

Strahlungshydrodynamik

Mitschrift von Harald Höller
nach einer Vorlesung von Prof. E.A. Dorfi WS06/07

11.02.2007

Inhaltsverzeichnis

1	Hydrodynamische Grundlagen	4
1.1	Grundgleichungen der Hydrodynamik	4
1.1.1	Zwei Betrachtungsweisen	4
1.1.2	Stromlinien	5
1.1.3	Euler'sche Entwicklungsformel	5
1.1.4	Reynolds'sches Transporttheorem (RTT)	6
1.1.5	Kontinuitätsgleichung	7
1.1.6	Bewegungsgleichung	8
1.1.7	Hydrostatik	9
1.1.8	Bemerkungen zu Konvektion und Turbulenzen	10
1.1.9	Energiegleichung	11
1.2	Lineare Wellen	11
1.2.1	Wellengleichung in einer Raumdimension	11
1.2.2	Potentialströmung	13
1.2.3	Akustische Wellen	14
1.3	Stoßwellen	17
1.3.1	Ebene Stoßwellen	17
1.3.2	Stoßgeschwindigkeit	19
1.3.3	Stoßreflexion	20
1.3.4	Schräge Stoßwellen	22
1.3.5	Mach-Konfiguration	24
1.4	Instabilitäten	25
2	Grundlagen der Strahlungstheorie	30
2.1	Definitionen	30
2.2	Strahlungstransport	31
2.2.1	Die Strahlungstransportgleichung	31
2.2.2	Diffusionsapproximation	32
2.3	Momentengleichungen	33
2.3.1	Momente der Strahlungstransportgleichung	33
2.3.2	Kollektive Effekte	34
2.3.3	Kopplung mit Hydrodynamik	34
2.4	Stationäre STG	35
2.5	Strahlungstransport im mitbewegten Bezugssystem	38
2.5.1	Relativistische Kinematik und Lorentztransformation	38
2.5.2	Transformation der Strahlungsgrößen	39
2.5.3	Momente der STG im mitbewegten Bezugssystem	41
2.5.4	Zusammenfassende Bemerkungen	42
2.6	Diffusionsterme im mitbewegten Koordinatensystem	43
3	Strahlende Strömungen	45
3.1	Störungen kleiner Amplitude	45
3.1.1	Voraussetzungen und Vereinfachungen	45
3.1.2	Strahlungsdämpfung linearer Wellen	46
3.1.3	Zusätzlicher Energie-Input	48

3.1.4	Zeitabhängiges Strahlungsfeld	49
3.2	Marshak-Wellen	51
3.2.1	Selbstähnliche Lösungen	52
3.2.2	Bemerkungen zu nichtlinearen Wellen	54
3.3	Strahlungsdruckgetriebene Winde	54
3.3.1	Windgleichung	54
3.3.2	Impulsbeitrag durch Strahlung	55
3.3.3	CAK-Theorie	57
	Literatur	60

1 Hydrodynamische Grundlagen

[03.10.2006]

1.1 Grundgleichungen der Hydrodynamik

1.1.1 Zwei Betrachtungsweisen

Euler Die Euler'sche Herangehensweise definiert ein fixes Koordinatensystem (Laborsystem) bezüglich dessen die Hydrodynamischen Größen wie Dichte $\rho(\vec{x}, t)$ oder Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x}, t)$ betrachtet werden.

Lagrange In der Lagrange'schen Betrachtung sind die Teilchen *fix*, in dem Sinne, dass man in ein mitschwimmendes Koordinatensystem übergeht.

Sei nun α eine Teilcheneigenschaft des Fluids; wir betrachten ein Teilchen in dieser Strömung im mitschwimmenden Koordinatensystem. Die Änderung von α in der Lagrange'schen Sichtweise sei gegeben durch

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\alpha(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t) - \alpha(\vec{x}, t)}{\Delta t} \right] \quad (1.1)$$

Für kleine Δt lässt sich die Änderung des Ortes durch die momentane Geschwindigkeit ausdrücken

$$\vec{x} + \Delta\vec{x} = \vec{x} + \vec{v}\Delta t \quad (1.2)$$

Entwicklung bis zur ersten Ordnung in Komponentenschreibweise (Summenkonvention) ergibt

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t) &= \alpha(\vec{x}, t) + \frac{\partial\alpha}{\partial x^i} \Delta x^i + \frac{\partial\alpha}{\partial t} \Delta t + \mathcal{O}[(\Delta x, \Delta t)^2] \\ \Delta x^i &= v^i \Delta t \\ \alpha(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t) &= \alpha(\vec{x}, t) \Delta t \left[\frac{\partial\alpha}{\partial t} + v^i \frac{\partial\alpha}{\partial x^i} \right] \\ \rightarrow \frac{D\alpha}{Dt} &= \frac{\partial\alpha}{\partial t} + v^i \frac{\partial\alpha}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$= \frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\alpha \quad (1.4)$$

Gleichung (1.4) lässt sich auch kurz schreiben als

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \alpha_{,t} + v^i \alpha_{,i} \quad (1.5)$$

bzw. die *kovariante* Verallgemeinerung

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \alpha_{,t} + v^i \alpha_{;i} \quad (1.6)$$

Die Gleichungen (1.4, 1.5) beschreiben also die Änderung der Größe α in der Lagrange-Betrachtung, d.h. im mitbewegten Koordinatensystem. Diese Form der Differentiation heißt auch **Materialableitung**.

Bemerkung. Transformationen zwischen dem Euler'schen und dem Lagrange'schen System sind allgemein nicht nur (klassisch, Galileitransformation) (\vec{x}, t) -abhängig, sondern müssen auch den Impuls (bzw. die Frequenz, Lorentztransformation) korrekt transformieren, um Effekte wie Frequenzverschiebung durch Dopplereffekt usw. zu berücksichtigen.

1.1.2 Stromlinien

Definition (Stromlinie). Stromlinien sind Kurven des Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{x}, t)$, deren Tangente zu einem Zeitpunkt t_0 mit der Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}(\vec{x}_0, t_0)$ übereinstimmen.

Definition (stationär). Eine Strömung heißt stationär, wenn obiges $\forall t$ gilt.

Betrachten wir ein Teilchen mit Koordinaten $\vec{\xi} = \vec{x}(t = 0)$.

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{x}(\vec{\xi}, t) \\ &= \vec{\xi} + \int_0^t \vec{v}(\vec{\xi}, t') dt'\end{aligned}\tag{1.7}$$

Mathematisch ausgedrückt ist eine Stromlinie dann definiert durch

$$\vec{v} \times d\vec{x} = 0.\tag{1.8}$$

1.1.3 Euler'sche Entwicklungsformel

Gegeben sei ein Teilchen zu $t = 0$ am Ort $\vec{\xi}$, das ein endliches Volumen dV_0 einnimmt.

$$dV_0 = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3\tag{1.9}$$

Zu einem Zeitpunkt $t > 0$ ist das Teilchen am Ort $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}, t)$ im Volumen $dV = dx^1 dx^2 dx^3$, das durch Transformation aus dV_0 hervorgeht.

$$dV = J dV_0\tag{1.10}$$

J ist die Jacobi-Determinante der Transformation, gegeben durch

$$J \equiv \left| \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right|\tag{1.11}$$

$$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^2}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^3}{\partial \xi^k}\tag{1.12}$$

Entwicklungstheorem:

$$\begin{aligned}\frac{DJ}{Dt} &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v^1}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^2}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^3}{\partial \xi^k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^i} \frac{\partial v^2}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^3}{\partial \xi^k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^2}{\partial \xi^j} \frac{\partial v^3}{\partial \xi^k} \\ &\text{z.B.: } \frac{\partial v^1}{\partial \xi^j} = \frac{\partial v^1}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} \\ \frac{DJ}{Dt} &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v^1}{\partial x^l} \frac{\partial x^2}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^3}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^k} + \dots \\ &= \frac{\partial v^1}{\partial x^1} \underbrace{\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^2}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^3}{\partial \xi^k}}_{=J} + \frac{\partial v^1}{\partial x^2} \dots + \dots \\ &= \frac{\partial v^1}{\partial x^1} J + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} J + \frac{\partial v^3}{\partial x^3} J \\ &= (\vec{\nabla} \vec{v}) J\end{aligned}\tag{1.13}$$

Die infinitesimale Verformung des Einheitsvolumens steckt also in der Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes der Strömung. Explizit lautet Gleichung (1.13) nach Division durch J bzw. mittels logarithmischer Ableitung

$$\frac{1}{J} \frac{DJ}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{D \ln J}{Dt}. \quad (1.14)$$

1.1.4 Reynolds'sches Transporttheorem (RTT)

Wir betrachten ein zeitlich variables Flüssigkeitsvolumen $V(t)$ und eine beliebige Größe des Fluids $F(\vec{x}, t)$ in dem Volumen. V_0 sei das Volumen zu $t = 0$.

$$f(t) = \int_{V(t)} F(\vec{x}, t) dV \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} F(\vec{x}, t) dV \\ &= \frac{D}{Dt} \int_{V_0} F(\vec{x}, t) J dV_0 \\ &= \int_{V_0} \frac{D}{Dt} F(\vec{x}, t) J dV_0 \\ &= \int_{V_0} \left[\frac{DF}{Dt} J + F \frac{DJ}{Dt} \right] dV_0 \\ &= \int_{V_0} \left[\frac{DF}{Dt} J + F J (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] dV_0 \\ &= \int_V \left[\frac{DF}{Dt} + F (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] dV \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} F(\vec{x}, t) dV = \int_{V(t)} \left[\frac{DF}{Dt} + F (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] dV \quad (1.17)$$

Gleichung (1.17) wird als **Reynolds'sches Transporttheorem** bezeichnet. Mit Hilfe der Kettenregel lässt sich (1.17) noch weiter umschreiben.

$$\begin{aligned} \int_V \left[\frac{DF}{Dt} + F (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] dV &= \int_V \frac{DF}{Dt} dV + \int_V F (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) dV \\ &= \int_V \underbrace{\frac{DF}{Dt}}_{(1)} dV + \int_V \left[\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (F \vec{v})}_{(2)} - \underbrace{\vec{v} \cdot (\vec{\nabla} F)}_{(3)} \right] dV \\ \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} F(\vec{x}, t) dV &= \int_{V(t)} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}}_{(1+3)} dV + \int_{\partial V(t)} \underbrace{F \vec{v} d\vec{S}}_{(2)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Folgerung. Ist $F(\vec{x}, t)$ die Dichte einer Erhaltungsgröße (Masse, Impuls, Energie usw.) und $F \vec{v}$ daher eine Flussdichte, so beschreibt das Reynolds'sche Transporttheorem die materielle Ableitung dieser Größe, also die Änderung der Erhaltungsgröße im Volumen $V(t)$ als Summe der expliziten (lokalen) zeitlichen Änderung der Dichtefunktion und einem konvektiven Anteil, der als Fluss über die, das Volumen berandende Oberfläche zu interpretieren ist.

1.1.5 Kontinuitätsgleichung

Das *mitbewegte Volumen* $V(t)$ möge immer aus den gleichen Flüssigkeitsteilchen bestehen, die man durch die Dichtefunktion $\rho(\vec{x}, t)$ beschreiben kann. Die konkrete Beziehung zwischen $V(t)$ und $\rho(\vec{x}, t)$ lässt sich durch die *Massenerhaltung* (Gl. 1.19) ausdrücken.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0 \quad (1.19)$$

Wir setzen die Funktion F im Reynolds'schen Transporttheorem gleich der Dichte ($F(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t)$).

$$\int_{V(t)} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\vec{\nabla}\vec{v}) \right] dV = 0 \quad (1.20)$$

gilt $\forall t$

$$\rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\vec{\nabla}\vec{v}) = 0 \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0 \quad (1.22)$$

Gleichung (1.22) ist die bekannte Form der **Kontinuitätsgleichung** und bringt die Erhaltung der Masse zum Ausdruck.

Bemerkungen. • Für stationäre Strömungen gilt $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$, daher vereinfacht sich (1.22) zu

$$\vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0 \quad (1.23)$$

• Für inkompressible Strömungen ($\rho = \text{const}$) gilt

$$\vec{\nabla}\vec{v} = 0 \quad (1.24)$$

• Im Fall sphärischer Symmetrie, also $\rho(\vec{x}, t) = \rho(r, t)$ schreibt sich die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho v) = 0 \quad (1.25)$$

wobei $v = v_r(r, t)$. Die integrierte Masse $m(r)$ sei definiert durch

$$m(r) \equiv \int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr' \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 \frac{\partial\rho}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho v) &= 0 \\ \frac{\partial(4\pi r^2\rho)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(4\pi r^2\rho v) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial m}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial m}{\partial r} v \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \underbrace{\left(\frac{\partial m}{\partial t} + v \frac{\partial m}{\partial r} \right)}_{\rightarrow \text{räumlich konstant}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

Das bedeutet, der Ausdruck

$$\frac{Dm}{Dt} = A(t) = 0 \quad (1.28)$$

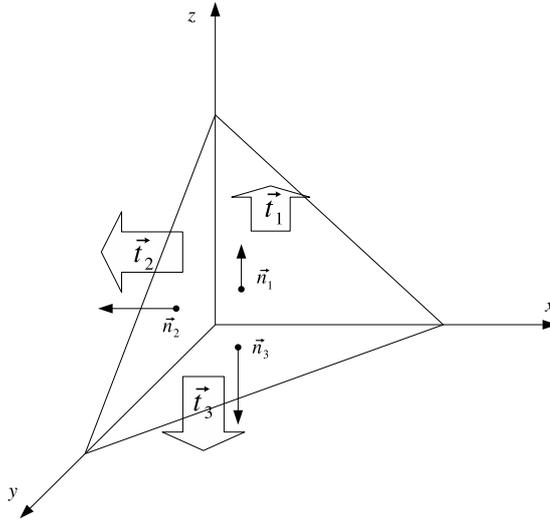


Abbildung 1.1: Flächenkräfte

lässt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen zu Null machen. Betrachtet man zum Beispiel eine Kollapsströmung (mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0 \rightarrow A(t) = 0$), dann drückt (1.28) aus, dass die Massenschalen einander nicht überholen können.

