentliches Quaternion ist. Der gemeinsame Theiler $\tau^{(1)}$ kann nicht durch t aufgehen, weil sonst die Norm

$$N(\Phi' P) = p\,t^2\,t^{(1)} = (\tau^{(1)})^2\,t^2\,N(P^{(1)})$$

durch p^2 theilbar sein müsste, was in Folge der Ungleichheiten

$$t < p,\ t^{(1)} < \mathrm{t}$$

unmöglich ist. Man sieht aber, dass $t^{(1)}$ durch $(\tau^{(1)})^2$ aufgeht.

Wie leicht zu erkennen, ergiebt sich aus (5) eine lediglich auf Addition und Multiplication mit reellen ganzen Zahlen beruhende und somit gültige Folgerung, indem die linke Seite links mit Φ' multiplicirt wird,

(12) $$\Phi' P\,\Xi \equiv 0 \pmod{p}.$$

Weil aber nach (10) und (11)

$$\Phi' P = \tau^{(1)}\,t\,P^{(1)},$$

und die Zahl $\tau^{(1)}\,t$ nicht durch p theilbar ist, so hat man

(13) $$P^{(1)}\,\Xi \equiv 0 \pmod{p},$$

und durch Verbindung von (6) und (9),

(14) $$N(P^{(1)}) = p\,\frac{t^{(1)}}{(\tau^{(1)})^2}.$$

Es kommen also an Stelle von (5) und (6) respective (13) und (14), wo statt des eigentlichen Quaternion P das eigentliche

Quaternion $P^{(1)}$, statt der Zahl t die Zahl $\frac{t^{(1)}}{(\tau^{(1)})^2}$ auftritt, die kleiner als t ist. Man kann demnach das entwickelte Verfahren so lange fortsetzen, bis man zu einem eigentlichen Quaternion

$$P^{(s)} \equiv \varrho_0^{(s)} + i_{12}\varrho_{12}^{(s)} + i_{13}\varrho_{13}^{(s)} + i_{23}\varrho_{23}^{(s)}$$

gelangt, für welches der Factor $\frac{t^{(s)}}{(\tau^{(s)})^2}$ gleich der Einheit wird, und die verlangten Gleichungen erfüllt sind:

(15) $$P^{(s)}\Xi \equiv 0 \pmod{p}$$

(16) $$N(P^{(s)}) = p.$$

Die aufgestellte Behauptung ist somit für jede ungerade Primzahl p erwiesen. Das Quaternion $P^{(s)}$ ist nach der angeführten Bezeichnung ein zu der gegebenen Congruenzlösung gehörendes *Primquaternion*. Die acht Primquaternionen $JP^{(s)}$ gehören zu derselben Congruenzlösung, für die Norm p sind $p+1$ Primquaternionen vorhanden, die zu verschiedenen Congruenzlösungen gehören. Unter den 8 Primquaternionen $JP^{(s)}$, die zu derselben Congruenzlösung gehören, möge ein bestimmtes herausgehoben und zur Anwendung benutzt werden.

Da conjugirte Quaternionen dieselbe Norm haben, so gehört zu jedem Primquaternion P, dessen Norm gleich der ungeraden Primzahl p ist, immer auch ein conjugirtes Primquaternion P'. Diese beiden können niemals zu derselben Classe von Congruenzlösungen gehören. Es mögen nämlich ξ_1, ξ_2, ξ_3 für P und $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}$ nach dem in Art. 4 entwickelten Verfahren bestimmt werden, und es sei, indem überall der Buchstabe λ durch ϱ ersetzt wird, ϱ_0 nicht $\equiv 0$ und auch $\varrho_0^2+\varrho_{12}^2$ nicht $\equiv 0 \pmod{p}$. Dann darf man die Annahmen machen

$$\xi_1 = \varrho_{21}\varrho_{32} - \varrho_{31}\varrho_0, \quad \xi_2 = \varrho_{31}\varrho_{12} - \varrho_{32}\varrho_0, \quad \xi_3 = \varrho_0^2 + \varrho_{12}^2,$$
$$\xi_1^{(1)} = \varrho_{12}\varrho_{23} - \varrho_{13}\varrho_0, \quad \xi_2^{(1)} = \varrho_{13}\varrho_{21} - \varrho_{23}\varrho_0, \quad \xi_3^{(1)} = \varrho_0^2 + \varrho_{12}^2.$$

Weil nun $\xi_3 = \xi_3^{(1)}$ und nicht durch p theilbar ist, so müsste, damit die Classen übereinstimmen,

$$\xi_1^{(1)} - \xi_1 \equiv 2\varrho_{31}\varrho_0 \equiv 0, \quad \xi_2^{(1)} - \xi_2 \equiv 2\varrho_{32}\varrho_0 \equiv 0 \pmod{p}$$

und deshalb $\varrho_{31} \equiv 0$, $\varrho_{32} \equiv 0 \pmod{p}$ sein. Dies lieferte aber, in sofern $\varrho_0^2+\varrho_{12}^2$ nicht $\equiv 0$ ist, einen Widerspruch gegen die Gleichung

$$\varrho_0^2+\varrho_{12}^2+\varrho_{13}^2+\varrho_{23}^2=p.$$

Die Darstellung der Zahl Zwei durch die Gleichung

(17) $$\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2=2$$

kann nur so erfolgen, dass zwei der vorhandenen Quadrate gleich Eins, zwei gleich Null sind. Die entsprechenden 24 Primquaternionen vertheilen sich unter die 3 Classen (14) von eigentlichen Auflösungen der Congruenz (13) in Art. 5 folgendermassen: für eine beliebige der 8 Einheiten J gehört

(18) $$\begin{cases} J(1+i_{23}) \text{ zu } \xi_1\equiv 0,\ \xi_2\equiv 1,\ \xi_3\equiv 1 \pmod{2} \\ J(1+i_{31}) \text{ zu } \xi_1\equiv 1,\ \xi_2\equiv 0,\ \xi_3\equiv 1 \pmod{2} \\ J(1+i_{12}) \text{ zu } \xi_1\equiv 1,\ \xi_2\equiv 1,\ \xi_3\equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Dabei ergiebt sich leicht, dass zwei mit einander conjugirte Quaternionen hier immer zu derselben Classe von Congruenzlösungen gehören.

Um von der Darstellung der Primzahlen als Normen von Quaternionen zu der Darstellung der zusammengesetzten Zahlen überzugehen, sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür zu ermitteln, dass das Product von zwei eigentlichen Quaternionen M und Λ durch die γte Potenz einer ungeraden Primzahl p aufgehe. Aus der Congruenz

(19) $$M\Lambda\equiv 0 \pmod{p^\gamma}$$

ist zu schliessen, indem zuerst links mit M', hierauf rechts mit Λ' multiplicirt wird,

(20) $$N(M)\Lambda\equiv 0,\quad MN(\Lambda)\equiv 0 \pmod{p^\gamma};$$

weil nun Λ und M eigentliche Quaternionen sind, muss sowohl $N(M)$ wie auch $N(\Lambda)$ durch p^γ theilbar sein. Die höchsten in diesen Zahlen enthaltenen Potenzen mögen für $N(\Lambda)$ die $p^{\gamma+l}$te, für $N(M)$ die $p^{\gamma+m}$te sein. Alsdann gehört Λ' zu einer Congruenzlösung $\xi_1^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$, $\xi_3^{(1)}$ modulo $p^{\gamma+l}$, ferner M zu einer Congruenzlösung η_1, η_2, η_3 modulo $p^{\gamma+m}$, und setzt man

(21) $$\xi_1^{(1)}+i_{12}\xi_2^{(1)}+i_{13}\xi_3^{(1)}=\Xi^{(1)},$$

(22) $$\eta_1+i_{12}\eta_2+i_{13}\eta_3=H,$$

so ist

(23) $$\mathcal{A}'\,\Xi^{(1)} \equiv 0 \pmod{p^{\gamma+l}},$$

(24) $$M\,H \equiv 0 \pmod{p^{\gamma+m}}.$$

Aus (19) folgt, dass das der linken Seite conjugirte Quaternion ebenfalls durch p^γ aufgeht, oder

(25) $$\mathcal{A}'\,M' \equiv 0 \pmod{p^\gamma}.$$

Wird nun rechts mit MH multiplicirt, so entsteht ein durch $p^{2\gamma+m}$ theilbares Quaternion $\mathcal{A}'\,M'MH$. Weil aber die Zahl $M'M$ durch $p^{\gamma+m}$ und keine höhere Potenz von p aufgeht, so bleibt nach Weglassung dieses Factors die Congruenz

(26) $$\mathcal{A}'\,H \equiv 0 \pmod{p^\gamma},$$

vermöge deren das Quaternion $\mathcal{A}'$ modulo p^γ zu der Congruenzlösung η_1, η_2, η_3 gehört. Es muss also $N(\mathcal{A})$ und $N(M)$ durch p^γ theilbar, ferner die Lösung η_1, η_2, η_3 mit der Lösung $\xi_1^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$, $\xi_3^{(1)}$ modulo p^γ aequivalent sein, wofern die Congruenz (19) bestehen soll. Diese Bedingungen erweisen sich aber auch als hinreichend. Denn aus (26) folgt

(27) $$H'\,\mathcal{A} \equiv 0 \pmod{p^\gamma},$$

und durch Verbindung mit (24)

(28) $$M\,H\,H'\,\mathcal{A} \equiv 0 \pmod{p^{2\gamma+m}}.$$

Weil aber nach einer im vorigen Art. bei Gelegenheit von (15) gemachten Bemerkung der Ausdruck H stets so eingerichtet werden kann, dass HH' durch keine höhere Potenz von p als die $(\gamma+m)$te aufgeht, so führt die Weglassung des Factors HH' zu der Congruenz (19), welche abzuleiten war.

Durch ähnliche Betrachtungen erkennt man, dass das Product von zwei eigentlichen Quaternionen $M\mathcal{A}$ nur dann durch Zwei aufgehen kann, wenn die Normen beider Factoren gerade Zahlen sind. Es genügt, die fernere Betrachtung auf die Voraussetzung zu beschränken, dass weder $N(\mathcal{A})$ noch $N(M)$ durch Vier aufgeht. Dann kommt für die Theilbarkeit von $M\mathcal{A}$ durch Zwei noch die Bedingung hinzu, dass M und $\mathcal{A}$ modulo 2 zu derselben Congruenzlösung gehören, und die gefundenen nothwendigen Bedingungen sind zugleich wieder hinreichend.

Nach dem vorigen Art. können die eigentlichen Quaternionen, deren Norm gleich p^2 ist, zu $p(p+1)$ Classen von Congruenzlösungen modulo p^2 gehören. Dass in der That für jede ungerade Primzahl p zu jeder Classe gehörende Quaternionen von der erwähnten Beschaffenheit vorhanden sind, ergiebt sich, wie folgt. Zu einer beliebigen Congruenzlösung ξ_1, ξ_2, ξ_3 modulo p gehört das Quaternion P, das demselben conjugirte P' zu der Congruenzlösung $\xi_1^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$, $\xi_3^{(1)}$, welche, wie vorhin bemerkt, der ersteren nie aequivalent sein kann. Man nehme nun solche Primquaternionen Θ, deren Norm p ist, und die modulo p zu den p Classen von Congruenzlösungen gehören, die nach Weglassung von $\xi_1^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$, $\xi_3^{(1)}$ noch vorhanden sind, und bilde das Product

$$(29) \qquad \Theta P.$$

Dasselbe ist zufolge des bewiesenen Satzes ein eigentliches Quaternion, und man kann zeigen, dass wenn für P successive $p+1$ Quaternionen $P^{(a)}$, die zu den modulo p vorhandenen $p+1$ Classen von Congruenzlösungen gehören, hierauf beziehungsweise für Θ die p zugehörig bestimmten Quaternionen $\Theta^{(b)}$ gesetzt werden, die resultirenden $p(p+1)$ Producte $\Theta^{(b)} P^{(a)}$ zu lauter verschiedenen Classen von Congruenzlösungen gehören, und somit die sämmtlichen Classen erschöpfen. Gesetzt, dass $\Theta^{(b)} P^{(a)}$ mit ΘP zu derselben Congruenzlösung ζ_1, ζ_2, ζ_3 modulo p^2 gehöre, so muss man haben, indem

$$(30) \qquad Z = \zeta_1 + i_{12}\zeta_{12} + i_{13}\zeta_{13}$$

gesetzt wird,

$$(31) \qquad \Theta P Z \equiv 0 \pmod{p^2}, \quad \Theta^{(b)} P^{(a)} Z \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Hieraus folgt

$$Z' P' \Theta' \equiv 0 \pmod{p^2},$$

und durch Multiplication

$$\Theta^{(b)} P^{(a)} Z Z' P' \Theta' \equiv 0 \pmod{p^4}.$$

Da nun die Zahl ZZ' durch p^2, aber keine höhere Potenz von p theilbar ist, so kommt

$$(32) \qquad \Theta^{(b)} P^{(a)} P' \Theta' \equiv 0 \pmod{p^2},$$

und, indem rechts mit Θ multiplicirt wird, weil $\Theta' \Theta = p$ ist,

$$\Theta^{(b)} P^{(a)} P' \equiv 0 \pmod{p}.$$

Es muss also das eigentliche Quaternion $\Theta^{(b)} P^{(a)}$ und P zu derselben Congruenzlösung modulo p gehören. Hiermit ist die Congruenzlösung vollständig bestimmt. Dieselbe ist aber auch durch die Forderung bestimmt, dass

$$P^{(a)} P' \equiv 0 \text{ (mod. } p)$$

sei, und diese kann nur so erfüllt werden, dass P mit $P^{(a)}$ zu derselben Congruenzlösung modulo p gehört. Nach der getroffenen Voraussetzung fällt dann aber auch P mit $P^{(a)}$ zusammen und $P^{(a)} P'$ ist gleich p. Durch Weglassung des Factors p wird also aus (32) die Congruenz

(33) $$\Theta^{(b)} \Theta' \equiv 0 \text{ (mod. } p),$$

aus welcher zu schliessen ist, dass Θ mit $\Theta^{(b)}$ zu derselben Congruenzlösung modulo p gehört, und daher ebenfalls coincidirt. Somit ist die ausgesprochene Behauptung gerechtfertigt.

In ähnlicher Weise erhält man für eine beliebige Potenz p^{γ} eigentliche Quaternionen, die zu den $p^{\gamma-1}(p+1)$ Classen von Congruenzlösungen modulo p^{γ} gehören, indem man in (29), von der rechten zur linken Hand fortschreitend, immer ein neues Primquaternion von der Norm p als Factor hinzufügt, das an jeder Stelle zu p verschiedenen Classen von Congruenzlösungen modulo p gehören darf. Die eine wegzulassende Congruenzlösung wird mit Berücksichtigung des Nachbars zur Rechten bestimmt, wie bei der Bildung von (29) angegeben ist.

Bei der Betrachtung der Primquaternionen, deren Norm gleich Zwei ist, und die in (18) angegeben sind, stellt sich heraus, dass das Product von je zweien ein eigentliches oder uneigentliches Quaternion ist, je nachdem sie zu verschiedenen Congruenzlösungen gehören oder zu derselben. Diese Thatsache stimmt mit der früher hervorgehobenen überein, dass hier die conjugirten Quaternionen zu derselben Congruenzlösung gehören. Die uneigentlichen Quaternionen, deren Norm gleich Vier ist, sind, da jede Einheit positiv oder negativ genommen werden kann, in der Anzahl 16 vorhanden, und zerfallen nach der früher gebrauchten Bezeichnung in die beiden Gruppen

(34) $$J(1+i_{23}+i_{31}+i_{12}), \quad J(1+i_{32}+i_{13}+i_{21}).$$

Aus den Quaternionen von der Norm Zwei erhält man die in der

Klammer befindlichen Ausdrücke auf die folgenden verschiedenen Arten

$$(34)\quad \begin{cases}(1+i_{23})(1+i_{31}) = (1+i_{31})(1+i_{12}) = (1+i_{12})(1+i_{23}) = 1+i_{23}+i_{31}+i_{12},\\ (1+i_{13})(1+i_{32}) = (1+i_{21})(1+i_{13}) = (1+i_{32})(1+i_{21}) = 1+i_{32}+i_{13}+i_{21}.\end{cases}$$

Ich werde jetzt die sämmtlichen eigentlichen Quaternionen aufsuchen, deren Norm eine gegebene Zahl ist. Die in dieser Zahl enthaltenen Potenzen verschiedener ungerader Primzahlen seien p^γ, $q^\delta\ldots$, mithin ist die Zahl selbst nach Art. 4 gleich dem in einen Factor σ multiplicirten Product dieser Potenzen, wobei σ einen der Werthe 1, 2, 4 hat. Man nehme nun eigentliche Quaternionen $A^{(a)}$ von der Norm p^γ, die zu $p^{\gamma-1}(p+1)$ verschiedenen Classen von Congruenzlösungen modulo p^γ gehören, eigentliche Quaternionen $M^{(b)}$ von der Norm q^δ, die zu $q^{\delta-1}(q+1)$ verschiedenen Classen von Congruenzlösungen modulo q^δ gehören, u. s. f., und bilde, von rechts nach links gehend, aus den einzelnen Individuen das Product

$$(36)\qquad \Omega^{(a,\,b,\,..)} = \ldots M^{(b)} A^{(a)}.$$

Dasselbe multiplicire man links für $\sigma = 1$ mit einer der 8 Einheiten J, für $\sigma = 2$ mit einem der in (18) dargestellten 24 eigentlichen Quaternionen von der Norm Zwei, für $\sigma = 4$ mit einem der in (34) dargestellten 16 eigentlichen Quaternionen von der Norm Vier, dann liefert der Inbegriff aller so gebildeten Ausdrücke, deren Anzahl für $\sigma = 1, 2, 4$ respective den Werth

$$(37)\qquad \begin{cases} 8p^{\gamma-1}(p+1)q^{\delta-1}(q+1)\ldots,\\ 8.3p^{\gamma-1}(p+1)q^{\delta-1}(q+1)\ldots,\\ 8.2p^{\gamma-1}(p+1)q^{\delta-1}(q+1)\ldots\end{cases}$$

hat, den Inbegriff der gesuchten eigentlichen Quaternionen, und zwar erscheint jedes Quaternion ein Mal.

Die Richtigkeit dieser Behauptung beruht auf dem Nachweise, dass die zu bildenden Quaternionen eigentliche sind, die nach den sämmtlichen Moduln p^γ, $q^\delta,\ldots$ zu lauter verschiedenen Congruenzlösungen gehören. Sie müssen eigentliche sein, weil die Normen der eigentlichen Quaternionen $A^{(a)}$, $M^{(b)},\ldots$ Potenzen differenter Primzahlen sind. Um zu zeigen, dass die angegebenen Quaternionen, nach den sämmtlichen Moduln p^γ, $q^\delta,\ldots$ zu verschiedenen Congruenzlösungen gehören, vergleiche man ein Individuum $\ldots M\varLambda$ mit einem andern $\ldots M^{(b)}\varLambda^{(a)}$, und bilde für eine Congruenzlösung $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, zu der beide gehören sollen, den Ausdruck Z, wie in (30). Gesetzt nun es sei

(38) $\ldots M\varLambda Z \equiv 0 \pmod{p^\gamma}, \ \ldots M^{(b)}\varLambda^{(a)} Z \equiv 0 \pmod{p^\gamma}$,

so folgt

$Z'\varLambda' M' \ldots \equiv 0 \pmod{p^\gamma}, \ \ldots M^{(b)}\varLambda^{(a)} Z Z' \varLambda' M' \ldots \equiv 0 \pmod{p^{2\gamma}}$,

und, weil die reelle Zahl ZZ' durch p^γ, jedoch durch keine höhere Potenz von p aufgeht,

$$\ldots M^{(b)}\varLambda^{(a)}\varLambda' M' \ldots \equiv 0 \pmod{p^\gamma}.$$

Durch Multiplication auf der rechten Seite bringt man die Normen von $M, \ldots$ hervor, die mit p^γ ohne Theiler sind, und deshalb fortgelassen werden dürfen, und es ergiebt sich die Congruenz

$$\ldots M^{(b)}\varLambda^{(a)}\varLambda' \equiv 0 \pmod{p^\gamma},$$

aus welcher zu schliessen ist, dass $\varLambda$ und $\varLambda^{(a)}$ zu derselben Congruenzlösung modulo p^γ gehören müssen. In ähnlicher Weise wird jetzt bewiesen, dass, wenn die Congruenzen (38) modulo q^δ gelten sollen, $M^{(b)}$ und M nach diesem Modul zu derselben Congruenzlösung gehören müssen, und so wird fortgefahren, bis alle ungeraden Primzahlpotenzen erschöpft sind, und das Ziel erreicht ist.

Jedes beliebige eigentliche Quaternion A von der Norm $\sigma p^\gamma q^\delta \ldots$ ist in dem aufgestellten System von Quaternionen enthalten. Da A nach jedem einzelnen Modul $p^\gamma, q^\delta, \ldots$ zu einer bestimmten Classe von Congruenzlösungen gehört, so kann ein Product Ω aus (36) gewählt werden, das mit A nach jedem Modul zu derselben Classe von Congruenzlösungen gehört. In Folge dessen wird das mit dem conjugirten Ω' gebildete Product $A\Omega'$ durch jeden Factor $p^\gamma, q^\delta, \ldots$, mithin auch durch das Product $p^\gamma q^\delta \ldots$ theilbar. Weil aber $N(\Omega')$ eine ungerade Zahl ist, so kann $A\Omega'$, auch wenn $\sigma = 2$ oder 4 ist, niemals durch Zwei aufgehen. In Folge der Gleichung

$$N(A\Omega') = \sigma p^{2\gamma} q^{2\delta} \ldots$$

kommt

$$N\left(\frac{A\Omega'}{p^\gamma q^\delta \ldots}\right) = \sigma.$$

Das ganzzahlige Quaternion $\frac{A\Omega'}{p^\gamma q^\delta\ldots}$ hat also für $\sigma = 1$ die Einheit zur Norm, und ist deshalb gleich einer der 8 Einheiten J. Für $\sigma = 2$ oder 4 ist $\frac{A\Omega'}{p^\gamma q^\delta\ldots}$ ein eigentliches Quaternion, mithin für $\sigma = 2$ gleich einem der 24 Quaternionen (18), für $\sigma = 4$ gleich einem der 16 Quaternionen (34); diese wie jene mögen respective mit E bezeichnet werden. Demnach ergiebt sich

$$(39)\qquad \begin{cases} \sigma = 1; & A\Omega' = Jp^\gamma q^\delta\ldots \\ \sigma = 2{,}4; & A\Omega' = Ep^\gamma q^\delta\ldots, \end{cases}$$

folglich durch Multiplication mit Ω,

$$(40)\qquad \begin{cases} \sigma = 1; & A = J\Omega \\ \sigma = 2{,}4; & A = E\Omega. \end{cases}$$

Dass die 8 Quaternionen $J\Omega$, die den verschiedenen 8 Einheiten J entsprechen, verschieden sind, ist schon früher gezeigt worden; auf dieselbe Art wird bewiesen, dass die 24, respective 16 verschiedenen Werthe von E in $E\Omega$ lauter verschiedene Quaternionen hervorbringen. Die gegebene Darstellung repräsentirt also alle eigentlichen Quaternionen von der Norm $\sigma p^\gamma q^\delta\ldots$, und jedes Quaternion genau ein Mal.

Aus der in (37) enthaltenen Bestimmung der Anzahl der eigentlichen Quaternionen, deren Norm eine gegebene Zahl ist, lässt sich leicht die Anzahl aller eigentlichen und uneigentlichen Quaternionen ableiten, deren Norm eine gegebene Zahl ist, indem die sämmtlichen möglichen gemeinsamen Theiler aufgestellt und in Betracht gezogen werden. Es entsteht dann das von Jacobi herrührende oben erwähnte Resultat, dass die betreffende Anzahl bei einer ungeraden Norm gleich dem achtfachen Werth der Summe aller Divisoren der Norm, bei einer geraden Norm gleich dem achtfachen Werth der Summe aller derjenigen Divisoren der Norm ist, die entweder ungerade oder gleich dem Doppelten von ungeraden Zahlen sind.

7.

Es bleibt jetzt noch die Aufgabe, ein beliebig gegebenes eigentliches Quaternion auf alle möglichen Arten durch Multiplication von Primquaternionen zu erzeugen. Hierbei äussert sich der Unterschied zwischen der Theorie der ganzzahligen Quaternionen und der Theorie der Gaussischen complexen Zahlen in der eingreifendsten Weise. Wenn für eine eigentliche complexe Zahl eine Erzeugung durch Multiplication von complexen Primzahlen in einer gewissen Reihenfolge gegeben ist, so kann sich jede andere Erzeugung aus complexen Primzahlen nur durch die Anordnung der Factoren unterscheiden, und man erhält alle Erzeugungsweisen, indem die Factoren auf alle möglichen Arten unter einander vertauscht werden. Wenn dagegen bei einem eigentlichen Quaternion die Primquaternionen gegeben sind, deren Normen in die Norm des gegebenen Quaternions aufgehen, so lässt sich für die Primquaternionen, aus denen das Quaternion erzeugt werden soll, eine Reihenfolge der Normen vorschreiben, und die zu wählenden Primquaternionen werden durch die gegebene Reihenfolge bestimmt.

In der That, wenn A ein eigentliches Quaternion bedeutet, dessen Norm ungerade oder das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, und wenn eine Primzahl p, welche auch die Zwei sein darf, in die Norm aufgeht, so gehört A modulo p zu einer bestimmten Congruenzlösung ξ_1, ξ_2, ξ_3. Es sei nun P ein Primquaternion von der Norm p, das zu derselben Congruenzlösung gehört; dann ist das Product AP' durch p theilbar, mithin gleich dem Product eines ganzzahligen Quaternion G in die Zahl p,

$$AP' = pG. \tag{1}$$

Weil aber $N(P') = p$ ist, so folgt durch Multiplication mit P auf der rechten Seite, nach Weglassung des Factors p, die Gleichung

$$A = GP. \tag{2}$$

Das eigentliche Quaternion A ist also als ein Product dargestellt, bei dem der Factor links ein eigentliches Quaternion, der Factor rechts das Primquaternion P von der gewählten Norm p ist, welches zu der bezeichneten Congruenzlösung ξ_1, ξ_2, ξ_3 gehört. Auch erkennt man durch eine mehrfach angewendete Schlussweise, dass, wofern A in der angegebenen Weise zerlegt werden soll, das Primquaternion von der Norm p nothwendig zu dieser Congruenzlösung gehört. Es ist daher in (2) das Primquaternion P durch die gestellte Forderung insoweit vollständig bestimmt, dass statt P nur noch eines der mit einer der 8 Einheiten gebildeten Producte JP gesetzt werden darf.

Dieselbe Betrachtung kann auf das eigentliche Quaternion G angewendet werden, indem man eine in der Norm von G enthaltene Primzahl q wählt, welche ebensowohl von p verschieden sein, wie auch übereinstimmen kann. Mit Hülfe der Congruenzlösung modulo q, zu der G gehört, wird das nächste Primquaternion bestimmt, und zwar bemerke ich, dass, wenn in (2) statt P das Quaternion JP genommen wird, bei der Bildung der Congruenzlösung modulo q statt G das Quaternion GJ zu erörtern ist; die betreffende Aenderung der Congruenzlösung ist aus (12*) in Art. 4 zu entnehmen. Es lässt sich aber das Verfahren so lange fortsetzen, bis das letzte Primquaternion mit der auf der linken Seite hinzuzufügenden Einheit bestimmt, und das Quaternion A erschöpft ist.

Für den Fall, dass die Norm des zu zerlegenden eigentlichen Quaternion A das Vierfache einer ungeraden Zahl ist, bleibt die entwickelte Methode so lange ungeändert, als die von der rechten zur linken fortschreitend aufzusuchenden Primquaternionen solche sind, deren Norm eine ungerade Primzahl ist. Sobald aber an irgend einer Stelle zum ersten Male ein Primquaternion von der Norm Zwei als Factor auftreten soll, so kann dasselbe aus den vorhandenen 3 Classen und 24 Werthen ganz beliebig gewählt werden. Denn das Product eines eigentlichen Quaternion, dessen Norm durch Vier aufgeht, und eines Primquaternion von der Norm Zwei, hat eine durch die Zahl Acht und durch keine höhere Potenz der Zwei theilbare Norm. Dies Product kann kein eigentliches Quaternion sein, weil die Norm dies nicht gestattet, und kann keinen anderen Theiler als die Zwei haben. Man gelangt also nach Ablösung eines beliebig zu wählenden Quaternions von der Norm Zwei zu einem eigentlichen Quaternion, dessen Norm das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, und von da ab werden die aufeinander folgenden Primquaternionen in der früheren Weise determinirt. Durch Zusammenfassung ergiebt sich somit das folgende Resultat:

Ein eigentliches Quaternion, dessen Norm ungerade oder das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, kann, wenn man für die zum Behuf der Multiplication von der rechten zur linken Hand zu durchlaufende Reihe der Primquaternionen die Normen beliebig anordnet, immer und zwar auf eine solche Weise als ein Product der Primquaternionen dargestellt werden, dass bei jedem Prim-

quaternion die Classe von Congruenzlösungen, zu dem dasselbe gehört, successive eindeutig bestimmt wird. Für ein eigentliches Quaternion, dessen Norm das Vierfache einer ungeraden Zahl ist, gilt dasselbe, so lange in der von der rechten zur linken Hand zu durchlaufenden Reihe von Normen der Primquaternionen nur ungerade Primzahlen auftreten. An der Stelle dieser Reihe, an welcher zum ersten Male die Zwei als Norm eines Primquaternions erscheint, hat man aber zwischen den drei Classen von Congruenzlösungen freie Wahl. Ist diese Wahl getroffen, so bestimmen sich bei der Fortsetzung der Reihe der Normen die Congruenzlösungen, zu welchen die Primquaternionen gehören, successive eindeutig bis ans Ende.

Als Beispiel möge das Quaternion

$$-1+3i_{12}+i_{13}+2i_{23}$$

dienen, dessen Modul 15 ist. Dasselbe gehört modulo 3 zu der Congruenzlösung

$$\xi_1 \equiv 1,\ \xi_2 \equiv 2,\ \xi_3 \equiv 2,$$

modulo 5 zu der Congruenzlösung

$$\xi_1 \equiv 0,\ \xi_2 \equiv 1,\ \xi_3 \equiv 2.$$

Für die Norm 3 gehören die Quaternionen

$$1+i_{12}+i_{13},\ 1+i_{12}-i_{13},\ 1-i_{12}+i_{13},\ 1-i_{12}-i_{13}$$

zu den 4 verschiedenen Classen, für die Norm 5 die Quaternionen

$$1+2i_{12},\ 1-2i_{12},\ 1+2i_{13},\ 1-2i_{13},$$
$$1+2i_{23},\ 1-2i_{23}$$

zu den 6 verschiedenen Classen. Wenn verlangt wird, dass bei der Zerlegung der erste Factor zur rechten Hand die Norm 3 habe, so muss das betreffende Primquaternion zu der oben angegebenen Congruenzlösung modulo 3 gehören, und es kommt das Produkt

$$(1+2i_{12})\ (1+i_{12}+i_{13}).$$

Wenn dagegen gefordert wird, dass der erste Factor zur rechten Hand die Norm 5 habe, so muss das betreffende Primquaternion zu der obigen Congruenzlösung modulo 5 gehören, und man erhält das Product

$$-(1-i_{12}+i_{13})\ (1-2i_{23}).$$

Mit Bezug auf beide Normen treten also in den beiden Darstellungen Primquaternionen auf, die zu verschiedenen Classen von Congruenzlösungen gehören.

8.

Die so eben entwickelte Theorie der Zerlegung der ganzzahligen Quaternionen giebt die Kenntniss der sämmtlichen Substitutionen, durch welche eine Summe von drei Quadraten in sich selbst transformirt werden kann, und deren Coefficienten rationale Zahlen sind. Es ist Euler, der in der angeführten Abhandlung: Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile. auf diese Substitutionen zuerst die Aufmerksamkeit gelenkt hat. Da man nach Artikel 3 von jeder in der angegebenen Bedeutung rationalen Substitution der Determinante Eins zu einer ebensolchen gelangen kann, bei der die dortige Verbindung (3) einen von Null verschiedenen Werth hat, so lehren daselbst die Gleichungen (7), dass die gewählte rationale Substitution zu vier ganzen Zahlen λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} führt, welche keinen gemeinsamen Theiler haben und bis auf den Factor + 1 vollkommen bestimmt sind. Es gehört also zu der betreffenden rationalen Substitution ein bis auf den Factor $\pm$ 1 vollständig bestimmtes ganzzahliges eigentliches Quaternion

(1) $$\pm(\lambda_0+i_{12}\lambda_{12}+i_{13}\lambda_{13}+i_{23}\lambda_{23}).$$

Diejenigen Substitutionen, welche aus der gewählten entstehen, indem man bei je zwei Vertikalreihen alle Coefficienten negativ nimmt, werden durch je vier von den 8 Quaternionen

(2) $$J(\lambda_0+i_{12}\lambda_{12}+i_{13}\lambda_{13}+i_{23}\lambda_{23})$$

hervorgebracht, die alle zu derselben Classe von Congruenzlösungen gehören. Man muss also, um alle rationalen Substitutionen zu umfassen, alle eigentlichen ganzzahligen Quaternionen betrachten.