1.1.6 Bewegungsgleichung

Gegeben sei ein Fluid, in dem allgemein anisotrope Flächenkräfte in den drei Raumrichtungen wirken. Seien die betrachteten Flächen S_1, S_2, S_3 aufgespannt von den Achsen (x, z) , (y, z) und (x, y) mit den Normalenvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ (Abb. 1.1).

Die in eine Richtung weisende Kraft t_i ist gegeben über den **Impulsstromtensor** \mathbf{T}

$$t^i = T^{ij}n_j \quad (1.29)$$

mit

$$T^{ij} \equiv \underbrace{\rho v^i v^j}_{(1)} + \underbrace{p \delta^{ij}}_{(2)} - \underbrace{\sigma^{ij}}_{(3)}. \quad (1.30)$$

Term (1) im Impulsstromtensor entspricht dem Impulsbeitrag ρv^i durch Teilchen die sich in j -Richtung bewegen, (2) ist ein Druckterm (z.B. Gasdruck) und (3) gibt den Beitrag über viskose Reibung (Spannungstensor σ).

Man nennt $\{T^{ij}, i = j\}$ *Normalkomponenten* und jene mit $\{T^{ij}, i \neq j\}$ *Tangentialkomponenten* von \mathbf{T} .

Beispiel (Isotroper Druck).

$$T^{ij} = p \delta^{ij}, \quad t^i = p n^i \quad (1.31)$$

Die Beziehung (1.31) beschreibt ein ideales (nicht zähes) Fluid.

Betrachten wir die *Impulserhaltung* über $V(t)$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \vec{f} dV - \oint_{\partial V} \vec{t} dS \quad (1.32)$$

mit dem Kraftvektor \vec{f} im Volumen V und den Spannungen \vec{t} bzw. den Oberflächenkräften. Wir betrachten das Reynolds'sche Transporttheorem für Gleichung (1.32) in Komponenten.

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho v^i dV &= \int_V \left[\frac{D(\rho v^i)}{Dt} + \rho v^i \nabla_j v^j \right] dV \\ &= \int_V \left[\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + v^j \nabla_j(\rho v^i) + \rho v^i \nabla_j v^j \right] dV \\ &= \int_V \left[\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \nabla_j(\rho v^i v^j) \right] dV \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) + \nabla_j(\rho v^i v^j) \right] dV &= \int_V f^i dV - \oint_O t^i dS \\ \int_V \left[v^i \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j(\rho v^j) \right)}_{=0} + \rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i \right) \right] dV &= \int_V f^i dV - \oint_O t^i dS \end{aligned}$$

Hier kam die Kontinuitätsgleichung (1.22) zum Einsatz. Den zweiten Term unter dem Integral identifizieren wir als Lagrangeableitung von \vec{v} . Mit Hilfe des Satzes von Gauß lässt sich der Oberflächenbeitrag in ein Volumsintegral umschreiben

$$\begin{aligned} \int_V \rho \frac{Dv^i}{Dt} dV &= \int_V f^i dV - \oint_O T^{ij} n_j dS \\ \rho \frac{Dv^i}{Dt} &= f^i - T^i_j \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \vec{f} - \vec{\nabla} \mathbf{T} \end{aligned} \quad (1.34)$$

und wir erhalten die **Eulergleichung** bzw. Bewegungsgleichung (1.34).

Beispiel (Isotroper Druck).

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \vec{\nabla} p \quad (1.35)$$

Spezialfall. Sphärische Symmetrie, $\vec{v} = (v, 0, 0)$.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{f_r}{\rho} \quad (1.36)$$

f_r sei die radiale Komponente der Kraft. Im Fall eines stellaren Windes im Schwerfeld eines Sterns mit Masse M gegeben durch $f_r = \frac{GM}{r^2}$.

1.1.7 Hydrostatik

In der Hydrostatik gilt per Definitionem $\vec{v} \equiv 0$ und die Eulergleichung für ruhende Fluide vereinfacht sich zu

$$\vec{f} = \vec{\nabla} p \quad (1.37)$$

einer Bedingung für das Gleichgewicht zwischen inneren Druckkräften und den äußeren Kräften. Betrachten wir ein Fluid im Schwerfeld in sphärischer Symmetrie (z.B. Erdatmosphäre)

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \quad (1.38)$$

wobei $m(r)$ wieder die integrierte Masse (Gl. 1.26) ist. Für die Erdatmosphäre und die Atmosphären von Hauptreihensternen ist es gerechtfertigt, ebene Geometrie anzunehmen

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -g \quad (1.39)$$

was zur **barometrischen Höhenformel** (1.41) führt. Nehmen wir hierfür eine *isotherme Zustandsgleichung* (EOS) an und integrieren Gleichung (1.39).

$$p = \frac{k\rho T}{\mu m_H} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \frac{kT}{\mu m_H} &= -g \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} &= -\underbrace{\frac{g\mu m_H}{kT}}_{\cong 1/H} \\ \frac{d \ln \rho}{dz} &= -\frac{1}{H} \\ \rho(z) &= \rho_0 e^{-\frac{z}{H}} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Die Größe $H = \frac{kT}{g\mu m_H}$ ist die *typische Skalenhöhe* und beträgt in der Erdatmosphäre etwa $H_{\text{Erde}} \cong 10 \text{ km}$.

Die oben angewandte planparallele Näherung (ebene Geometrie) funktioniert wie bemerkt für Sterne auf der Hauptreihe ($H \ll R_*$, $\frac{H}{R_*} \cong 10^{-3} \dots 10^{-5}$). Rote Riesensterne haben Skalenhöhen in der Größenordnung ihrer Radien ($H \cong R_*$), wodurch es zwingend ist, Gleichung (1.38) in sphärischer Geometrie zu lösen.

1.1.8 Bemerkungen zu Konvektion und Turbulenzen

In der Astrophysik versteht man unter *Konvektion* turbulente (auf-, ab-) Bewegungen, die Energie- und Impulstransport hervorrufen. Mit dem Begriff *Advektion* meint man laminare, gerichtete Strömungen (in der Strömungsmechanik wird zwischen diesen zwei Begriffen oft nicht unterschieden und beide Phänomene unter Konvektion subsummiert).

Erste Untersuchungen zu turbulenten Strömungen stammen von Ludwig Prandtl (1875-1935), der sich mit der zeitlichen Entwicklung von Turbulenzelementen (*eddys*) beschäftigte. Es zeigte sich, dass ein solches Turbulenzelement eine maximale Lebensdauer hat und dass man dessen *Mischungsweg* Λ (*mixing length*) über die Druckskalenhöhe H_p parametrisieren kann.

$$\Lambda = \alpha H_p, \quad \alpha \cong 1.5 \dots 2.5 \quad (1.42)$$

In Roten Riesen werden diese turbulenten Konvektionszonen sehr groß, da die Längenskala der *eddys* in der Größenordnung des Sternradius ist.

Numerische Rechnungen und Hubble-Bilder von Mira legen den Schluss nahe, dass derartig aufgeblähte Sterne stark von sphärischer Symmetrie abweichende Oberflächen besitzen.

1.1.9 Energiegleichung

Wir wollen die Energieänderung durch *Dissipation* (Umwandlung kinetischer in thermische bzw. innere Energie) oder Kräfte auf das Fluid studieren. Mit ϵ sei die *innere Energie pro Massenelement* bezeichnet. Sei wieder isotroper Druck angenommen.

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) dV = \int \vec{f} \vec{v} dV - \oint \underbrace{(\mathbf{T} \vec{v})}_{T^{ij} = p \delta^{ij}} d\vec{S}$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) + \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) \vec{\nabla} \vec{v} + \vec{\nabla} (p \vec{v}) = \vec{f} \vec{v} \quad (1.43)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right]}_{(1)} + \underbrace{\vec{\nabla} \left[\left(\rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 + p \right) \vec{v} \right]}_{(2)} = \underbrace{\vec{f} \vec{v}}_{(3)} \quad (1.44)$$

Es kamen wieder der Satz von Gauß, das RTT und die Definition der Materialableitung zur Verwendung. Gleichungen (1.43, 1.44, 1.48) heißen **Energiegleichung**. Beziehung (1.44) beschreibt, wie äußere Kräfte (3) und die zeitliche Änderung der inneren und der kinetischen Energie (1) sowie dem Impuls- bzw. Materietransport (2) im Eulerschen Bild zusammenhängen.

Betrachten wir die Bewegungsgleichung (1.34).

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \vec{f} - \vec{\nabla} p & | \vec{v} \\ \rho \vec{v} \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \vec{v} \vec{f} - (\vec{v} \vec{\nabla}) p \\ \frac{1}{2} \rho \frac{Dv^2}{Dt} &= \vec{v} \vec{f} - (\vec{v} \vec{\nabla}) p \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$(?) \rightarrow \rho \frac{D\epsilon}{Dt} + \rho (\vec{\nabla} \vec{v}) = 0 \quad (1.46)$$

In (1.45) wurde die Gleichung für die innere Energie (1.43) verwendet. Man kann die Energiegleichung auch noch ein wenig umschreiben, wenn man die *spezifische Enthalpie* h definiert.

$$h \equiv \epsilon + \frac{p}{\rho} \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \epsilon \rho \right] + \vec{\nabla} \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \rho \vec{v} \right] = 0 \quad (1.48)$$

Integriert man (1.48) wieder über ein beliebiges Volumen und wendet den Satz von Gauß auf den rechten Term an, so ist die zeitliche Änderung der Energie der Flüssigkeit gleich der Energiemenge, die pro Zeit aus dem betrachteten Volumen herausfließt

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = - \oint_O \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \rho \vec{v} \right] d\vec{S} \quad (1.49)$$

und den Vektor unter dem rechten Integral identifizieren wir als *Energiestromdichte*.

1.2 Lineare Wellen

1.2.1 Wellengleichung in einer Raumdimension

Wir betrachten kleine Störungen (Index 1) um eine stationäre Lösung (Index 0) und linearisieren die hydrodynamischen Gleichungen in ebener Geometrie. Seien $(p_0, \rho_0) = const$ und $u_0 = 0$ die

stationären Lösungen und die Störungen klein gegenüber diesen, d.h. $|X_1| < |X_0|$. Kontinuitätsgleichung, Bewegungsgleichung und Energiegleichung in ebener Geometrie lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) &= 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho u^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\rho \epsilon + p + \frac{1}{2} \rho u^2) u \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.50)$$

Wir linearisieren das Gleichungssystem nach der Vorschrift

$$X = X_0 + X_1$$

und vernachlässigen alle nichtlinearen Störterme ($\mathcal{O}(X_1^2) = 0$).

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad (1.51)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \quad (1.52)$$

Weiters handle es sich um eine adiabatische Strömung, das bedeutet es findet kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt. Somit lässt sich die **adiabatische Schallgeschwindigkeit** a definieren und sich die Zustandsgleichung wie folgt schreiben.

$$p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \rho_1 \equiv a^2 \rho_1 \quad (1.53)$$

Leiten nun (1.51) partiell nach t und (1.52) partiell nach x ab.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} &= 0 \\ \rightarrow \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.54)$$

Verwenden wir nun noch (1.53), so erhalten wir aus (1.54) eine **Wellengleichung** für die Störung ρ_1 mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit a .

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} = 0 \quad (1.55)$$

Um die Wellengleichung in 1 + 1 Dimensionen zu lösen, ist es hilfreich neue Variablen zu definieren.

$$\xi \equiv x - at, \quad \eta \equiv x + at \quad (1.56)$$

Somit ist $\rho_1 = \rho_1(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$ und die gemischten partiellen Ableitungen fallen weg $\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \end{aligned}$$

Die Lösung (*d'Alembert'sche Lösung für 1-dimensionale Wellengleichung*) ist ganz allgemein

$$\rho_1 = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x + at) + f_2(x - at). \quad (1.57)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen lässt sich durch Spezifikation der Zustandsgleichung bestimmen. Unter der Annahme idealen Gases ist die Schallgeschwindigkeit eine Funktion der Temperatur.

$$p = K\rho^\gamma \rightarrow a^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \quad (1.58)$$

$$p = \frac{R}{\mu}\rho T \rightarrow a^2 = \gamma \frac{RT}{\mu} = f(T) \quad (1.59)$$

1.2.2 Potentialströmung

Wir betrachten die Bewegungsgleichung und bilden die Rotation darauf.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left(\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \right) + \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} p_1)}_{=0} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{u}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

Den Ausdruck $(\vec{\nabla} \times \vec{u})$ nennt man **Vortizität** oder *Wirbelstärke* von \vec{u} . diese ist hier offenbar eine Erhaltungsgröße, d.h. zeitlich konstant. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir diese Konstante identisch Null. Unser Geschwindigkeitsfeld \vec{u}_1 ist also rotationsfrei und lässt sich als Gradient eines *Potentials* bzw. Skalarfeldes $\Phi(\vec{x}, t)$ ausdrücken.

$$\vec{\nabla} \Phi \equiv \vec{u}_1 \quad (1.61)$$

Beschränken wir uns wieder auf ebene Geometrie.

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + a^2 \rho_1 \right) &= 0 \end{aligned}$$

Hier kam wieder Gleichung (1.53) zur Verwendung. Es folgt also

$$\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + a^2 \rho_1 = F(t) = const \quad (1.62)$$

Mit geeigneten Anfangsbedingungen lässt sich die konstante Funktion $F(t)$ in (1.62) zu Null machen (?). Dann kann eine Wellengleichung für das Potential abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + a^2 \rho_1 &= 0 & \Big| \frac{\partial}{\partial t} \\ \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.63)$$

Ansatz (Ebene Welle in positiver x -Richtung). So, dass $\Phi \propto e^{i(kx-\omega t)}$ mit $a = \frac{\omega}{k}$.