Die Gleichungen (25) des Art. 3 stellen für jedes eigentliche Quaternion $\mathcal{A}$ die Ausdrücke der Substitutionscoefficienten α_{11}, α_{12}, ... α_{33} als Brüche dar, deren gemeinsamer Nenner die Norm $N(\mathcal{A})$ ist. Es fragt sich nun, welche Zahlen die Eigenschaft haben können, gleichzeitig in alle Zähler und auch in die Norm

$N(\mathcal{A})$ aufzugehen. Der grösste gemeinsame Theiler T der 4 Zahlen

$$(8)\qquad \begin{cases} \lambda_0^2-\lambda_{12}^2-\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2, & \lambda_0^2-\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2-\lambda_{23}^2, \\ \lambda_0^2+\lambda_{12}^2-\lambda_{13}^2-\lambda_{23}^2, & \lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2 \end{cases}$$

muss auch ein Theiler von $4\lambda_0^2$, $4\lambda_{12}^2$, $4\lambda_{13}^2$, $4\lambda_{23}^2$ sein. Es können aber λ_0^2, λ_{12}^2, λ_{13}^2, λ_{23}^2 keinen gemeinsamen Theiler haben, weil jede Primzahl, welche in die 4 Quadrate aufginge, auch in die 4 Basen λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} aufgehen müsste, was unstatthaft ist. Es muss also der gemeinsame Theiler T ein Theiler der Zahl 4, also gleich einer der Zahlen 1, 2, 4 sein. Für den Fall, dass $N(\mathcal{A})$ ungerade ist, muss daher $T=1$ sein, und die angeführten Ausdrücke der Coefficienten α_{11}, α_{12}, ... α_{33} können auf keinen kleineren gemeinsamen Nenner als die Norm $N(\mathcal{A})$ gebracht werden. Wenn $N(\mathcal{A})$ das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, sind von den 4 Zahlen λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} zwei gerade und zwei ungerade. Mithin werden in den Ausdrücken der Coefficienten alle Zähler gerade Zahlen, der grösste gemeinsame Theiler T erhält den Werth Zwei, und hebt sich in den bezeichneten Producten überall fort. Wofern endlich $N(\mathcal{A})$ das Vierfache einer ungeraden Zahl ist, so sind alle 4 Zahlen λ_0, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} ungerade, folglich ihre Quadrate $\equiv 1 \pmod{8}$. In den Ausdrücken der Coefficienten werden daher alle Zähler durch 4 theilbar, der grösste gemeinsame Theiler T nimmt den Werth 4 an, und hebt sich wieder in den sämmtlichen Brüchen fort. Somit zeigt es sich, dass die rationalen Substitutionen, welche die Summe von drei Quadraten in sich selbst verwandeln, ebenso wie diejenigen, welche die Summe von zwei Quadraten in sich selbst verwandeln, auf den kleinsten Nenner gebracht, nur eine ungerade Zahl als solchen haben können. Während aber bei den letztern nur solche ungerade Zahlen als Nenner auftreten, die aus lauter Primfactoren von der Form $4r+1$ zusammengesetzt sind, können bei den ersteren alle ungeraden Zahlen als Nenner erscheinen.

Da der Multiplication der Quaternionen die Zusammensetzung der Substitutionen entspricht, und da jedes eigentliche ganzzahlige Quaternion nach dem entwickelten Verfahren durch die in einer bestimmten Reihenfolge auszuführende Multiplication von Primquaternionen erzeugt werden kann, so lässt sich die zugeordnete rationale Substitution durch die correspondirende Zusammensetzung von denjenigen rationalen Substitutionen erhalten, die zu den betreffenden Primquaternionen gehören. Von den in (18) des Art. 6 angegebenen Primquaternionen der Norm Zwei gehören die folgenden zu den 3 verschiedenen Classen von Congruenzlösungen

(4) $$1+i_{23},\ 1+i_{31},\ 1+i_{12}.$$

Dieselben liefern respective die drei Substitutionen

$$\begin{array}{llll} (5\text{ a}) & x_1 = y_1, & x_2 = y_3, & x_3 = -y_2; \\ (5\text{ b}) & x_1 = -y_3, & x_2 = y_2, & x_3 = y_1; \\ (5\text{ c}) & x_1 = y_2, & x_2 = -y_1, & x_3 = y_3; \end{array}$$

deren Coefficienten dem Vorhergehenden entsprechend ganze Zahlen sind. Wenn dagegen die Norm eine ungerade Primzahl p ist, so bringt jedes zu einer der $p+1$ Classen von Congruenzlösungen gehörende Primquaternion eine Substitution hervor, deren Coefficienten, auf den kleinsten gemeinsamen Nenner gebracht, die Primzahl p selbst zum Nenner haben.

In Art. 6 ist die Anzahl der eigentlichen Quaternionen bestimmt worden, deren Norm eine gegebene Zahl ist, die ungerade, oder das Doppelte oder das Vierfache einer ungeraden Zahl sein kann. Mit diesem Hülfsmittel ist es leicht, die Anzahl aller rationalen Substitutionen abzuleiten, bei denen der kleinste gemeinsame Nenner der Coefficienten eine beliebig gegebene ungerade Zahl ist. Da die Norm eines zu dieser Aufgabe gehörenden Quaternions entweder die gegebene ungerade Zahl selbst, oder ihr doppelter oder ihr vierfacher Werth ist, und da zwei Quaternionen A und $-A$ dieselbe Substitution hervorbringen, so ist die bezeichnete Anzahl eigentlicher Quaternionen für die gegebene ungerade Zahl, für ihren doppelten und für ihren vierfachen Werth als Norm zu bestimmen, und von der Summe dieser drei Anzahlen die Hälfte zu nehmen. Das Verfahren, welches im vorigen Artikel zu dem Zwecke auseinandergesetzt ist, ein beliebig gegebenes eigentliches Quaternion durch Multiplication von Primquaternionen zu erzeugen, für welche die Reihenfolge der Normen vorgeschrieben ist, und die demgemäss bestimmt werden, bietet endlich die Lösung der Aufgabe, wenn eine beliebige rationale Substitution gegeben ist, dieselbe durch die Zusammensetzung von Substitutionen hervorzubringen, deren Nenner die ungeraden in dem gemeinsamen Nenner der Substitution enthaltenen Primzahlen sind, und für welche die Reihenfolge ihrer Anwendung vorgeschrieben ist, eventuell mit Hinzuziehung von zwei solchen ganzzahligen Substitutionen, wie sie in (5 a), (5 b), (5 c) angegeben sind. Die für die ganzzahligen Quaternionen gelösten Aufgaben finden somit auf die arithmetisch rationalen Substitutionen, durch welche eine Summe von drei Quadraten in sich selbst transformirt wird, eine unmittelbare vollständige Anwendung.

II

TRANSFORMATION EINER SUMME VON BELIEBIG VIELEN QUADRATEN IN SICH SELBST DURCH REELLE SUBSTITUTIONEN.

Erste Abtheilung.

Allgemeine Theorie.

1.

Bei der gegenwärtigen Betrachtung der Transformation einer Summe von n Quadraten in sich selbst werde ich voraussetzen, dass die Zahl n den Werth Drei übertreffe, da der Fall $n=2$ in Art. 1, der Fall $n=3$ in Art. 3 der Abhandlung I absolvirt ist. Es möge also durch die Substitution

$$
(1) \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}\, y_1 + \alpha_{12}\, y_2 + \dots + \alpha_{1n}\, y_n \\ x_2 = \alpha_{21}\, y_1 + \alpha_{22}\, y_2 + \dots + \alpha_{2n}\, y_n \\ \vdots \\ x_n = \alpha_{n1}\, y_1 + \alpha_{n2}\, y_2 + \dots + \alpha_{nn}\, y_n, \end{cases}
$$

deren Coefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots \alpha_{nn}$ reell sind, und deren Determinante gleich 1 ist, die Gleichung zwischen den reellen Variabeln $x_1, x_2 \dots x_n$ und $y_1, y_2 \dots y_n$

$$
(2) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2
$$

erfüllt werden. Ich beginne mit der Bestimmung der Anzahl von Substitutionen, welche aus der gegebenen entstehen, indem in einer geraden Anzahl von Vertikalreihen alle Coefficienten mit der negativen Einheit multiplicirt werden; alle diese Substitutionen haben ebenfalls die Determinante 1 und erfüllen die Gleichung (2). Da die Anzahl der verschiedenen Combinationen von je zwei Reihen gleich $\frac{n(n-1)}{1.2}$, von je vier Reihen gleich $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ ist, u. s. f., so erhält man, indem die gegebene Substitution mitgerechnet wird, die Gesammtzahl

$$1+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}+\ldots,$$

welche, als die halbe Summe von $(1+1)^n$ und $(1-1)^n$, gleich 2^{n-1} ist. Es kommt jetzt darauf an, zu zeigen, dass, wenn in dem System der Coefficienten der gegebenen Substitutionen zu jedem in der Diagonale befindlichen Element die positive Einheit hinzuaddirt, hierauf die Determinante des betreffenden Systems

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+1, & \alpha_{12}, & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}+1, & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1}, & \alpha_{n2}, & \ldots & \alpha_{nn}+1 \end{vmatrix}$$

gebildet wird, und wenn mit den Coefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{nn}$ die angegebenen Veränderungen vorgenommen werden, unter den aus (3) hervorgehenden Determinanten wenigstens eine einen von Null verschiedenen Werth hat. Dieser Satz, welcher in der Abhandlung des Herrn Hurwitz: Ueber die Perioden solcher ein deutiger, $2n$-fach periodischer Functionen, welche im Endlichen überall den Charakter rationaler Functionen besitzen und reell sind für reelle Werthe ihrer n Argumente (Journal f. Mathematik 94, p. 7), enthalten ist, lässt sich auf das folgende einfache Lemma zurückführen:

Wenn man mit $2n$ beliebigen Elementen $p_1, p_2, \ldots p_n$ und $q_1, q_2, \ldots q_n$ das Product von Binomen

$$(p_1+q_1)(p_2+q_2)\ldots(p_n+q_n)$$

bildet, in demselben eine gerade Anzahl unter den Elementen $p_1, p_2, \ldots p_n$, so oft dies möglich ist, negativ nimmt, die Elemente $q_1, q_2, \ldots q_n$ aber ungeändert lässt, hierauf alle diese Producte zu dem ursprünglichen addirt, so entsteht das Resultat

$$2^{n-1}(p_1 p_2 \ldots p_n + q_1 q_2 \ldots q_n).$$

Dieser Satz drückt für $n=2$ die offenbar richtige Gleichung aus

$$(p_1+q_1)(p_2+q_2)+(-p_1+q_1)(-p_2+q_2)$$
$$=2(p_1 p_2+q_1 q_2).$$

Um für $n=3$ das Aggregat der zu bildenden Producte zu erhalten, kann man die linke Seite der vorstehenden Gleichung mit (p_3+q_3) multipliciren, und hierauf den Ausdruck addiren, der aus dem schon gebildeten durch Verwandlung von p_3 in $-p_3$ entsteht. Dann geht aber das Aggregat der Ausdrücke der rechten Seite in den Ausdruck

$$4(p_1 p_2 p_3 + q_1 q_2 q_3)$$

über, womit die Behauptung für $n = 3$ bewiesen ist. Da aber das angegebene Verfahren beliebig oft wiederholt werden kann, so ist der Beweis für jeden Werth der Zahl n gültig.

Es sei nun ein System von n^2 beliebigen Binomen gegeben

$$(4)\qquad \begin{array}{cccc} p_{11}+q_{11}, & p_{12}+q_{12}, & \cdots & p_{1n}+q_{1n} \\ p_{21}+q_{21}, & p_{22}+q_{22}, & \cdots & p_{2n}+q_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ p_{n1}+q_{n1}, & p_{n2}+q_{n2}, & \cdots & p_{nn}+q_{nn}, \end{array}$$

aus welchem die Determinante

$$(5)\qquad \Sigma\, \varepsilon_\varrho (p_{1\varrho_1}+q_{1\varrho_1})(p_{2\varrho_2}+q_{2\varrho_2}) \cdots (p_{n\varrho_n}+q_{n\varrho_n})$$

gebildet werde, wo ε_ϱ die positive oder negative Einheit bedeutet, je nachdem die Permutation $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots & n \\ \varrho_1, & \varrho_2, & \ldots & \varrho \end{pmatrix}$ zur ersten oder zweiten Classe gehört, d. h. auf eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Zeiger zurückgeführt werden kann. Man leite nun aus (4) alle möglichen Systeme ab, indem man die Elemente $p_{11}, p_{12}, \ldots p_{nn}$, so oft es möglich ist, in einer geraden Anzahl von Vertikalreihen mit der negativen Einheit multiplicirt, die Elemente $q_{11}, q_{12}, \ldots \varrho_{nn}$ aber ungeändert lässt, bilde für alle Systeme nach der angegebenen Regel die Determinante (5), und nehme die Summe aller 2^{n-1} Determinanten, dann entsteht als Ergebniss das Product der Zahl 2^{n-1} in die Summe der beiden Determinanten

$$(6)\qquad \Sigma\, \varepsilon_\varrho p_{1\varrho_1} p_{2\varrho_2} \cdots p_{n\varrho_n} + \Sigma\, \varepsilon_\varrho q_{1\varrho_1} q_{2\varrho_2} \cdots q_{n\varrho_n}.$$

Die Richtigkeit folgt unmittelbar, indem auf jeden in (5) enthaltenen Summanden der bewiesene Hülfssatz angewendet wird.

Wenn man respective statt der Elemente $p_{11}, p_{12}, \ldots p_{nn}$ die Elemente der Substitution (1), statt $q_{11}, q_{12}, \ldots q_{nn}$ die Elemente des Systems

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 1 \end{matrix}$$

setzt, so geht das System (4) in das System (3) über, die beiden Bestandtheile von (6) werden nach der Voraussetzung gleich der positiven Einheit, mithin die Summe der 2^{n-1} zu bildenden Determinanten gleich der Zahl 2^n. Es muss also, wie behauptet war, wenigstens eine derselben einen nicht verschwindenden Werth haben.

Nunmehr nehme ich an, dass aus der beliebig gegebenen Substitution eventuell durch die Zeichenänderung der Elemente in einer geraden Anzahl von Vertikalreihen eine solche abgeleitet sei, für welche die Determinante (3) nicht gleich Null ist, und werde von jetzt ab voraussetzen, dass die Substitution (1) so eingerichtet sei, dass ihre Determinante (3) nicht gleich Null ist.

Aus (3) folgt das System

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1+y_1=(\alpha_{11}+1)\,y_1+\quad \alpha_{12}\,y_2+\ldots+\alpha_{1n}\,y_n \\ x_2+y_2=\quad \alpha_{21}\,y_1+(\alpha_{22}+1)\,y_2+\ldots+\alpha_{2n}\,y_n \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n+y_n=\quad \alpha_{n1}\,y_1+\quad \alpha_{n2}\,y_2+\ldots(\alpha_{nn}+1)\,y_n, \end{array}\right.$$

dessen rechte Seite die in (3) angegebenen Coefficienten zeigt. Die Determinante, welche aus den Elementen formell gebildet wird, als ob die Grössen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{nn}$ von einander unabhängig wären, möge mit D bezeichnet werden, so dass die betreffenden adjungirten Elemente durch partielle Differentiationen angedeutet werden können. Dann ergiebt sich durch Auflösung, weil D nach der geltenden Voraussetzung einen von Null verschiedenen Werth hat, die folgende eindeutige Darstellung der Differenzen $x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots x_n-y_n$ durch die entsprechenden Summen

$$(8)\left\{\begin{array}{l} x_1-y_1=\dfrac{1}{D}\left(\left(D-2\dfrac{\partial D}{\partial\alpha_{11}}\right)(x_1+y_1)-2\dfrac{\partial D}{\partial\alpha_{21}}\quad(x_2+y_2)\;\ldots-2\dfrac{\partial D}{\partial\alpha_{n1}}(x_n+y_n)\right) \\ x_2-y_2=\dfrac{1}{D}\left(-2\dfrac{\partial D}{\partial\alpha_{12}}(x_1+y_1)+\left(D-2\dfrac{\partial D}{\partial\alpha_{22}}\right)(x_2+y_2)\ldots-2\dfrac{\partial D}{\partial\alpha_{n2}}(x_n+y_n)\right) \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n-y_n=\dfrac{1}{D}\left(-2\dfrac{\partial D}{\partial\alpha_{1n}}(x_1+y_1)-2\dfrac{\partial D}{\partial\alpha_{2n}}(x_2+y_2)\ldots+\left(D-2\dfrac{\partial D}{\partial\alpha_{nn}}\right)(x_n+y_n)\right). \end{array}\right.$$

Mit Zuziehung einer beliebigen von Null verschiedenen Grösse λ_0 führe ich die neuen Elemente ein

$$(9)\qquad \frac{1}{D}\left(D-2\,\frac{\partial D}{\partial a_{aa}}\right)=\frac{\lambda_{aa}}{\lambda_0}\,,\quad -\frac{2}{D}\,\frac{\partial D}{\partial a_{ba}}=\frac{\lambda_{ab}}{\lambda_0}\,,$$

wo a und b differente Zahlen aus der Reihe von 1 bis n bedeuten, so dass die Gleichungen hervorgehen

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1-y_1=\frac{\lambda_{11}}{\lambda_0}(x_1+y_1)+\frac{\lambda_{12}}{\lambda_0}(x_2+y_2)+\ldots+\frac{\lambda_{1n}}{\lambda_0}(x_n+y_n) \\ x_1-y_1=\frac{\lambda_{21}}{\lambda_0}(x_1+y_1)+\frac{\lambda_{22}}{\lambda_0}(x_2+y_2)+\ldots+\frac{\lambda_{2n}}{\lambda_0}(x_n+y_n) \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_n-y_n=\frac{\lambda_{n1}}{\lambda_0}(x_1+y_1)+\frac{\lambda_{n2}}{\lambda_0}(x_2+y_2)+\ldots+\frac{\lambda_{nn}}{\lambda_0}(x_n+y_n). \end{array}\right.$$

Dann kommt, indem der Reihe nach mit $x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ldots x_n+y_n$ multiplicirt, und addirt wird, auf der linken Seite die Verbindung

$$(11)\qquad x_1^2-y_1^2+x_2^2-y_2^2+\ \ldots\ +x_n^2-y_n^2,$$

auf der rechten Seite die quadratische Form

$$(12)\qquad \sum_{a,b}\frac{\lambda_{ab}}{\lambda_0}\,(x_a+y_a)\,(x_b+y_b),$$

bei der sowohl a als b alle Indices von 1 bis n durchlaufen. Da (11) in Folge von (2) identisch verschwindet, so muss auch (12) identisch verschwinden. Es müssen also für jede Zahl a und für jedes Paar verschiedener Zahlen a und b die Gleichungen

$$(13)\qquad \lambda_{aa}=0,\ \lambda_{ab}+\lambda_{ba}=0$$

erfüllt sein, welche sich auch an den auf der linken Seite von (9) befindlichen Ausdrücken verificiren lassen. Multiplicirt man das System (10) mit λ_0, so nimmt dasselbe nach Vertheilung der beiden Systeme von Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $y_1, y_2, \ldots y_n$ auf die beiden Seiten der Gleichungen die Gestalt an

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_0\ x_1+\lambda_{21}x_2+\ldots+\lambda_{n1}x_n=\lambda_0\ y_1+\lambda_{12}y_2+\ldots+\lambda_{1n}y_n \\ \lambda_{12}x_1+\lambda_0\ x_2+\ldots+\lambda_{n2}x_n=\lambda_{21}y_1+\lambda_0\ y_1+\ldots+\lambda_{2n}y_n \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \lambda_{1n}x_1+\lambda_{2n}x_2+\ldots+\lambda_0\ x_n=\lambda_{n1}y_1+\lambda_{n2}y_2+\ldots+\lambda_0\ y_n. \end{array}\right.$$

Da die Coefficienten der linken wie der rechten Seite nach Weglassung der in der Diagonale befindlichen Elemente λ_0 zwei schiefe

Systeme bilden, die durch Vertauschung der horizontalen und vertikalen Reihen in einander übergehen, und da die Determinanten aller partiellen Systeme, deren Diagonalen in die Diagonale des schiefen Systems fallen, verschwinden oder vollständige Quadrate werden, je nachdem der Grad des partiellen Systems ungerade oder gerade ist, so haben die Coefficienten der linken und rechten Seite von (14) dieselbe Determinante, welche leicht nach den Potenzen von λ_0 geordnet werden kann. Sie ist gleich einem Aggregat aus λ_0^n, aus dem Product von λ_0^{n-2} in die $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Quadrate der Elemente λ_{ab}, aus dem Product von λ_0^{n-4} in die $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ Quadrate, die gleich schiefen Determinanten vierten Grades sind, u. s. f. Die Gesammtzahl der zu addirenden Bestandtheile stimmt daher mit der Anzahl 2^{n-1} der Determinanten überein, welche aus der Determinante D des Systems (3) durch den Zeichenwechsel einer geraden Anzahl von Vertikalreihen abgeleitet worden sind.

Bei Gelegenheit der Determinante der Coefficienten der linken und rechten Seite von (14) zeigt sich zum ersten Male der entscheidende Einfluss der Anzahl n der vorliegenden Quadrate. In I, Art. 1 ist die Determinante der Coefficienten der linken wie der rechten Seite von (9) gleich der Norm $\lambda_0^2+\lambda_{12}^2$; in I, Art. 3 hat die Determinante der Coefficienten der linken wie der rechten Seite von (9) den Ausdruck

$$\lambda_0\ (\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2),$$

sie ist daher gleich dem Product von λ_0 in die Norm $\lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2$. Für $n=2$ und für $n=3$ werden also die Basen der in den Ausdruck eingehenden Quadrate durch die gegebenen Elemente λ_{ab} unmittelbar dargestellt. Gegenwärtig, wo $n>3$ ist, sind die erwähnten Basen homogene Functionen der Elemente λ_{ab} von verschiedenen Graden. Bei einer Basis vom r ten Grade führe ich den Quotienten ein, welcher durch Division der Basis mit der $(r-1)$ ten Potenz der von Null verschiedenen Grösse λ_0 entsteht, und bezeichne denselben in der Weise durch Indices, wie Jacobi in der Abhandlung: Ueber die Pfaffsche Methode, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren (Journal f. Mathematik 2, pag. 355) die Basen bezeichnet hat. Es ist demnach

$$(15) \qquad \lambda_{abcd} = \frac{\lambda_{ab}\,\lambda_{cd}+\lambda_{ac}\,\lambda_{db}+\lambda_{ad}\,\lambda_{bc}}{\lambda_0},$$

und allgemein, wenn $2r$ beliebige Zahlen $a, b, \ldots f$ ausgewählt werden, $\lambda_{ab\ldots f}$ gleich einem Bruche mit dem Nenner λ_0^{r-1}, dessen Zähler erhalten wird, indem man mit den Zahlen $a, b, \ldots f$ alle Permutationen erster Classe vornimmt, hierauf diese Zahlen in der gegebenen Reihenfolge, zu zweien gepaart, an den Buchstaben λ als Zeiger vertheilt, von den Producten, die untereinander gleich sind, immer nur ein einziges wählt, und von allen verschiedenen die Summe nimmt. Die auf diese Weise eindeutig bestimmte Verbindung $\lambda_{ab\ldots f}$ hat demnach die Eigenschaft, *bei einer Vertauschung ihrer Zeiger entweder in sich selbst oder in den entgegengesetzten Werth überzugehen, je nachdem die Permutation zur ersten oder zweiten Classe gehört.* Somit wird die Determinante des auf der linken oder rechten Seite von (14) vorhandenen Systems von Coefficienten gleich dem Product der Potenz λ_0^{n-2} in ein Aggregat von Quadraten, deren Basen aus der Grösse λ_0, den $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Grössen λ_{ab}, den $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ Verbindungen λ_{abcd}, und überhaupt den 2^{n-1} eingeführten Verbindungen besteht, unter denen die Elemente mit einbegriffen sind. Die Beobachtung, dass diese 2^{n-1} Verbindungen in dem betreffenden Ausdruck als gleichberechtigt auftreten, deutet darauf hin, dass sie für die Transformation einer Summe von n Quadraten in sich selbst gleichberechtigt sind, wie es sich im Folgenden bestätigen wird. Die Verbindungen $\lambda_{abcd\ldots}$ lassen sich einfach ausdrücken, indem von der Determinante D in dem angegebenen Sinne höhere partielle Differentialquotienten gebildet werden. Da nach (9) und (13) die Gleichung

$$(9^*) \qquad \frac{\lambda_{ab}}{\lambda_0} = \frac{2}{D}\,\frac{\partial D}{\partial \alpha_{ab}} = -\frac{2}{D}\,\frac{\partial D}{\partial \alpha_{ba}}$$

gilt, so hat man

$$\frac{\lambda_{ab}\,\lambda_{cd}+\lambda_{ad}\,\lambda_{bc}}{\lambda_0^2}$$
$$=\frac{4}{D^2}\left(\frac{\partial D}{\partial a_{ab}}\,\frac{\partial D}{\partial a_{cd}}-\frac{\partial D}{\partial a_{ad}}\,\frac{\partial D}{\partial a_{cb}}\right)=\frac{4}{D}\,\frac{\partial^2 D}{\partial a_{ab}\partial a_{cd}},$$

mithin ergiebt sich für λ_{abcd} die Gleichung

$$\text{(16)}\qquad \frac{\lambda_{abcd}}{\lambda_0}=\frac{4}{2D}\left(\frac{\partial^2 D}{\partial a_{ab}\,\partial a_{cd}}+\frac{\partial^2 D}{\partial a_{ac}\partial a_{db}}+\frac{\partial^2 D}{\partial a_{ad}\,\partial a_{bc}}\right).$$

In gleicher Weise kann man fortfahren und erhält

$$\text{(16*)}\qquad \frac{\lambda_{abcdef}}{\lambda_0}=\frac{8}{2.3.D}\left(\frac{\partial^3 D}{\partial a_{ab}\partial a_{cd}\partial a_{ef}}+\dots\right).$$

Bei dem numerischen Factor treten im Zähler die Potenzen von Zwei, im Nenner die zugehörigen Zahlenfacultäten auf; die Wahl der Zeiger für a richtet sich nach der Regel, durch welche in der ursprünglichen Darstellung die Zeiger von λ bestimmt sind. In allen Ausdrücken bildet die Determinante D, aber keine höhere Potenz von D, den Nenner.

2.

Wie in I, Art. 3 aus dem System (9) eine vierte Gleichung (10) abgeleitet ist, um dasselbe zu ergänzen, so wird jetzt aus dem System (14) des vorigen Artikels ein System von $2^{n-1}n$ Gleichungen erhalten werden, welche, nach den $2n$ Variabeln x_1, $x_2, \dots x_n$ und $y_1, y_2, \dots y_n$ geordnet und den vorhandenen hinzugefügt, ein System von 2^{n-1} Gleichungen liefern, bei dem die Coefficienten jeder Variable aus den positiv oder negativ genommenen 2^{n-1} Grössen $\lambda_0, \lambda_{ab}, \lambda_{abcd}, \dots$ bestehen. Zu diesem Zweck werde aus den n Gleichungen (14) des vorigen Art. eine beliebige Gruppe von ungerader Anzahl herausgehoben; die Zahlen, welche die Stelle der einzelnen Gleichungen angeben, seien

(1) $$a, b, \dots e.$$

Es sollen jetzt die Gleichungen in der betreffenden Reihenfolge mit den Factoren

(2) $$\lambda_{bc..e}, \lambda_{c..ea}, \dots, \lambda_{ab..d}$$

multiplicirt, und addirt werden. Wenn nun f eine Zahl bedeutet, die in (1) nicht enthalten ist, so ergiebt sich auf der linken Seite als Factor von x_f der Ausdruck

(3) $$\lambda_{fa}\lambda_{bc..e}+\lambda_{fb}\lambda_{c...ea}+\ldots+\lambda_{fe}\lambda_{ab..d},$$

welcher bekanntlich gleich

(4) $$\lambda_0\lambda_{fa...e}$$

ist, auf der rechten Seite als Factor von y_f derselbe Ausdruck, mit der negativen Einheit multiplicirt, oder

(5) $$-\lambda_0\lambda_{fa...e}.$$

Nimmt man dagegen einen Zeiger aus der Gruppe (1), etwa a, so kommt links als Factor von x_a

(6) $$\lambda_0\lambda_{bc..e}+\lambda_{ab}\lambda_{c..ea}+..+\lambda_{ae}\lambda_{ab..d},$$

rechts als Factor y_a

(7) $$\lambda_0\lambda_{bc..e}+\lambda_{ba}\lambda_{c..ea}+..+\lambda_{ea}\lambda_{ab..d}.$$

Weil aber in beiden Aggregaten die Summe der Glieder mit Ausnahme des ersten gleich Null ist, so nimmt jedes Aggregat den Werth

(8) $$\lambda_0\lambda_{bc..e}$$

an. Die hervorgehende Gleichung erhält also, nachdem durch die von Null verschiedene Grösse λ_0 dividirt ist, die Gestalt

(9) $$\left\{\begin{array}{l}\lambda_{bc..e}x_a+\lambda_{c..ea}x_b+..+\lambda_{ab..d}x_e+\Sigma_f\lambda_{fa..e}x_f=\\ \lambda_{bc..e}y_a+\lambda_{c..ea}y_b+..+\lambda_{ab..d}y_e-\Sigma_f\lambda_{fa..e}x_f,\end{array}\right.$$

wo f alle Zahlen von 1 bis n durchläuft, die nicht in der Gruppe (1) enthalten sind. Die Coefficienten der Variabeln sind also bis auf die hinzuzufügende positive oder negative Einheit aus dem System der Grössen λ entnommen, und zwar ergiebt sich die Gruppe der Zeiger für den Coefficienten einer bestimmten Variable, indem der Zeiger dieser Variable, falls er in der Gruppe $a, b, .. e$ nicht vorkommt, derselben zugefügt, falls er in der Gruppe vorkommt, aus derselben fortgelassen wird. Unter das so eben ausgesprochene Bildungsgesetz von (9) lassen sich auch die ursprünglichen Gleichungen (14), Art. 1, subsumiren, indem man jeder Gleichung die Zahl ihrer Stelle zuordnet, und festsetzt, dass bei dem Fortlassen des einzigen vorhandenen Zeigers die Null als Zeiger eintritt.

Es ist leicht zu erkennen, dass die Gesammtzahl aller aus

n Zeigern zu bildenden Gruppen von ungerader Anzahl, deren Typus in (1) angegeben ist, gleich

$$n + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots,$$

mithin wieder gleich 2^{n-1} ist. Die Gesammtzahl der in (9) dargestellten Gleichungen beträgt also, indem die n ursprünglichen mit hinzugerechnet werden, wie behauptet worden, 2^{n-1}. Für eine beliebige Variable x_t oder y_t erhält man die Zeiger der Coefficienten in allen 2^{n-1} Gleichungen nach der entwickelten Regel, da jeder Gleichung eine Gruppe von Zeigern in ungerader Anzahl zugeordnet ist, indem man den Zeiger t hinzufügt, wo er fehlt, und wegnimmt, wo er vorhanden ist. Durch dieses Verfahren werden aber alle Combinationen einer geraden Anzahl von Zeigern, das Auftreten keines Zeigers mitgerechnet, auf eine und nur eine Weise hervorgebracht. Demnach erscheinen in den 2^{n-1} Gleichungen bei jeder Variable x_t und y_t die sämmtlichen Grössen λ_0, λ_{ab}, $\lambda_{abcd}, \ldots$, mit der positiven oder negativen Einheit multiplicirt, als Coefficienten, wie zu beweisen war.

Um in den erhaltenen 2^{n-1} Gleichungen die Coefficienten einer einzelnen Variable z. B. von x_1 zu verfolgen, hat man zu unterscheiden, ob in der einzelnen Gleichung, die durch (9) repräsentirt wird, der betreffende Zeiger 1 in der Gruppe $a, b, \ldots e$ oder in der mit f bezeichneten Gruppe der übrigen Zahlen enthalten ist. Für den ersten Fall werde $a = 1$ genommen, für den zweiten f zuerst gleich 1 gesetzt, und hierauf der Inbegriff der übrigen Werthe von f durch f' angedeutet. So entstehen respective die beiden Gleichungen

$$(10)\quad \begin{cases} \lambda_{bc..e}\, x_1 + \lambda_{c..e1}\, x_b + \ldots + \lambda_{1b..d}\, x_e + \Sigma_f\, \lambda_{f1b..e}\, x_f = \\ \lambda_{bc..e}\, y_1 + \lambda_{c..e1}\, y_b + \ldots + \lambda_{1b..d}\, y_e - \Sigma_f\, \lambda_{f1b..e}\, y_f, \end{cases}$$

$$(10^*)\quad \begin{cases} \lambda_{1ab..e}\, x_1 + \lambda_{bc..e}\, x_a + \ldots + \lambda_{ab..d}\, x_e + \Sigma_{f'}\, \lambda_{f'ab..e}\, x_{f'} = \\ -\lambda_{1ab..e}\, y_1 + \lambda_{bc..e}\, y_a + \ldots + \lambda_{ab..d}\, y_e - \Sigma_{f'}\, \lambda_{f'ab..e}\, y_{f'}. \end{cases}$$

Mithin haben die Variabeln x_1 und y_1 in (10) gleiche, in (10*) entgegengesetzte Coefficienten. Bei der vorhin erwähnten Voraussetzung, vermöge deren das ursprüngliche System (14), Art. 1 in (9) mit enthalten ist, wird die erste Gleichung des ursprünglichen

Systems durch (10) dargestellt, während die $n-1$ übrigen Gleichungen durch (10*) repräsentirt werden.