Dann gilt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -a \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (1.64)$$

Betrachten wir nun wieder Gleichung (1.62) und verwenden obige Beziehung.

$$\begin{aligned} -a^2 \rho_1 &= \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \rho_1 &= -\frac{\rho_0}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ &= \frac{\rho_0}{a^2} \left(a \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\rho_0}{a} u_1 \end{aligned} \quad (1.65)$$

$$p_1 = a^2 \rho_1 = a \rho_0 u_1 \quad (1.66)$$

Folgerung. Der Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit der ebenen Welle und der Dichteänderung ist

$$u_1 = a \frac{\rho_1}{\rho_0}. \quad (1.67)$$

1.2.3 Akustische Wellen

Um Wellenphänomene im Fluid noch etwas genauer zu studieren, setzen wir unsere charakteristischen Größen - Dichte, Druck und Temperatur - als periodische Funktionen an.

Ansatz.

$$\begin{aligned} p_1 &= P e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{x})} \\ \rho_1 &= R e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{x})} \\ T &= \Theta e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{x})} \end{aligned} \quad (1.68)$$

Setzt man diesen Ansatz in die Wellengleichung (1.54) ein, lässt sich eine einfache *Dispersionsrelation* (1.69) ableiten.

$$\begin{aligned} R^2 i^2 \omega^2 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{x})} - a^2 R^2 i^2 k^2 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{x})} &= 0 \\ \rightarrow \omega^2 &= a^2 k^2 \end{aligned} \quad (1.69)$$

Folgerung. Alle Wellen bewegen sich mit der selben Geschwindigkeit. Die Phasengeschwindigkeit ist gegeben durch $a_{Ph} = \frac{\omega}{k}$ bzw. die Gruppengeschwindigkeit durch $a_{Gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$.

Sphärische Wellen:

Betrachten wir die Wellengleichung für p_1 in sphärischer Symmetrie (kugelsymmetrische Ausbreitung von Schallwellen).

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.70)$$

Setzen nun $p_1 = \frac{g(r,t)}{r}$ und erhalten

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = 0 \quad (1.71)$$

und mittels d'Alembert'scher Lösungsformel letztendlich die allgemeine Lösung für die Druckstörung p_1 .

$$p_1 = \frac{f_1(r - at)}{r} + \frac{f_2(r + at)}{r} \quad (1.72)$$

Folgerung. Die Amplitude der Welle nimmt also $\propto \frac{1}{r}$ ab, die Intensität $\propto \frac{1}{r^2}$.

Nehmen wir außerdem an, bei p_1 handle es sich um meine *monochromatischer Welle*.

$$p_1 = P \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \quad (1.73)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \left(k - \frac{i}{r}\right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \omega\right) \vec{r} \\ \vec{u}_1 &= \frac{k}{\omega} \frac{\rho_1}{\rho_0} \vec{r} \end{aligned} \quad (1.74)$$

Energie und Impuls von Schallwellen:

Wir wollen einen Ausdruck für die Energie einer Schallwelle ableiten. Betrachten wir zunächst die linearisierte Impuls- und die Kontinuitätsgleichung.

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} &= 0 \quad |u_1 \\ \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial u_1^2}{\partial t} &= -u_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 u_1^2) &= -u_1 a^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{\rho_0 a^2} \frac{\partial p_1}{\partial t} &= -\frac{\partial u_1}{\partial x} \quad |p_1 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_1^2}{\rho_0 a^2}\right) &= -p_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.76)$$

Sei die spezifische innere Energie wieder mit ϵ bezeichnet. Wir entwickeln $\rho\epsilon$ bis zur zweiten Ordnung.

$$\rho\epsilon = \rho_0\epsilon_0 + \left(\frac{\partial \rho\epsilon}{\partial \rho_0}\right)_S \rho_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho\epsilon}{\partial \rho_0^2}\right)_S \rho_1^2 + \mathcal{O}(\rho_1^3) \quad (1.77)$$

Der zweite HS der Thermodynamik lautet

$$d\epsilon = TdS - pdV \quad (1.78)$$

und es gilt

$$dV = d\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\rho^2} d\rho. \quad (1.79)$$

Gleichung (1.78) lässt sich also wie folgt umschreiben.

$$d\epsilon = TdS + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (1.80)$$

Beziehung (1.80) kann man nun verwenden, um die Enthalpie h auszudrücken um letztendlich

(1.82) in obige Entwicklung für $\rho\epsilon$ einzusetzen.

$$\left(\frac{\partial\rho\epsilon}{\partial\rho}\right)_S = h = \epsilon + \frac{p}{\rho} \quad (1.81)$$

$$\begin{aligned} dh &= \underbrace{d\epsilon + pd\left(\frac{1}{\rho}\right)}_{=0 \text{ für } S=\text{const}} + \frac{1}{\rho}dp \\ dh &= \frac{1}{\rho}dp \\ \frac{dh}{dp} &= \frac{1}{\rho} \end{aligned} \quad (1.82)$$

Wir können also nun (1.81) in Gleichung (1.77) einsetzen und erhalten für die Entwicklung der inneren Energie. Da die betrachteten Vorgänge in Schallwellen adiabatisch ablaufen, werden die Ableitungen bei konstanter Entropie S gebildet.

$$\rho\epsilon = \rho_0\epsilon_0 + h_0\rho_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dh}{d\rho}\right)_S \rho_1^2 + \dots \quad (1.83)$$

$$\left(\frac{\partial^2\rho\epsilon}{\partial\rho^2}\right)_S = \left(\frac{dh}{d\rho}\right)_S = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_S \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S = \frac{a^2}{\rho} \quad (1.84)$$

$$\begin{aligned} \rho\epsilon &= \rho_0\epsilon_0 + h_0\rho_1 + \frac{1}{2}\frac{a^2\rho_1^2}{\rho_0} \\ &= \underbrace{\rho_0\epsilon_0}_{(1)} + \underbrace{h_0\rho_1}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\rho_1^2}{\rho_0 a^2}}_{(3)} \end{aligned} \quad (1.85)$$

Gleichung (1.85) beschreibt die **innere Energie des Fluids pro Volumen**.

(1) ist der ungestörte Term und entspricht der Energie der ruhenden Flüssigkeit pro Volumeneinheit (unabhängig von der akustischen Welle). Ausdruck (2) ist ein Transportterm, der mit der Änderung der Menge des Fluids pro Volumen zusammenhängt und Term (3) beschreibt die Kompressionsenergie.

Die Energiegleichung (1.48) geht in dieser Entwicklung über in

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho_0 u_1^2 + \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{\rho_0 a^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x}(u_1 p_1). \quad (1.86)$$

Ein Vergleich mit (1.76) zeigt, dass hier der Term zweiter Ordnung mitgenommen werden muss. Definiert man außerdem die **Wellen-Energiedichte** ϵ_W

$$\epsilon_W \equiv \frac{1}{2}\rho_0 u_1^2 + \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{\rho_0 a^2} \quad (1.87)$$

und den **Wellen-Energiefluss** $\vec{\Phi}_W$

$$\vec{\Phi}_W \equiv p_1 \vec{u}_1 \quad (1.88)$$

lässt sich die Energiegleichung kompakter schreiben (1.89).

$$\frac{\partial\epsilon_W}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\Phi}_W \quad (1.89)$$

1.3 Stoßwellen

1.3.1 Ebene Stoßwellen

Wir wollen kurz einige grundlegende Überlegungen zu Stoßwellen, also Unstetigkeiten im Rahmen der Hydrodynamik wiederholen. Wir betrachten ebene Wellen und nähern die Stoßfront der Welle durch eine infinitesimale Grenzfläche, welche die Region vor (1) und hinter dem Stoß (2) trennt. Das Koordinatensystem möge sich mit der Stoßgeschwindigkeit u_S bewegen, sodass die Unstetigkeit in diesem Bild ruht. Durch die *Rankine-Hugoniot-Bedingungen* werden Massen-, Impuls-, und Energieerhaltung ausgedrückt.

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 &= \rho_2 u_2^2 + p_2 \\ \frac{u_1^2}{2} + \underbrace{\frac{p_1}{\rho_1}}_{\equiv h_1} + \epsilon_1 &= \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + \epsilon_2 \end{aligned} \quad (1.90)$$

Die innere Energie eines idealen Gases ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{pV}{\gamma - 1} \\ &= \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} \end{aligned} \quad (1.91)$$

und die Energieerhaltung lässt sich auf den Ausdruck (1.92) umformen.

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{p_1}{\rho_1(\gamma - 1)} + \frac{u_1^2}{2} &= \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{p_2}{\rho_2(\gamma - 1)} + \frac{u_2^2}{2} \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \end{aligned} \quad (1.92)$$

Sei ζ das *spezifische Volumen* ($\zeta \equiv \frac{1}{\rho}$), dann lässt sich aus der Massenerhaltung die Geschwindigkeit der Teilchen vor und hinter dem Stoß in folgende Relation bringen

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \quad (1.93)$$

und die Enthalpiebilanz lautet

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(\zeta_1 + \zeta_2). \quad (1.94)$$

Trägt man nun das spezifische Volumen gegen den Druck auf, erhält man eine hyperbolische Kurve (*Hugoniot-Kurve* oder *Stoßadiabate* Abb. 1.2) für die Stoßwelle. Für eine gegebene Anfangskonfiguration (ζ_0, p_0) erhält man ein eindeutiges Wertepaar (ζ_1, p_1) nach dem Stoß. Entlang dieser Kurve nimmt die Entropie von rechts nach links zu. Eine solche *Entropiebedingung* kann unter mehrdeutigen Lösungen (z.B. numerisch) die physikalische selektieren.

Mit Hilfe der adiabatischen Schallgeschwindigkeit (1.53) a lässt sich eine weitere wichtige Größe, die **Machzahl** M definieren.

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \quad (1.95)$$

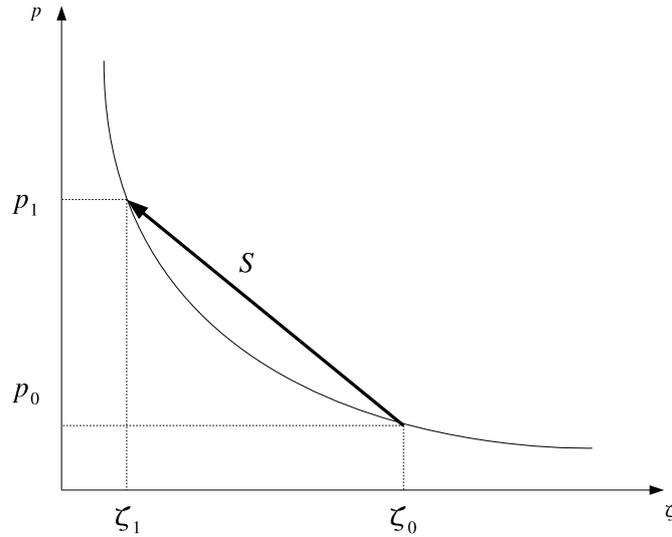


Abbildung 1.2: Hugoniot-Kurve

$$\begin{aligned} \frac{u_1^2}{a_1^2} \equiv M_1^2 &= \frac{(\gamma - 1) + (\gamma + 1)\frac{p_2}{p_1}}{2\gamma} > 1 \\ \frac{u_2^2}{a_2^2} \equiv M_2^2 &= \frac{(\gamma - 1) + (\gamma + 1)\frac{p_1}{p_2}}{2\gamma} < 1 \end{aligned} \quad (1.96)$$

Aus $p_2/p_1 > 1$ folgt also, dass $M_1^2 > 1$, $M_2^2 < 1$ und dass $u_1 > a_1$ bzw. $u_2 < a_2$.

Folgerung. Eine ebene Stoßwelle stellt immer einen Überschall-Unterschall-Übergang dar.

Wir interessieren uns nun dafür, wie sich die Drücke vor und hinter dem Stoß zueinander verhalten. Betrachten zunächst den Ausdruck

$$\frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} = \frac{\gamma - 1}{\underbrace{\gamma + 1}_{\equiv \mu^2}} + \frac{p_2}{p_1}$$

dann folgt

$$\frac{[(\gamma - 1) + (\gamma + 1)]M_1^2}{\gamma + 1} - \frac{p_2}{p_1} = \mu^2 \quad (1.97)$$

und das Druckverhältnis ist gegeben durch Gleichung (1.98).

$$\frac{p_2}{p_1} = (1 + \mu^2)M_1^2 - \mu^2 > 1 \quad (1.98)$$

Verfolgt man die Teilchenbahnen anfänglich ruhender Teilchen ($v_1 = 0$) in einem fixen Koordinatensystem, wo sich der Stoß eben mit u_S fortpflanzt (Abb. 1.3), so erkennt man, dass sie nach dem Stoß mit einer Geschwindigkeit $v_2 < u_S$ hinter der Stoßwelle herlaufen und die Teilchenbahnen näher zusammenrücken.

Folgerung. Die Stoßwelle führt zu Kompression des Mediums. Ein anfänglich ruhendes Fluid ($v_1 = 0$) wird durch den Stoß in Bewegung versetzt und läuft mit einer Geschwindigkeit $v_2 < u_S$ hinter der Stoßfront her.

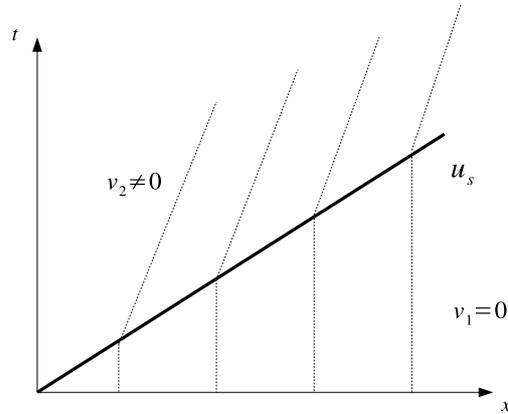


Abbildung 1.3: Bewegte Stoßfront und Teilchenbahnen

1.3.2 Stoßgeschwindigkeit

Bisher ist die Stoßgeschwindigkeit u_s noch unbestimmt, da ein Bezugssystem gewählt wurde, in dem der Stoß ruht. Betrachten wir nun eine Stoßwelle, die durch einen mit u_p bewegten Kolben hervorgerufen wird. Seien $v_{(1,2)}$ die Geschwindigkeiten der Teilchen vor bzw. nach der Stoßwelle (Abb. 1.3).

$$u_1 = v_1 - u_s, \quad u_2 = v_2 - u_s$$

Wir definieren eine *charakteristische Geschwindigkeit* der Teilchen a_* .

$$a_*^2 \equiv u_1 u_2 \tag{1.99}$$

Setzt man den Massenstrom $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \equiv m$ in die Impulserhaltung ein, lässt sich a_*^2 folgendermaßen darstellen.