3.

Das aus (14) Art. 1, (10) und (10*) Art. 2 bestehende System von 2^{n-1} Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda_0\, x_1+\lambda_{21}\, x_2+\ldots+\lambda_{n1}\, x_n=\lambda_0\, y_1+\lambda_{12}\, y_2+\ldots+\lambda_{1n}\, y_n \\ \lambda_{12}\, x_1+\lambda_0\, x_2+\ldots+\lambda_{n2}\, x_n=\lambda_{21}\, y_1+\lambda_0\, y_2+\ldots+\lambda_{2n}\, y_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \lambda_{1n}\, x_1+\lambda_{2n}\, x_2+\ldots+\lambda_0\, x_n=\lambda_{n1}\, y_1+\lambda_{n2}\, y_2+\ldots+\lambda_0\, y_n, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda_{bc..e}\, x_1+\lambda_{c..e1}\, x_b+..+\lambda_{1b..d}\, x_e+\Sigma_f\, \lambda_{f1b..e}\, x_f= \\ \lambda_{bc..e}\, y_1+\lambda_{c..e1}\, y_b+..+\lambda_{1b..d}\, y_e-\Sigma_f\, \lambda_{f1b..e}\, y_f, \end{cases}$$

$$(2^*)\quad \begin{cases} \lambda_{1ab..e}\, x_1+\lambda_{bc...e}\, x_a+..+\lambda_{ab..d}\, x_e+\Sigma_{f'}\, \lambda_{f'ab..e}\, x_{f'}= \\ -\lambda_{1ab..e}\, y_1+\lambda_{bc...e}\, y_a+..+\lambda_{ab..d}\, y_e-\Sigma_{f'}\, \lambda_{f'ab..e}\, y_{f'} \end{cases}$$

lässt sich mit Hülfe eines Systems von 2^{n-1} symbolischen Factoren, unter denen die Einheit mitgerechnet ist, zusammenfassen; dieselben mögen, wie folgt, bezeichnet werden,

$$(3)\qquad 1,\ i_{ab},\ i_{abcd},\ \ldots$$

Als Indices erscheinen alle Combinationen verschiedener Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots n$, deren Anzahl gerade ist, abgesehen von der Anordnung Die symbolischen Factoren der linken und rechten Seiten von (1), (2), (2*) werden so eingerichtet, dass beziehungsweise die Indices mit den Indices der Coefficienten von x_1 übereinstimmen. Demnach werden bei (1) successive die Factoren

$$1,\ i_{12},\ i_{13},\ \ldots\ i_{1n}$$

angewendet, bei (2) der Factor

$$i_{bc..e},$$

bei (2*) der Factor

$$i_{1ab..e},$$

und hierauf wird eine formelle Addition der erhaltenen Ausdrücke der linken und rechten Seite vorgenommen. Alsdann kann man das Resultat sowohl der linken wie der rechten Seite als ein Product von zwei Factoren darstellen.

Für die linke Seite hat der erste, links zu stellende Factor die Gestalt

(4) $$\varLambda = \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + \ldots + i_{1234}\lambda_{1234} + \ldots;$$

als Indices treten alle Gruppen von gerader Anzahl und zwar so auf, wie sie bei den Coefficienten der Variable x_1 erscheinen. Gleichzeitig muss der zweite rechts zu stellende Factor der folgende sein

(5) $$X = x_1 + i_{12}x_2 + \ldots + i_{1n}x_n.$$

Da in dem darzustellenden Ausdruck jedes Product einer Grösse λ und einer Grösse x mit einem symbolischen Factor multiplicirt vorkommt, so werden die Regeln für die Multiplication der symbolischen Factoren unzweifelhaft durch die Forderung bestimmt, dass der betreffende Ausdruck entstehen soll, indem bei der Bildung von $\varLambda X$ jeder Summand von $\varLambda$ mit jedem Summanden von X so multiplicirt wird, dass die reellen Factoren wirklich multiplicirt werden, und das Product der symbolischen Factoren in ihrer gegebenen Reihenfolge hinzugeschrieben wird. In Betreff der Bezeichnung der Symbole (3) wird es sich als zweckmässig herausstellen, festzusetzen, dass, wenn bei einer bestimmten Gruppe von Indices eine Aenderung der Anordnung vorgenommen wird, das Symbol ungeändert bleiben oder mit dem Factor (-1) versehen werden soll, welcher dann dem reellen Coefficienten beizufügen ist, je nachdem die Permutation zur *ersten* oder *zweiten* Classe gehört. Dadurch erhält der Ausdruck (4) die Eigenschaft, dass jeder einzelne Summand ungeändert bleibt, wofern für denselben mit den Zeigern der reellen Grösse λ und des symbolischen Factors i dieselbe Permutation vorgenommen wird. In sofern jetzt jedes Symbol entweder mit der positiven oder mit der negativen Einheit multiplicirt auftreten kann, steigt die Gesammtzahl, da noch ± 1 hinzugerechnet wird, auf 2^n. Aus der Vergleichung der Bestandtheile der linken Seite von (1), (2) und (2*) folgen nun respective die Regeln

(6) $$i_{c..e1}\, i_{1b} = \ldots = i_{1b..d}\, i_{1e} = i_{f1b..e}\, i_{1f} = i_{bc..e},$$

(6*) $$i_{bc..e}\, i_{1a} = \ldots = i_{ab..d}\, i_{1e} = i_{f'ab..e}\, i_{1f'} = i_{1ab..e};$$

bei dem Wegfallen der Zeiger $b, c, .. e$ ist auf der rechten Seite von (6) statt des Symbols die positive Einheit zu substituiren.

Es bleibt jetzt das Resultat zu untersuchen, welches die rechten Seiten von (1), (2), (2*) nach der ausgeführten Multiplication mit den angegebenen symbolischen Factoren und der hierauf vollzogenen formellen Addition liefern. Dasselbe lässt sich aus den gleichen Gründen als das Product von zwei Factoren auffassen; der erste links zu stellende ist

$$(7)\qquad Y = y_1 + i_{12}\, y_2 + \ldots + i_{1n}\, y_n,$$

der zweite rechts zu stellende

$$(8)\qquad \varLambda_1 = \lambda_0 - i_{12}\,\lambda_{12} + \ldots + i_{23}\,\lambda_{23} + \ldots - i_{1234}\,\lambda_{1234} + \ldots$$

geht aus $\varLambda$ hervor, indem alle reellen Elemente, bei denen der Zeiger 1 vorkommt, negativ genommen werden, alle übrigen ungeändert bleiben. Durch die Vergleichung der rechten Seiten von (1), (2) und (2*) ergeben sich für die Multiplication der Symbole die Regeln

$$(9)\qquad -i_{1b}\, i_{c..e1} = .. = -i_{1e}\, i_{1b..d} = i_{1f}\, i_{f1b..c} \quad = i_{bc..e},$$

$$(9^*)\qquad i_{1a}\, i_{bc..e} = .. = i_{1e}\, i_{ab..d} \quad = -i_{1f'}\, i_{f'ab..e} = i_{1ab..e};$$

auch hier ist bei dem Wegfallen der Zeiger $b, c, .. e$ auf der rechten Seite von (9) statt des Symbols die positive Einheit zu setzen.

Die Gleichungen (6) und (6*) liefern nach und nach die Relationen

$$(10)\qquad \begin{cases} i_{f1}\, i_{1f} = 1, \; i_{f'a}\, i_{1f'} = i_{1a}, \\ i_{c1}\, i_{1b} = i_{f1bc}\, i_{1f} \quad = i_{bc}, \\ i_{bc}\, i_{1a} = i_{ca}\, i_{1b} \quad = i_{f'abc}\, i_{1f'} = i_{1abc}; \end{cases}$$

desgleichen liefern (9) und (9*) die Relationen

$$(11)\qquad \begin{cases} i_{1f}\, i_{f1} = 1, \; -i_{1f'}\, i_{f'a} = i_{1a}, \\ -i_{1b}\, i_{c1} = i_{1f}\, i_{f1bc} \quad = i_{bc}, \\ i_{1a}\, i_{bc} = i_{1b}\, i_{ca} \quad = -i_{1f'}\, i_{f'ab} = i_{1abc}. \end{cases}$$

Das System (10) enthält Regeln für die Multiplication der Symbole von zwei Indices, ebenso das System (11); beide Systeme stimmen mit einander überein, sobald die vorhin für die Bezeichnung getroffene Ausnahme berücksichtigt wird, nach welcher für jedes Paar verschiedener Indices a und b

$$(12)\qquad i_{ba} = -\, i_{ab}$$

ist. Weiter folgen aus (6) und (6*) Regeln für eine Multiplication, bei der, von der Linken zur Rechten fortschreitend, neue Symbole von zwei Indices hinzutreten, aus (9) und (9*) Regeln für Multiplication, bei der, von der Rechten zur Linken fortschreitend, neue Symbole von zwei Indices hinzukommen, und *beide Systeme von Regeln bleiben dauernd in Uebereinstimmung*. Man kann den gemeinsamen Inhalt derselben dahin zusammenfassen, dass jedes Symbol in der folgenden Weise als ein Product von Symbolen mit zwei Zeigern dargestellt werden darf,

$$(13) \qquad i_{abcd} = i_{ab}\, i_{cd}\,,\quad i_{abcdef} = i_{ab}\, i_{cd}\, i_{ef}\,, \ldots,$$

dass bei der Multiplication der Symbole diese Darstellung mit Beobachtung der Reihenfolge anzuwenden ist, dass die Zusammenfassung eine beliebige ist oder das associative Gesetz gilt, und dass für die Multiplication der Symbole von zwei Zeigern die folgenden in (10) und (11) enthaltenen Regeln gelten, bei denen a, b, c drei beliebige unter sich verschiedene Indices bedeuten,

$$(14) \qquad i_{ab}\, i_{ab} = -1\,,\quad i_{ab}\, i_{bc} = -i_{ac}\,.$$

Es hat sich also gezeigt, dass, nachdem die linken und rechten Seiten von (1), (2), (2*) mit den angeführten symbolischen Factoren multiplicirt und addirt sind, durch Anwendung derselben Multiplicationsgesetze das Aggregat links als das Product $\mathcal{A}X$, das Aggregat rechts als das Product $Y\mathcal{A}_1$ dargestellt werden darf. Deshalb lässt sich der Inhalt der Gleichungen (1), (2), (2*), deren letztere eine nothwendige Folge der Gleichungen (1) sind, in der folgenden Weise als *eine Gleichung zwischen zwei Producten* aussprechen

$$(15) \qquad \mathcal{A}X = Y\mathcal{A}_1\,.$$

Die Ausdrücke $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$, X, Y werden complexe Ausdrücke der n-ten Ordnung genannt. Wegen der Ableitung von (1) aus dem System (1) des Art. 1 ist in dieser symbolischen Gleichung die Transformation der Summe von n Quadraten in sich selbst durch eine beliebige lineare Substitution (1) von der Determinante 1 enthalten, welche die dort aufgestellte Bedingung erfüllt, dass die zugehörige Determinante D des Systems (3) einen von Null verschiedenen Werth hat.

4.

Nachdem die Regeln für die Multiplication der angewendeten symbolischen Factoren auf die Multiplication von Symbolen mit zwei Zeigern zurückgeführt sind, kann man noch einen Schritt weiter gehen, und die Symbole mit zwei Zeigern als ein symbolisches Product von *Primitivzeichen* auffassen, wodurch eine Darstellung der sämmtlichen 2^n-2 Symbole, die nach Weglassung von ± 1 vorhanden sind, mit Hülfe von *n Primitivzeichen* $k_1, k_2, \ldots k_n$ entsteht. Für irgend zwei differente Zeiger a und b sei

(1) $$i_{ab} = k_a k_b, \; i_{ba} = k_b k_a;$$

dann folgen aus (12) und (14) des vorigen Art. mit Nothwendigkeit die Gleichungen

(2) $$\begin{gathered} k_a k_b = -k_b k_a, \; k_a k_b k_b k_a = 1, \\ k_a k_b k_b k_c = -k_a k_c, \end{gathered}$$

und man erhält aus (13) die Darstellung der übrigen Symbole

(3) $$\begin{aligned} i_{abcd} &= k_a k_b k_c k_d, \\ i_{abcdef} &= k_a k_b k_c k_d k_e k_f, \\ &\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \end{aligned}$$

Die Multiplication der Symbole wird dann auf die Multiplication der Primitivzeichen zurückgeführt; man schreibt die zu multiplicirenden Symbole in der gegebenen Reihenfolge neben einander, ersetzt jedes Symbol durch seinen Ausdruck in den Primitivzeichen, und beobachtet für die Multiplication der in bestimmter Reihenfolge nebeneinander stehenden Primitivzeichen die Regeln, dass Vertauschung von zwei benachbarten ungleichen Primitivzeichen die Multiplication mit der negativen Einheit als Factor nach sich zieht, und dass, wenn zwei gleiche Primitivzeichen neben einander stehen, dieselben zu entfernen und durch die negative Einheit als Factor zu ersetzen sind. Zu den Gleichungen (2) kommt also noch die Gleichung

(4) $$k_a k_a = -1$$

hinzu. Ist man durch die Anwendung der aufgestellten Regeln zu einem Product gelangt, das nur Primitivzeichen von lauter verschiedenen Zeigern enthält, so stimmt dasselbe nothwendig mit einem der in (3) enthaltenen Symbole überein. Für die *com-*

plexen Ausdrücke der n-ten Ordnung (4), (5), (7), (8) des vorigen Art. entstehen somit die Darstellungen

$$(5)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = \lambda_0+k_1 k_2 \lambda_{12}+\ldots+k_2 k_3 \lambda_{23}+\ldots+k_1 k_2 k_3 k_4 \lambda_{1234}+\ldots \\ \mathcal{A}_1 = \lambda_0-k_1 k_2 \lambda_{12}+\ldots+k_2 k_3 \lambda_{23}+\ldots-k_1 k_2 k_3 k_4 \lambda_{1234}+\ldots \\ X = x_1+k_1 k_2 x_2+\ldots+k_1 k_n x_n \\ Y = y_1+k_1 k_2 y_2+\ldots+k_1 k_n y_n. \end{cases}$$

Das Bildungsgesetz von $\mathcal{A}_1$ lässt sich jetzt so aussprechen, dass $\mathcal{A}_1$ aus $\mathcal{A}$ hervorgeht, indem überall das Primitivzeichen k_1 durch $-k_1$ ersetzt wird, die übrigen Primitivzeichen aber ungeändert bleiben.

5.

Es möge jetzt mit einer von Null verschiedenen Grösse λ_0 und $\frac{n(n-1)}{2}$ beliebigen Grössen λ_{ab} ein System von Gleichungen gebildet werden, welches die Gestalt von (14) in Art. 1 hat,

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda_0\, x_1+\lambda_{21}\, x_2+\ldots+\lambda_{n1}\, x_n = \lambda_0\, y_1+\lambda_{12}\, y_2+\ldots+\lambda_{1n} \\ \lambda_{12}\, x_1+\lambda_0\, x_2+\ldots+\lambda_{n2}\, x_n = \lambda_{21}\, y_1+\lambda_0\, y_2+\ldots+\lambda_{2n}\, y_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \lambda_{1n}\, x_1+\lambda_{2n}\, x_2+\ldots+\lambda_0\, x_n = \lambda_{n1}\, y_1+\lambda_{n2}\, y_2+\ldots+\lambda_0\, y_n. \end{cases}$$

Dasselbe liefert vermöge der von den Herren **Cayley** und **Hermite** herrührenden Methode eine Substitution von der Determinante 1, welche die Quadratsumme $x_1^2+x_2^2+\ldots x_n^2$ in die Quadratsumme $y_1^2+y_2^2+\ldots y_n^2$ verwandelt. Die Determinante der Coefficienten der linken wie der rechten Seite ist, wie am Schlusse von Art. 1 besprochen worden, gleich dem Product der Potenz λ_0^{n-2} in ein Aggregat von 2^{n-1} Quadraten, welches *die Norm des aus den Elementen λ_0 und λ_{ab} gebildeten Ausdrucks $\mathcal{A}$ genannt, und folgendermassen bezeichnet werden soll:*

$$(2)\qquad N(\mathcal{A}) = \lambda_0^2+\lambda_{12}^2+\ldots+\lambda_{1234}^2+\ldots$$

In Folge der getroffenen Voraussetzung, dass λ_0 von Null verschieden ist, sind die Basen aller eingehenden Quadrate eindeutig bestimmt, und ist wenigstens eine, nämlich λ_0, von Null verschieden. Mithin kann auf dem reellen Gebiet, auf dem sich die gegenwärtige Betrachtung bewegt, die Norm $N(\mathcal{A})$ nicht gleich Null sein. Daher giebt die Auflösung des Systems (1) nach den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein eindeutig bestimmtes System von Functionen der Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$, bei dem das System der Coefficienten eine Determinante hat, die gleich der positiven Einheit ist. Es genügt ferner, die Gleichungen (1) der Reihe nach mit den Factoren $x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots x_n+y_n$ zu multipliciren, zu addiren, und durch die von Null verschiedene Grösse λ_0 zu dividiren, um die Gleichung

$$x_1^2-y_1^2+x_2^2-y_2^2+\ldots+x_n^2-y_n^2=0 \tag{2}$$

zu erhalten, aus welcher die verlangte Transformation folgt.

Von entscheidender Wichtigkeit ist es nun, sich zu überzeugen, dass, wenn die aus (1) eindeutig folgende Substitution so bezeichnet wird,

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=\alpha_{11}\, y_1+\alpha_{12}\, y_2+\ldots+\alpha_{1n}\, y_n \\ x_2=\alpha_{21}\, y_1+\alpha_{22}\, y_2+\ldots+\alpha_{2n}\, y_n \\ \vdots \\ x_n=\alpha_{n1}\, y_1+\alpha_{n2}\, y_2+\ldots+\alpha_{nn}\, y_n, \end{array}\right. \tag{3}$$

die Determinante des aus diesen Coefficienten gebildeten Systems

$$\left|\begin{array}{llll} \alpha_{11}+1, & \alpha_{12} & ,\ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & , \alpha_{22}+1, & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & , \alpha_{n2} & ,\ldots & \alpha_{nn}+1, \end{array}\right| \tag{4}$$

welche wieder D genannt werden möge, nicht verschwinden kann. Aus (1) folgt das System

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_0\,(x_1+y_1)+\lambda_{21}(x_2+y_2)+\ldots+\lambda_{n1}(x_n+y_n)=2\lambda_0\, y_1 \\ \lambda_{12}(x_1+y_1)+\lambda_0\,(x_2+y_2)+\ldots+\lambda_{n2}(x_n+y_n)=2\lambda_0\, y_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \lambda_{1n}(x_1+y_1)+\lambda_{2n}(x_2+y_2)+\ldots+\lambda_0\,(x_n+y_n)=2\lambda_0\, y_n, \end{array}\right. \tag{5}$$

aus (3) das System

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1+y_1=(\alpha_{11}+1)\, y_1+ & \alpha_{12}\, y_2+\ldots+ & \alpha_{1n}\, y_n \\ x_2+y_2= \quad \alpha_{21}\, y_1+(\alpha_{22}+1)\, y_2+\ldots+ & & \alpha_{2n}\, y_n \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n+y_n= \quad \alpha_{n1}\, y_1+ & \alpha_{n2}\, y_2+\ldots(\alpha_{nn}+1)\, y_n. \end{array}\right. \tag{6}$$

Daher ergiebt die Einsetzung der Ausdrücke (6) in (5) zwischen den Determinanten der Systeme der Coefficienten die Gleichung

(7) $$\lambda_0^{n-2} N(\mathcal{A}) . D = (2\lambda_0^n),$$

oder nach Fortlassung des von Null verschiedenen Factors λ_0^{n-2},

(8) $$N(\mathcal{A}) . D = 2^n \lambda_0^2 .$$

Es kann daher, wie behauptet worden, die Determinante D nicht gleich Null sein. Hiermit ist der Beweis erbracht, dass zu jedem System von Elementen λ_0 und λ_{ab}, bei dem λ_0 nicht gleich Null ist, ein System von Gleichungen (1) gehört, aus dem eine Substitution (3) folgt, welche nach der Voraussetzung des Art. 1 so *eingerichtet* ist, dass die zugeordnete Determinante D nicht verschwindet. Demnach enthält das System (1) unter der das Element λ_0 betreffenden Annahme genau die in Art. 1 betrachteten Substitutionen, und gestattet die sämmtlichen in Art. 1 gemachten Folgerungen. Wenn daher aus dem System von Elementen λ_0 und λ_{ab} der Ausdruck $\mathcal{A}$ dargestellt wird, so gelten auch die in Art. 3 mit (1), (2), (2*) bezeichneten Gleichungen, und die betreffende Substitution wird in der dortigen Gleichung (15) zusammengefasst, die ich jetzt wiederhole,

(9) $$\mathcal{A} X = Y \mathcal{A}_1 .$$

Das System (1) in Art. 1, für welches D einen von Null verschiedenen Werth hat, ist aus einem daselbst beliebig gegebenen System abgeleitet worden, indem bei dem letzteren eventuell für eine gewisse gerade Anzahl von Vertikalreihen die Coefficienten mit der negativen Einheit multiplicirt wurden. Man erhält also alle dem in Rede stehenden Zwecke dienenden Substitutionen von der Determinante 1 dadurch, dass in dem System (1) des Art. 1 oder, was auf dasselbe hinauskommt, dem System (3) des gegenwärtigen Art. auf alle möglichen Arten für eine gerade Anzahl von Vertikalreihen alle Coefficienten mit der negativen Einheit multiplicirt werden. Es sei $a, b, c, .. f$ eine Gruppe von Zeigern von gerader Anzahl, g bedeute indefinite die Zeiger, welche in dieser Gruppe nicht enthalten sind; dann mögen die Variabeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$, mit n neuen Variabeln durch das System von Gleichungen verbunden werden,

(10) $$y_a = -z_a, \; y_b = -z_b, \ldots y_f = -z_f, \; y_g = z_g .$$

Diese Substitution hat die Determinante 1, bewirkt bei der Einsetzung in (3), dass in den Vertikalreihen mit den Zeigern $a, b, c, .. f$ alle Coefficienten den Factor -1 erhalten, und erfüllt die Gleichung

(11) $$y_1^2+y_2^2+..+y_n^2 = z_1^2+z_2^2+..+z_n^2.$$

Setzt man jetzt

(12) $$Z = z_1+k_1 k_2 z_2+...+k_1 k_n z_n,$$

ferner

(13) $$J = k_a k_b k_c ... k_f,$$

und ausserdem $J_1 = -J$ oder $J_1 = J$, je nachdem unter den Zahlen $a, b, c, ... f$ die Eins vorkommt oder nicht, so werden die Gleichungen (10) durch die eine Gleichung

(14) $$J(y_1+k_1 k_2 y_2+...+k_1 k_n y_n) = (z_1+k_1 k_2 z_2+...+k_1 k_n z_n) J_1$$

repräsentirt. Wenn also die Gleichung (9) links mit J multiplicirt, und vermöge des für die eingeführten Symbole geltenden associativen Gesetzes nach (14) das Product JY durch ZJ_1 ersetzt wird, so entsteht die Gleichung

(15) $$J \mathcal{A} X = Z J_1 \mathcal{A}_1.$$

Dieselbe schliesst auch die Gleichung (9) in sich, wofern die Bestimmung $J = 1$, $J_1 = 1$ mit hinzugenommen wird, und stellt dann alle Substitutionen von der Determinante 1 dar, welche die Transformationsgleichung

(16) $$x_1^2+x_2^2+..+x_n^2 = z_1^2+z_2^2+..+z_n^2$$

befriedigen.

6.

Die Gleichung (15) des vorigen Artikels entspricht genau der Gleichung (20) in I, Art. 1, für $n=2$, und der Gleichung (31) in I, Art. 3, für $n=3$. Aus den angeführten Gleichungen ist an den betreffenden Stellen geschlossen worden, dass für $n=2$ der Inbegriff der Ausdrücke $\lambda_0+i\lambda_{12}$ und $i(\lambda_0+i\lambda_{12})$ mit dem Inbegriff der complexen Grössen $a+ib$, für $n=3$ der Inbegriff der Ausdrücke $J\mathcal{A}$ mit dem Inbegriff der Quaternionen $a+i_{12}b+i_{13}c+i_{23}d$ zusammenfällt, wo die reellen Elemente a, b, und a, b, c, d nur die Bedingung zu erfüllen haben, das für $n=2$ die Norm a^2+b^2, für $n=3$ die Norm $a^2+b^2+c^2+d^2$ nicht verschwinden darf. Um aber in dem gegenwärtigen Falle, wo $n \gtreqless 4$ ist, den Inbegriff der in der Bezeichnung $J\varLambda$ enthaltenen Ausdrücke aufzufassen, wird die Einführung einer Unterscheidung nothwendig.

Es möge ein Ausdruck, der mit 2^{n-1} ganz beliebigen reellen Grössen $\varphi_0, \varphi_{12}, \ldots$ und den 2^{n-1} eingeführten Symbolen gebildet ist,

(1) $$\varphi = \varphi_0 + k_1 k_2 \varphi_{12} + \ldots + k_1 k_2 k_3 k_4 \varphi_{1234} + \ldots,$$

ein unbeschränkter complexer Ausdruck der n-ten Ordnung genannt werden. Wenn dagegen mit einer von Null verschiedenen reellen Grösse λ_0 und $\frac{n(n-1)}{2}$ beliebigen reellen Grössen λ_{ab} nach der Vorschrift die Verbindungen $\lambda_{abcd}, \ldots$ hergestellt sind, und der Ausdruck

(2) $$\varLambda = \lambda_0 + k_1 k_2 \lambda_{12} + \ldots + k_1 k_2 k_3 k_4 \lambda_{1234} + \ldots$$

gebildet ist, wenn ferner J eines der folgenden Symbole bedeutet

(3) $$J = \pm 1,\ k_a k_b,\ k_a k_b k_c k_d,\ \ldots,$$

so soll der Ausdruck

(4) $$J\varLambda$$

ein regulärer complexer Ausdruck der n-ten Ordnung heissen. Auch bei den unbeschränkten complexen Ausdrücken wird in Betreff der Bezeichnung festgesetzt, dass, *wenn mit den Zeigern, die einer reellen Grösse zugehören, eine Vertauschung vorgenommen wird, die betreffende reelle Grösse die positive oder negative Einheit als Factor erhalten soll, je nachdem die Permutation zur ersten oder zweiten Classe gehört.* Weil die Anzahl der unabhängigen reellen Bestandtheile in dem unbeschränkten complexen Ausdruck der n-ten Ordnung gleich

$$2^{n-1},$$

in dem regulären complexen Ausdruck der n-ten Ordnung aber gleich

$$1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

ist, weil ferner diese Zahlen für $n=2$ und für $n=3$ übereinstimmen, für $n \gtreqless 4$ aber die erstere Zahl die grössere ist, so hat die getroffene Unterscheidung erst für $n \geqq 4$ eine Bedeutung, und zwar kann dann die Gesammtheit der regulären complexen Ausdrücke nur ein Theil der Gesammtheit der unbeschränkten complexen Ausdrücke sein.

Für die Rechnung mit *den unbeschränkten complexen Ausdrücken derselben Ordnung* ergeben sich nun die folgenden Regeln. Bei der Addition, respective Subtraction, werden die reellen Factoren der gleichen Symbole addirt, respective subtrahirt. Da die Subtraction auf die Addition zurückgeführt werden kann, so genügt es zu sagen, dass die Addition von zwei oder mehreren Ausdrücken der n-ten Ordnung einen Ausdruck der n-ten Ordnung liefert, und dass die Summanden beliebig vertauscht oder zusammengefasst werden dürfen. Nach den in Art. 3 und 4 für die Multiplication der Symbole entwickelten Regeln bringt die in einer bestimmten Reihenfolge auszuführende Multiplication von zwei oder mehreren Ausdrücken der n-ten Ordnung ebenfalls einen Ausdruck der n-ten Ordnung hervor. Die Anordnung der Factoren darf hierbei nicht geändert werden, dagegen ist jede beliebige Zusammenfassung mit Beobachtung der Anordnung gestattet, oder das associative Gesetz gültig. Ein reeller Factor darf von der Stelle, an der er sich befindet, an jede beliebige andere Stelle gerückt werden.

Jeder unbeschränkte complexe Ausdruck Φ gehört zu einer Gruppe von Ausdrücken, die aus dem gegebenen durch gewisse mit den Symbolen vorzunehmende Operationen erhalten werden. Eine in Art. 4 gebrauchte Operation besteht darin, ein einzelnes Primitivzeichen, z. B. k_a durch $-k_a$ zu ersetzen, und alle übrigen ungeändert zu lassen. Der auf diese Weise aus Φ entstehende Ausdruck ist nach der Analogie von Λ_1 mit Φ_a zu bezeichnen. Man gelangt aber zu einer anderen Darstellung, indem man die folgende Bemerkung benutzt. Es sei $a', b', c', \dots f'$ eine Gruppe von Zeigern von gerader Anzahl, mit deren Anwendung das Symbol

$$(5) \qquad -k_a k_{a'} k_{b'} k_{c'} \dots k_{f'} k_a$$

gebildet werde. Für dasselbe ergeben sich zwei verschiedene Bestimmungen, je nachdem die Zahl a unter den Zahlen $a', b', c', \dots f'$ enthalten ist oder nicht. Im ersten Falle darf man annehmen, dass $a' = a$ sei; dann ist nach den geltenden Regeln

$$k_{a'} k_{a'} = -1, \; k_{b'} k_{c'} \ldots k_{f'} k_{a'} = -k_{a'} k_{b'} k_{c'} \ldots k_{f'},$$

folglich wird (5) gleich

(6) $$-k_{a'} k_{b'} k_{c'} \ldots k_{f'}.$$

Im zweiten Falle hat man dagegen

$$k_a k_{a'} k_{b'} k_{c'} \ldots k_{f'} = + k_{a'} k_{b'} k_{c'} \ldots k_{f'} k_a,$$

und deshalb (5) gleich

(7) $$k_{a'} k_{b'} k_{c'} \ldots k_{f'}.$$

Wenn also aus einem gegebenen Symbol $k_{a'} k_{b'} k_{c'} \ldots k_{f'}$ das Symbol (5) abgeleitet wird, so erhält dasselbe den entgegengesetzten oder den gleichen Werth, je nachdem die Zahl a unter den Zahlen $a', b', c' \ldots f'$ vorkommt oder nicht. Dies ist aber gerade die Veränderung, welche mit den einzelnen in dem Ausdruck Φ auftretenden Symbolen vorgenommen werden soll, um Φ_a hervorzubringen. Wenn also das Primitivzeichen k_a nicht nur, wie bisher, in Verbindungen von gerader Anzahl, sondern auch isolirt angewendet wird, so ergiebt sich auf Grund der für die Primitivzeichen geltenden Regeln für den Ausdruck Φ_a die gesuchte Darstellung

(8) $$\Phi_a = -k_a \Phi k_a.$$

Es steht nichts im Wege, in Φ_a das Primitivzeichen k_b in $-k_b$ zu verwandeln, und so fortzufahren, indem immer neue Zeiger hinzugenommen werden, woraus die Gleichungen hervorgehen,

(9) $$\begin{cases} \Phi_{ab} = -k_a k_b \; \Phi k_a k_b \\ \Phi_{abc} = -k_a k_b k_c \Phi k_a k_b k_c \end{cases}$$

u. s. f.

Dieselben zeigen, dass in Φ_{ab} die Vertauschung der Zeiger a und b, in Φ_{abc} die Vertauschung der Zeiger a, b, c u. s. f. ohne Einfluss ist, und dass, wenn statt Φ ein Product von mehreren Factoren gesetzt wird, die folgenden Gleichungen gelten, *bei denen die Reihenfolge der Factoren auf beiden Seiten dieselbe ist*,

(10) $$\begin{cases} (\Phi \Psi \ldots)_a = \Phi_a \Psi_a \ldots \\ (\Phi \Psi \ldots)_{ab} = \Phi_{ab} \Psi_{ab} \ldots \end{cases}$$

u. s. f.

Es ist leicht einzusehen, dass, wenn für jedes Primitivzeichen das gleiche und entgegengesetzte substituirt wird, der Ausdruck Φ ungeändert bleibt, oder die Gleichung gilt

(9*) $$\Phi = -k_1 k_2 \dots k_n \, \Phi \, k_1 k_2 \dots k_n .$$

Aus derselben folgt weiter, dass wenn die n Primitivzeichen auf irgend eine Art in zwei Combinationen getheilt werden $a, b, .. d$ und $p, q, r, .. t$, die Gleichung besteht

(9**) $$\Phi_{ab..d} = \Phi_{pqr..t} .$$

Es können daher in der Gruppe von Ausdrücken, zu denen Φ gehört, nur so lange neue erhalten werden, als die Zahl der beigefügten Zeiger kleiner als die Hälfte der Zahl n oder ihr gleich ist; im letzten Falle werden immer zwei und zwei Individuen einander gleich. Die Anzahl der in dieser Gruppe vorhandenen Individuen ist deshalb stets gleich der Hälfte der Summe

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \dots + n + 1 ,$$

das ist, gleich 2^{n-1}.

Eine zweite mit dem Ausdruck Φ vorzunehmende Operation besteht darin, dass man für jedes Symbol die Reihenfolge der Primitivzeichen umkehrt, mithin $k_a k_b$ in $k_b k_a$, $k_a k_b k_c k_d$ in $k_d k_c k_a k_b$ verwandelt, u. s. f. Durch diese Operation, bei der die einzelnen Symbole mit der negativen Einheit multiplicirt werden oder ungeändert bleiben, je nachdem die Hälfte der Anzahl ihrer Zeiger ungerade oder gerade ist, *soll der Ausdruck Φ in den Ausdruck Φ' übergehen, welcher der zu Φ conjugirte heisse,*

(11) $$\Phi' = \varphi_0 + k_2 k_1 \varphi_{12} + \dots + k_4 k_3 k_2 k_1 \varphi_{1234} + \dots$$

Offenbar ist zu Φ' wieder der Ausdruck Φ conjugirt, die Beziehung eine gegenseitige. Wenn hier statt Φ ein Product von mehreren Factoren $\Phi \Psi ..$ gesetzt wird, so folgt aus den für die Primitivzeichen geltenden Regeln sogleich, dass *in dem Ausdruck, welcher zu dem Product $\Phi \Psi ..$ conjugirt ist, die Reihenfolge der Factoren die entgegengesetzte wird;* man hat demnach die Gleichung

(12) $$(\Phi \Psi \dots)' = \dots \Psi' \Phi' .$$

Bildet man aus dem unbeschränkten Ausdruck Φ und dem zu ihm conjugirten das Product

(13) $$\Phi' \Phi ,$$

dann lehrt (12), dass dasselbe zu seinem conjugirten Ausdruck wieder das Product $\Phi' \Phi$, das heisst, sich selbst hat. Das Product $\Phi' \Phi$ kann deshalb nur solche Symbole erhalten, die mit sich selbst conjugirt sind, und dies sind nach dem Obigen diejenigen, bei denen die Anzahl der Zeiger durch Vier aufgeht. Wird die Rechnung für die kleinste in Frage kommende Zahl $n=4$ ausgeführt, so findet sich das Ergebniss

$$(14)\quad \Phi' \Phi = \varphi_0^2 + \varphi_{12}^2 + \ldots + \varphi_{1234}^2 + k_1 k_2 k_3 k_4\, 2\,(\varphi_0 \varphi_{1234} - \varphi_{12}\varphi_{34} + \varphi_{13}\varphi_{24} - \varphi_{14}\varphi_{23}),$$

in welchem der Factor des Symbols $k_1 k_2 k_3 k_4$ nicht identisch verschwindet. Dies tritt aber sofort ein, sobald Φ die Beschaffenheit des in (2) definirten regulären Ausdrucks $\mathcal{A}$ erhält; denn dann ist, indem φ_0 von Null verschieden vorausgesetzt wird, nach (15) des Art. 1,

$$\varphi_{1234} = \frac{\varphi_{12}\varphi_{34} - \varphi_{13}\varphi_{24} + \varphi_{14}\varphi_{23}}{\varphi_0}.$$

Der Unterschied zwischen den unbeschränkten und den regulären complexen Ausdrücken wird also bei dem Product der conjugirten Ausdrücke schon für $n=4$ fühlbar.

Ich werde jetzt zeigen, *dass für den regulären Ausdruck $\mathcal{A}$ das Product $\mathcal{A}'\mathcal{A}$ gleich einer reellen von Null verschiedenen Grösse, nämlich der in* (2) *des Art.* 5 *definirten Norm $N(\mathcal{A})$ ist,* indem ich von der dortigen Gleichung (9) ausgehe,

$$(15)\qquad \mathcal{A} X = Y \mathcal{A}_1.$$

Hier ist zu beachten, dass nach der aufgestellten Definition der mit den reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gebildete Ausdruck X ein regulärer ist, und ebenso der mit den reellen Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots y_n$ gebildete Ausdruck Y. Was ferner ie Ableitung der mit $\mathcal{A}$ zusammengehörigen Ausdrücke $\mathcal{A}_a$, $\mathcal{A}'$ langt, so kann hier statt der für die unbeschränkten Ausdrücke angegebenen Aenderung der Symbole eine Aenderung der unabhängigen reellen Elemente angewendet werden. Es entsteht $\mathcal{A}_a$ aus $\mathcal{A}$, indem die von Null verschiedene reelle Grösse λ_0 ungeändert bleibt, und von den $\frac{n(n-1)}{2}$ reellen Grössen λ_{pq} diejenigen und nur diejenigen in $-\lambda_{pq}$ verwandelt werden, bei denen einer der Zeiger p oder q mit a zusammenfällt; desgleichen entsteht $\mathcal{A}'$ aus $\mathcal{A}$, indem λ_0 ungeändert bleibt, und für alle Paare von Zeigern λ_{pq} in $-\lambda_{pq}$ verwandelt wird. Aus diesen Gründen sind die mit dem regulären Ausdruck $\varDelta$ zusammengehörigen Ausdrücke $\varDelta_a$, $\varDelta_{ab}$, .., $\varDelta'$ ebenfalls regulär.

Für den regulären Ausdruck

$$X = x_1 + k_1 k_2 x_2 + \ldots + k_1 k_n x_n$$

ist

$$X' = x_1 + k_2 k_1 x_2 + \ldots + k_n k_1 x_n.$$

Da das Product $X' X$ kein Symbol mit vier Zeigern enthalten kann, so muss es sich auf seinen reellen Bestandtheil reduciren, die Summe der Quadrate $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, und man hat

$$(16) \qquad X' X = N(X) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Für den regulären Ausdruck

$$Y = y_1 + k_1 k_2 y_2 + \ldots + k_1 k_n y_n$$

gilt das entsprechende,

$$(17) \qquad Y' Y = N(Y) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2,$$

so dass die zu (15) gehörende Transformationsgleichung die Gestalt annimmt

$$(18) \qquad N(X) = N(Y).$$

Aus (15) folgt, indem von beiden Seiten der conjugirte Ausdruck genommen wird, nach (12),

$$(19) \qquad X' \varDelta' = \varDelta_1' Y',$$

mithin durch Multiplication

$$X' \varDelta' \varDelta X = \varDelta_1' Y' Y \varDelta_1,$$

und ferner

$$(X X') \varDelta' \varDelta X = X \varDelta_1' (Y' Y) \varDelta_1.$$

Der reelle von Null verschiedene Factor $Y' Y$ darf an eine beliebige Stelle gerückt werden, ebenso wie der demselben gleiche Factor $X X'$. Es ist daher auch gestattet, die beiden Seiten der Gleichung durch diesen Factor zu dividiren, und es kommt die Gleichung

$$(20) \qquad \varDelta' \varDelta X = X \varDelta_1' \varDelta_1.$$

Nachdem für X der vollständige Ausdruck substituirt ist, müssen wegen der unbeschränkten Veränderlichkeit von $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Factoren dieser Grössen auf beiden Seiten gleich sein. So entstehen die n Gleichungen

$$(21)\quad \begin{cases} A'A = A'_1 A_1 \\ A'A k_1 k_2 = k_1 k_2 A'_1 A_1 \\ \vdots \\ A'A k_1 k_n = k_1 k_n A'_1 A_1. \end{cases}$$

Nun ist nach (8) und (9)

$$A'_1 A_1 = -k_1 A' A k_1,$$

demnach folgen aus (21) die Gleichungen, in denen a nach der Reihe die Zahlen von 1 bis n durchläuft,

$$A' A = -k_a A' A k_a,$$

oder auch

$$(22)\quad A' A = A'_a A_a = (A' A)_a.$$

Durch Wiederholung desselben Verfahrens kann immer ein neuer Zeiger hinzugefügt werden, und man erhält für eine beliebige Combination von Zeigern $a, b, \ldots f$ die Gleichung

$$(23)\quad A' A = A'_{ab..f} A_{ab..f} = (A' A)_{ab..f}.$$

Das Product $A' A$ ist demnach gleich einem Ausdruck Φ, welcher die Eigenschaft hat, für jede Combination von Zeigern die Gleichung

$$(24)\quad \Phi = \Phi_{ab..f}$$

zu erfüllen. Ein unbeschränkter complexer Ausdruck von dieser Beschaffenheit muss sich aber auf seinen reellen Bestandtheil φ_0 reduciren. Denn bildet man für einen unbeschränkten Ausdruck die Summe $\frac{\Phi + \Phi_a}{2}$, so fallen alle Symbole fort, die den Zeiger a enthalten, und es bleiben nur die Glieder übrig, deren symbolische Factoren den Zeiger a nicht enthalten. Auf diese Weise lassen sich nach und nach die Zeiger 1, 2, 3, .. $(n-1)$ eliminiren. Weil aber der Zeiger n für sich allein nicht auftreten kann, insofern alle Symbole eine gerade Anzahl von Zeigern enthalten, so bleibt nach Vollendung dieser Operation nur der reelle Bestandtheil übrig, welcher in die reelle Einheit multiplicirt ist, und es besteht für denselben die Darstellung

$$(25)\quad \frac{\Phi + \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_{1, 2, \ldots (n-1)}}{2^{n-1}} = \varphi_0.$$

Vermöge derselben muss aber jeder Ausdruck, der die Bedingungen (24) erfüllt, reell sein. Das Product $A' A$ ist also, wie behauptet worden, seinem reellen Bestandtheil gleich, welcher die folgende Gestalt hat,

(26) $$A'A = N(A) = \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \ldots + \lambda_{1234}^2 + \cdots,$$

und gleichzeitig *die Norm der mit A zusammengehörigen Ausdrücke* A', A_a, A_{ab}, .. bildet. Auch der in (4) definirte reguläre Ausdruck JA hat dieselbe Norm. Denn wenn J' das zu J conjugirte Symbol bedeutet, so ist $A'J'$ zu JA conjugirt, ferner $J'J = 1$, und $A'J'JA = A'A$. Die Gesammtheit der regulären Ausdrücke, die aus A durch die erwähnten Operationen erhalten werden, die aus denselben reellen Elementen zusammengesetzt sind und dieselbe Norm haben, möge eine *Genossenschaft* genannt werden.

Mit Hülfe der so eben bewiesenen Grundeigenschaft der regulären Ausdrücke der n-ten Ordnung lässt sich aus der Gleichung (15) eine Darstellung der Verbindung X selbst ableiten. Indem auf beiden Seiten links mit A' multiplicirt wird, ergiebt sich

(27) $$N(A)\,X = A'\,Y A_1;$$

hier ist es gestattet, durch die reelle von Null verschiedene Norm $N(A)$ auf beiden Seiten zu dividiren, und dann die in X vereinigten Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, von einander getrennt, als Functionen der Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ auszudrücken. Die Coefficienten erscheinen hier als Brüche, deren gemeinsamer Nenner die Norm $N(A)$ ist, und deren Zähler ganz homogene Functionen des zweiten Grades von den Grössen $\lambda_0, \lambda_{ab}, \lambda_{abcd}, \ldots$ sind. Für $n = 3$ erhält man so die Gleichungen (25) in I, Art. 3.

7.

In Art. 5 ist gezeigt worden, dass, wenn $J = k_a k_b k_c \ldots k_f$ ist, die Einsetzung von JA für A in die dortige Gleichung (9) die Wirkung ausübt, dass in der zugehörigen Substitution die sämmtlichen Coefficienten der Vertikalreihen, deren Zeiger $a, b, c \ldots f$ sind, mit der negativen Einheit multiplicirt werden. Auch für die übrigen Individuen der *Genossenschaft*, zu der A gehört, kann eine entsprechende Beziehung nachgewiesen werden. Wenn p einen beliebigen Zeiger, q den Inbegriff der von p verschiedenen

Zeiger bedeutet, und wenn zwei neue Systeme von Veränderlichen durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} x_p = -u_p, \ x_q = u_q, \\ y_p = -z_p, \ y_q = z_q \end{cases}$$

eingeführt werden, so ist der Erfolg der Substitution in die Systeme (1) und (3) des Art. 5 derselbe, als ob in beiden x durch u, y durch z ersetzt wird, in (1) alle Grössen λ_{ab} mit der negativen Einheit multiplicirt werden, bei denen p mit einem der Zeiger übereinstimmt, in (3) alle Coefficienten der p ten Vertikalreihe und der p ten Horizontalreihe mit der negativen Einheit multiplicirt werden. Durch die für die λ_{ab} angegebene Operation verwandelt sich $\varDelta$ in $\varDelta_p$. Die Anwendung von $\varDelta$ in $\varDelta_p$ in der Gleichung

$$(2) \qquad \varDelta X = Y \varDelta_1$$

hat also den Effect, die Vorzeichen aller Coefficienten der p ten Horizontalreihe und der p ten Vertikalreihe der zugehörigen Substitution umzukehren. Bei der Anwendung von $\varDelta_{pq}$ erfolgt eine Umkehrung der Vorzeichen für die p te Vertikal- und Horizontalreihe so wie für die q te Vertikal- und Horizontalreihe u. s. f. Nun ist nach (9) des Art. 6

$$\varDelta_p = -k_p \varDelta k_p, \quad \varDelta_{pq} = -k_p k_q \varDelta k_p k_q.$$

Benutzt man daher ferner beispielsweise einen Ausdruck $J\varDelta_{pq}$, wo $J = k_a k_b k_c k_d k_q k_p$ sein möge, so kommt

$$J\varDelta_{pq} = -k_a k_b k_c k_d \varDelta k_p k_q,$$

und es leuchtet nach dem Obigen ein, dass in der zugehörigen Substitution die Umkehrung der Vorzeichen in den Vertikalreihen von den Zeigern a, b, c, d und in den Horizontalreihen von den Zeigern p, q geschieht.

Hiermit ist das allgemeine Resultat gefunden, dass, wenn statt $\varDelta$ ein Ausdruck genommen wird, der aus $\varDelta$ hervorgeht, indem links mit einer Anzahl von Primitivzeichen und rechts mit einer Anzahl von Primitivzeichen multiplicirt wird, wobei nur die Summe der beiden Anzahlen eine gerade Zahl sein muss, in der zugehörigen Substitution die Coefficienten aller Vertikalreihen umgekehrt werden, deren Zeiger durch die Zeiger der Primitivzeichen auf der linken,. und die Coefficienten aller Horizontalreihen um-

gekehrt werden, deren Zeiger durch die Zeiger der Primitivzeichen auf der rechten Seite bestimmt sind.

In dieser Weise ist die Wirkung der Multiplication mit Primitivzeichen auf ein System combinatorischer Operationen zurückgeführt, die mit den Coefficienten der zugehörigen Substitution vorgenommen werden. Die Abgeschlossenheit dieses Systems ist evident. Da die Coefficienten der a ten Vertikalreihe in ihrem gemeinsamen Zeiger a mit der Variable y_a, die Coefficienten der a ten Horizontalreihe in ihrem gemeinsamen Zeiger a mit der Variable x_a übereinstimmen, so kann man die durch Anwendung des Primitivzeichens k_a hervorgerufenen Operationen bis zu den genannten Variabeln zurückverfolgen, und darf sagen, dass dieses Zeichen zu den Variabeln x_a und y_a gehört, die den gleichen Zeiger tragen. Es ist vorhin bemerkt worden, dass in der Gruppe der Ausdrücke Λ, Λ_a, Λ_{ab}, .. die Anzahl 2^{n-1} Individuen enthalten ist, und dass das Symbol J die Anzahl 2^n von Werthen annimmt. Durch die bisher angewendeten Operationen erhält man daher 2^{2^n-1} Genossen.

Wofern in dem System (3) des Art. 5 die Variabeln $y_1, y_2, .. y_n$ als Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ dargestellt werden, so ergiebt sich bekanntlich das System

$$(3) \qquad \begin{cases} y_1 = \alpha_{11}\ x_1 + \alpha_{21}\ x_2 + \ldots + \alpha_{n1}\ x_n \\ y_2 = \alpha_{12}\ x_1 + \alpha_{22}\ x_2 + \ldots + \alpha_{n2}\ x_n \\ \vdots \\ y_n = \alpha_{1n}\ x_1 + \alpha_{2n}\ x_2 + \ldots + \alpha_{nn}\ x_n. \end{cases}$$

Dasselbe lässt sich aus dem ursprünglichen erzeugen, indem x mit y, und jede Vertikalreihe mit der gleichnamigen Horizontalreihe vertauscht wird. In gleicher Weise bleibt das System (1) des Art. 5 ungeändert, wenn x mit y vertauscht, und überall λ_{ab} in $\lambda_{ba} = -\lambda_{ab}$ verwandelt wird. Durch die letztgenannte Aenderung geht nun der Ausdruck Λ in den conjugirten Λ' über. Die Ersetzung von Λ durch Λ' in der Gleichung (2) bewirkt also, dass in der zugehörigen Substitution die Coefficienten jeder Vertikalreihe mit denen der gleichnamigen Horizontalreihe vertauscht werden. Es ist also auch die Operation, durch welche Λ' aus Λ erhalten wird, auf eine mit den Coefficienten der zugehörigen Substitution auszuführende combinatorische Operation reducirt. Durch die in Rede stehende Operation wird die Anzahl der Genossen des regulären Ausdrucks $\mathcal{A}$ verdoppelt, also auf die Zahl 2^{2n} erhöht. Weil aber zwei Genossen $\mathcal{A}$ und $-\mathcal{A}$ dieselbe Substitution hervorbringen, so ist die entsprechende Gesammtzahl der Substitutionen gleich 2^{2n-1}. Für $n=3$ entstehen hieraus die Zahlen, welche ich am Schlusse von I, Art. 3 für die Quaternionen angegeben habe. Dagegen stellt sich heraus, das für $n=2$ die durch $\mathcal{A}'$ angedeutete Operation mit der Operation $\mathcal{A}_1$ zusammenfällt, und daher keine neuen Genossen hervorbringt. Dass die Gesammtzahl der Genossen hier acht beträgt, ist daher unter dem Gesichtspunkt der Theorie der Summen von beliebig vielen Quadraten als Ausnahme von einer Regel zu betrachten, die mit den Quaternionen beginnt und bei den complexen Ausdrücken von höherer als der dritten Ordnung stets gültig bleibt.

8.

Die Gleichung (8) des Art. 5 bildet einen speciellen Fall einer allgemeinen Relation, die ich jetzt ableiten werde, um die zwischen den 2^{n-1} reellen Elementen $\lambda_0, \lambda_{ab} \lambda_{abcd}, \ldots$ vorhandene Symmetrie ins Licht zu setzen. Hierzu dient die Bemerkung, dass in der dortigen Gleichung (2 a), welche das Transformationsproblem der Quadratsummen ausdrückt, statt jedes Paares gleichnamiger Variabeln x_a und y_a ein Paar von neuen Variabeln $\mathfrak{x}_a$ und $\mathfrak{y}_a$ so eingeführt werden kann, dass die linke Seite der Gleichung in sich selbst übergeht. Nachdem jedem der n Zeiger a eine beliebige reelle von Null verschiedene Grösse r_a zugeordnet ist, setze man

$$(1)\qquad \begin{cases} x_a - y_a = (\mathfrak{x}_a - \mathfrak{y}_a)\, r_a \\ x_a + y_a = (\mathfrak{x}_a + \mathfrak{y}_a)\, \dfrac{1}{r_a}, \end{cases}$$

dann ist offenbar

$$(2)\qquad x_a^2 - y_a^2 = \mathfrak{x}_a^2 - \mathfrak{y}_a^2,$$

und gleichzeitig folgt aus (1) des Art. 5 das System von Gleichungen

$$
(3)\quad \begin{cases}
\lambda_0(\mathfrak{x}_1-\mathfrak{y}_1)=\lambda_{12}(\mathfrak{x}_2+\mathfrak{y}_2)\dfrac{1}{r_1 r_2}+\ldots+\lambda_{1n}\quad(\mathfrak{x}_n+\mathfrak{y}_n)\dfrac{1}{r_1 r_n}\\
\lambda_0(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{y}_2)=\lambda_{21}(\mathfrak{x}_1+\mathfrak{y}_1)\dfrac{1}{r_2 r_1}+\ldots+\lambda_{2n}\quad(\mathfrak{x}_n+\mathfrak{y}_n)\dfrac{1}{r_2 r_n}\\
\vdots\\
\lambda_0(\mathfrak{x}_n-\mathfrak{y}_n)=\lambda_{n1}(\mathfrak{x}_1+\mathfrak{y}_1)\dfrac{1}{r_n r_1}+\ldots+\lambda_{n,n-1}(\mathfrak{x}_n+\mathfrak{y}_n)\dfrac{1}{r_n r_{n-1}},
\end{cases}
$$

oder auch

$$
(4)\quad \begin{cases}
\lambda_0(\mathfrak{x}_1+\mathfrak{y}_1)+\dfrac{\lambda_{21}}{r_2 r_1}(\mathfrak{x}_2+\mathfrak{y}_2)+\ldots+\dfrac{\lambda_{n1}}{r_n r_1}(\mathfrak{x}_n+\mathfrak{y}_n)=2\lambda_0\mathfrak{y}_1\\
\dfrac{\lambda_{12}}{r_1 r_2}(\mathfrak{x}_1+\mathfrak{y}_1)+\lambda_0\ (\mathfrak{x}_2+\mathfrak{y}_2)+\ldots+\dfrac{\lambda_{n2}}{r_n r_2}(\mathfrak{x}_n+\mathfrak{y}_n)=2\lambda_0\mathfrak{y}_2\\
\vdots\\
\dfrac{\lambda_{1n}}{r_1 r_n}(\mathfrak{x}_1+\mathfrak{y}_1)+\dfrac{\lambda_{2n}}{r_2 r_n}(\mathfrak{x}_2+\mathfrak{y}_2)+\ldots+\lambda_0\ (\mathfrak{x}_n+\mathfrak{y}_n)=2\lambda_0\mathfrak{y}_n.
\end{cases}
$$

Dasselbe entsteht aus dem System (5) des Art. 5

$$
(5)\quad \begin{cases}
\lambda_0\ (x_1+y_1)+\lambda_{21}(x_2+y_2)+\ldots+\lambda_{n1}(x_n+y_n)=2\lambda_0 y_1\\
\lambda_{12}(x_1+y_1)+\lambda_0\ (x_2+y_2)+\ldots+\lambda_{n2}(x_n+y_n)=2\lambda_0 y_2\\
\vdots\\
\lambda_{1n}(x_1+y_1)+\lambda_{2n}(x_2+y_2)+\ldots+\lambda_0\ (x_n+y_n)=2\lambda_0 y_n
\end{cases}
$$

indem $\mathfrak{x}$ in x, $\mathfrak{y}$ in y, λ_{ab} in $\dfrac{\lambda_{ab}}{r_a r_b}$ verwandelt wird, und λ_0 ungeändert bleibt; es enthält daher (4) eine Substitution von der Determinante 1, welche die Gleichung

$$
(6)\qquad \mathfrak{x}_1^2-\mathfrak{y}_1^2+\mathfrak{x}_2^2-\mathfrak{y}_2^2+\ldots+\mathfrak{x}_n^2-\mathfrak{y}_n^2=0
$$

erfüllt.

Aus den Gleichungen (1) folgt

$$
(7)\quad \begin{cases}
2\mathfrak{x}_a=\left(r_a+\dfrac{1}{r_a}\right)x_a+\left(r_a-\dfrac{1}{r_a}\right)y_a\\
2\mathfrak{y}_a=\left(r_a-\dfrac{1}{r_a}\right)x_a+\left(r_a+\dfrac{1}{r_a}\right)y_a.
\end{cases}
$$

Es werde nun für jeden Zeiger a mit s_a eine numerisch über der Einheit liegende Grösse bezeichnet, und

$$(8)\qquad r_a = \frac{\sqrt{s_a+1}}{\sqrt{s_a-1}}$$

gesetzt, wo die Vorzeichen der Quadratwurzeln beliebig gewählt werden dürfen, so erhält man aus (7) die Gleichungen

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_a = \dfrac{s_a\,x_a+y_a}{\sqrt{s_a-1}\,\sqrt{s_a+1}} \\ \mathfrak{y}_a = \dfrac{x_a+s_a\,y_a}{\sqrt{s_a-1}\,\sqrt{s_a+1}}. \end{cases}$$

Gleichzeitig liefert das System (3) des Art. 5 die Gleichungen

$$(10)\qquad \begin{cases} x_1+s_1\,y_1 = (\alpha_{11}+s_1)y_1 + \alpha_{12}\,y_2+\ldots+\alpha_{1n}\,y_n \\ x_2+s_2\,y_2 = \alpha_{21}\,y_1+(\alpha_{22}+s_2)\,y_2+\ldots+\alpha_{2n}\,y_n \\ \vdots \\ x_n+s_n\,y_n = \alpha_{n1}\,y_1+\alpha_{n2}\,y_2+\ldots+(\alpha_{nn}+s_n)\,y_n. \end{cases}$$

Wenn hier die Ausdrücke von y_a aus (5) eingesetzt werden, so sind die Verbindungen $x_a+s_a\,y_a = \sqrt{s_a-1}\sqrt{s_a+1}\,\mathfrak{y}_a$ als Functionen der Verbindungen

$$x_b+y_b = \frac{\mathfrak{x}_b+\mathfrak{y}_b}{r_b} = \frac{\sqrt{s_b-1}}{\sqrt{s_b+1}}(\mathfrak{x}_b+\mathfrak{y}_b)$$

dargestellt, und diese Darstellung muss dieselbe sein, welche (4) liefert. Daraus folgt, dass das Product aus der Determinante

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+s_1, & \alpha_{12} & ,\ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & , \alpha_{22}+s_2, & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & , \alpha_{n2} & ,\ldots & \alpha_{nn}+s_n \end{vmatrix} = D(s_1,\, s_2,\ldots s_n)$$

und der Determinante

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} \lambda_0\,, & \lambda_{21}, & \ldots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12}, & \lambda_0\,, & \ldots & \lambda_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{1n}, & \lambda_{2n}, & \ldots & \lambda_0 \end{vmatrix} = \lambda_0^{n-2}\,N(\varDelta)$$

gleich dem Product aus dem Factor

$$(13)\qquad (s_1+1)\,(s_2+1)\;\ldots\;(s_n+1)$$

und der Determinante

$$
(14)\qquad \begin{vmatrix}
\lambda_0, & \dfrac{\sqrt{s_2-1}}{\sqrt{s_2+1}}\dfrac{\sqrt{s_1-1}}{\sqrt{s_1+1}}\lambda_{21}, & \ldots & \dfrac{\sqrt{s_n-1}}{\sqrt{s_n+1}}\dfrac{\sqrt{s_1-1}}{\sqrt{s_1+1}}\lambda_{n1} \\
\dfrac{\sqrt{s_1-1}}{\sqrt{s_1-1}}\dfrac{\sqrt{s_2-1}}{\sqrt{s_2+1}}\lambda_{12}, & \lambda_0, & \ldots & \dfrac{\sqrt{s_n-1}}{\sqrt{s_n+1}}\dfrac{\sqrt{s_2-1}}{\sqrt{s_2+1}}\lambda_{n2} \\
\vdots & & & \vdots \\
\dfrac{\sqrt{s_1+1}}{\sqrt{s_1+1}}\dfrac{\sqrt{s_n-1}}{\sqrt{s_n+1}}\lambda_{1n}, & \dfrac{\sqrt{s_2-1}}{\sqrt{s_2+1}}\dfrac{\sqrt{s_n-1}}{\sqrt{s_n+1}}\lambda_{2n}, & \ldots & \lambda_0
\end{vmatrix}
$$

ist. Da das System (14) auf die vorhin angegebene Weise aus (12) erhalten wird, so darf die Determinante von (14) als das Product von λ_0^{n-2} in die *Norm des regulären complexen Ausdrucks*

$$
(15)\qquad \varDelta\left(\frac{\sqrt{s_1-1}}{\sqrt{s_1+1}}, \frac{\sqrt{s_2-1}}{\sqrt{s_2+1}}, \ldots \frac{\sqrt{s_n-1}}{\sqrt{s_n+1}}\right) =
$$

$$
\lambda_0 + k_1\, k_2 \frac{\sqrt{s_1-1}}{\sqrt{s_1+1}}\frac{\sqrt{s_2-1}}{\sqrt{s_2+1}}\lambda_{12} + \ldots + k_1\, k_2\, k_3\, k_4 \frac{\sqrt{s_1-1}}{\sqrt{s_1+1}}\frac{\sqrt{s_2-1}}{\sqrt{s_2-1}}\frac{\sqrt{s_3-1}}{\sqrt{s_3+1}}\frac{\sqrt{s_4-1}}{\sqrt{s_4+1}}\lambda_{1234} + \ldots
$$

betrachtet werden, welcher aus $\varDelta$ hervorgeht, indem überall λ_0 ungeändert bleibt, und λ_{ab} durch $\dfrac{\sqrt{s_a-1}}{\sqrt{s_a+1}}\dfrac{\sqrt{s_b-1}}{\sqrt{s_b+1}}\lambda_{ab}$ ersetzt wird. Aus dem Bildungsgesetze der Verbindungen $\lambda_{abcd}, \ldots$ folgt, dass (15) auch dadurch aus $\varDelta$ entsteht, dass jedem Primitivzeichen k_a der Factor $\dfrac{\sqrt{s_a-1}}{\sqrt{s_a+1}}$ hinzugefügt wird. Die Norm von (15) hat somit den Ausdruck

$$
(15^*)\qquad N\left(\varDelta\left(\frac{\sqrt{s_1-1}}{\sqrt{s_1+1}}, \ldots \frac{\sqrt{s_n-1}}{\sqrt{s_n-1}}\right)\right)
$$

$$
= \lambda_0^2 + \frac{s_1-1}{s_1+1}\frac{s_2-1}{s_2+1}\lambda_{12}^2 + \ldots + \frac{s_1-1}{s_1+1}\frac{s_2-1}{s_2+1}\frac{s_3-1}{s_3+1}\frac{s_4-1}{s_4+1}\lambda_{1234} + \ldots,
$$

und man gelangt zu der Hauptrelation

$$(16)\qquad N(\varDelta)\,D(s_1,\, s_2,\, \ldots\, s_n)$$
$$= (s_1+1)(s_2+1)\ldots(s_n+1)\,N\left(\varDelta\left(\frac{\sqrt{s_1-1}}{\sqrt{s_1+1}},\ \ldots\ \frac{\sqrt{s_n-1}}{\sqrt{s_n+1}}\right)\right)$$

Insofern beide Seiten von (16) rationale ganze Functionen der n reellen veränderlichen Grössen $s_1,\, s_2,\, ..\, s_n$ sind, so gilt diese Relation für jedes Werthsystem dieser Grössen. Sie gilt offenbar auch für die Werthe $n=2$ und $n=3$, für welche sie in I nicht abgeleitet ist. Die Determinante $D\ (s_1,\, s_2,\, \ldots\, s_n)$ umfasst die Gesammtheit der Determinanten, welche in Art. 1 betrachtet worden sind. Für das Werthsystem $s_1=1,\ s_2=1,\, \ldots\, s_n=1$ geht dieselbe in die Determinante des dortigen Systems (3) über, die mit D bezeichnet worden ist. Nimmt man irgend eine gerade Zahl von Zeigern $a,\, b,\, c,\, ..\, f$, und multiplicirt in dem betreffenden System die Coefficienten der zugehörigen Vertikalreihen mit der negativen Einheit, so wird die Determinante durch $D\ (s_1,\, s_2,\, \ldots\, s_n)$ dargestellt, indem $s_a,\, s_b,\, s_c,\, ..\, s_f$ den Werth der negativen, alle übrigen s_g den Werth der positiven Einheit erhalten. Die rechte Seite von (16) nimmt für das Werthsystem $s_1=1$, $s_2=1,\, ..\, s_n=1$ den Werth $2^n\,\lambda_0^2$ an, so dass die Gleichung (8) des Art. 5 entsteht, von der ausgegangen wurde. Bei dem Werthsystem

$$s_a=-1,\ s_b=-1,\ ..\ s_f=-1,\ s_g=1$$

erhält auf der rechten Seite von (16) der Bestandtheil $\lambda^2_{ab\ldots f}$ den Factor 2^n, während alle übrigen Bestandtheile wenigstens einen Factor bekommen, der verschwindet; die rechte Seite stellt also den Werth $2^n\,\lambda^2_{ab\ldots f}$ dar. Mithin gelten für die sämmtlichen in Art. 1 verglichenen 2^{n-1} Determinanten die Gleichungen

$$(17)\qquad \begin{cases} N(\varDelta)\,D(\ \ 1,\ \ \ 1,\ \ \ 1,\ \ \ 1,\ \ldots\ 1) = 2^n\,\lambda_0^2 \\ N(\varDelta)\,D(-1,-1,\ \ \ 1,\ \ \ 1,\ \ldots\ 1) = 2^n\,\lambda_{12}^2 \\ N(\varDelta)\,D(-1,-1,-1,-1,\ \ldots\ 1) = 2^n\,\lambda_{1234}^2 \end{cases}$$

u. s. f.

Hiernach können die bezeichneten Determinanten niemals negative Werthe annehmen, sie sind beziehungsweise den Quadraten *der Grössen λ_0, λ_{12}, .. λ_{1234} proportional, und eine bestimmte Determinante verschwindet nur mit der ihr zugeordneten Grösse λ gleichzeitig.*

Die Addition der Ausdrücke, durch welche die 2^{n-1} Determinanten dargestellt sind, führt auf den in Art. 1 bewiesenen Satz zurück, vermittelst dessen die Auswahl einer Substitution ermöglicht ist, bei der die Determinante D nicht verschwindet. Sobald die Grössen s_1, s_2, ... s_n einander gleich genommen werden, geht $D(s_1, s_2, .. s_n)$ in einen vielfach behandelten Ausdruck über.