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1^2 + p_1 &= \rho_2 u_2^2 + p_2 \\ m u_1 + p_1 &= m u_2 + p_2 \\ \rho_2 u_2 u_1 + p_1 &= \rho_1 u_1 u_2 + p_2 \\ u_2 u_1 (\rho_2 - \rho_1) &= p_2 - p_1 \\ \rightarrow u_1 u_2 &= \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \end{aligned} \tag{1.100}$$

$$\begin{aligned} a_*^2 &= (v_1 - u_s)(v_2 - u_s) \\ &= \mu^2 (v_1 - u_s)^2 + (1 - \mu^2) a_1^2 \\ &= \mu^2 (v_2 - u_s)^2 + (1 - \mu^2) a_2^2 \end{aligned}$$

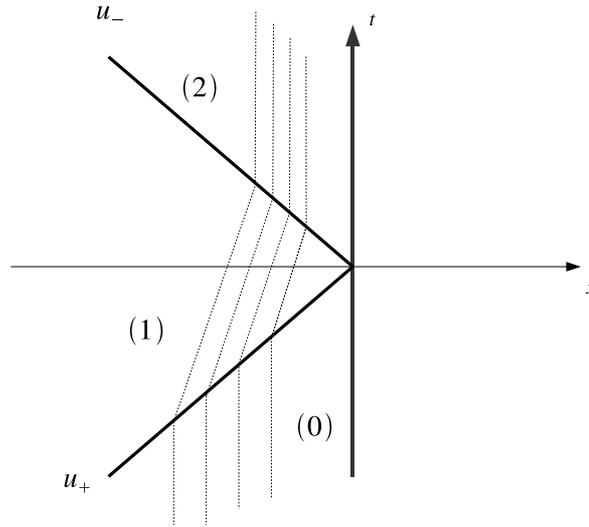


Abbildung 1.4: Stoßreflexion

$$\begin{aligned}
 \rightarrow -u_S(u_p - u_S) &= \mu^2(-u_S)^2 + (1 - \mu^2)a_1^2 \\
 u_S u_p + u_S^2 &= \mu^2 u_S^2 + (1 - \mu^2)a_1^2 \\
 (1 - \mu^2)u_S^2 - u_p u_S - (1 - \mu^2)a_1^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.101}$$

Man erhält also eine quadratische Gleichung für die Geschwindigkeit der Stoßwelle u_S .

$$u_{S(1,2)} = \frac{u_p \pm \sqrt{u_p^2 + 4(1 - \mu^2)a_1^2}}{2(1 - \mu^2)} \tag{1.102}$$

Verlangt man weiters $u_p > 0$ (\rightarrow keine *Verdünnungsfront*) und definiert $v \equiv \frac{u_p}{2(1 - \mu^2)}$, so ist die **Stoßgeschwindigkeit** durch Gleichung (1.103) gegeben.

$$u_s = \sqrt{v^2 + a_1^2} + v \tag{1.103}$$

[31.10.2006]

1.3.3 Stoßreflexion

Es sei eine Konfiguration gegeben, bei der eine Stoßwelle auf ein Hindernis trifft und reflektiert wird. Die Stoßfront breite sich entlang der positiven x -Achse aus, bis sie bei t_0 auf eine Barriere trifft und auf der negativen x -Achse zurückläuft. Betrachtet man Teilchenbahnen, so erhalten anfänglich ruhende (1) Teilchen eine Geschwindigkeit (2), wenn die Stoßwelle über sie hinwegläuft und werden wieder abgebremst (3), wenn die reflektierte Welle sie trifft. Dabei rücken die Teilchenbahnen näher zusammen, sodass das Medium in Region (3) komprimiert ist, d.h. eine größere Dichte als vor den Schocks aufweist (abb 1.4).

Es sind also bei gegebenen Anfangsdaten ($u_0 = 0, \rho_0, p_0$) die Größen (u_2, ρ_2, p_2) gesucht. Sei U_+ die Stoßgeschwindigkeit vor und U_- jene nach dem Hindernis; mit a_i werden die Schallgeschwindigkeiten in den Regionen ($i = 0, 1, 2$) bezeichnet.

Analog zu (1.101) lassen sich auch hier die Stoßgeschwindigkeit U_{\pm} , die Schallgeschwindigkeit a_i und die Geschwindigkeit des Materials u_i in Relation zueinander bringen. Betrachten wir Region (1).

$$(U_{\pm} - u_1)^2 + \frac{(U_{\pm} - u_1)u_1}{1 - \mu^2} - a_1^2 = 0 \quad (1.104)$$

$$\begin{aligned} M_+ &= \frac{u_1 - U_+}{a_1} < 0 \\ M_- &= \frac{u_1 - U_-}{a_1} > 0 \end{aligned} \quad (1.105)$$

Dividiert man Gleichung (1.104) durch a_1^2 und setzt obige Beziehungen ein, ergibt sich eine quadratische Gleichung für M_{\pm} .

$$M_{\pm}^2 - \frac{M_{\pm}u_1}{(1 - \mu^2)a_1} - 1 = 0 \quad (1.106)$$

Definieren eine Hilfsvariable $X \equiv u_1/a_1(1 - \mu^2)$, dann erhalten wir Ausdruck (1.107).

$$\begin{aligned} M_{\pm} &= \frac{X}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{X}{2}\right)^2 + 1} \\ \rightarrow \quad M_- M_+ &= \left(\frac{X}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{X}{2}\right)^2 + 1\right] \\ M_- M_+ &= -1 \end{aligned} \quad (1.107)$$

Betrachten wir nun den Drucksprung Δp

$$\Delta p \equiv \frac{p_2 - p_0}{p_1 - p_0} \quad (1.108)$$

und verwenden das Resultat (1.98) aus dem vorigen Abschnitt.

$$\frac{p_2}{p_1} = (1 + \mu^2)M_-^2 - \mu^2, \quad \frac{p_1}{p_0} = (1 + \mu^2)M_+^2 - \mu^2 \quad (1.109)$$

Dividieren (1.108) durch p_1 und setzen die Ausdrücke (1.109) ein, außerdem kommt Relation

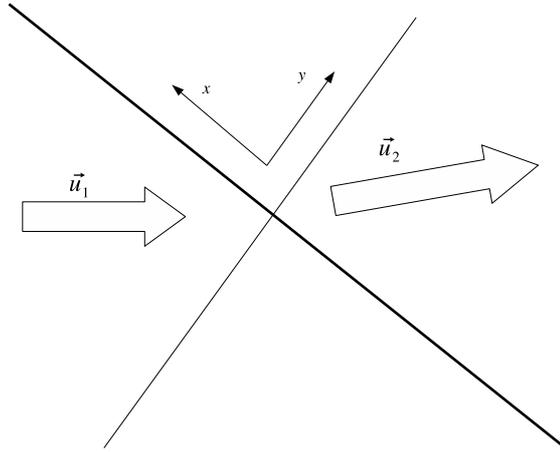


Abbildung 1.5: Schräge Stoßwelle

(1.107 zum Einsatz.

$$\begin{aligned}
 \Delta p &= \frac{\frac{p_2}{p_1} - \frac{p_0}{p_1}}{1 - \frac{p_0}{p_1}} \\
 &= \frac{(1 + \mu^2)M_-^2 - \mu^2 - \frac{1}{(1+\mu^2)M_+^2 - \mu^2}}{1 - (1 + \mu^2)M_+^2 - \mu^2} \\
 &= \frac{(1 + \mu^2)\frac{1}{M_+} - \mu^2 - \frac{1}{(1+\mu^2)M_+^2 - \mu^2}}{1 - \frac{1}{(1+\mu^2)M_+^2 - \mu^2}} \\
 &= \frac{((1 + \mu^2)\frac{1}{M_+})((1 + \mu^2)M_+^2 - \mu^2) - 1}{(1 + \mu^2)M_+^2 - \mu^2 - 1} \\
 &= \frac{(1 + \mu^2) - \mu^2(M_+^2 + \frac{1}{M_+^2} + \mu^2 - 1)}{M_+^2 - 1} \\
 &= \frac{2\mu^2 - \mu^2 \left(\frac{M_+^2 + 1}{M_+^2} \right)}{M_+ - 1} \\
 &= \frac{-\mu^2(-2M_+^2 + M_+^4 + 1)\frac{1}{M_+^2}}{M_+^2 - 1} \\
 &= -\frac{\mu^2(1 - M_+^2)}{M_+^2} \tag{1.110}
 \end{aligned}$$

Folgerung. Gleichung (1.110) beschreibt den Drucksprung im Medium nach einer reflektierten Stoßwelle in Abhängigkeit von Machzahl und Adiabatenindex.

1.3.4 Schräge Stoßwellen

Betrachten wir eine ebene Front in stationärer Konfiguration; nun soll jedoch das Geschwindigkeitsfeld der Gasströmung schräg auf die Stoßfront treffen. Es kommt zu einer Art Brechung hin zur Welle. Mit anderen Worten nimmt die Normalkomponente der Geschwindigkeit beim Durchgang ab, die Tangentialkomponente ändert sich nicht. Die x -Koordinate sei parallel zum

Stoß, die y -Achse stehe lotrecht. Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen lauten

$$\begin{aligned}\rho_1 u_{1x} &= \rho_2 u_{2x} \\ \rho_1 u_{1x}^2 + p_1 &= \rho_2 u_{2x}^2 + p_2 \\ h_1 + \frac{1}{2} \vec{u}_1^2 &= h_2 + \frac{1}{2} \vec{u}_2^2\end{aligned}\quad (1.111)$$

mit der Bedingung, dass die y -Komponente der Geschwindigkeit unverändert ist ($u_{1y} = u_{2y}$).

$$\begin{aligned}p_2 - p_1 &= \rho_1 u_{1x}^2 - \rho_2 u_{2x}^2 \\ &= \rho_1 u_{1x}^2 - \rho_1 u_{1x} u_{2x} \\ &= \rho_1 \left[u_{1x}(u_{1x} - u_{2x}) + u_{1y} \underbrace{(u_{1y} - u_{2y})}_{=0} \right]\end{aligned}$$

Sei das spezifische Volumen wieder mit ζ bezeichnet ($\zeta = \frac{1}{\rho}$).

$$\begin{aligned}\zeta_1(p_2 - p_1) &= \vec{u}_1(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \\ \zeta_2(p_1 - p_2) &= \vec{u}_2(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)\end{aligned}\quad (1.112)$$

$$\begin{aligned}(p_2 - p_1)(\zeta_1 - \zeta_2) &= \vec{u}_1(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) - \vec{u}_2(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \\ &= (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)^2\end{aligned}\quad (1.113)$$

Wie bei den ebenen Stoßfronten (1.101) gilt

$$\mu^2 u_1^2 + (1 - \mu^2) a_1^2 = \mu^2 u_2^2 + (1 - \mu^2) a_2^2 \equiv a_*^2 \quad (1.114)$$

und können das Druckverhältnis vor und hinter der Stoßwelle wie folgt schreiben.

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\mu^2 \zeta_2 - \zeta_1}{\mu^2 \zeta_1 - \zeta_2} \quad (1.115)$$

Es soll im Folgenden plausibel gemacht werden, dass es bei schrägen Stößen keine Einschränkung an die Geschwindigkeit hinter dem Stoß gibt, also es durchaus zu *Überschall-Überschall-Übergängen* kommen kann.

$$\begin{aligned}\mu^2(u_{1x}^2 + u_{1y}^2) + (1 - \mu^2)a_1^2 &= a_*^2 \\ \mu^2 u_{1x}^2 + a_1^2(1 - \mu^2) &= a_*^2 - \mu^2 u_{1y}^2 \\ u_{1x} u_{2x} &= a_*^2 - \mu^2 u_{1y}^2\end{aligned}\quad (1.116)$$

Betrachten wir den Ausdruck $\vec{u}_1 \vec{u}_2$ und verwenden (1.116).

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \vec{u}_2 &= u_{1x} u_{2x} + u_{1y} u_{2y} \\ &= u_{1x} u_{2x} + u_{1y}^2 \\ &= a_*^2 - \mu^2 u_{1y}^2 + u_{1y}^2 \\ &= a_*^2 - u_{1y}^2(1 - \mu^2)\end{aligned}\quad (1.117)$$

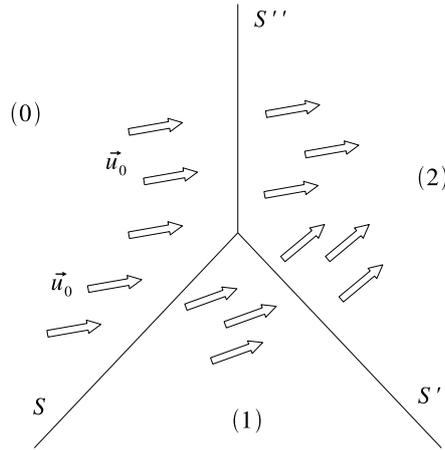


Abbildung 1.6: Machkonfiguration

Da $\mu^2 < 1$, folgt für schrägen Stoßwellen

$$\vec{u}_1 \vec{u}_2 > a_*^2. \quad (1.118)$$

Es kommt zu Kompression ($u_{1x} > u_{2x}$) des Mediums und zu einer Überschallströmung vor dem Stoß ($u_{1x} > a$). Im ebenen Fall gibt es die Einschränkung $u_2 < a$, im Hinterland der Stoßfront herrscht also stets eine Unterschallströmung. Bei schrägen Stoßwellen ist die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit des Fluids jedoch stetig ($u_{1y} = u_{2y}$) und daher nicht weiter beschränkt.