Durch Verbindung der Gleichungen (9*), (16), (16*) in Art. 1 mit (8) des Art. 5 erhält man die Darstellungen der Producte $\lambda_0 \lambda_{ab}$, $\lambda_0 \lambda_{abcd}$, ..

$$(18)\quad \begin{cases} N(\mathcal{A}) \dfrac{\partial D}{\partial \alpha_{ab}} & = 2^{n-1} \lambda_0 \lambda_{ab} \\ N(\mathcal{A}) \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 D}{\partial \alpha_{ab}\, \partial \alpha_{cd}} + \dfrac{\partial^2 D}{\partial \alpha_{ac}\, \partial \alpha_{db}} + \dfrac{\partial^2 D}{\partial \alpha_{ad}\, \partial \alpha_{bc}}\right) & = 2^{n-2} \lambda_0 \lambda_{abcd} \\ N(\mathcal{A}) \dfrac{1}{2\,.\,3}\left(\dfrac{\partial^3 D}{\partial \alpha_{ab}\, \partial \alpha_{cd}\, \partial \alpha_{ef}} + \ldots\right) & = 2^{n-3} \lambda_0 \lambda_{abcdef} \end{cases}$$

u. s. f., welche sich dem System (17) anschliessen.

9.

Unter den unbeschränkten complexen Ausdrücken sind die regulären nach Art. 6 dadurch ausgezeichnet, dass das Product eines solchen Ausdrucks in den zu ihm conjugirten gleich einer von Null verschiedenen reellen Grösse ist. Prüft man aber, ob auch umgekehrt jeder unbeschränkte complexe Ausdruck von der erwähnten Eigenschaft ein regulärer ist, so erweist sich dies durch Zuziehung der dortigen Gleichung (14) für die Werthe $n = 4$ und $n = 5$ als zutreffend, gilt jedoch nicht mehr für die höheren Werthe der Zahl n. Es müssen also die regulären complexen Ausdrücke einer beliebigen Ordnung noch andere Eigenschaften haben, durch welche sie sich von den nicht regulären unterscheiden. Solche Eigenschaften ergiebt die Beobachtung der in Art. 6 aus

(15) abgeleiteten Gleichung (27). Bei expliciter Darstellung von X und Y lauten diese Gleichungen, wie folgt,

$$(1)\quad \mathcal{A}(x_1+k_1 k_2 x_2+..+k_1 k_n x_n) = (y_1+k_1 k_2 y_2+\ldots+k_1 k_n y_n)\mathcal{A}_1,$$

$$(2)\quad N(\mathcal{A})(x_1+k_1 k_2 x_2+..+k_1 k_n x_n) = \mathcal{A}'(y_1+k_1 k_2 y_2+\ldots+k_1 k_n y_n)\mathcal{A}_1.$$

Da die reellen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ gleich den in (3) des Art. 5 angegebenen linearen Functionen der reellen Variabeln y_1, $y_2, \ldots y_n$ sind, so müssen in (2) nach Einsetzung der Ausdrücke in die linke Seite die Factoren von $y_1, y_2, .. y_n$ beziehungsweise auf beiden Seiten einander gleich sein. So entstehen n Gleichungen von der Gestalt

$$(3)\quad N(\mathcal{A})(\alpha_{1a}+k_1 k_2 \alpha_{2a}+k_1 k_3 \alpha_{3a}+..+k_1 k_n \alpha_{na}) = \mathcal{A}' k_1 k_a \mathcal{A}_1,$$

wo a die Zahlen von 1 bis n durchläuft. Hier enthält die linke Seite, weil $N(\mathcal{A})$ eine reelle von Null verschiedene Grösse ist, ein Aggregat aus einem reellen Bestandtheil und solchen Bestandtheilen, welche in die Symbole $k_1 k_2, k_1 k_3, \ldots k_1 k_n$ multiplicirt sind, während keines der übrigen Symbole auftritt. Nach (8) des Art. 6 ist

$$(4)\quad \mathcal{A}_1 = -k_1 \mathcal{A} k_1,$$

folglich

$$(5)\quad \mathcal{A}' k_1 k_a \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}' k_a \mathcal{A} k_1.$$

Es muss also das mit dem regulären Ausdruck $\mathcal{A}$ gebildete Product $\mathcal{A}' k_a \mathcal{A} k_1$ für jeden Zeiger a die Eigenschaft haben, gleich einem Aggregat zu sein, das ausser einem reellen Bestandtheil nur noch Bestandtheile enthält, die in die Symbole $k_1 k_2, k_1 k_3 \ldots k_1 k_n$ multiplicirt sind. Ich werde diese Eigenschaft noch in anderer Weise ausdrücken, vorher jedoch eine Bemerkung einschalten.

Die Darstellung der Gleichung (1) hat den Schein einer Unregelmässigkeit, insofern sie dem Zeiger 1 einen Vorzug giebt, während derselbe doch mit allen übrigen gleichberechtigt ist. Dieser Schein verschwindet, sobald für $\mathcal{A}_1$ die Darstellung (4) eingesetzt wird, und die in $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $y_1, y_2 \ldots y_n$ linearen Ausdrücke mit abgesonderten Primitivzeichen geschrieben werden, wodurch man erhält

$$(6)\qquad \mathcal{A}(k_1 x_1+k_2 x_2+\ldots+k_n x_n)\, k_1 = \quad (k_1 y_1+k_2 y_2+\ldots+k_n y_n)\, \mathcal{A} k_1,$$

$$(7)\qquad N(\mathcal{A})(k_1 x_1+k_2 x_2+\ldots+k_n x_n)\, k_1 = \mathcal{A}'(k_1 y_1+k_2 y_2+\ldots+k_n y_n)\, \mathcal{A} k_1,$$

$$(8)\qquad N(\mathcal{A})(k_1 \alpha_{1a}+k_2 \alpha_{2a}+\ldots+k_n \alpha_{na}) k_1 = \mathcal{A}' k_a \mathcal{A} k_1.$$

Offenbar darf hier das auf beiden Seiten zur Rechten erscheinende Primitivzeichen k_1, vermöge der Multiplication mit einem passenden Symbol von zwei Zeigern, durch jedes andere Primitivzeichen ersetzt werden. Die aus (8) gezogene Folgerung lässt sich dann so aussprechen, *dass die mit dem regulären Ausdruck $\mathcal{A}$ gebildete Verbindung $\mathcal{A}' k_a \mathcal{A}$ gleich einem in den Primitivzeichen linearen Ausdruck ist.* Wie leicht zu sehen, gilt dasselbe für jeden regulären Ausdruck $J\mathcal{A}$, in welchem J, wie früher, eines der Symbole

$$(9)\qquad \pm 1,\, k_a k_b,\, k_a k_b k_c k_d,\ldots$$

bedeutet.

Die beiden für jeden regulären Ausdruck $J\mathcal{A}$ gefundenen Eigenschaften sind nun *characteristische Eigenschaften der Regularität.* Es gilt nämlich der Satz:

Wenn für einen unbeschränkten complexen Ausdruck der n-ten Ordnung Φ das Product $\Phi'\Phi$ gleich einer von Null verschiedenen reellen Grösse, die Verbindung $\Phi' k_a \Phi$ für jeden Zeiger a gleich einem in den Primitivzeichen linearen Ausdruck ist, so ist Φ ein regulärer complexer Ausdruck.

Der gegebene Ausdruck Φ habe die Gestalt

$$(10)\qquad \Phi = \varphi_0+k_1 k_2 \varphi_{12}+\ldots+k_1 k_2 k_3 k_4 \varphi_{1234}+\ldots,$$

dann ist der reelle Bestandtheil des Products $\Phi'\Phi$ das Aggregat

$$(11)\qquad \varphi_0^2+\varphi_{12}^2+\ldots+\varphi_{1234}^2+\ldots,$$

welchem $\Phi'\Phi$ nach der Voraussetzung gleich sein soll. Weil nun diese Summe von reellen Quadraten ebenfalls nach der Voraussetzung einen von Null verschiedenen Werth hat, so können nicht alle reellen Bestandtheile $\varphi_0, \varphi_{12}, \ldots$ verschwinden, und es muss wenigstens einer von Null verschieden sein. Wenn φ_0 nicht gleich Null ist, so bedarf es für den Ausdruck Φ keiner Vorbereitung; wenn aber φ_0 gleich Null ist, und ein nicht verschwindender Bestandtheil φ_{abcdef} ausgewählt wird, so bilde ich das Product

$$(12)\qquad k_f k_e k_d k_c k_b k_a \Phi = \Psi = \psi_0+k_1 k_2 \psi_{12}+\ldots+k_1 k_2 k_3 k_4 \psi_{1234}+\ldots,$$

in welchem

(13) $$\psi_0 = \varphi_{abcdef}$$
ist, und daher nicht verschwindet. Für den Ausdruck Ψ gelten nun dieselben Voraussetzungen, die in Betreff des Ausdrucks Φ gemacht sind. Denn sei

(14) $$k_a k_b k_c k_d k_e k_f = J,\ k_f k_e k_d k_c k_b k_a = J',$$
so hat man

(14*) $$\Psi = J'\Phi,\ \Psi' = \Phi' J,$$
mithin
$$\Psi'\Psi = \Phi' J J' \Phi = \Phi'\Phi,$$
und, für jeden beliebigen Zeiger a_1,
$$\Psi' k_{a_1} \Psi = \Phi' J k_{a_1} J' \Phi = \pm \Phi' k_{a_1} \Phi,$$
woraus das Behauptete folgt. In dem Falle, dass φ_0 nicht verschwindet, sind statt der Gleichungen (12) und (14) die Gleichungen $\Phi = \Psi$, $J = 1$, $J' = 1$ anzuwenden.

Es werde nun mit n beliebigen reellen Veränderlichen z_1, $z_2, \ldots z_n$ der Ausdruck

(15) $$Z = z_1 + k_1 k_2 z_2 + \ldots + k_1 k_n z_n$$
aufgestellt, und dann das Product gebildet

(16) $$\Psi' Z \Psi_1.$$
Dasselbe ist nach den bestehenden Voraussetzungen gleich einem Aggregat, das einen reellen Bestandtheil und ausser diesem nur Bestandtheile enthält, welche in die Symbole $k_1 k_2, k_1 k_3, \ldots k_1 k_n$ multiplicirt sind; alle reellen Bestandtheile sind dabei ganze homogene Functionen des ersten Grades der Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots z_n$. Da $\Psi'\Psi$ einen reellen von Null verschiedenen Werth hat, so steht es frei, die bezeichneten reellen linearen Ausdrücke gleich dem Product von $\Psi'\Psi$ in ein System von Grössen $u_1, u_2, \ldots u_n$ zu setzen, welche auf diese Weise eindeutig bestimmt sind. Bei der Bezeichnung

(17) $$U = u_1 + k_1 k_2 u_2 + \ldots + k_1 k_n u_n$$
können die in Rede stehenden n Gleichungen in die eine zusammengefasst werden

(18) $$\Psi'\Psi U = \Psi' Z \Psi_1.$$
Aus derselben folgt, indem links mit Ψ multiplicirt wird, da $\Psi'\Psi$ reell und nicht gleich Null ist, die Gleichung

$$\Psi U = Z \Psi_1. \tag{19}$$

Weil die zu den beiden Seiten conjugirten Ausdrücke ebenfalls einander gleich sein müssen, so ist

$$U' \Psi' = \Psi'_1 Z'. \tag{20}$$

Dies giebt

$$U' \Psi' \Psi U = \Psi'_1 Z' Z \Psi_1. \tag{21}$$

Nun ist $\Psi' \Psi$ reell, und auch $Z' Z$ reell, mithin dürfen diese Producte an beliebige Stellen gerückt werden, und es kommt

$$\Psi' \Psi U' U = \Psi'_1 \Psi_1 Z' Z. \tag{22}$$

Weil aber $\Psi' \Psi = \Psi'_1 \Psi_1$ ist, so folgt, nach Weglassung dieses von Null verschiedenen Factors,

$$U' U = Z' Z, \tag{23}$$

oder

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 \tag{24}$$

Es sind also $u_1, u_2, \ldots u_n$ lineare Functionen der Variabeln z_1, $z_2, \ldots z_n$, welche die Transformationsgleichung (24) erfüllen.

Sobald jetzt in der Gleichung (19) die reellen Factoren der entsprechenden Symbole einander gleich gesetzt werden, entstehen in Folge der geltenden Multiplicationsregeln 2^{n-1} Gleichungen, die aus den Gleichungen (1), (2), (2*) des Art. 3 hervorgehen, indem u statt x, z statt y, ψ statt λ geschrieben wird, nämlich

$$\tag{25} \left\{ \begin{array}{l} \psi_0\, u_1 + \psi_{21} u_2 + \ldots + \psi_{n1} u_n = \psi_0\, z_1 + \psi_{12} z_2 + \ldots + \psi_{1n} z_n \\ \psi_{12} u_1 + \psi_0\, u_2 + \ldots + \psi_{n2} u_n = \psi_{21} z_1 + \psi_0\, z_2 + \ldots + \psi_{2n} z_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \psi_{1n} u_1 + \psi_{2n} u_2 + \ldots + \psi_0\, u_n = \psi_{n1} z_1 + \psi_{n2} z_2 + \ldots + \psi_0\, z_n, \end{array} \right.$$

$$\tag{26} \left\{ \begin{array}{l} \psi_{bc\ldots e} u_1 + \psi_{c\ldots e1} u_b + \ldots + \psi_{1b\ldots d} u_e + \Sigma_f \psi_{f1b\ldots e} u_f = \\ \psi_{bc\ldots e} z_1 + \psi_{c\ldots e1} z_b + \ldots + \psi_{1b\ldots d} z_e - \Sigma_f \psi_{f1b\ldots e} z_f, \end{array} \right.$$

$$\tag{26*} \left\{ \begin{array}{l} \psi_{1ab\ldots e} u_1 + \psi_{bc\ldots e} u_a + \ldots + \psi_{ab\ldots d} u_e + \Sigma_{f'} \psi_{f'ab\ldots e} u_{f'} = \\ -\psi_{1ab\ldots e} z_1 + \psi_{bc\ldots e} z_a + \ldots + \psi_{ab\ldots d} z_e - \Sigma_{f'} \psi_{f'ab\ldots e} z_{f'}. \end{array} \right.$$

Es kommt jetzt darauf an, nachzuweisen, dass der vorliegende Ausdruck Ψ mit demjenigen regulären Ausdruck Λ zusammenfällt, bei welchem die Elemente λ_0 und λ_{ab} durch die Gleichungen

$$\lambda_0 = \psi_0, \quad \lambda_{ab} = \psi_{ab} \tag{27}$$

bestimmt sind. Hier werden die Verbindungen $\lambda_{abcd}, \ldots$ nach den in Art. 1 angegebenen Regeln aus den Elementen $\lambda_0 = \psi_0$, $\lambda_{ab} = \psi_{ab}$ rational dargestellt, wobei nur das von Null verschiedene Element λ_0 als Nenner auftritt. Das System (25) darf demnach auch so bezeichnet werden

$$(28)\quad \begin{cases} \lambda_0\, u_1 + \lambda_{21}\, u_2 + \ldots + \lambda_{n1}\, u_n = \lambda_0\, z_1 + \lambda_{12}\, z_2 + \ldots + \lambda_{1n}\, z_n \\ \lambda_{12}\, u_1 + \lambda_0\, u_2 + \ldots + \lambda_{n2}\, u_n = \lambda_{21}\, z_1 + \lambda_0\, z_2 + \ldots + \lambda_{2n}\, z_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_{1n}\, u_1 + \lambda_{2n}\, u_2 + \ldots + \lambda_0\, u_n = \lambda_{n1}\, z_1 + \lambda_{n2}\, z_2 + \ldots + \lambda_0\, z_n, \end{cases}$$

und da λ_0 von Null verschieden ist, so können aus demselben die in Art. 2 entwickelten Folgerungen gezogen werden, welche von dem System (14) des Art. 1 zu den Gleichungen (2) und (2*) des Art. 3 führen. Indem u statt x, z statt y geschrieben wird, erhält man somit die aus (28) erschlossenen Gleichungen

$$(29)\quad \begin{cases} \lambda_{bc\ldots e}\, u_1 + \lambda_{c\ldots e1}\, u_b + \ldots + \lambda_{1b\ldots d}\, u_e + \Sigma_f\, \lambda_{f1b\ldots e}\, u_f = \\ \lambda_{bc\ldots e}\, z_1 + \lambda_{c\ldots e1}\, z_b + \ldots + \lambda_{1b\ldots d}\, z_e - \Sigma_f\, \lambda_{f1b\ldots e}\, z_f, \end{cases}$$

$$(29^*)\quad \begin{cases} \lambda_{1ab\ldots e}\, u_1 + \lambda_{bc\ldots e}\, u_a + \ldots + \lambda_{ab\ldots d}\, u_e + \Sigma_{f'}\, \lambda_{f'ab\ldots e}\, u_{f'} = \\ -\lambda_{1ab\ldots e}\, z_1 + \lambda_{bc\ldots e}\, z_a + \ldots + \lambda_{ab\ldots d}\, z_e - \Sigma_{f'}\, \lambda_{f'ab\ldots e}\, z_{f'}. \end{cases}$$

Es werde nun (29) von (26), (29*) von (26*) subtrahirt, so lässt sich das Ergebniss in die folgende Gleichung zusammenfassen, bei der $a, b, c, \ldots e$ eine beliebige Combination von Zeigern in ungerader Anzahl bedeutet, und f indefinite jeden in dieser Combination nicht enthaltenen Zeiger,

$$(30)\quad \begin{cases} (\psi_{bc\ldots e} - \lambda_{bc\ldots e})(u_a - z_a) + \ldots + (\psi_{ab\ldots d} - \lambda_{ab\ldots d})(u_e - z_e) \\ \qquad + \Sigma_f (\psi_{fab\ldots e} - \lambda_{fab\ldots e})(u_f + z_f) = 0. \end{cases}$$

In dem vorliegenden Aggregat sind die Differenzen $u_a - z_a, \ldots u_e - z_e$ in Factoren multiplicirt, bei denen von den Zeigern $a, b, \ldots e$ ein einzelner fehlt, dagegen die Summen $u_f + z_f$ in Factoren, bei denen zu den Zeigern $a, b, \ldots e$ der Zeiger f hinzukommt; die Anzahl der Zeiger beträgt also im zweiten Falle immer zwei Einheiten mehr als im ersten Falle. Die Summen $u_1 + z_1$, $u_2 + z_2$, $\ldots u_n + z_n$ dürfen aber als n unabhängige veränderliche Grössen betrachtet werden, da λ_0 eine von Null verschiedene Grösse ist, und deshalb die n Differenzen $u_1 - z_1$, $u_2 - z_2, \ldots u_n - z_n$ mittelst des Systems (28) durch die n Summen ausgedrückt werden können. Ich wende jetzt die Gleichung (30) zunächst auf die Voraussetzung an, dass die gewählte Combination von Zeigern nur aus dreien bestehe, a, b, c, und erhalte

$$(31)\quad (\psi_{bc}-\lambda_{bc})(u_a-z_a)+(\psi_{ca}-\lambda_{ca})(u_b-z_b)+(\psi_{ab}-\lambda_{ab})(u_c-z_c) \\ +\Sigma_f(\psi_{fabc}-\lambda_{fabc})(u_f+z_f)=0.$$

Hier sind die Differenzen $\psi_{bc}-\lambda_{bc}$, $\psi_{ca}-\lambda_{ca}$, $\psi_{ab}-\lambda_{ab}$ nach der in (27) getroffenen Annahme gleich Null, weshalb das Aggregat der ersten Glieder in (31) verschwindet. Da nun die Summen u_f+z_f unabhängig veränderliche Grössen sind, so kann die Gleichung nur dadurch erfüllt werden, dass die sämmtlichen Coefficienten verschwinden, oder die Gleichungen

$$(32)\qquad \psi_{fabc}-\lambda_{fabc}=0$$

erfüllt sind. Es fallen daher die Werthe der gleichnamigen ψ und λ für jedes System von vier Zeigern zusammen. Nachdem dies festgestellt ist, möge die Gleichung (30) auf irgend eine Combination von 5 Zeigern $abcde$ angewendet werden. Insofern die Factoren der Differenzen $u_a-z_a, \ldots u_e-z_e$ vier Zeiger haben, müssen sie nach dem so eben Bewiesenen gleich Null sein, es bleibt also wieder ein linearer Ausdruck der Summen u_f+z_f, dessen Coefficienten aus dem angeführten Grunde verschwinden, und für die Combinationen von 6 Zeigern die Gleichungen

$$(33)\qquad \psi_{abcdef}-\lambda_{abcdef}=0$$

liefern. Dies Verfahren kann so lange fortgesetzt werden, bis alle vorhandenen Combinationen von Zeigern erschöpft sind, und somit erwiesen ist, dass die Werthe der gleichnamigen ψ und λ für jede Combination von Zeigern einander gleich sind. Daraus folgt aber, dass die Ausdrücke Ψ und Λ identisch sind. Weil jedoch in Folge von (14*) $\Phi=J'\Psi$ ist, so hat man schliesslich die Gleichung

$$(34)\qquad \Phi=J\Lambda,$$

das heisst, *der gegebene Ausdruck Φ ist ein regulärer Ausdruck*, und das war zu beweisen.

Aus der Ableitung dieses Satzes ergiebt sich unmittelbar eine wichtige allgemeine Folgerung. Der zu der Bildung von Ψ ausgewählte reelle Bestandtheil des Ausdrucks Φ hat nur die eine Bedingung zu erfüllen, dass er von Null verschieden sei. Das in (14) definirte Symbol J richtet sich nach den Zeigern des ausgewählten reellen Bestandtheils, und ist für die Wahl von φ_0 durch die Einheit zu ersetzen. Es kann also der Ausdruck Ψ auf so viele Arten bestimmt werden, als der Ausdruck Φ von Null verschiedene reelle Bestandtheile hat; da nun für jeden Ausdruck Ψ die Gleichung $\Psi = \bar{\varDelta}$ nachgewiesen ist, so enthält die Gleichung (34) so viele Darstellungsweisen von Φ, als in diesem Ausdrucke von Null verschiedene reelle Bestandtheile vorhanden sind. In jedem Ausdruck $\varDelta$ werden die sämmtlichen reellen Elemente durch das System von $1 + \frac{n(n-1)}{2}$ unabhängigen Elementen λ_0 und λ_{ab} nach den angegebenen Bildungsgesetzen rational ausgedrückt. *Mithin giebt es bei jedem regulären complexen Ausdruck der n-ten Ordnung unter den 2^{n-1} reellen Elementen so viele Systeme von $1 + \frac{n(n-1)}{2}$ unabhängigen Elementen, durch welche alle reellen Elemente nach den beziehungsweise gleichen Bildungsgesetzen rational dargestellt werden können, als es in dem betreffenden Ausdruck von Null verschiedene reelle Elemente giebt.* Insofern die verschiedenen Systeme von $1 + \frac{n(n-1)}{2}$ reellen Elementen, durch welche alle Elemente eines regulären Ausdrucks nach den aufgestellten Bildungsgesetzen rational dargestellt werden, nur durch die Wahl des einen, den Nenner liefernden reellen Elements bestimmt sind, ist die früher gemachte Aussage begründet, dass die sämmtlichen 2^{n-1} in einem regulären Ausdruck auftretenden reellen Elemente gleichberechtigt sind.

10.

Nach der Auffindung der charakteristischen Eigenschaften der Regularität lässt sich der folgende Hauptsatz für die Multiplication der regulären Ausdrücke beweisen:

Das Product von zwei oder mehreren regulären complexen Ausdrücken der n-ten Ordnung ist immer gleich einem complexen Ausdruck der n-ten Ordnung, der ebenfalls regulär ist.

Wenn Φ und Ω zwei reguläre Ausdrücke der n-ten Ordnung sind, so ist nach (12) des Art. 6 zu dem Product $\Omega \Phi$ das $\Phi' \Omega'$ conjugirt. In dem Product der beiden conjugirten Ausdrücke

(1) $$\Phi' \Omega' \Omega \Phi$$

ist es erlaubt, zuerst das Product der beiden mittleren Factoren $\Omega' \Omega$ zusammenzufassen. Dasselbe hat nach der für Ω bestehenden Voraussetzung einen reellen von Null verschiedenen Werth, und darf deshalb an eine beliebige Stelle gerückt werden, so dass das Product

(2) $$\Phi' \Phi \Omega' \Omega$$

entsteht. Hier ist wegen der gleichen für Φ geltenden Voraussetzung das Product $\Phi' \Phi$ gleich einer reellen von Null verschiedenen Grösse, mithin auch das Product (2), und das ihm gleiche Product (1), womit die erste für das Product $\Omega \Phi$ nachzuweisende Bedingung erledigt ist. Die zweite Bedingung, dass das Product

(3) $$\Phi' \Omega' k_a \Omega \Phi$$

für jeden Zeiger a gleich einem in den Primitivzeichen linearen Ausdruck ist, muss deshalb erfüllt sein, weil nach der bestehenden Voraussetzung das Product $\Omega' k_a \Omega$ gleich einem mit den reellen Grössen $R_1, R_2, \ldots R_n$ gebildeten Ausdruck

$$R_1 k_1 + R_2 k_2 + \ldots + R_n k_n$$

ist, und weil der hieraus entspringende Ausdruck von (3)

$$\Psi' (R_1 k_1 + R_2 k_2 + \ldots + R_n k_n) \Psi$$

vermöge der für Φ bestehenden Annahme ebenfalls gleich einem in den Primitivzeichen linearen Ausdruck ist. Mithin ist das Product $\Omega \Phi$, wie behauptet worden, ein regulärer complexer Ausdruck der n-ten Ordnung, und dieselbe Betrachtung kann auf ein Product von mehreren regulären Ausdrücken der n-ten Ordnung ausgedehnt werden. Zugleich ergiebt die Beweisführung den Satz, *dass die Norm des Products von beliebig vielen in einer gewissen Reihenfolge genommenen regulären complexen Ausdrücken der n-ten Ordnung gleich dem Product der Normen ist.*

Was die Addition der regulären complexen Ausdrücke anlangt, so erkennt man leicht, dass die Summe von zwei solchen Ausdrücken nur unter gewissen Bedingungen wieder einen regulären Ausdruck hervorbringt, und zwar lassen sich diese Bedingungen vermittelst der charakteristischen Eigenschaften der Regularität einfach aussprechen. Wie in Art. 6 hervorgehoben, ist der mit den reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gebildete Ausdruck

$$(3) \qquad X = x_1 + k_1 k_2 x_2 + \ldots + k_1 k_n x_n,$$

so wie der mit den reellen Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots y_n$ gebildete Ausdruck

$$(4) \qquad Y = y_1 + k_1 k_2 y_2 + \ldots + k_1 k_n y_n$$

regulär. Daher hat man in der dort mit (15) bezeichneten Gleichung

$$(5) \qquad \varDelta X = Y \varDelta_1$$

auf jeder Seite ein Product von zwei regulären Ausdrücken, mithin nach dem so eben bewiesenen Satze selbst einen regulären Ausdruck. Die reellen Bestandtheile von $\varDelta X$ sind respective auf der linken, diejenigen von $Y \varDelta_1$ auf der rechten Seite der Gleichungen (1), (2), (2*) in Art. 3 dargestellt. Es können deshalb die ersteren durch ein System von unabhängigen Bestandtheilen, deren Anzahl $1 + \frac{n(n-1)}{2}$, rational ausgedrückt werden, desgleichen die letzteren. Ferner gilt der Satz, dass das Aggregat der Quadrate der 2^{n-1} reellen Bestandtheile auf der Linken gleich der Norm von $\varDelta X$, das auf der Rechten gleich der Norm von $Y \varDelta_1$ ist; diese Normen sind einander gleich und liefern die Gleichung

$$(6) \qquad N(\varDelta)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = N(\varDelta)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2).$$

In der obigen Gleichung (5) möge $\varDelta$ die Bedeutung eines beliebigen regulären Ausdrucks erhalten; dann stimmt ihr Inhalt mit dem der Gleichung (15) des Art. 5 überein, und sie repräsentirt die allgemeinste Transformation einer Summe von n Quadraten in sich selbst mit der Substitutionsdeterminante 1. Für die Systeme von Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ und $z_1, z_2, \ldots z_n$ werde eine ebensolche Transformation mit Hülfe eines beliebigen regulären Ausdrucks M und des Ausdrucks

$$(7) \qquad Z = z_1 + k_1 k_2 z_2 + \ldots + k_1 k_n z_n$$

durch die Gleichung

$$(8) \qquad M Y = Z M_1$$

dargestellt. Um die linearen Substitutionen, durch welche die x_a

von den y_b, die y_b von den z_c abhängen, zusammenzusetzen, multiplicire man die beiden Seiten der Gleichung (5) links mit M, die beiden Seiten der Gleichung (8) rechts mit $\varLambda_1$, dann folgt vermöge des geltenden associativen Gesetzes die Gleichung

$$(9) \qquad M \varLambda X = Z M_1 \varLambda_1.$$

Weil $\varLambda$ und M reguläre complexe Ausdrücke sind, so ist das Product $M\varLambda$ ebenfalls ein regulärer complexer Ausdruck, und seine Norm $N(M\varLambda)$ gleich dem Product der beiden von Null verschiedenen Normen $N(M)N(\varLambda)$.

Demnach wird die lineare Substitution, die aus den beiden gegebenen durch die in der vorgeschriebenen Reihenfolge auszuführende Substitution hervorgeht, durch die Gleichung (9) repräsentirt, welche mit dem in der entsprechenden Reihenfolge genommenen Product $M\varLambda$ gebildet ist. Das gleiche Verfahren darf beliebig oft wiederholt werden, mithin ist die successive Zusammensetzung der betreffenden Substitutionen auf die in der entsprechenden Reihenfolge vorzunehmende Multiplication der zugeordneten regulären complexen Ausdrücke zurückgeführt.

Ueber die Eigenschaften der Substitutionen, deren Coefficienten rationale Zahlen sind, können hier nur wenige Bemerkungen hinzugefügt werden, nachdem diese Substitutionen in I für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ ausführlich erörtert sind. Ein Kenner wird leicht unterscheiden, bis wie weit die bei den ganzzahligen Quaternionen zur Anwendung gebrachten Principien eine unmittelbare Ausdehnung gestatten, und wo neue Principien erforderlich sind. Sobald die Substitutionscoefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{nn}$ rationale Zahlen sind, so werden die in (9*), (16), (16*) von Art. 1 definirten Verbindungen $\frac{\lambda_{ab}}{\lambda_0}$, $\frac{\lambda_{abcd}}{\lambda_0}$, u. s. f. ebenfalls rationale Zahlen. Für diese ist der kleinste gemeinsame Nenner aufzusuchen, mittelst dessen sie als ganzzahlige Brüche dargestellt werden können. Wird die betreffende positiv oder negativ zu nehmende Zahl gleich λ_0 gesetzt, so sind $\lambda_{ab}, \lambda_{abcd}, \ldots$ bestimmte ganze Zahlen. Demnach gehört zu jeder Substitution mit rationalen Coefficienten ein bis auf den Factor ± 1 bestimmter *ganzzahliger regulärer complexer Ausdruck der n-ten Ordnung*

$$\pm \mathsf{A} = \pm (\lambda_0 + k_1 k_2 \lambda_{12} + \ldots + k_1 k_2 k_3 k_4 \lambda_{1234} + \ldots),$$

dessen Norm

$$N(\mathsf{A}) = \mathsf{A}' \mathsf{A}$$

gleich einer positiven ganzen Zahl ist.

Es mögen jetzt nur diejenigen ganzzahligen regulären complexen Ausdrücke aufgesucht werden, deren Norm gleich Eins oder Zwei ist. Die zuerst genannte Forderung

$$(10) \qquad N(\mathsf{A}) = \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \ldots + \lambda_{1234}^2 + \ldots = 1$$

kann nur erfüllt werden, indem ein Element gleich ± 1 ist, alle übrigen gleich Null sind. Dadurch ergiebt sich für A einer der 2^n Ausdrücke

$$(11) \qquad \pm 1,\ k_a k_b,\ k_a k_b k_c k_d,\ \ldots$$

Dies sind die in Art. 4 eingeführten, später meistens mit J bezeichneten Symbole. Wegen ihrer gegenwärtig hervortretenden Beziehung zu der Gleichung (10) sind sie als *die Einheiten des Systems der complexen Ausdrücke der n-ten Ordnung* zu bezeichnen. Der zweiten Forderung

$$(12) \qquad N(\mathsf{A}) = \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \ldots + \lambda_{1234}^2 + \ldots = 2$$

wird nur genügt, wofern irgend zwei Elemente gleich ± 1, alle übrigen gleich Null sind. Mit Hülfe von zwei beliebigen Einheiten J und E lassen sich die sämmtlichen betreffenden Ausdrücke so darstellen

$$(13) \qquad J(1+E).$$

Damit aber dieser Ausdruck regulär sei, sind noch die Bedingungen zu erfüllen, dass, wenn E' die zu E conjugirte Einheit ist, das Product $(1+E)(1+E')$ reell und von Null verschieden, ferner das Product $(1+E)\,k_a\,(1+E')$ für jeden Zeiger a in den Primitivzeichen linear sei, und diesen Forderungen wird dadurch und nur dadurch genügt, dass E eine Einheit mit zwei Zeigern $k_p k_q$ ist. Demnach repräsentirt

$$(14) \qquad J(1+k_p k_q)$$

alle regulären Ausdrücke A, welche die Gleichung (12) befriedigen; ihre Anzahl beträgt $2^{n-1} n(n-1)$, wie leicht zu sehen ist.

In Art. 7 sind die Veränderungen zusammengestellt, welche in der zu einem regulären Ausdruck A gehörenden Substitution hervorgerufen werden, wofern A links oder rechts mit Primitivzeichen multiplicirt oder in A' verwandelt wird. Diese Veränderungen setzen sich aus dem Negativnehmen einer Vertikalreihe, dem Negativnehmen einer Horizontalreihe, und dem Vertauschen der gleichnamigen Horizontal- und Vertikalreihen zusammen. Es giebt aber noch andere rein combinatorische Operationen, bei welchen eine Substitution die Eigenschaft, eine Quadratsumme in sich selbst zu transformiren, und die Determinante 1 zu haben, beibehält. Eine solche besteht darin, mit den Vertikalreihen eine beliebige Vertauschung vorzunehmen und, je nachdem die Permutation zur ersten oder zweiten Classe gehört, keine oder eine Vertikalreihe negativ zu nehmen; eine zweite besteht darin, mit den Horizontalreihen entsprechend zu verfahren. Diese beiden Arten der Operation werden aber durch Multiplication mit den Ausdrücken (14) erschöpfend dargestellt. Denn setzt man in der Gleichung (8) den Ausdruck M gleich $1+k_p\,k_q$, und nimmt der Kürze wegen an, dass weder p noch q gleich 1 sei, so ergiebt sich

$$(15)\qquad \begin{aligned}&(1+k_p\,k_q)\,(y_1+k_1\,k_2\,y_2+\ldots+k_1\,k_n\,y_n)\\ &=(z_1+k_1\,k_2\,z_2+\ldots+k_1\,k_n\,z_n)\,(1+k_p\,k_q)\,.\end{aligned}$$

Sobald ein Zeiger a von p und q verschieden ist, hat man

$$(1+k_p\,k_q)\,k_1\,k_a=k_1\,k_a\,(1+k_p\,k_q)\,;$$

ferner ist

$$\begin{aligned}(1+k_p\,k_q)\,k_1\,k_p&=k_1\,k_q\,(1+k_p\,k_q),\\ (1+k_p\,k_q)\,k_1\,k_q&=-k_1\,k_p\,(1+k_p\,k_q).\end{aligned}$$

Demnach vertritt (15) das System von Gleichungen

$$(16)\qquad y_a=z_a,\ y_p=z_q,\ y_q=-z_p.$$

Wenn aber zu der Gleichung (5) die Substitution

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned}x_1&=\alpha_{11}\,y_1+\alpha_{12}\,y_2+\ldots+\alpha_{1n}\,y_n\\ x_2&=\alpha_{21}\,y_1+\alpha_{22}\,y_2+\ldots+\alpha_{2n}\,y_n\\ &\ \vdots\\ x_n&=\alpha_{n1}\,y_1+\alpha_{n2}\,y_2+\ldots+\alpha_{nn}\,y_n\end{aligned}\right.$$

gehört, so bringt die Einsetzung von (16) das folgende System hervor

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned}x_1&=\alpha_{11}\,z_1+\ldots-\alpha_{1q}\,z_p+\ldots+\alpha_{1p}\,z_q+\ldots+\alpha_{1n}\,z_n\\ x_2&=\alpha_{21}\,z_1+\ldots-\alpha_{2q}\,z_p+\ldots+\alpha_{2p}\,z_q+\ldots+\alpha_{2n}\,z_n\\ &\ \vdots\\ x_n&=\alpha_{n1}\,z_1+\ldots-\alpha_{nq}\,z_p+\ldots+\alpha_{np}\,z_q+\ldots+\alpha_{nn}\,z_n.\end{aligned}\right.$$

Die Coefficienten desselben werden aus den Coefficienten von (17) erhalten, indem die Coefficienten der q-ten Vertikalreihe negativ genommen und hierauf mit denen der p-ten Vertikalreihe vertauscht werden. Es gehört aber (18) zu der Gleichung (9) für die Annahme

$$M = 1 + k_p k_q, \tag{8*}$$

und daher entspricht die mit der p-ten und q-ten Vertikalreihe der Substitution vorgenommene Aenderung einer auf der linken Seite des Ausdrucks $\varDelta$ ausgeführten Multiplication mit dem Factor $(1+k_p k_q)$. Jede beliebige in der angegebenen Art auszuführende Permutation der Vertikalreihen lässt sich aber auf eine Reihe von nach einander vorzunehmenden derartigen Vertauschungen je zweier Vertikalreihen reduciren. Mithin gehört die zuletzt resultirende Substitution zu dem Ergebniss einer Multiplication, bei der dem Ausdruck $\varDelta$ von der rechten zur linken Hand fortschreitend die correspondirenden Factoren von der Gestalt (8*) hinzugefügt werden. In gleicher Weise erkennt man, dass eine mit den Horizontalreihen der Substitution (17) vorzunehmende beliebige Permutation dargestellt wird, indem zu dem Ausdruck $\varDelta$, von der linken zur rechten Hand fortschreitend, die correspondirenden Factoren von der Gestalt (8*) hinzugefügt werden.

Die so eben nachgewiesene Wirkung der Factoren (8*) oder (14) besteht auch für die Zahlen $n=2$ und $n=3$. Für $n=2$ gehen die Ausdrücke (14) in die mit den vier Einheiten multiplicirte complexe Primzahl $1+i$ über, für $n=3$ in die 24 Primquaternionen, welche in I, Art. 6, (18) angegeben sind. Die den letzteren entsprechenden Substitutionen sind in I, Art. 8, (5 a), (5 b), (5 c) zusammengestellt.

Zweite Abtheilung.

Anwendung der Theorie auf das Problem des Tetraeders von grösstem Volumen bei gegebenem Inhalt der Seitenflächen, und auf die von Borchardt herrührende Ausdehnung des Problems für eine Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen.

11.

Borchardt hat in der Untersuchung: Bestimmung des Tetraeders von grösstem Volumen bei gegebenem Inhalt seiner vier Seitenflächen, aus den Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1865, und in der zweiten Untersuchung über die entsprechende verallgemeinerte Aufgabe des Maximums, aus den Abhandlungen des folgenden Jahres, die früheren den Gegenstand betreffenden Arbeiten sorgfältig angeführt. Auf denselben Gegenstand bezieht sich die Mittheilung des Herrn Kronecker über die algebraische Theorie der quadratischen Formen, aus dem Monatsbericht der Berliner Akademie vom 24. Juni 1872. Um den Zusammenhang des Maximumproblems mit der Theorie der Summen von Quadraten zu entwickeln, möchte ich zu der Behandlung des Problems einige Bemerkungen voranschicken, und namentlich eine gewisse den Lösungen anhaftende Symmetrie hervorheben.

Man kann die Bestimmungsstücke der Aufgabe für das Tetraeder so einrichten, dass, nachdem die Ecken mit (0), (1), (2), (3), die Kanten durch die Verbindungen der Ziffern der Ecken bezeichnet sind, die Quadrate der Längen der Kanten (01), (02), (03), (23), (31), (12) respective die folgenden Ausdrücke erhalten,

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} a_{11}\quad , & a_{22}\quad , & a_{33}, \\ a_{22}+a_{33}-2a_{23}, & a_{33}+a_{11}-2a_{31}, & a_{11}+a_{22}-2a_{12}. \end{array}$$

Dann stellt bekanntlich die wesentlich positive quadratische Form der drei Veränderlichen ξ_1, ξ_2, ξ_3,

$$(2)\quad f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = a_{11}\xi_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + 2a_{23}\xi_2\xi_3 + 2a_{31}\xi_3\xi_1 + 2a_{12}\xi_1\xi_2$$

das Quadrat der Entfernung zwischen der Ecke (0) und einem Punkte dar, dessen Coordinaten

$$\sqrt{a_{11}}\,\xi_1,\ \sqrt{a_{22}}\,\xi_2,\ \sqrt{a_{33}}\,\xi_3$$

die Ecke (0) zum Anfangspunkt haben, und auf den drei von hier ausgehenden Kanten des Tetraeders gemessen werden. Ferner werden bei Benutzung der adjungirten Form

$$(3)\quad F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = A_{11}\mathfrak{x}_1^2 + A_{22}\mathfrak{x}_2^2 + A_{33}\mathfrak{x}_3^2 + 2A_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 2A_{31}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + 2A_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$$

die vierfachen Quadrate des Inhalts der in (0) zusammenstossenden Seitenflächen respective durch

$$(4)\qquad A_{11},\ A_{22},\ A_{33}$$

ausgedrückt, das vierfache Quadrat des Inhalts der vierten Seitenfläche durch

$$(5)\qquad F(1, 1, 1) = A_{11} + A_{22} + A_{33} + 2A_{23} + 2A_{31} + 2A_{12},$$

während das Quadrat des sechsfachen Volumens des Tetraeders gleich der Determinante Δ der Form (2) ist. Bei der von Borchardt erörterten Ausdehnung der Aufgabe auf eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen möge nach der üblichen Redeweise dem Werthsystem $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ ein beweglicher Punkt der Mannigfaltigkeit entsprechen, dem Werthsystem $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \ldots \xi_n = 0$ der Punkt (0), dem Werthsystem $\xi_1 = 1, \xi_2 = 0, \ldots \xi_n = 0$ der Punkt (1), u. s. f. Gleichzeitig kommt an die Stelle von (2) eine wesentlich positive quadratische Form der n Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$,

$$(6)\ f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = a_{11}\xi_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + \ldots + a_{nn}\xi_n^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + \ldots + 2a_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n,$$

welche das Quadrat der Entfernung zwischen dem Punkte (0) und dem beweglichen Punkte der Mannigfaltigkeit ausdrückt. Zu derselben gehört die adjungirte Form

$$(7)\qquad F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n) = A_{11}\mathfrak{x}_1^2 + A_{22}\mathfrak{x}_2^2 + \ldots + A_{nn}\mathfrak{x}_n^2 + 2A_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 + \ldots,$$

und die Determinante $\mathcal{A}$. Alsdann besteht das zu lösende Problem, gemäss der von Herrn Kronecker an der erwähnten Stelle gewählten Formulirung darin, die Coefficienten der Form $f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ so zu bestimmen, dass die Determinante Δ ein Maximum wird, während die $(n+1)$ Grössen

$$(8)\qquad A_{11}, A_{22}, \ldots A_{nn}, F(1, 1, \ldots 1)$$

vorgeschriebenen Werthen gleich werden, welche vermöge einer Eigenschaft der wesentlich positiven Form (7) die Bedingung erfüllen müssen, dass $\sqrt{F(1, 1, \ldots 1)}$ kleiner ist als der absolute Werth der Summe $\sqrt{A_{11}} + \sqrt{A_{22}} + \ldots \sqrt{A_{nn}}$.

Wenn man bei der quadratischen Form (2) die Verbindung der Variabeln

$$(9)\qquad \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = -\xi_0$$

einführt, und ihr die Gestalt giebt,

$$(10)\qquad \begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = & -a_{11}\xi_0\xi_1 - a_{22}\xi_0\xi_2 - \ldots - a_{nn}\xi_0\xi_n \\ & -(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})\xi_1\xi_2 - \ldots - (a_{11} - 2a_{1n} + a_{nn})\xi_1\xi_n \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & -(a_{n-1,n-1} - 2a_{n-1,n} + a_{nn})\xi_{n-1}\xi_n, \end{aligned}$$

so entsteht für $n = 3$ der in Gauss Werken, II, p. 308 aus dem Nachlasse mitgetheilte Ausdruck des Quadrats der Entfernung eines beweglichen Punktes von einem festen Punkte. Für einen beliebigen Werth von n wird (10) gleich der mit der negativen Einheit multiplicirten Form f auf p. 126 der angeführten zweiten Untersuchung Borchardt's. Wie leicht zu sehen, verwandelt sich (10) in den Ausdruck des Quadrats der Entfernung desselben beweglichen Punktes von einem der anderen festen Punkte, etwa dem Punkte (1), wofern statt der Variabeln respective neue Variabeln $(\xi_0), (\xi_1), \ldots (\xi_n)$ substituirt werden, die mit den früheren durch die folgenden Gleichungen verbunden sind

$$(\xi_0) = 1 + \xi_0,\ (\xi_1) = -1 + \xi_1,\ (\xi_2) = \xi_2, \ldots (\xi_n) = \xi_n.$$

Statt der Forderung, Δ zu einem Maximum zu machen, ist es gestattet, die gleiche Forderung für Δ^{n-1}, die Determinante von (7), aufzustellen, und die Coefficienten dieser adjungirten

Form als die Veränderlichen des Maximumproblems zu betrachten. Demnach ist die vollständige Variation

$$(11) \qquad \delta(\varDelta^{n-1}) = a_{11}\varDelta^{n-2}\,\delta A_{11} + \ldots + a_{nn}\varDelta^{n-2}\,\delta A_{nn} + 2a_{12}\varDelta^{n-2}\,\delta A_{12} + \ldots + 2a_{n-1,\,n}\varDelta^{n-2}\,\delta A_{n-1,\,n}$$

zum Verschwinden zu bringen, während die Bedingungen

$$(12) \qquad \begin{gathered} \delta A_{11} = 0,\ \delta A_{22} = 0,\ \ldots\ \delta A_{nn} = 0, \\ \delta F(1, 1, \ldots 1) = 0 \end{gathered}$$

erfüllt sind. Die Methode von Lagrange zeigt aber sofort, dass nach Einführung einer zu bestimmenden Grösse v die $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen

$$(13) \qquad a_{12} = \ldots = a_{n-1,\,n} = v$$

befriedigt werden müssen. Es genügen also dem gestellten Problem nur solche wesentlich positive quadratische Formen, die aus (6) durch die Gleichungen (13) hervorgehen, und denen man die folgende Gestalt geben kann:

$$(14)\ f(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) = (a_{11} - v)\xi_1^2 + \ldots + (a_{nn} - v)\xi_n^2 + v(\xi_1 + \xi_2 + \ldots \xi_n)^2.$$

Wie Borchardt ausgesprochen hat, ist es unmöglich, dass unter den $(n+1)$ Grössen

$$(15) \qquad a_{11} - v = v_1,\ a_{22} - v = v_2,\ \ldots\ a_{nn} - v = v_n,\ v$$

irgend zwei negativ seien oder verschwinden. Denn durch Addition der sämmtlichen Paare enstehen die Verbindungen

$$(16) \qquad \begin{cases} a_{11} = v + v_1,\ a_{22} = v + v_2,\ \ldots \qquad a_{nn} = v + v_n, \\ a_{11} - 2a_{12} + a_{22} = v_1 + v_2,\ \ldots\ a_{n-1,\,n-1} - 2a_{n-1,\,n} + a_{n,\,n} = v_{n-1} + v_n, \end{cases}$$

die mit Rücksicht auf (6) sämmtlich positiv sein müssen. Es kann daher unter den Grössen (15) nur eine einzige negativ oder gleich Null sein. Demnach können nur *drei Arten von Lösungen* des Problems existiren; bei der ersten Art sind alle $(n+1)$ Grössen (15) positiv, bei der zweiten sind n positiv, eine ist negativ, bei der dritten Art sind n positiv, eine ist gleich Null. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit darf vorausgesetzt werden, wie im Folgenden geschehen wird, dass in den beiden letzten Fällen die Grösse v respective negativ oder verschwindend sei, und dass mithin $v_1, v_2, \ldots v_n$ in allen Fällen positiv sind. Für die Determinante $\varDelta$ ergiebt sich bei der ersten und zweiten Art, wo v von Null verschieden ist, der Ausdruck

$$(17)\qquad \Delta = vv_1 \ldots v_n \left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_n}\right),$$

bei der dritten Art, wo $v=0$ ist,

$$(17^*)\qquad \Delta = v_1 v_2 \ldots v_n.$$

Die Bedingung, dass Δ positiv sein muss, ist für $v>0$ und $v=0$ von selbst erfüllt. In diesen beiden Fällen wird die Form (14) durch die Darstellung

$$(18)\qquad f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = v_1\xi_1^2 + v_2\xi_2^2 + \ldots + v(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)^2$$

als wesentlich positiv charakterisirt. In dem Falle, dass v negativ ist, kommt die Bedingung $\Delta>0$ zur Wirksamkeit, und reicht aus, um die Form (14) als wesentlich positiv zu erweisen. Wenn durch die Gleichungen

$$(19)\qquad \begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n = v_1\xi_1 + v(\xi_1+\xi_2+\ldots\xi_n) = \mathfrak{x}_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n = v_2\xi_2 + v(\xi_1+\xi_2+\ldots\xi_n) = \mathfrak{x}_2 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n = v_n\xi_n + v(\xi_1+\xi_2+\ldots\xi_n) = \mathfrak{x}_n \end{cases}$$

ein System von Veränderlichen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n$ eingeführt wird, so ist bekanntlich

$$(20)\qquad f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = \frac{F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n)}{\Delta}.$$

Man hat ferner

$$(21)\qquad \left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_n}\right) v(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n) = \frac{\mathfrak{x}_1}{v_1}+\frac{\mathfrak{x}_2}{v_2}+\ldots+\frac{\mathfrak{x}_n}{v_n},$$

und folglich

$$(22)\qquad \frac{F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n)}{\Delta} = \frac{\mathfrak{x}_1^2}{v_1}+\frac{\mathfrak{x}_2^2}{v_2}+\ldots+\frac{\mathfrak{x}_n^2}{v_n} - \frac{\left(\frac{\mathfrak{x}_1}{v_1}+\frac{\mathfrak{x}_2}{v_2}+\ldots+\frac{\mathfrak{x}_n}{v_n}\right)^2}{\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_n}}.$$

Weil nun die Bedingungen $v<0$, $\Delta>0$ mit Rücksicht auf (17) die Ungleichheit

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_n}<0$$

nach sich ziehen, so ist die rechte Seite von (22) eine wesentlich positive Form, und dies gilt auch für die Form (14).

Für die Coefficienten der adjungirten Form $F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n)$ kommen die Ausdrücke

$$(23)\left\{\begin{aligned} &A_{11}=vv_2\ldots v_n\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v_2}+\ldots+\frac{1}{v_n}\right),\ldots A_{nn}=vv_1\ldots v_{n-1}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_{n-1}}\right)\\ &A_{12}=-\frac{vv_1\ldots v_n}{v_1v_2},\ \ldots\qquad A_{n-1,n}=-\frac{vv_1\ldots\ldots v_n}{v_{n-1}v_n}.\end{aligned}\right.$$

Deshalb haben die sämmtlichen Coefficienten $A_{12}, \ldots A_{n-1,n}$ für $v > 0$ das negative, für $v < 0$ das positive Vorzeichen, und verschwinden für $v = 0$, so dass

im ersten Falle $F(1, 1, \ldots 1) < A_{11}+A_{22}+\ldots+A_{nn}$,
im zweiten Falle $F(1, 1, \ldots 1) > A_{11}+A_{22}+\ldots+A_{nn}$,
im dritten Falle $F(1, 1, \ldots 1) = A_{11}+A_{22}+\ldots+A_{nn}$

ist. Zwischen den Darstellungen von $f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ in (18) und $\dfrac{F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n)}{\Delta}$ in (22) findet die Beziehung statt, dass die Coefficienten der n ersten Quadrate stets positiv sind, dagegen die Coefficienten des letzten Quadrats, nämlich

$$v,\ \frac{-1}{\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_n}}$$

wegen der Ungleichheit $\Delta > 0$ stets entgegengesetzte Vorzeichen haben und nur gleichzeitig verschwinden.

Ich werde jetzt mit der bisher betrachteten Lösung der Maximumaufgabe eine zweite vergleichen, bei der statt der Buchstaben a, A, Δ, v respective die Buchstaben b, B, E, w, statt der Charakteristiken f, F die entsprechenden g, G gebraucht werden mögen. Alsdann kommt nach (18) und (22) bei etwas geänderter Zusammenfassung

$$(24)\left\{\begin{aligned} &f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)=(\sqrt{v_1}\,\xi_1)^2+\ldots+(\sqrt{v_n}\,\xi_n)^2+\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{v_1}}(\sqrt{v_1}\,\xi_1)+\ldots+\frac{1}{\sqrt{v_n}}(\sqrt{v_n}\,\xi_n)\right)^2}{\frac{1}{v}},\\ &\frac{F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n)}{\Delta}=\left(\frac{\mathfrak{x}_1}{\sqrt{v_1}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\mathfrak{x}_n}{\sqrt{v_n}}\right)^2-\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{v_1}}\left(\frac{\mathfrak{x}_1}{\sqrt{v_1}}\right)+\ldots+\frac{1}{\sqrt{v_n}}\left(\frac{\mathfrak{x}_n}{\sqrt{v_n}}\right)\right)^2}{\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_n}},\end{aligned}\right.$$

$$(24^*)\begin{cases} g(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = (\sqrt{w_1}\,\xi_1)^2 + \ldots + (\sqrt{w_n}\,\xi_n)^2 + \dfrac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{w_1}}(\sqrt{w_1}\,\xi_1) + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{w_n}}(\sqrt{w_n}\,\xi_n)\right)^2}{\dfrac{1}{w}}, \\[2ex] \dfrac{G(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n)}{E} = \left(\dfrac{\mathfrak{x}_1}{\sqrt{w_1}}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{\mathfrak{x}_n}{\sqrt{w_n}}\right)^2 - \dfrac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{w_1}}\left(\dfrac{\mathfrak{x}_1}{\sqrt{w_1}}\right) + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{w_n}}\left(\dfrac{\mathfrak{x}_n}{\sqrt{w_n}}\right)\right)}{\dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{w_1} + \ldots + \dfrac{1}{w_n}}. \end{cases}$$

Hier zeigt sich, dass aus jedem System von Grössen $v, v_1, \ldots v_n$ ein System von Grössen $w, w_1, \ldots w_n$ erhalten werden kann, indem

$$(25)\qquad -\frac{1}{w} = \frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_n},\quad w_1 = v_1,\ w_2 = v_2,\ \ldots\ w_n = v_n$$

gesetzt wird, woraus die Gleichung

$$(25^*)\qquad \frac{1}{w} + \frac{1}{w_1} + \ldots + \frac{1}{w_n} = -\frac{1}{v}$$

folgt. Ist die Lösung $v, v_1, \ldots v_n$ von der ersten Art, oder $v > 0$, so wird $w < 0$, und die Grössen $w, w_1, \ldots w_n$ liefern eine Lösung der zweiten Art; ist die Lösung $v, v_1, \ldots v_n$ von der zweiten Art, oder $v < 0$, so wird $w > 0$, und die Grössen $w, w_1, \ldots w_n$ liefern eine Lösung der ersten Art. Ist die Lösung $v, v_1, \ldots v_n$ von der dritten Art, oder $v = 0$, so ist auch $w = 0$, und die Lösung $w, w_1, \ldots w_n$ fällt mit der Lösung $v, v_1, \ldots v_n$ zusammen. Ferner leuchtet ein, dass, wenn zugleich die Veränderlichen

$$\sqrt{v_1}\,\xi_1, \ldots \sqrt{v_n}\,\xi_n$$

respective mit den Veränderlichen

$$\frac{\mathfrak{x}_1}{\sqrt{w_1}}, \ldots \frac{\mathfrak{x}_n}{\sqrt{w_n}}$$

vertauscht werden, $f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ in $\dfrac{G(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n)}{E}$ und $\dfrac{F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n)}{\Delta}$ in $g(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ übergeht.

Nachdem somit erkannt ist, dass durch die Gleichungen (25) aus jeder Lösung der ersten Art eine solche der zweiten Art und umgekehrt abgeleitet werden kann, möge angenommen werden, dass die Lösung $v, v_1, \ldots v_n$ von der ersten Art sei. Dann ist die correspondirende Lösung $w, w_1, \ldots w_n$ von der zweiten Art, und für die Coefficienten der bezüglichen Formen g und G gelten die Bestimmungen

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
& b_{11} = v_1 - \frac{1}{\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_n}}, \ldots b_{nn} = v_n - \frac{1}{\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_n}}, \\
& b_{12} = \ldots = b_{n-1,\,n} = \frac{-1}{\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_n}}, \\
& B_{11} = \frac{v_2 \ldots v_n}{\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_n}} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1}\right), \ldots B_{nn} = \frac{v_1 \ldots v_{n-1}}{\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_n}} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v_n}\right), \\
& B_{12} = \frac{v_1 v_2 \ldots v_n}{\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_n}} \cdot \frac{1}{v_1 v_2}, \ldots B_{n-1,\,n} = \frac{v_1 v_2 \ldots v_n}{\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_n}} \cdot \frac{1}{v_{n-1} v_n}, \\
& E = \frac{v_1 v_2 \ldots v_n}{v\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_n}\right)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Bei dem Process, durch welchen aus der Lösung der ersten Art $v, v_1, \ldots v_n$ so eben eine Lösung der zweiten Art erhalten worden, ist die Grösse v vor den n übrigen $v_1, v_2, \ldots v_n$ bevorzugt. Weil aber bei einer Lösung der ersten Art die $n+1$ Grössen $v, v_1, \ldots v_n$ durchaus gleichberechtigt sind, so kann jeder derselben die Rolle von v übertragen werden, wodurch immer neue Lösungen der zweiten Art entstehen. *Es gehören daher zu jeder Lösung der ersten Art $n+1$ Lösungen der zweiten Art.* Die Beziehungen, welche zwischen den $n+2$ zusammengehörigen Lösungen stattfinden, lassen sich durch eine Betrachtung deutlich machen, welche für $n = 3$ geometrisch ist, und die auch für die höheren Werthe von n in die Sprache der Geometrie gekleidet werden kann. Bei der Lösung der ersten Art $v, v_1, \ldots v_n$ werde ich die oben angeführten Benennungen gebrauchen, bei der Lösung der zweiten Art $w, w_1, \ldots w_n$ die entsprechenden Punkte der Mannigfaltigkeit mit $(0')$, $(1')$, .. (n') bezeichnen.

Durch die Forderung, dass das Quadrat des Abstandes zwischen dem Punkte (0) und einem Punkte der Fläche $\xi_1+\xi_2+..+\xi_n = 1$ ein Minimum sei, wird ein Punkt R bestimmt, welcher als der Fusspunkt des von dem Punkte (0) auf die betreffende Fläche herabgelassenen Lothes zu betrachten ist. Man wolle in dieser Hinsicht die Abhandlungen: Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist, Borchardts Journal f. Mathematik, 74, p. 144, und: Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen, Journal f. Mathematik, 78, p. 18 vergleichen. Unter den gegenwärtigen Voraussetzungen erhält das Quadrat des Abstandes $(0R)$ den Werth

$$(27) \qquad \frac{\Delta}{F(1, 1, \ldots 1)} = \frac{v\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_n}\right)}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n}}.$$

Mithin haben die Quadrate der Abstände $(1R)$, $(2R)$, .. (nR) respective die Ausdrücke

$$(28) \qquad \begin{aligned} a_{11} - \frac{\Delta}{F(1, 1, \ldots 1)} &= v_1 - \frac{1}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n}}, \\ a_{22} - \frac{\Delta}{F(1, 1, \ldots 1)} &= v_2 - \frac{1}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n}}, \\ &\vdots \\ a_{nn} - \frac{\Delta}{F(1, 1, \ldots 1)} &= v_n - \frac{1}{\frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n}}. \end{aligned}$$

Behandelt man dieselbe Frage für die Lösung $w, w_1, \ldots w_n$, so findet sich das Quadrat des Abstandes zwischen dem Punkte $(0')$ und dem Fusspunkte des Lothes (R') gleich

$$(29) \qquad \begin{aligned} \frac{E}{G(1, 1, \ldots 1)} &= \frac{w\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w_1} + \ldots + \frac{1}{w_n}\right)}{\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \ldots + \frac{1}{w_n}} \\ &= \frac{1}{v\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_n}\right)\left(\frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_n}\right)}; \end{aligned}$$

ferner erhalten die Quadrate der Abstände $(1'\,R')$, $(2'\,R')$, .. $(n'\,R')$ respective die Ausdrücke

$$(30)\quad b_{11}-\frac{E}{G(1,1,\ldots 1)},\ b_{22}-\frac{E}{G(1,1,\ldots 1)},\ldots b_{nn}-\frac{E}{G(1,1,\ldots 1)}.$$

Es ist aber

$$(31)\quad \frac{\Delta}{F(1,1,\ldots 1)}-\frac{E}{G(1,1,\ldots 1)}=v+\frac{1}{\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_n}},$$

und deshalb werden vermöge (16) und (26) die Ausdrücke (28) den Ausdrücken (30) der Reihe nach gleich. In Folge derselben Relationen bestehen indessen auch die Gleichungen

$$(32)\quad \begin{gathered} a_{11}-2a_{12}+a_{22}=b_{11}-2b_{12}+b_{22},\ \ldots \\ a_{n-1,\,n-1}-2a_{n-1,\,n}+a_{nn}=b_{n-1,\,n-1}-2b_{n-1,\,n}+b_{nn}. \end{gathered}$$

Demnach darf man den Punkt (1) mit (1′), (2) mit (2′) u. s. f., zuletzt (n) mit (n') zusammenfallen lassen, und dann fällt wegen der Uebereinstimmung von (28) und (30) der Punkt (R') in den Punkt (R), und das Loth $(R\,0')$ in das Loth $(R\,0)$. Da die rechte Seite von (31) positiv ist, so muss $(R\,0)$ grösser als $R\,0'$ sein, mithin $(0')$ zwischen (R) und (0) liegen. Nach (27) und (29) wird der Abstand $(0\,0')$ gleich

$$\frac{\sqrt{v\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_n}\right)}}{\sqrt{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_n}}}-\frac{1}{\sqrt{v\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_n}\right)}\sqrt{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\ldots+\frac{1}{v_n}}},$$

mithin erhält das Quadrat dieses Abstandes den Ausdruck

$$(33)\quad (0\,0')^2=v-\frac{1}{\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_1}}.$$

Die Ausdrücke für die Quadrate der Abstände $(1\,0')$, $(2\,0')$, .. $(n\,0')$, nämlich b_{11}, b_{22}, ... b_{nn}, gehen aus diesem Ausdruck hervor, indem v respective mit v_1, v_2, ... v_n vertauscht wird; b_{11}, b_{22}, ... b_{nn} sind also in Bezug auf die Ecken (1), (2), ... (n) genau entsprechend gebildet. Man würde daher, wenn man, statt von der Ecke (0) auszugehen, dieselbe Construction von einer der anderen Ecken (1), ... (n) aus machte, immer zu demselben Punkte $(0')$ gelangen. Mithin liegt dieser Punkt auf jedem der Lothe, welches von einer der $(n+1)$ Ecken auf die gegenüberliegende Seitenfläche herabgelassen wird, und bildet den gemeinsamen Durchschnittspunkt derselben, wie Herr Kronecker für $n=3$ hervorgehoben hat. Zu jeder Lösung des Maximumproblems von der ersten Art, der die $(n+1)$ Ecken (0), (1), (2), ... (n) entsprechen, gehören also noch $(n+1)$ Lösungen der zweiten Art, welche erhalten werden, indem man den zu der Lösung gehörenden Durchschnittspunkt der Lothe $(0')$ construirt, hierauf n Ecken beibehält, und statt der einen ausgelassenen Ecke den Punkt $(0')$ nimmt; in Folge dessen vertauschen die betreffende Ecke und der Punkt $(0')$ ihre Rollen. In dem Falle $n=3$ des wirklichen Tetraeders ist eine Lösung der ersten Art eine solche, bei welcher der gemeinsame Durchschnittspunkt der vier Höhen in das Innere des Tetraeders fällt; man erkennt durch eine einfache geometrische Ueberlegung, dass die vier Tetraeder, welche je eine Seitenfläche des Tetraeders zur Basis und den Durchschnittspunkt der Höhen zur Spitze haben, Maximumtetraeder der zweiten Art sind, für welche immer der Durchschnittspunkt der Höhen in die ausgelassene Ecke des Tetraeders fällt. Sobald der Durchschnittspunkt der Höhen in eine Ecke fällt, tritt die Ausnahme ein, welche eine Lösung der dritten Art charakterisirt; hier bilden die von der bezüglichen Ecke ausgehenden Kanten, paarweise genommen, mit einander rechte Winkel. Zu dem Satze, dass die Volumina der vier so eben bezeichneten Tetraeder zusammen das Volumen des ursprünglichen Tetraeders ausmachen, lässt sich leicht der in der Mannigfaltigkeit von n Dimensionen geltende analoge Satz auffinden. Da in dem System (26) unter den $(n+1)$ Grössen v, $v_1, \ldots v_n$ die Grösse v ausgezeichnet ist, so möge die dortige Determinante E jetzt $E^{(0)}$ genannt werden, während die zu v_1, v_2 ... v_n zugeordneten respective $E^{(1)}$, $E^{(2)}, \ldots E^{(n)}$ heissen sollen. Dann gilt zwischen den positiven Quadratwurzeln aus diesen Determinanten und der in (17) dargestellten Determinante Δ die Gleichung

$$\sqrt{E^{(0)}}+\sqrt{E^{(1)}}+\ldots+\sqrt{E^{(n)}}=\sqrt{\Delta}, \tag{34}$$

welche den erwähnten Satz ausdrückt.