Folgerung. Bei schrägen Stoßwellen gibt es keine Einschränkung an die Geschwindigkeit des Mediums nach dem Stoß. Daher kann es auch zu Überschall-Überschall-Übergängen kommen.

[07.11.2006]

1.3.5 Mach-Konfiguration

Betrachten wir drei sternförmig angeordnete Stoßwellen (S, S', S''). Läuft ein Materiestrom \vec{u} über den Schock, wird er zur Welle hin gebrochen (Abb. 1.6).

Sei der Drucksprung zwischen zwei Regionen ($i, k = 0, 1, 2$) wieder gegeben durch

$$\frac{p_i}{p_k} = \frac{\lambda \rho_k - \rho_i}{\lambda \rho_i - \rho_k}$$

wobei $\lambda = \mu^2$. Dann ergibt der (trivial erfüllte) Ausdruck

$$\frac{p_0}{p_1} \frac{p_1}{p_2} \frac{p_2}{p_0} = 1$$

ein Polynom zweiten Grades in λ (Term λ^3 fällt weg).

$$(\lambda \rho_1 - \rho_0)(\lambda \rho_2 - \rho_1)(\lambda \rho_0 - \rho_2) - (\lambda \rho_0 - \rho_1)(\lambda \rho_1 - \rho_2)(\lambda \rho_2 - \rho_0) = 0 \quad (1.119)$$

Ein Polynom zweiter Ordnung mit drei Nullstellen kann aber nur identisch Null sein. Das führt zum Widerspruch

$$\rho_0 = \rho_1 = \rho_2. \quad (1.120)$$

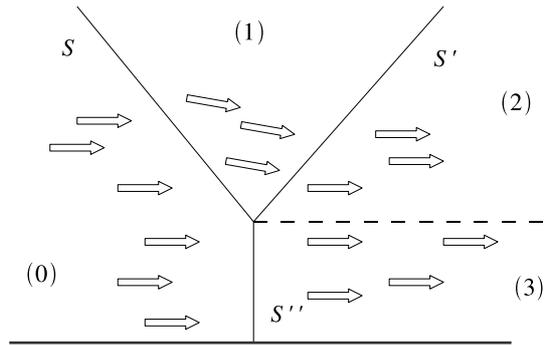


Abbildung 1.7: Stationäre Machkonfiguration

Die Interpretation dieses Ergebnisses ist, dass ein einziger Zustand (2) nicht das gesamte rechte Raumgebiet charakterisieren kann.

Folgerung. Bei gleichem Anfangszustand (ρ_0, \vec{u}_0) ist es nicht möglich, dass man beim Durchgang durch zwei schräge Stoßwellen zum selben Zustand gelangt, wie beim Durchgang durch nur eine schräge Stoßwelle (Ernst Mach).

Das obige Bild muss also um eine Region (3) erweitert werden, die durch eine **Kontaktdiskontinuität** von Region (2) getrennt ist. Entlang der Grenzflächen können z.B. gleiche Strömungsgeschwindigkeiten jedoch unterschiedliche Dichten und Drücke herrschen. Eine solche Mach'sche Konfiguration bildet sich stationär aus, wenn eine Stoßwelle schräg auf ein Hindernis trifft (Abb. 1.7).

Ein prominentes Beispiel aus der Astrophysik sind Jets, wo sich Stoßwellen bilden, die das umströmende Material fokussieren und so teilweise dafür verantwortlich sind, dass der Jet im ISM kollimiert wird (Abb. 1.8). Warum das Verhältnis von Dicke zu Länge dieser Objekte $\sim 1/10000$ beträgt ist jedoch noch nicht vollständig verstanden.

1.4 Instabilitäten

Sei die (x, y) -Ebene Grenzfläche zwischen zwei Konfigurationen (ρ_1, \vec{u}_1) , (ρ_2, \vec{u}_2) und die beiden Geschwindigkeiten \vec{u}_i parallel in x -Richtung. z_S sei eine kleine Störung in horizontaler Richtung (x, y -Ebene) mit Amplitude ζ

$$z_S = \zeta e^{(i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t)} \quad (1.121)$$

wobei $\vec{k}_h = (k_x, k_y, 0)$ und $k_h = |\vec{k}_h|$. Sei weiters angenommen, dass die Strömungsfelder \vec{u}_i wirbelfrei sind, es sich also in beiden Regionen um eine Potentialströmung handelt.

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{u} = \vec{\nabla} \phi \quad \rightarrow \quad \Delta \phi = 0$$

Wir suchen Lösungen, die an der Grenzfläche stetig ineinander übergehen, also insbesondere die Normalkomponenten der gestörten Größen. Die Störung in \vec{u}_i sei proportional $e^{i\vec{k}_h \vec{r}}$, und mit der Forderung, dass ϕ die Laplace-Gleichung erfüllt ergibt sich folgender Ansatz. Konvention:

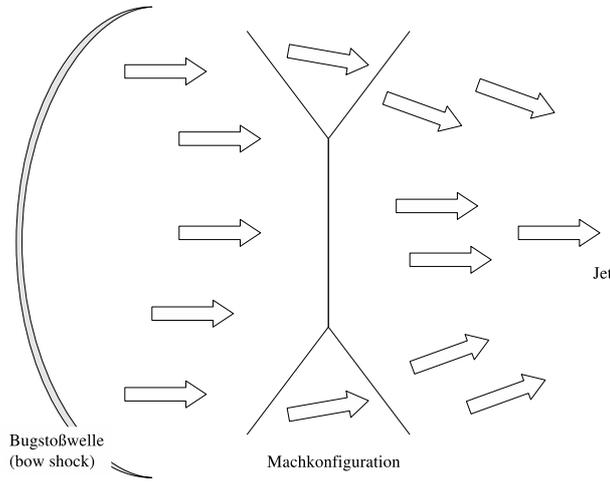


Abbildung 1.8: Fokussierung des Materials bei einem Jet

positives Vorzeichen für Lösungen $z < 0$, negatives für $z > 0$.

$$\begin{aligned}\phi_1 &= u_1 x + \psi_1 e^{(-k_h z + i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t)} \\ \phi_2 &= u_2 x + \psi_2 e^{(+k_h z + i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t)}\end{aligned}\quad (1.122)$$

Die Normalkomponente der Geschwindigkeit der Störung an der Oberfläche lautet

$$\vec{u} = ik_x \zeta (i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t) \vec{e}_x - ik_y \zeta (i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t) \vec{e}_y + \vec{e}_z \quad (1.123)$$

und die Geschwindigkeit der Störung aufgrund der Versetzung ist gegeben durch

$$\frac{\partial z_S}{\partial t} = -i\omega \zeta e^{(i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t)} \quad (1.124)$$

sodass an der Grenzfläche $z = 0$ die Geschwindigkeit u_1 durch folgende Relation gegeben ist ((1.122),(1.123) \rightarrow (1.125)).

$$\vec{\nabla} \phi_1 = \vec{u}_1 = \left(u_1 + ik_x \psi_1 e^{(i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t)} \right) \vec{e}_x + \left(ik_y \psi_1 e^{(i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t)} \right) \vec{e}_y + \left(k_h \psi_1 e^{(i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t)} \right) \vec{e}_z \quad (1.125)$$

Die Komponente parallel zur Störung (Normalkomponente) auf beiden Seiten der Grenzfläche muss also jeweils gleich (1.124) sein.

$$\begin{aligned}-ik_x \zeta u_1 e^{(i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t)} - k_h \psi_1 e^{(i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t)} &= -i\omega \zeta e^{(i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t)} \\ ik_x \zeta u_2 e^{(i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t)} - k_h \psi_2 e^{(i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t)} &= -i\omega \zeta e^{(i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t)}\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}-ik_x \zeta u_1 - k_h \psi_1 &= -i\omega \zeta \\ ik_x \zeta u_2 - k_h \psi_2 &= -i\omega \zeta\end{aligned}\quad (1.126)$$

Betrachten wir die Eulergleichung für eine wirbelfreie Strömung mit äußeren Kräften (Potential

V , sodass $\vec{F} = -\rho\vec{\nabla}V$).

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}u^2\right) - \underbrace{\vec{u} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}}_{=0} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}V = 0 \quad (1.127)$$

Da wir eine Potentialströmung \vec{u} betrachten, lässt sich mit der kurzen Nebenrechnung

$$\vec{\nabla} \int \frac{dp}{\rho} = \int \vec{\nabla} \frac{dp}{\rho} = \int \vec{\nabla} p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$

ableiten, dass der eingeklammerte Ausdruck in (1.128) räumlich konstant ist.

$$\vec{\nabla} \underbrace{\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2 + \int \frac{dp}{\rho} + V\right)}_{\text{räumlich konstant}} = 0 \quad (1.128)$$

Setzt man für V nun ein Gravitationspotential an, ergibt sich

$$p = -\rho \left(gz + \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u_\infty^2 \right). \quad (1.129)$$

Hier ist $\frac{1}{2}u_\infty^2$ die Integrationskonstante und g die Schwerebeschleunigung. Um eine hydrostatische Lösung zu erhalten, muss eine hydrostatische Anfangsbedingung der Form

$$\vec{\nabla}p = -g\rho \quad (1.130)$$

eingeführt werden. Setzen wir nun unseren Ansatz für die Störung in (1.129) ein und betrachten die Grenzfläche $z = 0$ an der oberen und unteren Seite. Der Geschwindigkeitsterm wird bis zur ersten Ordnung in eine Reihe entwickelt.

$$p_+(z=0) = -\rho_1 (g\zeta - i\omega\psi_1 + u_1 i k_1 \psi_1) e^{(i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t)}$$

$$p_-(z=0) = -\rho_2 (g\zeta - i\omega\psi_2 + u_2 i k_2 \psi_2) e^{(i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t)} \quad (1.131)$$

$$(1.132)$$

Aus (1.126) erhalten wir die Amplituden der Störung in \vec{u}

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{i\omega\zeta - ik_x u_1 \zeta}{k_h} \\ \psi_2 &= \frac{-i\omega\zeta + ik_x u_2 \zeta}{k_h} \end{aligned} \quad (1.133)$$

die wir in (1.131) einsetzen. Die Amplitude ζ muss sich mit dem Ansatz linearer Störungen immer herauskürzen.

$$\begin{aligned} -\rho_1 \left[g\zeta + (-i\omega + u_1 i k_x) \left(\frac{i\omega\zeta - ik_x u_1 \zeta}{k_h} \right) \right] &= -\rho_2 \left[g\zeta + (-i\omega + u_2 i k_x) \left(\frac{-i\omega\zeta + ik_x u_2 \zeta}{k_h} \right) \right] \\ -\rho_1 \left[g - \frac{1}{k_h} (-i\omega + ik_x u_1)^2 \right] &= -\rho_2 \left[g + \frac{1}{k_h} (-i\omega + ik_x u_2)^2 \right] \\ \rho_1 \left[g + \frac{1}{k_h} (\omega - k_x u_1)^2 \right] &= \rho_2 \left[g - \frac{1}{k_h} (\omega - k_x u_2)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.134)$$

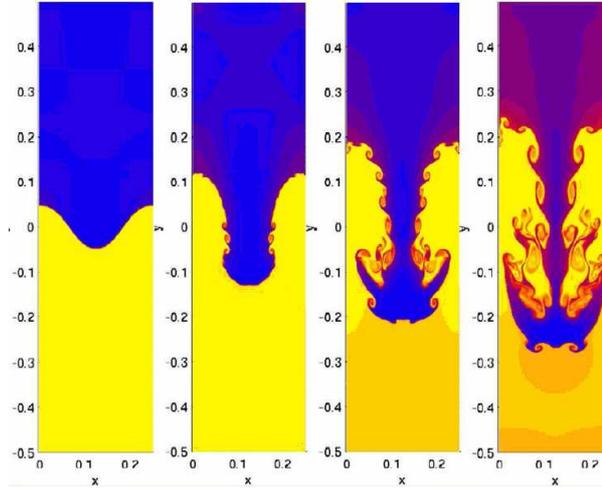


Abbildung 1.9: Rayleigh-Taylor-Instabilität (Quelle: wikipedia.org)

Dies führt auf eine quadratische Gleichung für ω .

$$\begin{aligned} (\rho_2 g - \rho_1 g)k_h + \rho_1(\omega^2 - 2k_x u_1 \omega + k_x^2 + \omega^2) + \rho_2(\omega^2 - 2k_x u_2 \omega + k_x^2 + \omega^2) &= 0 \\ (\rho_1 + \rho_2)\omega^2 - 2k_x(\rho_2 u_2 + \rho_1 u_1)\omega + k_x^2(\rho_1 u_1^2 + \rho_2 u_2^2) - (\rho_2 - \rho_1)gk_h &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \frac{2k_x(\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2) \pm \sqrt{4k_x^2(\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2)^2 + 4(\rho_1 + \rho_2)[(\rho_2 - \rho_1)gk_h - k_x^2(\rho_1 u_1^2 + \rho_2 u_2^2)]}}{2(\rho_1 + \rho_2)} \\ &= \frac{k_x(\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2)}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{k_x^2(\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} + \frac{(\rho_2 - \rho_1)gk_h - k_x^2(\rho_1 u_1^2 + \rho_2 u_2^2)}{\rho_1 + \rho_2}} \\ &= \dots \pm \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)gk_h}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{k_x^2(\rho_1 u_1^2 + 2\rho_1 \rho_2 u_1 u_2 + \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 - \rho_1 \rho_2 u_2^2 - \rho_1 \rho_2 u_1^2 - \rho_2 u_2^2)}{(\rho_1 + \rho_2)^2}} \\ &= \frac{k_x(\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2)}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)gk_h}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{k_x^2 \rho_1 \rho_2 (u_1 - u_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}} \end{aligned} \quad (1.135)$$

Gleichung (1.135) ist die *Dispersionsrelation*, die wir für unseren Ansatz (1.121) erhalten. Man unterscheidet nun im Wesentlichen drei Fälle.

Wasserwellen: $\rho_1 \ll \rho_2$, $u_1 = u_2 = 0$

Ruht das Fluid im Schwerfeld und befindet sich das weniger dichte oberhalb des dichteren, reduziert sich die Dispersionsrelation auf

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{gk_h} \quad (1.136)$$

und man erhält zum Beispiel Wasserwellen mit folgenden Phasen- (v_p) und Gruppengeschwindigkeiten (v_g)

$$\begin{aligned} v_p &= \pm \frac{\omega}{k_h} = \pm \sqrt{\frac{g}{k_h}} \\ v_g &= \frac{d\omega}{dk_h} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k_h}} = \pm \frac{1}{2} v_p \end{aligned} \quad (1.137)$$

Folgerung. Die Phasengeschwindigkeit steigt mit der Wellenlänge ($\lambda = \frac{1}{k_h}$); ω ist reell,

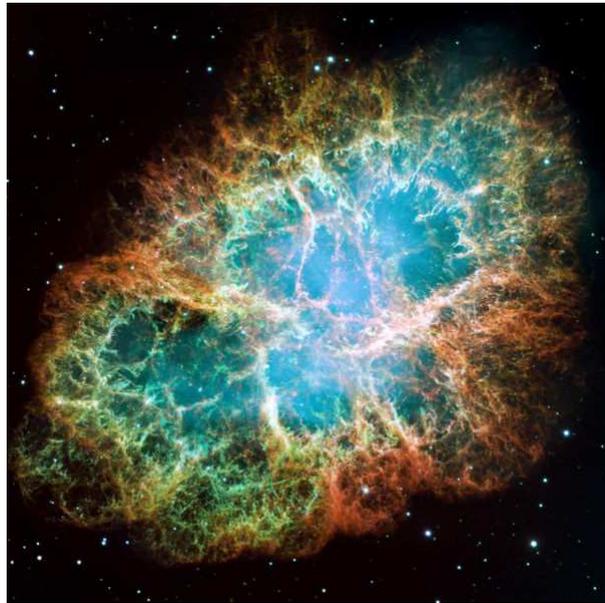


Abbildung 1.10: Krebsnebel mit RT-Fingern (*Quelle: wikipedia.org*)

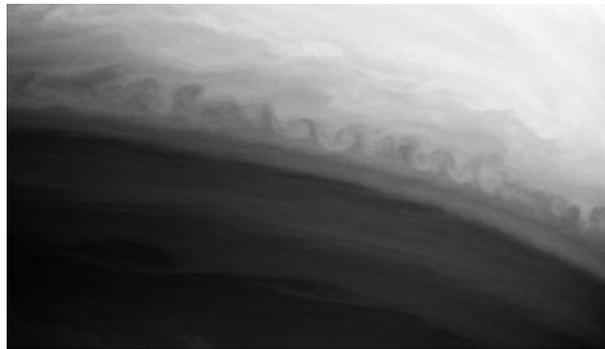


Abbildung 1.11: Kelvin-Helmholtz-Instabilität am Saturn (*Quelle: wikipedia.org*)

daher sind alle Lösungen stabil ($\vec{u} \sim e^{i\vec{k}_h \vec{r} - i\omega t}$).

Rayleigh-Taylor-Instabilitäten: $\rho_1 > \rho_2$, $u_1 = u_2 = 0$

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)gk_h}{\rho_1 + \rho_2}} = \pm i \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)gk_h}{\rho_1 + \rho_2}} \quad (1.138)$$

Folgerung. *Man erhält nur instabile Lösungen auf allen Wellenlängen.*

An Stelle der Schwerkraft können auch andere Kräfte treten, die ein dünnes Material gegen ein dichteres drücken. In stellaren Winden oder planetarischen Nebeln tritt das Phänomen auf, dass ein dünnes Gas ein dichteres anzuschieben versucht und sich Rayleigh-Taylor-Instabilitäten ausbilden. Auf den Abbildungen (1.9) und (1.10) sind die typischen 'Finger' der RT-Instabilitäten zu erkennen.

Kelvin-Helmholtz-Instabilität: $\rho_1 = \rho_2$, $u_1 \neq u_2$

$$\omega_{1,2} = k_x \frac{(u_1 + u_2)}{2} \pm ik_x \frac{(u_1 - u_2)}{2} \quad (1.139)$$

Folgerung. *Auch die Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten wachsen aufgrund der imaginären Kreisfrequenz mit der Zeit unbegrenzt an.*

2 Grundlagen der Strahlungstheorie

[14.11.2006]

2.1 Definitionen

Die wichtigste Größe im Rahmen der Strahlungstheorie ist die **spezifische Intensität** $I_\nu(\vec{r}, \vec{n}, t)$, die von der Frequenz ν , dem Ort \vec{r} , der Propagationsrichtung der Strahlung \vec{n} und der Zeit t abhängt. Es ist Konvention, die Frequenz nicht in die Argumentenliste, sondern als Index zu schreiben. Außerdem ist zu bemerken, dass die spezifische Intensität bildlich gesprochen jene Strahlung ist, die einem Beobachter, der in Richtung \vec{n} blickt, auf dem Rücken trifft.

I_ν ist nun über die Energiemenge $d\epsilon$ definiert, die pro Zeitintervall dt und Frequenzintervall $d\nu$ durch eine Fläche dA , orientiert in Richtung \vec{n} dringt.

$$d\epsilon \equiv I_\nu dA d\Omega dt d\nu \cos \Theta \quad (2.1)$$

Der Raumwinkel $d\Omega$ lautet in sphärischer Geometrie $d\Omega = d\varphi \sin\theta d\theta$, und Θ sei der zwischen \vec{n} und der Flächennormale eingeschlossene Winkel. Für isotrope Strahlungsfelder ist die spezifische Intensität richtungsunabhängig, also keine Funktion von Θ .

Fasst man die Strahlung als Photonengas auf, lässt sich eine Verteilungsfunktion $f_\nu(t, \vec{x}, \vec{p})$ im Phasenraum definieren (vgl.: Boltzmann-Gleichung). $\pi_\nu d^3p$ ist die Anzahl der Photonen pro Volumen an mit den Impulsen $(\vec{p}, \vec{p} + d\vec{p}) = (h\nu/c)(1, \vec{n} + d\vec{n})$ und man findet

$$\pi_\nu \equiv \frac{I_\nu}{h^4 \nu^3 / c^2}. \quad (2.2)$$

Die **spezifische Strahlungsenergiedichte** E_ν ist Strahlungsenergie pro Einheitsvolumen und Frequenzintervall, integriert über den Raumwinkel.

$$E_\nu \equiv \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega \quad (2.3)$$

$$E \equiv \int_0^\infty E_\nu d\nu \quad (2.4)$$

Der **Strahlungsfluss** \vec{F}_ν

$$\vec{F}_\nu \equiv \int \vec{n} I_\nu d\Omega \quad (2.5)$$

ist im Fall eines isotropen Strahlungsfeldes identisch Null (gleiche Beträge aus allen Richtungen).

Bemerkung. *Im Allgemeinen muss I_ν bekannt sein, um die daraus abgeleiteten Größen bestimmen zu können. Nur für gewisse Näherungen lässt sich die spezifische Intensität a priori ableiten.*

Der symmetrische **Strahlungsdrucktensor** \mathbf{P}_ν

$$\mathbf{P}_\nu \equiv \frac{1}{c} \int \vec{n} \vec{n}^t I_\nu d\Omega \quad (2.6)$$

hat die Eigenschaft, dass die Spur über \mathbf{P}_ν gleich der spezifischen Strahlungsenergiedichte ist.

$$\text{Tr}\mathbf{P}_\nu = E_\nu \quad (2.7)$$

Spezialfall (Isotropie). Ist das Strahlungsfeld isotrop, so vereinfacht sich der Strahlungsdrucktensor zum skalaren Strahlungsdruck mal der Einheitsmatrix.

$$\mathbf{P}_\nu = P_{\text{rad}}\mathbf{I} \quad (2.8)$$

und die Spur ergibt

$$\text{Tr}\mathbf{P}_\nu = 3P_{\text{rad}} \quad (2.9)$$

sodass

$$\mathbf{P}_\nu = \frac{1}{3}E_\nu\mathbf{I} \quad (2.10)$$

und sich folgende Beziehung für relativistische Gase ($\gamma = 4/3$) ergibt.

$$P_{\text{rad}} = (\gamma - 1)E_\nu \quad (2.11)$$

2.2 Strahlungstransport

2.2.1 Die Strahlungstransportgleichung

Betrachten wir zwei Punkte \vec{x} und $\vec{x} + d\vec{x}$, zwischen welchen keine Absorption stattfinden soll. Dann muss die spezifische Intensität an beiden Punkten gleich sein.

$$I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t) = I_\nu(\vec{x} + d\vec{x}, \vec{n}, t + dt) \quad (2.12)$$

Macht man eine Tylorentwicklung der rechten Seite, erhalten wir die **homogene Strahlungstransportgleichung** (STG) (2.13). Die betrachtete Strecke dx sei gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Strahlung (Lichtgeschwindigkeit c) mal dem Zeitintervall dt , also $dx = cdt$.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{n} \vec{\nabla} I_\nu = 0 \quad (2.13)$$

Im Allgemeinen werden jedoch Quell- und Senkterme in der STG auftreten. Mit α_ν bezeichnen wir dem Absorptionswirkungsquerschnitt bzw. mit $\kappa_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\rho}$ den Wirkungsquerschnitt pro Masse. Die *Absorption* ist dann gegeben durch $-\alpha_\nu I_\nu$ und die *Emission* bezeichnen wir mit j_ν . Das führt zur **streuungsfreien Strahlungstransportgleichung** (2.14).

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{n} \vec{\nabla} I_\nu = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \quad (2.14)$$

Die Größe κ_ν heißt **Opazität** und ist eine (im Allgemeinen natürlich nicht konstante) Materialkonstante des Plasmas. Ein Materieelement der Länge dl , Querschnittsfläche dA , normal auf Strahlung in Richtung \vec{n} in einen Raumwinkel $d\Omega$, entzieht eine Energiemenge

$$d\epsilon = \alpha_\nu I_\nu dldAd\Omega d\nu dt \quad (2.15)$$

im Zeitintervall dt .

Die Emissivität j_ν ist so definiert, dass ein Element Materie $dldA$ den Energiebeitrag

$$d\epsilon = j_\nu dldAd\Omega d\nu dt \quad (2.16)$$

in den Raumwinkel $d\Omega$ im Frequenzintervall $(\nu, \nu + d\nu)$ in der Zeit dt emittiert.

Beim Durchgang durch ein Medium kann es zusätzlich zu den Absorptions- und Emissionstermen noch Beiträge durch *Streuung* aus anderen Richtungen und Frequenzbereichen geben.

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{n} \vec{\nabla} I_\nu &= j_\nu - \alpha_\nu I_\nu + \sigma_\nu \int_0^\infty d\nu' \int d\Omega \cdot \\ &\cdot \left[-R(\nu', \vec{n}' \nu, \vec{n}) \frac{\nu}{\nu'} I_\nu \left(1 + \frac{c^2 I_\nu}{2k\nu'^3} \right) + R(\nu', \vec{n}' \nu, \vec{n}) I_{\nu'} \left(1 + \frac{c^2 I_{\nu'}}{2k\nu'^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Wir beschränken uns aber auf isotrope Streuung ohne Frequenzänderung, also $\nu = \nu'$. Dann erhalten wir

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{n} \vec{\nabla} I_\nu = j_\nu + \sigma_\nu J_\nu - (\alpha_\nu + \sigma_\nu) I_\nu \quad (2.18)$$

wobei die Größe J_ν das erste Strahlungsmoment eines axialsymmetrischen Strahlungsfeldes ist und einer mittleren Intensität entspricht.

$$J_\nu \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \cos \theta d\theta \quad (2.19)$$

2.2.2 Diffusionsapproximation

Wir lösen die STG unter Vernachlässigung der Streuterme ($\sigma_\nu = 0$) nach I_ν auf.

$$I_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} - \frac{1}{\alpha_\nu} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{n} \vec{\nabla} I_\nu \right) \quad (2.20)$$

In einer lokalen Approximation und unter der Annahme, dass α_ν groß ist im Vergleich zum Term in der Klammer, lässt sich der ganze Klammerausdruck vernachlässigen. Im statischen, homogenen Fall sind die Ableitungen identisch Null. Im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht zwischen Absorption und Emission gilt folglich

$$I_\nu^{(0)} = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}. \quad (2.21)$$

Für thermische Emission im Plasma gilt das **Kirchhoff'sche Gesetz** und wir nennen den linken Term **Quellfunktion** S_ν .

$$\frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \equiv S_\nu = B_\nu(T) \quad (2.22)$$

Die **Planckfunktion** B_ν

$$B_\nu(T) \equiv \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (2.23)$$

beschreibt die *spektrale Strahldichte* eines schwarzen Körpers.

Eine Verbesserung der Approximation erhält man, wenn man diese 'nullte Lösung' (2.21) wieder in die STG einsetzt.

$$I_\nu^{(1)} = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} - \frac{1}{\alpha_\nu} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \right) + \vec{n} \vec{\nabla} \left(\frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \right) \right] \quad (2.24)$$

Oft stößt man auf Konfigurationen, die man in drei Regionen aufteilen kann. Einen inneren Bereich, in dem die Lösung (2.21) gilt, einer *Thermalisierungsregion*, in der die Approximation (2.24) funktioniert und einer sehr dünnen Grenzschicht, in der diese Näherungen sicher falsch sind (Abb. 2.1). Die Dicke dieser Schicht, welche die Grenze zum äußeren Medium darstellt ist von der Größenordnung $\Delta L_\nu \sim \frac{1}{\rho \kappa_\nu}$, der *mittleren freien Weglänge* der Photonen $l_\nu = 1/\alpha_\nu$ bei einer Frequenz ν .