Weil die in (28) dargestellten Quadrate der n Abstände $(1, R)$, $(2\,R)$, ... $(n\,R)$ aus den n Elementen v_1, v_2, ... v_n in ganz derselben Weise, wie die in (33) und (26) dargestellten Quadrate der Abstände $(00')$, $(10')$, ... $(n, 0')$ aus den $(n+1)$ Elementen v, v_1, v_2, ... v_n gebildet sind, darf man schliessen, dass in der Mannigfaltigkeit von $(n-1)$ Dimensionen $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n=1$ das System der Punkte (1), (2), ... (n) wieder eine Lösung des correspondirenden Maximumproblems liefert. In dem Falle $n=3$ kommt diese Eigenschaft darauf hinaus, dass der Fusspunkt jeder Höhe eines Maximumtetraeders in den gemeinsamen Durchschnittspunkt der Höhen der betreffenden Basis fällt, und es leuchtet ein, dass wenn in dem gemeinsamen Durchschnittspunkt der Höhen eines Dreiecks auf der Ebene desselben ein Loth errichtet wird, jeder Punkt dieses Lothes mit den drei Ecken des Dreiecks zusammen die vier Ecken eines Maximumtetraeders ergiebt.

12.

In Art. 10 ist der Satz ausgesprochen, dass bei der dortigen Gleichung

$$(1) \qquad \varDelta X = Y \varDelta_1$$

die Summe der Quadrate der 2^{n-1} reellen Bestandtheile der linken Seite gleich dem Produkt $N(\varDelta)\,(x_1^2+x_2^2+..x_n^2)$ ist, und dass, indem für die rechte Seite das entsprechende gilt, die Gleichung

$$(2) \qquad N(\varDelta)\,(x_1^2+x_2^2+..+x_n^2) = N(\varDelta)\,(y_1^2+y_2^2+..y_n^2)$$

besteht. Die Gleichsetzung der reellen Bestandtheile, die respective in 1, k_1k_2, ... k_1k_n multiplicirt sind, liefert das System (1) des Art. 5

$$(3) \qquad \begin{cases} \lambda_0\, x_1+\lambda_{21}\, x_2+\ldots+\lambda_{n1}\, x_n = \lambda_0\, y_1+\lambda_{12}\, y_2+\ldots+\lambda_{1n}\, y_n \\ \lambda_{12}\, x_1+\lambda_0\, x_2+\ldots+\lambda_{n2}\, x_n = \lambda_{21}\, y_1+\lambda_0\, y_2+\ldots+\lambda_{2n}\, y_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_{1n}\, x_1+\lambda_{2n}\, x_2+\ldots+\lambda_0\, x_n = \lambda_{n1}\, y_1+\lambda_{n2}\, y_2+\ldots+\lambda_0\, y_n. \end{cases}$$

Wenn die linken wie die rechten Seiten der ersten von diesen Gleichungen quadrirt und addirt werden, so folgt bei Anwendung von (2) nach vollzogener Division durch $N(\varDelta)$ die Gleichung

$$(4)\qquad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2-\frac{(\lambda_0 x_1+\lambda_{21}x_2+\ldots+\lambda_{n1}x_n)^2}{N(\varDelta)}$$
$$=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2-\frac{(\lambda_0 y_1+\lambda_{12}y_2+\ldots+\lambda_{1n}y_n)^2}{N(\varDelta)}.$$

Die linke Seite verwandelt sich in den Ausdruck von $\frac{F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n)}{\varDelta}$ in (24), beziehungsweise $g(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ in (24*), sobald die folgenden Substitutionen vorgenommen werden:

$$(A)\qquad \begin{cases} x_1=\frac{\mathfrak{x}_1}{\sqrt{v_1}},\ x_2=\frac{\mathfrak{x}_2}{\sqrt{v_2}}, \ldots x_n=\frac{\mathfrak{x}_n}{\sqrt{v_n}} \\ \lambda_0=\frac{1}{\sqrt{v_1}},\ \lambda_{21}=\frac{1}{\sqrt{v_2}}, \ldots \lambda_{n1}=\frac{1}{\sqrt{v_n}} \\ N(\varDelta)=\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_n}, \end{cases}$$

$$(B)\qquad \begin{cases} x_1=\sqrt{w_1}\,\xi_1,\ x_2=\sqrt{w_2}\,\xi_2, \ldots x_n=\sqrt{w_n}\,\xi_n \\ \lambda_0=\frac{1}{\sqrt{w_1}},\quad \lambda_{21}=\frac{1}{\sqrt{w_2}}, \ldots \lambda_{n1}=\frac{1}{\sqrt{w_n}} \\ N(\varDelta)=-\frac{1}{w}. \end{cases}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Grössen $v, v_1, \ldots v_n$ sämmtlich positiv sind, oder eine Lösung der ersten Art bilden. Die für die Grössen $\lambda_0, \lambda_{21}, \ldots \lambda_{n1}, N(\varDelta)$ in (B) gegebenen Bestimmungen fallen mit den in (A) enthaltenen zusammen, sobald, wie von jetzt ab geschehen soll, zwischen den Grössen $w, w_1, \ldots w_n$ und $v, v_1, \ldots v_n$ die Gleichungen (25) des vorigen Art. vorausgesetzt werden, nach welchen $w, w_1, \ldots w_n$ eine zugehörige Lösung der zweiten Art repräsentirt.

Von den zu der Determination von $\varDelta$ erforderlichen $\frac{n(n-1)}{2}+1$ unabhängigen Elementen sind n Elemente und der Werth von $N(\varDelta)$ direct gegeben. Die Bestimmung der noch übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ unabhängigen Elemente ist aber stets möglich, weil in Folge der bei (A) getroffenen Voraussetzungen die Ungleichheit

(5) $$N(\mathit{\Lambda}) - \lambda_0^2 - \lambda_{12}^2 - \ldots - \lambda_{1n}^2 > 0$$

erfüllt ist. Führt man den beiden Fällen entsprechend neue Systeme von Veränderlichen ein

ad (A) $$y_1 = \frac{\mathfrak{y}_1}{\sqrt{v_1}}, \quad y_2 = -\frac{\mathfrak{y}_2}{\sqrt{v_2}}, \ldots \quad y_n = -\frac{\mathfrak{y}_n}{\sqrt{v_n}},$$

ad (B) $$y_1 = \sqrt{w_1}\,\eta_1,\ y_2 = -\sqrt{w_2}\,\eta_2, \ldots y_n = -\sqrt{w_n}\,\eta_n,$$

so geht die rechte Seite von (4) im ersten Falle in $\frac{F(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{y}_n)}{\mathit{\Delta}}$, im zweiten in $g(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)$ über. Die Gleichungen (3), welche die Gleichung (1) nach sich ziehen, liefern also nach Einführung der beiden Systeme von neuen Veränderlichen lineare Substitutionen, welche respective die folgenden zwei gleichzeitigen Transformationen bewerkstelligen,

ad (A) $$\begin{cases} \dfrac{\mathfrak{x}_1^2}{v_1} + \dfrac{\mathfrak{x}_2^2}{v_2} + \ldots + \dfrac{\mathfrak{x}_n^2}{v_n} = \dfrac{\mathfrak{y}_1^2}{v_1} + \dfrac{\mathfrak{y}_2^2}{v_2} + \ldots + \dfrac{\mathfrak{y}_n^2}{v_n} \\ \dfrac{F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \mathfrak{x}_n)}{\mathit{\Delta}} = \dfrac{F(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{y}_n)}{\mathit{\Delta}}, \end{cases}$$

ad (B) $$\begin{cases} w_1 \xi_1^2 + w_2 \xi_2^2 + \ldots + w_n \xi_n^2 = w_1 \eta_1^2 + w_2 \eta_2^2 + \ldots + w_n \eta_n^2 \\ g(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = g(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n). \end{cases}$$

In dem Falle $n = 3$, welcher der ursprünglichen Tetraederaufgabe entspricht, hat man für das Quaternion

(5) $$\mathit{\Lambda} = \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23}$$

aus (A) die Bestimmungen

(6) $$\begin{cases} \lambda_0 = \dfrac{1}{\sqrt{v_1}},\ \lambda_{12} = -\dfrac{1}{\sqrt{v_2}},\ \lambda_{13} = -\dfrac{1}{\sqrt{v_3}}, \\ \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2 = \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2} + \dfrac{1}{v_3}, \end{cases}$$

mithin ergiebt sich nothwendig

(7) $$\lambda_{23} = \frac{1}{\sqrt{v}}.$$

Demnach nimmt die Gleichung (1) bei der Annahme (A) die Gestalt an

(8) $$\left(\frac{1}{\sqrt{v_1}} - i_{12}\frac{1}{\sqrt{v_2}} - i_{13}\frac{1}{\sqrt{v_3}} + i_{23}\frac{1}{\sqrt{v}}\right)\left(\frac{\mathfrak{x}_1}{\sqrt{v_1}} + i_{12}\frac{\mathfrak{x}_2}{\sqrt{v_2}} + i_{13}\frac{\mathfrak{x}_3}{\sqrt{v_3}}\right)$$
$$= \left(\frac{\mathfrak{y}_1}{\sqrt{v_1}} - i_{12}\frac{\mathfrak{y}_2}{\sqrt{v_2}} - i_{13}\frac{\mathfrak{y}_3}{\sqrt{v_3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{v_1}} + i_{12}\frac{1}{\sqrt{v_2}} + i_{13}\frac{1}{\sqrt{v_3}} + i_{23}\frac{1}{\sqrt{v}}\right).$$

Bei der Annahme (B) ist die Bestimmung des Quaternion $\mathcal{A}$ wegen der vorausgesetzten Gleichungen

$$-\frac{1}{w} = \frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3},\ w_1 = v_1,\ w_2 = v_2,\ w_3 = v_3$$

dieselbe. Dagegen erhält jetzt die Gleichung (1) die folgende Gestalt

(9) $$\left(\frac{1}{\sqrt{v_1}} - i_{12}\frac{1}{\sqrt{v_2}} - i_{13}\frac{1}{\sqrt{v_3}} + i_{23}\frac{1}{\sqrt{v}}\right)\left(\sqrt{v_1}\,\xi_1 + i_{12}\sqrt{v_2}\,\xi_2 + i_{13}\sqrt{v_3}\,\xi_3\right)$$
$$= \left(\sqrt{v_1}\,\eta_1 - i_{12}\sqrt{v_2}\,\eta_2 - i_{13}\sqrt{v_3}\,\eta_3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{v_1}} + i_{12}\frac{1}{\sqrt{v_2}} + i_{13}\frac{1}{\sqrt{v_3}} + i_{23}\frac{1}{\sqrt{v}}\right).$$

Nach den Ausführungen des vorigen Artikels bezieht sich (A) auf ein Tetraeder der ersten Art mit den Ecken (0), (1), (2), (3), und dem innerhalb des Tetraeders befindlichen Durchschnittspunkt der Höhen (0'), hingegen (B) auf dasjenige Tetraeder der zweiten Art, dessen Ecken die Punkte (0'), (1), (2), (3) sind. Um die drei übrigen zugehörigen Tetraeder der zweiten Art zu erhalten, bei denen (0') respective die Stellung von (1), (2), (3) übernimmt, sind Vertauschungen der vier Grössen v, v_1, v_2, v_3 vorzunehmen, bei denen v beziehungsweise mit v_1, v_2, v_3 verwechselt wird. Dem entsprechen solche Aenderungen der Gleichung (9), bei denen an die Stelle des Quaternion $\mathcal{A}$ andere Quaternionen treten, welche die gleiche Norm haben und aus den gleichen reellen Bestandtheilen gebildet sind.

III

TRANSFORMATION EINER SUMME VON BELIEBIG VIELEN QUADRATEN IN SICH SELBST FÜR DAS GEBIET DER EINFACH COMPLEXEN GRÖSSEN.

1.

Bei der ausgeführten Untersuchung der Transformation einer Summe von beliebig vielen Quadraten in sich selbst unterscheidet sich der Fall von zwei und der Fall von mehr als zwei Quadraten dadurch, dass für die Multiplication der zugehörigen symbolischen Ausdrücke eine Vertauschung der Factoren im ersten Falle das Ergebniss nicht ändert, im zweiten jedoch ändert. Nachdem aus den Eigenschaften der Summen von zwei reellen Quadraten das Gebiet der mit zwei unabhängigen reellen Bestandtheilen und den Einheiten 1 und $\sqrt{-1}$ gebildeten Grössen hervorgegangen ist, welche ich die einfach complexen Grössen nennen will, wird die Betrachtung der Transformation von n Quadraten auf dieses Gebiet in der Weise ausgedehnt werden, dass sowohl die variabeln als die constanten Elemente einfach complexe Grössen sind. Das in den einfach complexen Grössen auftretende Symbol $\sqrt{-1}$ werde ich mit h bezeichnen, überall aber, wo die Begriffe des neuen Gebietes denen des ursprünglichen genau entsprechen, mich den in I und II gebrauchten Bezeichnungen anschliessen. Auch hier zeichnet sich die Transformation einer Summe von zwei Quadraten in so besondrer Weise aus, dass es zweckmässig scheint, dieses einfache Problem für sich allein zu behandeln.

Wenn durch eine zwischen den Variabeln x_1, x_2 und y_1, y_2 gegebene lineare Substitution

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}\, y_1 + \alpha_{12}\, y_2 \\ x_2 = \alpha_{21}\, y_1 + \alpha_{22}\, y_2, \end{cases}$$

deren Determinante gleich Eins ist, die Transformation

$$(2) \qquad x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$$

bewerkstelligt wird, so hat aus den in I angegebenen Gründen eine der beiden Determinanten

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+1, & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & , \alpha_{22}+1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -\alpha_{11}+1, & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & , -\alpha_{22}+1 \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Werth, und es darf dies für die erste derselben vorausgesetzt werden. Setzt man unter dieser Annahme mit Anwendung einer beliebigen von Null verschiedenen Grösse λ_0 wieder

$$(4)\qquad \frac{\alpha_{12}}{1+\alpha_{11}} = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_0}, \quad \frac{\alpha_{21}}{1+\alpha_{11}} = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_0},$$

so ist

$$(5)\qquad \lambda_{12}+\lambda_{21} = 0,$$

und es gelten die beiden Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{cases} \lambda_0\ x_1+\lambda_{21}\,x_2 = \lambda_0\ y_1+\lambda_{12}\,y_2 \\ \lambda_{12}\,x_1+\lambda_0\ x_2 = \lambda_{21}\,y_1+\lambda_0\ y_2. \end{cases}$$

Hier sind λ_0 und λ_{12} einfach complexe, aus den reellen Bestandtheilen a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{11} gebildete Grössen

$$(7)\qquad \lambda_0 = a_{00}+h a_{10}, \quad \lambda_{12} = a_{01}+h a_{11}.$$

Mittelst eines neuen von h unabhängigen Symbols i_{12}, für welches, wie in I, die Gleichung

$$(8)\qquad i_{12}^2 = -1$$

gilt, können die Gleichungen (6) in die eine Gleichung zusammengefasst werden

$$(9)\qquad (\lambda_0+i_{12}\,\lambda_{12})(x_1+i_{12}\,x_2) = (y_1+i_{12}\,y_2)(\lambda_0 - i_{12}\,\lambda_{12}).$$

Vermöge der Gleichung (8) hat der aus den vier reellen Bestandtheilen a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11} gebildete *bicomplexe Ausdruck der zweiten Ordnung*

$$(10)\qquad \lambda_0+i_{12}\,\lambda_{12} = a_{00}+h a_{10}+i_{12}(a_{01}+h a_{11})$$

die Eigenschaft, dass bei der Multiplication von zwei oder mehreren solchen Ausdrücken das Resultat von jeder beliebigen Vertauschung und Zusammenfassung der Factoren unabhängig ist. Durch die Gleichung

$$(11)\qquad N(\lambda_0+i_{12}\,\lambda_{12}) = \lambda_0^2+\lambda_{12}^2$$

möge *die Norm des Ausdrucks* $\lambda_0+i_{12}\,\lambda_{12}$ definirt werden.

Ein aus vier ganz beliebigen reellen Elementen gebildeter bicomplexer Ausdruck (10) kann offenbar so beschaffen sein, dass seine Norm verschwindet, ohne dass λ_0 und λ_{12} verschwinden, oder auch, was dasselbe ist, ohne dass die vier reellen Elemente gleichzeitig gleich Null sind. Weil aber in (4) die Gleichungen

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{1+\alpha_{11}}{1+\alpha_{11}} = \dfrac{\lambda_0}{\lambda_0}, & \dfrac{\alpha_{12}}{1+\alpha_{11}} = \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_0} \\ \dfrac{\alpha_{21}}{1+\alpha_{11}} = \dfrac{\lambda_{21}}{\lambda_0}, & \dfrac{1+\alpha_{22}}{1+\alpha_{11}} = \dfrac{\lambda_0}{\lambda_0} \end{cases}$$

eingeschlossen sind, und weil in Folge derselben

$$(13)\qquad \frac{2}{1+\alpha_{11}} = \frac{\lambda_0^2+\lambda_{12}^2}{\lambda_0^2}$$

ist, so kann aus einer Substitution (1), für welche die erste Determinante (3) von Null verschieden ist, immer nur ein bicomplexer Ausdruck (10) hervorgehen, *dessen Norm nicht gleich Null ist.* Auch erkennt man leicht durch die in I angewendete Schlussweise, dass, wenn man für die Gleichung (9) alle bicomplexen Ausdrücke benutzt, deren Norm nicht gleich Null ist, die sämmtlichen Substitutionen (1) erhalten werden. Sobald also die Aufgabe festgehalten wird, die Gesammtheit der Substitutionen (1) zu untersuchen, so treten bicomplexe Ausdrücke, deren Norm verschwindet, gar nicht auf.

Wenn man indessen einen bicomplexen Ausdruck $\lambda_0+i_{12}\lambda_{12}$, dessen Norm verschwindet, ohne dass $\lambda_0=0$ ist, dazu gebraucht, um ein System Gleichungen von der Art des Systems (6) zu bilden, so lässt sich dasselbe zunächst stets in die folgende Gestalt bringen

$$(14)\qquad \begin{cases} \lambda_0 x_1 - h\lambda_{21}\, hy_2 = \lambda_0 y_1 - h\lambda_{12}\, hx_2 \\ -h\lambda_{12} x_1 + \lambda_0\, hy_2 = -h\lambda_{21} y_1 + \lambda_0\, hx_2. \end{cases}$$

Hieraus folgt durch das frühere Verfahren die Gleichung

$$(15)\qquad (\lambda_0 - i_{12} h\lambda_{12})(x_1+i_{12} hy_2) = (y_1+i_{12} hx_2)(\lambda_0+i_{12} h\lambda_{12}),$$

bei welcher die Norm

$$(16)\qquad N(\lambda_0 - i_{12} h\lambda_{12}) = \lambda_0^2 - \lambda_{12}^2$$

sicher von Null verschieden ist. Es werden mithin durch das System (14) die Variabeln x_1 und hy_2 als lineare Functionen der Variabeln y_1 und hx_2 so dargestellt, dass die Gleichung

$$(17)\qquad x_1^2+(hy_2)^2 = y_1^2+(hx_2)^2$$

erfüllt, und die Substitutionsdeterminante gleich Eins ist. Diese Gleichung geht aus (2) hervor, indem die Quadrate der Variabeln

y_2 und x_2 mit der negativen Einheit multiplicirt und auf die entgegengesetzte Seite der Gleichung gebracht werden. Auf diese Weise gehört zu jedem bicomplexen Ausdruck, dessen Norm verschwindet, ohne dass alle reellen Bestandtheile verschwinden, ein anderer, dessen Norm nicht gleich Null ist, und dieser liefert eine lineare Substitution von der Determinante Eins, welche die Gleichung (17) befriedigt.

Es ist gestattet, den Ausdruck

$$\lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} = a_{00} + h a_{10} + i_{12} a_{01} + i_{12} h a_{11}$$

als eine aus vier unabhängigen reellen Bestandtheilen, mit den vier Einheiten 1, h, i_{12}, $h i_{12}$ gebildete complexe Grösse zu betrachten, und zwar gehört diese complexe Grösse zu denjenigen, für welche die im Gebiete der reellen Grössen geltenden Grundoperationen der Addition, Subtraction und Multiplication ungeändert gültig bleiben. Complexe Grössen, die aus n unabhängigen reellen Elementen mit n Einheiten gebildet werden, sind in der Abhandlung des Herrn Frobenius: Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, Journal f. Mathematik 84, p. 59 berührt, und kürzlich in den Mittheilungen des Herrn Weierstrass: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen, so wie des Herrn Dedekind: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen (Nachrichten der k. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, 12. November 1884 und 23. März 1885) ausführlich erörtert worden. Um die verschiedenen Darstellungsweisen der complexen Grössen zu vergleichen, ist es angemessen, auf diejenigen Grössen $\lambda_0 + i\lambda_{12}$ zu achten, deren Norm verschwindet, ohne dass die sämmtlichen reellen Bestandtheile verschwinden. Damit diese Bedingung eintrete, muss entweder

$$\lambda_{12} = h\lambda_0 \tag{A}$$

oder

$$\lambda_{12} = -h\lambda_0 \tag{B}$$

sein; mithin entweder

$$\text{ad } (A),\ a_{00} = a_{11},\ a_{10} = -a_{01}, \tag{18}$$

oder

$$\text{ad } (B),\ a_{00} = -a_{11},\ a_{10} = a_{01}. \tag{19}$$

Demnach erhält die Grösse (10) die Gestalt

(20) ad (A), $\lambda_0+i_{12}\lambda_{12}=a_{00}(1+hi_{12})+a_{10}(h-i_{12})$,

(21) ad (B), $\lambda_0+i_{12}\lambda_{12}=a_{00}(1-hi_{12})+a_{10}(h+i_{12})$.

Jede derselben hat wegen der Gleichung

$$(\lambda_0+i_{12}\lambda_{12})(\lambda_0-i_{12}\lambda_{12})=0 \tag{22}$$

die Beschaffenheit, nach dem von Herrn Weierstrass eingeführten Sprachgebrauche *ein Theiler der Null* zu sein. Der allgemeine Ausdruck (10) lässt sich folgendermassen als ein Aggregat der Ausdrücke dieser besonderen Art darstellen

$$\begin{aligned}\lambda_0+i_{12}\lambda_{12}=(a_{00}+a_{01})\frac{1+hi_{12}}{2}&+(a_{10}-a_{01})\frac{h-i_{12}}{2}\\ +(a_{00}-a_{11})\frac{1-hi_{12}}{2}&+(a_{10}+a_{01})\frac{h+i_{12}}{2};\end{aligned} \tag{22}$$

er wird somit in zwei Theile zerlegt, welche Herr Weierstrass die beiden Componenten genannt und durch ein System von vereinfachten Haupteinheiten ausgedrückt hat. In der ersten Componente erscheinen die beiden vereinfachten Haupteinheiten

$$e_1=\frac{1+hi_{12}}{2},\quad e_2=\frac{h-i_{12}}{2}, \tag{23}$$

in der zweiten Componente die beiden noch übrigen

$$e_3=\frac{1-hi_{12}}{2},\quad e_4=\frac{h+i_{12}}{2}. \tag{24}$$

Durch e_1, e_2, e_3, e_4 werden die folgenden von Herrn Weierstrass aufgestellten Gleichungen erfüllt

$$\left\{\begin{array}{llll} e_1^2=e_1, & e_1e_2=e_2, & e_1e_3=0, & e_1e_4=0\\ e_2e_1=e_2, & e_2^2=-e_1, & e_2e_3=0, & e_2e_4=0\\ e_3e_1=0, & e_3e_2=0, & e_3^2=e_3, & e_3e_4=e_4\\ e_4e_1=0, & e_4e_2=0, & e_4e_3=e_4, & e_4^2=-e_3\\ \multicolumn{4}{c}{e_1+e_2+e_3+e_4=1.}\end{array}\right. \tag{25}$$

Hiernach fällt der Inbegriff der in (10) definirten bicomplexen Ausdrücke mit dem Inbegriff der von Herrn Weierstrass untersuchten complexen Grössen zusammen, die aus vier reellen Bestandtheilen mit vier paarweise einander zugeordneten Haupteinheiten gebildet sind. Das System der vier vereinfachten Haupteinheiten e_1, e_2, e_3, e_4, welche durch das System von Relationen (25) verbunden sind, wird aber mit Hülfe der Gleichungen (23) und (24) durch die drei unabhängigen Einheiten 1, h, i_{12} ausgedrückt, deren letztere nur den Gleichungen

$$h^2 = -1, \; i_{12}^2 = -1$$

genügen.

2.

Auf dem eingeschlagenen Wege ist die Ersetzung der vier vereinfachten Haupteinheiten durch Verbindungen von drei unabhängigen Einheiten ungezwungen hervorgetreten. Nun möchte ich nicht unterlassen, darauf aufmerksam zu machen, dass bei den von Herrn Weierstrass betrachteten complexen Grössen stets ein entsprechendes Verfahren angewendet werden kann, sobald die sämmtlichen vereinfachten Haupteinheiten einander paarweise zugeordnet sind, und ihre Anzahl q gleich einer Potenz von Zwei ist. Bezeichnet man die q reellen Bestandtheile der vorliegenden complexen Grösse mit $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_q$, die vereinfachten q Haupteinheiten respective mit $e_1, e_2, \ldots e_q$, wo e_1 zu e_2, e_3 zu $e_4, \ldots$ e_{q-1} zu e_q zugeordnet sein möge, so lässt sich der Ausdruck

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_q e_q \tag{1}$$

bei Anwendung eines unabhängigen Zeichens σ, welches der Gleichung

$$\sigma^2 = -1 \tag{2}$$

genügt, in die Gestalt bringen

$$(\xi_1 - \sigma\xi_2)\frac{e_1+\sigma e_2}{2} + (\xi_1+\sigma\xi_2)\frac{e_1-\sigma e_2}{2} + \ldots \tag{3}$$
$$+ (\xi_{q-1}-\sigma\xi_q)\frac{e_{q-1}+\sigma e_q}{2} + (\xi_{q-1}+\sigma\xi_q)\frac{e_{q-1}-\sigma e_q}{2},$$

deren sich auch Herr Dedekind bedient hat. Alsdann können die für die q Verbindungen

$$\frac{e_1+\sigma e_2}{2}, \; \frac{e_1-\sigma e_2}{2}, \ldots \frac{e_{q-1}+\sigma e_q}{2}, \; \frac{e_{q-1}-\sigma e_q}{2} \tag{4}$$

bestehenden Regeln dahin zusammengefasst werden, dass das Quadrat jeder Verbindung ihr selbst gleich, das Product von zwei verschiedenen gleich Null, das Aggregat von sämmtlichen Verbindungen gleich Eins sein muss.

Es sei nun $q = 2^m$, und es mögen mit $h_1, h_2, \dots h_m$ lauter Symbole bezeichnet werden, die von σ und unter einander unabhängig sind, und deren jedes, auf das Quadrat erhoben, gleich der negativen Einheit wird; durchgehends sollen alle zu bildenden Producte von der Anordnung ihrer Factoren unabhängig sein.

Mit Hülfe dieser Symbole bilde man die Ausdrücke

$$\text{(5)} \qquad \begin{array}{c} \frac{1+\sigma h_1}{2}, \ \frac{1+\sigma h_2}{2}, \dots \frac{1+\sigma h_m}{2} \\[2ex] \frac{1-\sigma h_1}{2}, \ \frac{1-\sigma h_2}{2}, \dots \frac{1-\sigma h_m}{2} \end{array}$$

und stelle alle Producte P_t auf, die aus dem Produkt

$$\text{(6)} \qquad \frac{1+\sigma h_1}{2} \cdot \frac{1+\sigma h_2}{2} \dots \frac{1+\sigma h_m}{2}$$

hervorgehen, indem in einer beliebigen Anzahl von Factoren σ in $-\sigma$ verwandelt wird. Mit Einrechnung des ursprünglichen beträgt die Gesammtzahl der Producte $2^m = q$; dieselben können zur Darstellung der q Verbindungen (4) verwendet werden. Denn jeder einzelne Factor hat wegen der für jeden Zeiger r geltenden Gleichungen

$$\text{(7)} \qquad \left(\frac{1+\sigma h_r}{2}\right)^2 = \frac{1+\sigma h_r}{2}, \quad \left(\frac{1-\sigma h_r}{2}\right)^2 = \frac{1-\sigma h_r}{2}.$$

die Eigenschaft, dass sein Quadrat ihm selbst gleich wird, und deshalb besitzt auch jedes Product P_t dieselbe Eigenschaft. Wenn man ferner zwei verschiedene Producte P_t und P_u mit einander multiplicirt, so muss das Product derselben verschwinden, weil dasselbe nothwendig wenigstens ein Paar zugeordneter Factoren $\frac{1+\sigma h_r}{2}$ und $\frac{1-\sigma h_r}{2}$ enthält, und weil für jeden Zeiger r die Gleichung

$$\text{(8)} \qquad \frac{1+\sigma h_r}{2} \cdot \frac{1-\sigma h_r}{2} = 0$$

besteht. Die Vertheilung der Producte P_t zur Darstellung der Verbindungen (4) ist dann so einzurichten, dass zwei zugeordnete Verbindungen respective gleich zwei Producten gesetzt werden, von denen das eine aus dem andern durch Vertauschung von σ mit $-\sigma$ entsteht, z. B.

$$(9)\qquad \begin{cases} e_1+\sigma e_2 = \dfrac{1+\sigma h_1}{2}\cdot\dfrac{1+\sigma h_2}{2}\cdots\dfrac{1+\sigma h_m}{2} \\ e_1-\sigma e_2 = \dfrac{1-\sigma h_1}{2}\cdot\dfrac{1-\sigma h_2}{2}\cdots\dfrac{1-\sigma h_m}{2}. \end{cases}$$

In Folge dessen fällt σ bei der Bestimmung von $e_1, e_2, \dots e_{q-1}, e_q$ ganz heraus, und diese q Haupteinheiten werden mit Hülfe von 1 und den m unabhängigen Einheiten $h_1, h_2, \dots h_m$ dargestellt. Auch leuchtet es sogleich ein, dass bei dem Addiren der $2^m = q$ Producte P_t die Gleichung

$$(10)\qquad e_1+e_2+\dots+e_q = 1$$

erfüllt wird. Substituirt man die für das System der Haupteinheiten $e_1, e_2, \dots e_q$ gefundenen Darstellungen in den Ausdruck (1), so erscheinen die reellen Bestandtheile in q symbolische Verbindungen multiplicirt, die aus der Einheit und den m unabhängigen Symbolen erhalten werden, indem man alle Producte bildet, in denen kein Symbol mehr als ein Mal auftritt.

3.

Indem jetzt die Untersuchung der Transformation einer Summe von n Quadraten in sich selbst für $n \gtreqless 3$ auf das Gebiet der einfach complexen Grössen übertragen wird, behalten alle Erscheinungen dieselbe vollkommene Regelmässigkeit. Durch die Substitution

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2+\dots+\alpha_{1n}y_n \\ x_2 = \alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2+\dots+\alpha_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = \alpha_{n1}y_1+\alpha_{n2}y_2+\dots+\alpha_{nn}y_n, \end{cases}$$

bei der die Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$, die Variabeln $y_1, y_2, \dots y_n$ und die Coefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots \alpha_{nn}$ einfach complexe Grössen sind, und deren Determinante gleich $+1$ ist, sei die Gleichung

$$(2)\qquad x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 = y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2$$

befriedigt. Dann wird wieder die Determinante

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+1, & \alpha_{12}, & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}+1, & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1}, & \alpha_{n2}, & \dots & \alpha_{nn}+1 \end{vmatrix}$$

mit allen denen verglichen, welche aus ihr entstehen, indem in irgend einer geraden Anzahl von Vertikalreihen die Coefficienten mit der negativen Einheit multiplicirt werden. Da nach II, Art. 1 das Aggregat dieser 2^{n-1} Determinanten gleich 2^n ist, so muss wenigstens eine derselben einen von Null verschiedenen Werth haben. Mithin kann stets aus der gegebenen Substitution eine solche abgeleitet werden, bei der die zugeordnete Determinante (3) von Null verschieden ist, und diese Eigenschaft wird im Folgenden bei der Substitution (1) vorausgesetzt. Es wird nun, wie in II, Art. 1 die Determinante des Systems (3), welche so gebildet ist, als ob die Elemente $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{nn}$ von einander unabhängig wären, mit D bezeichnet, und partielle Differentiation auf dieselbe angewendet. Dann gelangt man durch entsprechende Schlüsse zu den Gleichungen

$$(4) \qquad \frac{1}{D}\left(D-2\frac{\partial D}{\partial \alpha_{aa}}\right)=0,\ \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \alpha_{ba}}+\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \alpha_{ab}}=0,$$

wo a und b irgend zwei verschiedene Zeiger bedeuten. Wird nun mit λ_0 eine beliebige von Null verschiedene einfach complexe Grösse bezeichnet, so sind die $\frac{n(n-1)}{2}$ einfach complexen Grössen λ_{ab}, welche die neuen Elemente bilden, durch die Gleichungen

$$(5) \qquad \frac{2}{D}\frac{\partial D}{\partial \alpha_{ab}}=\frac{\lambda_{ab}}{\lambda_0},\ \lambda_{ba}+\lambda_{ab}=0$$

vollständig bestimmt, und erfüllen das System von Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{cases} \lambda_0\ x_1+\lambda_{21}x_2+\ldots+\lambda_{n1}x_n=\lambda_0\ y_1+\lambda_{12}y_2+\ldots+\lambda_{1n}y_n \\ \lambda_{12}x_1+\lambda_0\ x_2+\ldots+\lambda_{n2}x_n=\lambda_{21}y_1+\lambda_0\ y_2+\ldots+\lambda_{2n}y_n \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \lambda_{1n}x_1+\lambda_{2n}x_2+\ldots+\lambda_0\ x_n=\lambda_{n1}y_1+\lambda_{n2}y_2+\ldots+\lambda_0\ y_n. \end{cases}$$

Bei diesem System macht sich der Unterschied zwischen dem Gebiet der reellen und der einfach complexen Grössen geltend, wie sich schon im vorigen Art. für $n=2$ gezeigt hat. Die Determinante des Systems der Coefficienten, welche für die linke und rechte Seite dieselbe ist, hat ein Bildungsgesetz, um dessentwillen sie für reelle Elemente nicht verschwinden kann, so lange λ_0 einen von Null verschiedenen Werth hat. Auf dem Gebiet der einfach complexen Grössen reicht aber der Umstand, dass λ_0 von

Null verschieden ist, hiefür nicht aus; indessen bleibt die Thatsache selbst bestehen und bedarf nur einer andern Begründung. In Folge der Gleichungen (4) und (5) gelten für jeden Zeiger a und für jedes Paar verschiedener Zeiger a und b die Relationen

$$(7) \qquad \frac{2}{D}\frac{\partial D}{\partial \alpha_{aa}} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0}, \quad \frac{2}{D}\frac{\partial D}{\partial \alpha_{ab}} = \frac{\lambda_{ab}}{\lambda_0}.$$

Hieraus ergiebt sich für die zu prüfende Determinante nach einem bekannten Satze der Ausdruck

$$(8) \qquad \frac{2^n \lambda_0^n}{D},$$

welcher, wie behauptet worden, nicht gleich Null sein kann, weil λ_0 und D von Null verschiedene endliche einfach complexe Grössen sind.