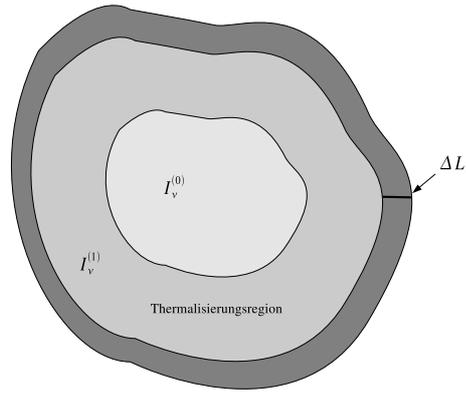


Abbildung 2.1: Regionen, in denen Approximationen gelten

Die Energiedichte E_ν , der Strahlungsfluss \vec{F}_ν und der Strahlungsdrucktensor \mathbf{P}_ν lassen sich für die Näherung (2.24) folgendermaßen bestimmen.

$$\begin{aligned} E_\nu &= \frac{4\pi}{c} \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} - \frac{4\pi}{\alpha_\nu c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \right) \\ \vec{F}_\nu &= -\frac{4\pi}{3\alpha_\nu} \vec{\nabla} \left(\frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \right) \\ \mathbf{P}_\nu &= \frac{1}{3} \mathbf{I} \left[\frac{4\pi}{c} \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} - \frac{4\pi}{\alpha_\nu c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

[21.11.2006]

2.3 Momentengleichungen

2.3.1 Momente der Strahlungstransportgleichung

Unter der Annahme von Isotropie und ruhender Materie betrachten wir die Momente der Strahlungstransportgleichung. Wir führen die Integration über $d\Omega$ durch und verwenden die Definitionen für die Strahlungsenergie E_ν (2.3) und den Strahlungsfluss \vec{F}_ν (2.5).

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{n} \vec{\nabla} I_\nu &= j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \quad | \int d\Omega \\ \frac{\partial E_\nu}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{F}_\nu &= 4\pi j_\nu - \alpha_\nu c E_\nu \end{aligned} \quad (2.26)$$

Gleichung (2.26) ist das **nullte Moment der Strahlungstransportgleichung** und entspricht einer (monochromatischen) *Energieerhaltung*.

Bemerkung. Das nullte Moment der Boltzmann-Gleichung spiegelt die Massen- oder Ladungserhaltung wider und liefert eine Kontinuitätsgleichung.

Mit Hilfe des Strahlungsdrucktensors \mathbf{P}_ν (2.6) lässt sich das **erste Moment** durch Integration über $\vec{n} d\Omega$ folgendermaßen darstellen.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{F}_\nu}{\partial t} + c \vec{\nabla} \mathbf{P}_\nu = -\alpha_\nu \vec{F}_\nu \quad (2.27)$$

Gleichung (2.27) beschreibt die (monochromatische) *Impulserhaltung*.

2.3.2 Kollektive Effekte

Interessiert man sich für die *kollektiven Effekte* beim Strahlungstransport, ist es sinnvoll die Gleichungen noch über den Frequenzraum zu integrieren. In dieser Betrachtung ist es dann egal, ob der Energieaustausch über Röntgen- oder Radiostrahlung usw. zwischen Strahlung und Materie von statten geht. Ein typisches Beispiel ist Staub; dieser absorbiert im UV- und emittiert im infraroten Spektralbereich.

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{F} = \int_0^\infty d\nu (4\pi j_\nu - \alpha_\nu c E_\nu) \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + c \vec{\nabla} \mathbf{P} &= - \int_0^\infty d\nu \alpha_\nu \vec{F}_\nu \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \vec{\nabla} \mathbf{P} &= - \int_0^\infty d\nu \alpha_\nu c \frac{\vec{F}_\nu}{c^2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Mit $\frac{\vec{F}_\nu}{c^2}$ ist die *spektrale Strahlungsimpulsdichte* gegeben und $\alpha_\nu c$ ist eine *Absorptionswahrscheinlichkeit pro Zeit*.

Integriert man (2.29) über ein beliebiges Volumen, dann beschreibt der Ausdruck die Änderung der Strahlungsenergiedichte durch die Emission vom Material abzüglich der Absorption und dem Nettofluss über die das Volumen berandende Oberfläche. Analog lässt sich (2.29) als die Änderung der Strahlungsimpulsdichte durch Impulsbeitrag vom Material, abzüglich Impulsverlust vom Strahlungsfeld durch Absorption und Impulsfluss über die Fläche interpretieren. Gleichung (2.28) beschreibt also die *Strahlungsenergieerhaltung*, mit (2.29) wird die *Strahlungsimpulserhaltung* ausgedrückt.

2.3.3 Kopplung mit Hydrodynamik

Die *hydrodynamischen Kopplungsterme* sind (2.28) und (2.29)

$$\begin{aligned} g^0 &\equiv \int_0^\infty d\nu \int d\Omega (j_\nu - \alpha_\nu I_\nu) \\ \vec{g} &\equiv \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \int d\Omega \vec{n} (j_\nu - \alpha_\nu I_\nu) \end{aligned} \quad (2.30)$$

wobei g^0 über die Energiegleichung (1.48)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \epsilon \rho \right] + \vec{\nabla} \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \rho \vec{v} \right] = -g^0 \quad (2.31)$$

und \vec{g} über die Impulsgleichung (1.34) im Euler'schen Bild gegeben sind.

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v} \vec{v}^t) + \vec{\nabla} p = -\vec{g} \quad (2.32)$$

Somit werden die hydrodynamischen Variablen des Mediums (Dichte ρ , innere Energie ϵ , Enthalpie h , Geschwindigkeit \vec{v} , Gasdruck p) an das Strahlungsfeld gekoppelt. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass um, die kollektiven Größen des Strahlungstransportes zu erhalten, E_ν und \vec{F}_ν über I_ν aus der STG berechnet werden müssen.

In diesem strahlungshydrodynamischen System müssen nun wieder die Gesamtenergie und der

Gesamtimpuls erhalten sein.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \epsilon \rho + E \right] + \vec{\nabla} \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \rho \vec{v} + \vec{F} \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \vec{v} + \frac{\vec{F}}{c^2} \right) + \vec{\nabla} (\rho \vec{v} v^t + \mathbf{P}) + \vec{\nabla} p &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Bemerkungen. • *Im Sterninneren herrscht in guter Näherung lokales thermisches Gleichgewicht und die Intensitätsverteilung ist über die Planck-Funktion gegeben (2.21, 2.22). In der Atmosphäre gilt dies nicht (\rightarrow Energieniveaus (?)).*

- *Im Gleichgewicht von Absorption und Emission sind die Integrale über $4\pi j_\nu$ und $\alpha_\nu c E_\nu$ gleich, die Terme selbst jedoch nicht.*

$$\int_0^\infty (4\pi j_\nu - \alpha_\nu c E_\nu) = 0 \quad (2.34)$$

Bsp.: Staub - Absorption im UV, Emission im IR.

2.4 Stationäre STG

Gegeben sei die STG (2.20) im stationären Fall ($\partial_t = 0$) in ebener Geometrie ($\vec{n}\vec{\nabla} = \cos\theta d/ds$). Wir betrachten also eine planparallele Schichtung ($r \rightarrow \infty$) und definieren die **optische Tiefe** τ_ν als typische Skala für die Photonenwegstrecken.

$$d\tau_\nu \equiv \alpha_\nu ds \quad (2.35)$$

Mit θ sei wieder der Winkel zwischen \vec{n} und der Blickrichtung bezeichnet und $\mu \equiv \cos\theta$.

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} &= \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} - I_\nu \\ &= S_\nu - I_\nu \end{aligned} \quad (2.36)$$

Mit S_ν wird wieder die Quellfunktion (2.22) bezeichnet.

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0) e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} + \int_0^{\tau_\nu} d\tau'_\nu \frac{1}{|\mu|} e^{-\frac{\tau_\nu - \tau'_\nu}{\mu}} S_\nu(\tau'_\nu), \quad \mu < 0 \\ &= I_\nu(0) e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} + \int_0^{\tau_\nu} d\tau'_\nu \frac{1}{\mu} e^{-\frac{\tau_\nu - \tau'_\nu}{\mu}} S_\nu(\tau'_\nu), \quad \mu > 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Gleichung (2.37) ist die formale Lösung der ebenen STG in dieser Vorzeichenkonvention (2.35). Betrachten wir die Quellfunktion S_ν im Fall lokalen thermischen Gleichgewichts und Beiträgen durch isotrope Streuung noch etwas genauer.

$$\begin{aligned} j_\nu &= \kappa_a B_\nu + \sigma_\nu J_\nu \\ \frac{j_\nu}{\kappa_a + \sigma_\nu} &= \frac{\kappa_a}{\kappa_a + \sigma_\nu} B_\nu + \frac{\sigma_\nu}{\kappa_a + \sigma_\nu} J_\nu = S_\nu \end{aligned}$$

Die Größe w_ν heißt **Albedo** und ist ein Maß für das Rückstrahlvermögen diffusiv reflektierender Oberflächen.

$$\frac{\sigma_\nu}{\kappa_a + \sigma_\nu} \equiv w_\nu \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}
 S_\nu &= (1 - w_\nu)B_\nu + w_\nu J_\nu \\
 S_\nu &= (1 - w_\nu)B_\nu + \frac{w_\nu}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\mu) d\mu
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Zur Momentenbildung der spezifischen Intensität betrachten wir kurz das *Exponentialintegral* E_n

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xy}}{y^n} dy = \int_0^1 t^{n-2} e^{-x/t} dt \tag{2.40}$$

wobei der letzte Ausdruck durch die Transformation $y = 1/t$ zustande kommt. Das Exponentialintegral hat folgende Eigenschaften:

i.) Rekursion über Ableitung

$$E_n'(x) = -E_{n-1}(x) \tag{2.41}$$

ii.) Rekursionsformel

$$E_n(x) = \frac{1}{n-1} (e^{-x} - x E_{n-1}(x)) \tag{2.42}$$

iii.) für $x \gg 1$ verhält sich $E_n(x)$ wie e^{-x}/x .

Bilden wir nun also die Momente der Intensitätsverteilung unter Verwendung der Eigenschaften von E_n .

$$J_\nu \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\mu) d\mu \tag{2.43}$$

$$= \frac{1}{2} I_0 E_2(\tau_\nu) + \frac{1}{2} \int_0^\infty S_\nu(\tau'_\nu) E_1(|\tau_\nu - \tau'_\nu|) d\tau'_\nu \tag{2.44}$$

$$= \frac{c}{4\pi} E_\nu$$

$$H_\nu \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\mu) \mu d\mu \tag{2.45}$$

$$= \frac{1}{2} I_0 E_3(\tau_\nu) + \frac{1}{2} \int_0^\infty S_\nu(\tau'_\nu) E_2(|\tau_\nu - \tau'_\nu|) d\tau'_\nu \operatorname{sign}(\tau'_\nu - \tau_\nu) \tag{2.46}$$

$$= \frac{1}{4\pi} F_\nu$$

$$K_\nu \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\mu) \mu^2 d\mu \tag{2.47}$$

$$= \frac{1}{2} I_0 E_4(\tau_\nu) + \frac{1}{2} \int_0^\infty S_\nu(\tau'_\nu) E_3(|\tau_\nu - \tau'_\nu|) d\tau'_\nu \tag{2.48}$$

$$= \frac{c}{4\pi} P_\nu$$

Das nullte Moment J_ν (2.43) entspricht der *mittleren Intensität*, das erste Moment H_ν (2.45), der Strahlungsfluss heißt auch oft *Eddington-Fluss* und das zweite Moment, der Strahlungsdruck K_ν wird auch als *K-Integral* bezeichnet (2.6, 2.47).

$$\frac{dH_\nu}{d\tau_\nu} = J_\nu - S_\nu, \quad \frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = H_\nu \tag{2.49}$$

Bemerkung. Für große optische Tiefen (τ_ν bzw. x sehr groß) werden die Randbedingungen unbedeutend und der I_0 -Term verschwindet wegen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0$$

und man kann die untere Grenze des integrals formal gegen $-\infty$ gehen lassen und eine weitere

Eigenschaft des Exponentialintegrals verwenden.

$$\int_0^{\infty} E_n(|\tau_\nu|) d\tau_\nu \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} E_n(|\tau_\nu|) d\tau_\nu = \frac{2}{n}$$

So lässt sich der Eddington-Faktor f_ν für isotrope Strahlungsfelder bestimmen.

$$(?) \quad \frac{K_\nu}{J_\nu} = f_\nu = \frac{1}{2} S_\nu (\tau_\nu \rightarrow \infty) \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad (2.50)$$

Zur weiteren Vereinfachung sei $S_\nu = S = const$ angenommen.

$$\begin{aligned} J_\nu &\cong \frac{1}{2} E_2(\tau_\nu) + \frac{S}{2} \int_0^{\infty} E_1(|\tau_\nu - \tau'_\nu|) d\tau'_\nu \\ &\cong \frac{1}{2} E_2(\tau_\nu) + \frac{S}{2} [-E_2(\tau_\nu) + 1] \\ &\cong \frac{1}{2} E_2(\tau_\nu) + S \left[1 - \frac{1}{2} E_2(\tau_\nu) \right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

Wir definieren eine *Entweichwahrscheinlichkeit* P_{esc}

$$P_{\text{esc}} \equiv \frac{1}{2} E_2(\tau_\nu) \quad (2.52)$$

welche die Wahrscheinlichkeit angibt, dass ein Photon in eine gewisse optische Tiefe τ_ν gelangt. Im Rahmen der Vereinfachung frequenzunabhängiger Größen (graue ebene Atmosphäre) macht man außerdem einen Ansatz über die sogenannte *Hopf-Funktion* $q(\tau)$ (Verweis auf das Skriptum aus 'Astrophysik' von Herrn Prof. Dorfi bzw. Literatur).

$$\begin{aligned} K &= H [\tau + q_\infty(\tau)] = H [\tau + const] \\ J &= 3H [\tau + q(\tau)] \end{aligned} \quad (2.53)$$

Für den Eddington-Faktor f gilt dann

$$f = \frac{K}{J} \rightarrow 3f = \frac{\tau + q_\infty}{\tau + q(\tau)}$$

und im Fall thermischer Emission $J = B = a_R c T^4 / 4\pi$ für die Temperaturschichtung T in der grauen, ebenen Atmosphäre

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 (\tau + q(\tau)). \quad (2.54)$$

In der *Eddington-Approximation* ergibt sich ein $q(\tau) = const = 2/3$. Die Schichtung ist also so aufgebaut, dass in der optischen Tiefe $\tau = 2/3$

$$T^4 = T_{\text{eff}}^4 \quad (2.55)$$

gilt. Von dort aus gelangt der Anteil $\exp(2/3) \cong 0.5$ der Photonen zum Beobachter. So ist die 'Oberfläche' eines Sterns, wo also (2.55) gilt, bei einer optischen Tiefe $\tau = 2/3$ zu finden. Ohne Zuhilfenahme der Eddington-Approximation bestimmt man die Hopf-Funktion zu $q(\tau) = (\sqrt{3}/4)^{1/4}$, die Näherung stellt sich daher als sehr gut heraus.