Die Ableitung von $2^{n-1}n$ neuen Gleichungen aus dem System (6), welche demselben hinzugefügt werden, erfolgt in ganz derselben Weise, die in II, Art. 2 für das Gebiet der reellen Grössen entwickelt ist. Für den Fall $n = 3$ bedarf es hierzu nicht der Herstellung von neuen Verbindungen. Für $n \gtrless 4$ werden die betreffenden Verbindungen genau nach dem früheren Schema aus den Elementen λ_{ab} und λ_0 rational abgeleitet, und sollen auch entsprechend bezeichnet werden, so dass z. B.

$$(9) \qquad \lambda_{abcd} = \frac{\lambda_{ab}\,\lambda_{cd} + \lambda_{ac}\,\lambda_{db} + \lambda_{ad}\,\lambda_{bc}}{\lambda_0}$$

ist. Hierbei ist keine andere Voraussetzung erforderlich als die schon getroffene, dass λ_0 nicht gleich Null sein darf. Es ergiebt sich dann das vollständige System von 2^n Gleichungen, das für das reelle Gebiet in II, Art. 3, (1), (2), (2*) dargestellt ist, und dessen symmetrische Eigenschaften den Kern dieser Theorie bilden. An dieses System knüpft sich die Einführung der symbolischen Factoren

$$(10) \qquad 1,\ i_{12},\ \ldots\ i_{1234},\ \ldots,$$

welche von dem zu der Darstellung der einfach complexen Grössen gebrauchten Symbol h vollständig unabhängig sind, sodann die Begründung der *dem associativen Gesetz* unterworfenen Rechnungsregeln, ferner die Darstellung der Symbole durch n *Primitivzeichen* $k_1, k_2, \ldots k_n$, so dass vermöge der letzteren

$$(11) \qquad i_{12} = k_1 k_2, \ldots i_{1234} = k_1 k_2 k_3 k_4, \ldots$$

wird, und schliesslich die Zurückführung der Rechnungsregeln auf die für die Primitivzeichen geltenden Regeln

$$(12) \qquad k_a^2 = -1, \; k_a k_b = -k_b k_a.$$

Hierauf bildet man *die bicomplexen Ausdrücke der n-ten Ordnung*

$$(13) \quad \begin{cases} \Lambda = \lambda_0 + k_1 k_2 \lambda_{12} + \ldots + k_2 k_3 \lambda_{23} + \ldots + k_1 k_2 k_3 k_4 \lambda_{1234} + \ldots \\ \Lambda_1 = \lambda_0 - k_1 k_2 \lambda_{12} + \ldots + k_2 k_3 \lambda_{23} + \ldots - k_1 k_2 k_3 k_4 \lambda_{1234} + \ldots \\ X = x_1 + k_1 k_2 x_2 + \ldots + k_1 k_n x_n \\ Y = y_1 + k_1 k_2 y_2 + \ldots + k_1 k_n y_n, \end{cases}$$

und hat für das erwähnte vollständige System von 2^{n-1} Gleichungen die zusammenfassende Darstellung

$$(14) \qquad \Lambda X = Y \Lambda_1.$$

Zu dem bicomplexen Ausdruck Λ gehört als *seine Norm* das Aggregat der Quadrate seiner 2^{n-1} einfach complexen Bestandtheile

$$(15) \qquad N(\Lambda) = \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \ldots + \lambda_{1234}^2 + \ldots$$

Mit Hülfe derselben wird die vorhin besprochene Determinante der Coefficienten der linken oder rechten Seite von (6) so ausgedrückt

$$(16) \qquad \lambda_0^{n-2} N(\Lambda),$$

und die obige Darstellung ihres Werthes in (8) führt zu dem Schlusse, dass da λ_0 von Null verschieden vorausgesetzt ist, die Norm $N(\Lambda)$ nicht gleich Null sein kann.

Es lässt sich nun, genau wie in II, Art. 5, zeigen, dass, wenn mit einer von Null verschiedenen Grösse λ_0 und einem System von Grössen λ_{ab}, die so beschaffen sind, dass der zugeordnete Ausdruck $N(\Lambda)$ nicht gleich Null ist, ein System von Gleichungen (6) gebildet wird, durch dasselbe eine lineare Substitution (1) von der Determinante $+1$ bestimmt ist, welche die Gleichung (2) befriedigt, und für welche die zugeordnete Determinante D des Systems (3) einen von Null verschiedenen Werth hat. Es führt also jedes System von Grössen λ_0, λ_{ab}, das die erwähnte Voraussetzung erfüllt, zu einer Substitution (1) zurück, für welche die entsprechende Determinante D nicht verschwindet.

In gleicher Weise leuchtet ein, dass aus der Substitution (1) alle Substitutionen entstehen, bei denen für eine gerade Anzahl von Vertikalreihen die sämmtlichen Coefficienten mit -1 multiplicirt sind, indem für die betreffenden Zeiger $a, b, c, \ldots f$ die neuen Variabeln

(17) $$y_a = -z_a,\ y_b = -z_b, \ldots y_f = -z_f$$

eingeführt, und für die übrigen Zeiger g

(18) $$y_g = z_g$$

gesetzt wird. Es sei jetzt, wie in II, Art. 5

(19) $$J = k_a k_b \ldots k_f,$$

gleichzeitig $J_1 = J$ oder $J_1 = -J$, je nachdem unter den Zeigern $a, b, \ldots f$ die Eins enthalten ist oder nicht, und

(20) $$Z = z_1 + k_1 k_2 z_2 + \ldots + k_1 k_n z_n.$$

Dann wird durch die entsprechenden Schlüsse aus (14) die Gleichung

(21) $$J \mathcal{A} X = Z J_1 \mathcal{A}_1$$

abgeleitet, zu der die Transformationsgleichung

(22) $$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$$

gehört. Wenn in (21) angenommen wird, dass auch $J = 1$, $J_1 = 1$ sein darf, so ist die Gleichung (14) darin mit enthalten, und (21) repräsentirt die sämmtlichen Substitutionen von der Determinante $+1$, welche die Gleichung (22) befriedigen. Vermöge der gegebenen Ableitung hat hier die Norm des bicomplexen Ausdrucks $\mathcal{A}$ stets einen von Null verschiedenen Werth.

4.

Für den Werth $n = 3$ ist der bicomplexe Ausdruck $J\mathcal{A}$ gleich einem Aggregat, bei dem die einfach complexen Bestandtheile $\lambda_0, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23}$ respective mit den Factoren $1, k_1 k_2, k_1 k_3, k_2 k_3$ combinirt sind, und $J\mathcal{A}$ fällt mit dem *Biquaternion* zusammen, dessen Begriff Hamilton in den Lectures on Quaternions p. 639 aufgestellt hat. Für $n \geqq 4$ werden die 2^{n-1} einfach complexen Bestandtheile, welche in dem bicomplexen Ausdruck $J\mathcal{A}$ mit

$1, k_1 k_2, \ldots k_1 k_2 k_3 k_4, \ldots$ multiplicirt erscheinen, aus den $1+\frac{n(n-1)}{2}$ einfach complexen Elementen λ_0 und λ_{ab} rational dargestellt. Man hat daher auch hier *die unbeschränkten bicomplexen Ausdrücke der n-ten Ordnung*

(1) $$\Phi = \varphi_0 + k_1 k_2 \varphi_{12} + \ldots + k_1 k_2 k_3 k_4 \varphi_{1234} + \ldots$$

zu betrachten, bei denen die Coefficienten $\varphi_0, \varphi_{12}, \ldots \varphi_{1234}$ beliebige einfach complexe Grössen sind, und von diesen die Ausdrücke

(2) $$J\mathcal{A}$$

auszusondern, welche *reguläre bicomplexe Ausdrücke der n-ten Ordnung* genannt werden.

In Betreff der Ausdrücke, welche mit einem unbeschränkten Ausdruck Φ zusammengehören, erlaube ich mir auf II, Art. 6 hin zu weisen, und werde die gleichen Bezeichnungen anwenden. Demgemäss ist

(3) $$\left\{\begin{aligned} \Phi_a &= -k_a \Phi k_a \\ \Phi_{ab} &= -k_a k_b \Phi k_a k_b \\ &\vdots \end{aligned}\right.$$

und *der zu Φ conjugirte Ausdruck Φ'* wird so definirt

(4) $$\Phi' = \varphi_0 + k_2 k_1 \varphi_{12} + \ldots + k_4 k_3 k_2 k_1 \varphi_{1234} + \ldots$$

Nachdem man sich überzeugt hat, dass der Ausdruck

(5) $$X = x_1 + k_1 k_2 x_2 + \ldots + k_1 k_n x_n$$

regulär ist, wird ebenso wie a. a. O. nachgewiesen, dass für den Ausdruck $\mathcal{A}$ das Product $\mathcal{A}'\mathcal{A}$ gleich dem Product $\mathcal{A}'_1 \mathcal{A}_1$ und schliesslich gleich einer einfach complexen Grösse ist. So ergiebt sich für *die Norm des Ausdrucks $\mathcal{A}$* die Darstellung

(6) $$N(\mathcal{A}) = \mathcal{A}'\mathcal{A} = \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \ldots + \lambda_{1234}^2 + \ldots,$$

und zwar muss der betreffende Werth nach einem Schlusse des vorigen Art. von Null verschieden sein. Man erkennt ferner, dass für jeden Zeiger a die mit dem Ausdruck $\mathcal{A}$ gebildete Verbindung $\mathcal{A}' k_a \mathcal{A}$ gleich einem in den Primitivzeichen linearen Ausdruck ist, bei dem die Primitivzeichen in einfach complexe Grössen multiplicirt sind. Beide Eigenschaften des Ausdrucks $\mathcal{A}$ gelten auch für den Ausdruck $J\mathcal{A}$, sie sind *nothwendige Eigenschaften eines regulären Ausdrucks $J\mathcal{A}$*, und es lässt sich wie in II, Art. 9 zeigen, dass sie *auch die hinreichenden Eigenschaften eines regulären Ausdrucks sind.* Denn wenn für einen unbeschränkten bicomplexen Ausdruck der n-ten Ordnung Φ *das Product* $\Phi' \Phi$ *gleich einer von Null verschiedenen einfach complexen Grösse, und zugleich die Verbindung* $\Phi' k_a \Phi$ *in den Primitivzeichen linear ist*, so folgt hieraus, dass das Product

$$\Phi' \Phi = \varphi_0^2 + \varphi_{12}^2 + \ldots + \varphi_{1234}^2 + \ldots$$

nothwendig einen von Null verschiedenen einfach complexen Werth hat. Dann muss aber unter den Grössen $\varphi_0, \varphi_{12}, \ldots \varphi_{1234}, \ldots$ wenigstens eine von Null verschieden sein, und diese Grundlage genügt, um den erforderlichen Beweis zu Ende zu führen.

Aus den aufgestellten Kriterien der Regularität folgt jetzt der Hauptsatz, *dass das Product von zwei oder mehreren regulären bicomplexen Ausdrücken der n-ten Ordnung wieder gleich einem regulären bicomplexen Ausdruck der n-ten Ordnung ist, und die Norm des Products der regulären Ausdrücke gleich dem Product ihrer Normen.* Daran schliesst sich, dass, wenn mit Hülfe von zwei beliebigen regulären bicomplexen Ausdrücken der n-ten Ordnung A und M, und den oben definirten Ausdrücken X, Y, Z die Gleichungen gebildet werden

$$\mathsf{A} X = Y \mathsf{A}_1, \tag{7}$$

$$M Y = Z M_1, \tag{8}$$

deren erste die Gleichung

$$X X' = Y Y', \tag{9}$$

deren zweite die Gleichung

$$Y Y' = Z Z' \tag{10}$$

nach sich zieht, durch Combination die Gleichung

$$M \mathsf{A} X = Z M_1 \mathsf{A}_1 \tag{11}$$

entsteht, zu welcher die Transformationsgleichung

$$X X' = Z Z' \tag{12}$$

gehört. Die Zusammensetzung von zwei Substitutionen (1) des vorigen Art. wird also auch hier auf die Multiplication der regulären bicomplexen Ausdrücke A und M zurückgeführt. Die Ausdrücke X, Y, Z repräsentiren eine besondere Art von regulären bicomplexen Ausdrücken der n-ten Ordnung, für welche sich das Bildungsgesetz der Norm des Ausdrucks in das Bildungsgesetz einer Summe von n Quadraten verwandelt.

Es möge noch erwähnt werden, dass auch die Ausführungen von II, Art. 8 auf die regulären bicomplexen Ausdrücke unmittelbar übertragen werden können. Namentlich ist hierbei von Interesse, dass für die Elemente, die dort mit s_a bezeichnet sind, die Beschränkung fortfällt, der sie unterworfen werden müssen, damit die Quadratwurzelgrössen $\frac{\sqrt{s_a-1}}{\sqrt{s_a+1}}$ reelle Werthe behalten. In der That war mir die für das Gebiet der reellen Grössen vorhandene Nothwendigkeit dieser Beschränkung so auffallend, dass mich dieser Umstand in der Absicht bestärkte, die Untersuchung auf das Gebiet der einfach complexen Grössen zu übertragen.

5.

Bei dem in den drei vorhergehenden Artikeln vollständig behandelten Transformationsproblem bleibt der Fall ausgeschlossen, dass, wenn aus der von Null verschiedenen einfach complexen Grösse λ_0 und den hinzukommenden $\frac{n(n-1)}{2}$ Grössen λ_{ab} der bicomplexe Ausdruck der n-ten Ordnung

(1) $$\varLambda = \lambda_0 + k_1 k_2 \lambda_{12} + \dots + k_1 k_2 k_3 k_4 \lambda_{1234} + \dots$$

gebildet wird, die zugehörige Norm

(2) $$N(\varLambda) = \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \dots + \lambda_{1234}^2 + \dots$$

gleich Null ist. Um einen solchen Ausdruck, der in Art. 1 für $n=2$ *ein Theiler der Null* genannt worden ist, für einen beliebigen Werth von n zu betrachten, möge zwischen den $2n$ Variabeln x_a und y_b ein System Gleichungen von der Gestalt (6) des Art. 3 aufgestellt werden,

(3) $$\begin{cases} \lambda_0\, x_1 + \lambda_{21} x_2 + \dots + \lambda_{n1} x_n = \lambda_0\, y_1 + \lambda_{12} y_2 + \dots + \lambda_{1n} y_n \\ \lambda_{12} x_1 + \lambda_0\, x_2 + \dots + \lambda_{n2} x_n = \lambda_{21} y_1 + \lambda_0\, y_2 + \dots + \lambda_{2n} y_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \lambda_{1n} x_1 + \lambda_{2n} x_2 + \dots + \lambda_0\, x_n = \lambda_{n1} y_1 + \lambda_{n2} y_2 + \dots + \lambda_0\, y_n. \end{cases}$$

Hier ist die Determinante des Systems der Coefficienten auf beiden Seiten gleich

(4) $$\lambda_0^{n-2} N(\varLambda),$$

mithin nach der getroffenen Voraussetzung gleich Null. Es muss daher noch erst erwiesen werden, dass das System (3) überhaupt eine Berechtigung besitzt. Man erkennt aber, dass dem so ist, indem man die Variabeln x_a und y_b auf eine zweckmässige Art gruppirt. Der einfacheren Bezeichnung wegen mögen die Variabeln $y_{m+1}, \dots y_n$ auf die linke, die Variabeln $x_{m+1}, \dots x_n$ auf die rechte Seite gerückt werden; dann lässt sich das System in die folgende Gestalt bringen

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_0 x_1 + \dots + \lambda_{m,1} x_m - \lambda_{m+1,1} h^2 y_{m+1} - \dots - \lambda_{n.1} h^2 y_n \\ = {} &\lambda_0 y_1 + \dots + \lambda_{1,m} y_m - \lambda_{1,m+1} h^2 x_{m+1} - \dots - \lambda_{1,n} h^2 x_n, \\ &\vdots \\ &h(\lambda_{1n} x_1 + \dots + \lambda_{m,n} x_m - \lambda_{m+1,n} h^2 y_{m+1} - \dots - \lambda_0 h^2 y_n) \\ = {} &h(\lambda_{n1} y_1 + \dots + \lambda_{n,m} y_m - \lambda_{n,m+1} h^2 x_{m+1} - \dots - \lambda_0 h^2 x_n). \end{aligned}\right.$$

Der Factor h ist den Gleichungen von der $(m+1)$-ten bis zur n-ten beigefügt. Man erhält das System (5) aus (3), indem man gleichzeitig

$$\begin{array}{llll} \text{statt } x_1, \dots x_m, & x_{m+1}, & \dots & x_n \\ \phantom{\text{statt }} x_1, \dots x_m, & -hy_{m+1}, & \dots & -hy_n, \\ \text{statt } y_1, \dots y_m, & y_{m+1}, & \dots & y_n \\ \phantom{\text{statt }} y_1, \dots y_m, & -hx_{m+1}, & \dots & -hx_n \end{array}$$

setzt, λ_0 ungeändert lässt, und der Grösse λ_{ab} einen der Factoren $1, h, h^2$ beilegt, je nachdem die Zahlen a, b aus der Gesammtheit der Zeiger $m+1, m+2, \dots n$ kein oder ein Individuum oder zwei Individuen enthalten. Nimmt man die betreffende Aenderung mit dem Ausdruck $\varLambda$ vor, so ist jedem Bestandtheil $\lambda_{12}, \dots \lambda_{1234}$ u. s. f. der Factor h so oft beizufügen, als in dem Inbegriff der Zeiger Individuen aus der Gruppe $m+1, \dots n$ vorkommen. Der so entstehende Ausdruck möge mit $\varLambda^{(m+1, \dots n)}$ bezeichnet werden, und, wenn das gleiche Verfahren mit einer beliebigen Gruppe von Zeigern $a, b, \dots e$ vorgenommen wird, mit $\varLambda^{(a, b, \dots e)}$; in Folge dessen erhält die Determinante des entsprechenden Systems der Coefficienten der linken und rechten Seite den Werth

$$(6)\qquad \lambda_0^{n-2} N(\varLambda^{(a, b, \dots e)}).$$

Es kommt nun darauf an, zu zeigen, dass bei einer passenden Wahl der Gruppe $a, b, \dots e$ die in (6) auftretende Norm nicht verschwinden kann. Denn bezeichnet man den Inbegriff der übrigen Zeiger mit a', b' ... f', so leuchtet ein, dass alsdann durch das System (3) die Variabeln

$$x_{a'},\ x_{b'},\ \ldots\ x_{f'},\ y_a,\ y_b,\ \ldots\ y_e$$

als Functionen der Variabeln

$$y_{a'},\ y_{b'},\ \ldots\ y_{f'},\ x_a,\ x_b,\ \ldots\ x_e$$

bestimmt sind, und umgekehrt.

Um den erforderlichen Beweis zu führen, bemerke ich, dass sich die Norm $N(\mathcal{A})$ folgendermassen erzeugen lässt. Man bilde eine vollständige Entwicklung des Products

$$(7)\qquad \begin{aligned}(1+r_2)(1+r_3)\ldots(1+r_n) = 1&+r_2+r_3+\ldots+r_n\\ &+r_2r_3\ +\ldots+r_{n-1}r_n\\ &+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ &+\ .\ .\ .\ .\ +r_2r_3\ldots r_n,\end{aligned}$$

und substituire zunächst statt jedes auf die Einheit folgenden Summanden den mit einer Gruppe von Zeigern versehenen Buchstaben r. Je nachdem die Anzahl der Factoren eines Summanden gerade oder ungerade ist, sei die Gruppe der Zeiger gleich dem Inbegriff der Zeiger der Factoren, oder gleich dem um den Zeiger 1 vermehrten Inbegriff. Schliesslich ersetze man die Einheit durch λ_0^2, r_{12} durch λ_{12}^2, r_{1234} durch λ_{1234}^2 u. s. f. Nach dem, was festgesetzt worden, entsteht $\mathcal{A}^{(a,\,b,\,\ldots\,e)}$ aus $\mathcal{A}$, indem die Primitivzeichen k_a in $k_a h$, k_b in $k_b h$, ... k_e in $k_e h$ verwandelt werden. Es sei a, b, ... e eine beliebige Gruppe von Zeigern, unter denen der Zeiger 1 nicht vorkommt, so wird demnach $N(\mathcal{A}^{(a,\,b,\,\ldots\,e)})$ aus $N(\mathcal{A})$ hervorgebracht, indem jedes der Quadrate λ_{12}^2, ... λ_{1234}^2 so oft den Factor -1 erhält, als unter seinen Zeigern solche aus der Gruppe a, b, ... e vorhanden sind. Wenn nun das Product (7) als eine symbolische Darstellung von $N(\mathcal{A})$ dient, so wird in gleicher Weise eine symbolische Darstellung von $N(\mathcal{A}^{(a,\,b,\,\ldots\,e)})$ erhalten, indem respective r_a, r_b, ... r_e in $-r_a$, $-r_b$, ... $-r_e$ verwandelt wird. Es ist aber nach einer in II, Art. 1 angewendeten Schlussweise

$$(1+r_2)+(1-r_2) = 2$$

$$(1+r_2)(1+r_3)+(1-r_2)(1+r_3)+(1+r_2)(1-r_3)+(1-r_2)(1-r_3) = 4$$

u. s. f., mithin das Aggregat aller Producte, die aus (7) durch

Negativnehmen einer beliebigen Anzahl von Elementen $r_2, \dots r_n$ entstehen, gleich 2^{n-1}. Hieraus folgt für das Aggregat der Normen aller in der entsprechenden Weise aus $\varDelta$ abgeleiteten Ausdrücke die Gleichung

$$(8) \qquad N(\varDelta)+N(\varDelta^{(2)})+\dots N(\varDelta^{(2,3)})+\dots = 2^{n-1}\lambda_0^2.$$

Weil aber λ_0 von Null verschieden vorausgesetzt ist, so muss sich unter den auf der linken Seite befindlichen Normen wenigstens eine befinden, die nicht gleich Null ist, wie behauptet worden.

Indem jetzt angenommen wird, dass $N(\varDelta^{(m+1, \dots\dots n)})$ von Null verschieden sei, kann das obige System (5) in der früheren Weise behandelt werden, und führt dann zu der Gleichung

$$(9) \qquad \varDelta^{(m+1,\dots n)}(x_1+k_1k_2x_2+\dots+k_1k_mx_m-k_1k_{m+1}hy_{m+1}-\dots-k_1k_nhy_n)$$
$$=(y_1+k_1k_2y_2+\dots+k_1k_my_m-k_1k_{m+1}hx_{m+1}-\dots-k_1k_nhx_n)\varDelta_1^{(m+1,\dots n)}.$$

Diese zieht die Transformationsgleichung nach sich

$$(10) \qquad x_1^2+\dots x_m^2+(hy_{m+1})^2+\dots+(hy_n)^2$$
$$=y_1^2+\dots+y_m^2+(hx_{m+1})^2+\dots+(hx_n)^2,$$

die mit (2) des Art. 3 übereinstimmt.

Auch die Operation der Vertauschung, welche so eben für die gleichnamigen Veränderlichen x und y zur Anwendung gebracht ist, lässt sich auf das in II, Art. 8 entwickelte allgemeine Verfahren reduciren. Denn lässt man in den dortigen Gleichungen (9) für die Zeiger a gleich $1, 2, \dots m$ den Bruch $\frac{s_a}{\sqrt{s_a-1}\,\sqrt{s_a+1}}$, indem der Betrag von s_a über jedes Maass wächst, gegen die Einheit convergiren, hingegen für die Zeiger a gleich $m+1, \dots n$, indem der Betrag von s_a ohne Ende abnimmt, gegen den Werth $-h$ convergiren, so ergiebt sich gerade dasjenige System von neuen Veränderlichen, welches in (9) und (10) benutzt worden ist.

6.

Die mitgetheilte Behandlung der Transformation einer Summe von n Quadraten in sich selbst auf dem Gebiete der einfach complexen Grössen behält ihre Bedeutung auch für die quadratischen

Formen desselben Gebiets. Denn jede quadratische Form von n Variabeln, deren Determinante nicht verschwindet, kann mit Hülfe der Ausziehung von n Quadratwurzeln in eine Summe von n Quadraten verwandelt werden; aus jeder Transformation dieser Summe in sich selbst folgt eine bestimmte Transformation der quadratischen Form in sich selbst und umgekehrt. Auch zeigt eine Wiederholung der in II, Art. 7 angestellten Betrachtung, dass jedes Primitivzeichen k_a zu der Basis eines in der Quadratsumme auftretenden Quadrats gehört, und somit auch zu derjenigen unter den erwähnten n Quadratwurzeln, welche dieser Basis als Factor anhaftet. In dieser Uebereinstimmung glaube ich eine Bestätigung dafür zu erblicken, dass der Gebrauch der Primitivzeichen aus der Natur der Sache geschöpft ist.

Geht man aber auf das Gebiet der reellen Grössen zurück, so ist zu bemerken, dass jede wesentlich positive quadratische Form von n Variabeln mit Hülfe der Ausziehung von n Quadratwurzeln aus positiven Grössen in eine Summe von n Quadraten verwandelt werden kann, und dass somit die obige Darstellung der sämmtlichen Transformationen von n reellen Quadraten in sich selbst zu einer Darstellung der sämmtlichen Transformationen der *wesentlich positiven quadratischen Formen* in sich selbst führt. Es bleiben also auf dem Gebiete der reellen Grössen noch die *indefiniten Formen*, d. h. diejenigen quadratischen Formen von n Variabeln in entsprechender Weise zu erledigen, welche bei der Verwandlung in ein Aggregat von Quadraten durch eine reelle Substitution eine Anzahl m von positiven und die Anzahl $n-m$ von negativen Quadraten aufweisen, wo bekanntlich die Anzahl m nach dem *Trägheitsgesetz der quadratischen Formen* von der Wahl der angewendeten reellen Substitution unabhängig ist. Dieser Anforderung lässt sich genügen, indem man in Art. 3 die specielle Voraussetzung einführt, dass unter den Variabeln x_a, wie auch y_b, die m ersten reell, die $n-m$ letzten rein imaginär sein sollen. Es sei demnach

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = \mathfrak{x}_1, \; \dots \; x_m = \mathfrak{x}_m, \; x_{m+1} = -h\mathfrak{x}_{m+1}, \; \dots \; x_n = -h\mathfrak{x}_n \\ y_1 = \mathfrak{y}_1, \; \dots \; y_m = \mathfrak{y}_m, \; y_{m+1} = -h\mathfrak{y}_{m+1}, \; \dots \; y_n = -h\mathfrak{y}_n, \end{cases}$$

und es werde verlangt, dass die Substitution (1) des Art. 3 für die reellen Variabeln $\mathfrak{x}_a$ und $\mathfrak{y}_b$ reelle Coefficienten habe. Dann ergiebt sich, dass die Coefficienten α_{ab}, wenn $a \gtreqless m$ und $b \leqq m$ und auch wenn $a > m$ und $b > m$ ist, reell sein müssen, in allen übrigen Fällen jedoch rein imaginär. Bei der mit D bezeichneten Determinante

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+1, & \alpha_{12} & , \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & , \alpha_{22}+1, & \ldots & \alpha_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & , \alpha_{n2} & , \ldots & \alpha_{nn}+1 \end{vmatrix},$$

deren Werth, wie dort, als von Null verschieden vorausgesetzt wird, leuchtet ein, dass ihr Werth reell sein muss, und dass ein wie früher gebildeter partieller Differentialquotient $\frac{\partial D}{\partial \alpha_{ab}}$ reell ist, wofern $a \leqq m$, $b \leqq m$ ist, und auch wofern $a > m$, $b > m$ ist, sonst aber rein imaginär ausfällt. Wenn also λ_0 ein beliebiger von Null verschiedener reeller Werth beigelegt wird, so muss sich nach den dortigen Gleichungen (7) das Element λ_{ab} ebenso wie $\frac{\partial D}{\partial \alpha_{ab}}$ verhalten. Der Uebereinstimmung wegen setze man

$$(3) \qquad \begin{cases} \lambda_0 = \quad \varrho_0 \\ \lambda_{ab} = \quad \varrho_{ab}\ ;\ a \leqq m,\ b \leqq m, \\ \lambda_{ab} = \quad h\varrho_{ab};\ a \leqq m,\ b > m, \\ \lambda_{ab} = \quad h\varrho_{ab};\ a > m,\ b \leqq m, \\ \lambda_{ab} = -\varrho_{ab}\ ;\ a > m,\ b > m, \end{cases}$$

so dass ϱ_0 und ϱ_{ab} reell sind. Dann geht die Gleichung (14) des Art. 3 in eine Gestalt über, welche nur die zu der aufgeworfenen Frage gehörenden reellen Elemente enthält. Man hat somit

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X} = \mathfrak{x}_1 + k_1 k_2 \mathfrak{x}_2 + \ldots + k_1 k_m \mathfrak{x}_m - k_1 k_{m+1} h \mathfrak{x}_{m+1} - \ldots - k_1 k_n h \mathfrak{x}_n \\ \mathfrak{Y} = \mathfrak{y}_1 + k_1 k_2 \mathfrak{y}_2 + \ldots + k_1 k_m \mathfrak{y}_m - k_1 k_{m+1} h \mathfrak{y}_{m+1} - \ldots - k_1 k_n h \mathfrak{y}_n, \end{cases}$$

ferner ist klar, dass, wenn der complexe Ausdruck der n-ten Ordnung gebildet wird

$$(5) \qquad P = \varrho_0 + k_1 k_2 \varrho_{12} + \ldots + k_1 k_2 k_3 k_4 \varrho_{1234} + \ldots,$$

nach den im vorigen Art. gebrauchten Bezeichnungen

$$(6) \qquad \Lambda = P^{(m+1, \ldots n)}$$

ist. Mithin repräsentirt die Gleichung

$$(7) \qquad P^{(m+1, \ldots n)} \mathfrak{X} = \mathfrak{Y} P_1^{(m+1, \ldots n)}$$

eine reelle Substitution von der Determinante 1, durch welche die Gleichung

$$(8)\qquad \mathfrak{x}_1^2+\ldots+\mathfrak{x}_m^2-\mathfrak{x}_{m+1}^2-\ldots-\mathfrak{x}_n^2=\mathfrak{y}_1^2+\ldots+\mathfrak{y}_m^2-\mathfrak{y}_{m+1}^2-\ldots-\mathfrak{y}_n^2$$

befriedigt wird. Zugleich folgt aus dem Früheren, dass, um alle Transformationen der bezeichneten Art zu erhalten, es ausreicht, in der vorstehenden Gleichung (7) dem Ausdruck $P^{(m+1,\ldots n)}$ links einen Factor $J=k_a k_b \ldots k_f$ beizufügen und ebenso dem Ausdruck $P_1^{(m+1,\ldots n)}$ den zugehörigen in Art. 3 definirten Factor J_1.

Das Verfahren, durch welches so eben für ein aus positiven und negativen Quadraten bestehendes Aggregat die Transformation in sich selbst bewerkstelligt ist, entspricht genau der im vorigen Artikel mitgetheilten Entwickelung. Dem Gedankengange derselben folgend kann man von der Gleichung (8), welche die Transformation einer Summe von m positiven und $n-m$ negativen Quadraten bezeichnet, zu der Gleichung

$$(9)\qquad \mathfrak{x}_1^2+\ldots+\mathfrak{x}_m^2+\mathfrak{y}_{m+1}^2+\ldots+\mathfrak{y}_n^2=\mathfrak{y}_1^2+\ldots+\mathfrak{y}_m^2+\mathfrak{x}_{m+1}^2+\ldots+\mathfrak{x}_n^2$$

übergehen, welche die Transformation einer Summe von n positiven Quadraten in sich selbst ausdrückt, und dann ist es der aus den reellen Bestandtheilen ϱ_0 und ϱ_{ab} gebildete complexe Ausdruck der n-ten Ordnung P, mittelst dessen die zugehörige Substitution dargestellt wird.

Druck vollendet 28. December 1885.

Seite 77 Zeile 11 v. o. ist statt (2) zu lesen (2a).

Universitäts-Buchdruckerei von Carl Georgi in Bonn.