[05.12.2006]

2.5 Strahlungstransport im mitbewegten Bezugssystem

Wir wollen den Strahlungstransport in einem sich relativistisch bewegenden Medium beschreiben. Ausgehend von der bekannten Euler'schen Formulierung wird eine *Lorentztransformation* (2.63) in das mitbewegte Koordinatensystem des Mediums gemacht. Aufgrund der Anisotropie des Strahlungsfeldes und des Dopplereffekts treten für einen ruhenden Beobachter Abberationseffekte auf. Im Lagrange'schen Bild sind Emissions- und Absorptionskoeffizienten winkelunabhängig und daher isotrop.

2.5.1 Relativistische Kinematik und Lorentztransformation

Es seien durch (2.56) die **4er-Koordinaten** eines Teilchens gegeben und das Linienelement ds in (2.57) definiert.

$$x^\mu \equiv (ct, \vec{r}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (2.56)$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 \quad (2.57)$$

Das Linienelement ist ein Maß für den Abstand zwischen zwei Punkten in diesem vierdimensionalen Raum (*Minkowski-Raum*).

Die Beziehung zwischen der *Eigenzeit* s und der *Koordinatenzeit* t lautet

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2} = \frac{1}{\gamma} \quad (2.58)$$

und die **4er-Geschwindigkeit**

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds} \quad (2.59)$$

$$= \frac{d}{ds}(ct, \vec{r})$$

$$= \left(\gamma c, \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right)$$

$$= (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad (2.60)$$

führt zum **4er-Impuls** (2.61).

$$p^\mu \equiv m \frac{dx^\mu}{ds} = (\gamma mc, \gamma m \vec{v}) \quad (2.61)$$

So lautet der 4er-Impuls eines Photons mit $\gamma m = h\nu/c^2$ wobei $E = h\nu = mc^2$, das sich in Richtung $\vec{n} = \vec{v}/c$ bewegt

$$p_\gamma^\mu = \frac{h\nu}{c} (1, \vec{n}). \quad (2.62)$$

Die **Lorentztransformation** (2.63) ist die korrekte Transformation zwischen zwei zueinander bewegten Bezugssystemen unter Berücksichtigung der speziell relativistischen Effekte.

Im Folgenden seien mit (0) indizierte Größen jene im mitbewegten System und ein Index 0 (oben oder unten) bezeichnet die 0-te Komponente eines Vektors. Seien also mit $x_{(0)}^\mu = (ct_{(0)}, \vec{r}_{(0)})$ die Koordinaten im mitbewegten System (*comoving frame*) bezeichnet und mit $x^\mu = (ct, \vec{r})$ das Ruhesystem beschrieben. Die Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme sei $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

$$x^\mu = A^\mu_\lambda x_{(0)}^\lambda$$

$$A^\mu_\lambda \equiv \begin{pmatrix} \gamma & & & \\ \frac{\gamma}{c} \vec{u} & \mathbf{I} + \frac{\gamma}{c^2} \vec{u} \vec{u}^t & & \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Die 4er-Geschwindigkeit transformiert sich dann über

$$\frac{dx^\mu}{ds} = A^\mu{}_\lambda \frac{dx_{(0)}^\lambda}{ds} \quad (2.64)$$

und der *Dopplereffekt* ist gegeben durch

$$\nu = \nu_{(0)} \gamma \left(1 + \frac{\vec{n}_{(0)} \vec{u}}{c} \right) \quad (2.65)$$

wobei

$$\vec{n} = \frac{\gamma \vec{u}/c + \vec{n}_{(0)} + (\gamma - 1) ((\vec{n}_{(0)} \vec{u}) \vec{u}/u^2)}{\gamma (1 + \vec{n}_{(0)} \vec{u}/c)} \quad (2.66)$$

die konkrete Lorentztransformation eines 3er-Vektors darstellt und die *Aberration* beschreibt.

2.5.2 Transformation der Strahlungsgrößen

Im Folgenden machen wir eine Näherung für kleine Geschwindigkeiten. Die Terme $\mathcal{O}(u/c)^2$ werden vernachlässigt, d.h. $\gamma \cong 1$. Sei weiters $\vec{\beta} \equiv \vec{u}/c$. Gleichungen (2.65 und (2.66) gehen dann über in

$$\begin{aligned} \nu &= \nu_{(0)} \left(1 + \vec{n}_{(0)} \vec{\beta} \right) \\ \vec{n} &= \frac{\vec{\beta} + \vec{n}_{(0)}}{\left(1 + \vec{\beta} \vec{n}_{(0)} \right)}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Bemerkung. Die spezifische Intensität I_ν ist keine invariante Größe unter Lorentztransformationen.

Die Phasenraumdichte der Photonen π_ν lässt sich bestimmen zu

$$\pi_\nu \equiv \frac{I_\nu}{h^4 \nu^3 / c^2} \quad (2.68)$$

und für die **lorentzinvariante Intensität** l_ν ((2.69) Lindquist 1966) muss noch ein Faktor 2 aufgrund der *Polarisation* berücksichtigt werden. Das *Volumen im Phasenraum* ist h^3 .

$$l_\nu \equiv \frac{I_\nu}{2h\nu^3/c^2} \quad (2.69)$$

Die Beziehung zwischen spezifischer Intensität im Ruhesystem und dem *comoving frame* ist gegeben durch (2.70).

$$I_\nu = \left(\frac{\nu}{\nu_{(0)}} \right)^3 I_{\nu_{(0)}} \quad (2.70)$$

Betrachten wir nun die Anzahl der Photonen ΔN .

$$\begin{aligned} \Delta N &= \frac{j_\nu}{h\nu} d^3 \vec{r} dt d\nu d\Omega \\ &= \frac{j_\nu}{h^4 \nu^3 / c^3} d^3 \vec{r} dt d^3 \vec{p} \\ &= \frac{j_\nu E}{h^4 \nu^3 / c^3} d^3 \vec{r} dt \frac{d^3 \vec{p}}{E} \\ &= \frac{j_\nu}{h^3 \nu^2 / c^3} d^3 \vec{r} dt \frac{d^3 \vec{p}}{E} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Wir definieren die **lorentzinvariante Emissivität** e_ν .

$$e_\nu \equiv \frac{c}{2} \frac{j_\nu}{\nu^2} \quad (2.72)$$

Die Beziehung zwischen Emission im Ruhesystem und dem *comoving frame* lautet

$$j_\nu = \left(\frac{\nu}{\nu_{(0)}} \right)^2 j_{\nu_{(0)}} \quad (2.73)$$

und mit Hilfe der **lorentzinvarianten Absorption** a_ν ergibt sich analog eine Relation für den Absorptionskoeffizienten α_ν .

$$a_\nu \equiv \frac{h}{c} \nu \alpha_\nu \quad (2.74)$$

$$\alpha_\nu = \frac{\nu}{\nu_{(0)}} \alpha_{\nu_{(0)}} \quad (2.75)$$

Setzt man nun die abgeleiteten invarianten Größen in die STG ein, so erhält man die **lorentzinvariante STG** (2.76).

$$p^\mu \frac{\partial l_\nu}{\partial x^\mu} = e_\nu - a_\nu l_\nu \quad (2.76)$$

Auch die in Abschnitt 2.1 definierten Größen müssen kovariant formuliert werden. Wir bestimmen den **Energie-Impulstensor** $T^{\mu\lambda}$ für Photonen

$$T^{\mu\lambda} \equiv c^2 \int \frac{d^3 \vec{p}}{E} p^\mu p^\lambda \pi_\nu \quad (2.77)$$

und schreiben ihn mit Hilfe von (2.62) in seinen Komponenten auf.

$$d^3 \vec{p} = \frac{h^3 \nu^2}{c^3} d\nu d\Omega, \quad E = h\nu \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} T^{\mu\lambda}(\nu) &= c^2 \int \int \frac{h\nu}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{n} \end{pmatrix} \frac{h\nu}{c} \begin{pmatrix} 1 & \vec{n}^t \end{pmatrix} \frac{1}{h\nu} \frac{c^2}{h^4 \nu^3} \frac{h^3 \nu^2}{c^3} I_\nu d\nu d\Omega \\ &= \frac{1}{c} \int \int \begin{pmatrix} 1 & \vec{n}^t \\ \vec{n} & \vec{n}\vec{n}^t \end{pmatrix} I_\nu d\nu d\Omega \end{aligned} \quad (2.79)$$

Führt man die Integrationen in (2.79) bezüglich ν und Ω durch, lässt sich der Energie-Impulstensor über die Strahlungsenergiedichte E , den Fluss F und den Strahlungsdrucktensor \mathbf{P} darstellen.

$$T^{\mu\lambda} = \begin{pmatrix} E & \vec{F}^t/c \\ \vec{F}/c & \mathbf{P} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

Entwickelt man den Energie-Impulstensor bis $\mathcal{O}\left(\frac{u}{c}\right)^2$, so wird noch einmal deutlich, dass sich im relativistischen Fall alle Komponenten, insbesondere auch die Energiedichte bei Transformationen ändert (hier für den 1D Fall).

$$T^{\mu\lambda} \cong \begin{pmatrix} \gamma^2 (E_{(0)} + 2\beta F_{(0)}/c + \beta^2 P_{(0)}) & \gamma^2/c ((1 + \beta^2)F_{(0)} + uE_{(0)} + uP_{(0)}) \\ \gamma^2/c ((1 + \beta^2)F_{(0)} + uE_{(0)} + uP_{(0)}) & \gamma^2 (P_{(0)} + 2\beta F_{(0)}/c + \beta^2 E_{(0)}) \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

Seien mit g^λ wieder die Quellen und Senken zusammengefasst.

$$\frac{\partial T^{\mu\lambda}}{\partial x^\mu} = g^\lambda = \frac{1}{c} \int \int \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{n} \end{pmatrix} (j_\nu - \alpha_\nu I_\nu) d\nu d\Omega \quad (2.82)$$

$$g^0 = \frac{1}{c} \int \int (j_\nu - \alpha_\nu I_\nu) d\nu d\Omega$$

$$\vec{g} = \frac{1}{c} \int \int \vec{n} (j_\nu - \alpha_\nu I_\nu) d\nu d\Omega$$

Für die Umrechnung zwischen den Koordinatensystemen ziehen wir wieder die obige Entwicklung heran.

$$g^0 \cong g_{(0)}^0 + \frac{\vec{u}}{c^2} \vec{g}_{(0)}$$

$$\vec{g} \cong \vec{g}_{(0)} + \vec{u} g_{(0)}^0 \quad (2.83)$$

Definieren wir mit $\vec{a} \equiv \frac{\partial \vec{u}}{\partial s}$ die **Eigenbeschleunigung** und schreiben die **Strahlungstransportgleichung im mitbewegten Bezugssystem** in der Näherung der Entwicklung von Termen bis exklusive $\mathcal{O}\left(\frac{u}{c}\right)^2$ an (Buchler 1983).

$$\begin{aligned} & \left(1 + \vec{n}_{(0)} \vec{\beta}\right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial I_{(0)}}{\partial t} + \vec{\beta} \vec{\nabla} I_{(0)}\right) + \vec{n}_{(0)} \vec{\nabla} I_{(0)} - \\ & - \frac{\nu_{(0)}}{c} \left(\frac{\vec{a}}{c} + \vec{n}_{(0)} \vec{\nabla} \vec{u}\right) \nabla_{\nu_{(0)} \vec{n}_{(0)}} I_{(0)} + \frac{3}{c} \left(\frac{\vec{n}_{(0)} \vec{a}}{c} + \vec{n}_{(0)} \vec{\nabla} \vec{u} \vec{n}_{(0)}\right) I_{(0)} = j_{(0)} - \alpha_{(0)} I_{(0)} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Eine weitere mögliche Vereinfachung ist es, die Geschwindigkeitsterme ($\vec{u}, \partial_s \vec{u}$) zu vernachlässigen und nur die Änderung (im Ort) mitzunehmen. Das heißt $\vec{\beta} = 0, \vec{a} = 0$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial I_{(0)}}{\partial t} + \vec{n}_{(0)} \vec{\nabla} I_{(0)} - \\ & - \frac{\nu_{(0)}}{c} \vec{n}_{(0)} \vec{\nabla} \vec{u} \nabla_{\nu_{(0)} \vec{n}_{(0)}} I_{(0)} + \frac{3}{c} \vec{n}_{(0)} \vec{\nabla} \vec{u} \vec{n}_{(0)} I_{(0)} = j_{(0)} - \alpha_{(0)} I_{(0)} \end{aligned} \quad (2.85)$$

[12.12.2006]

2.5.3 Momente der STG im mitbewegten Bezugssystem

Ausgehend von Gleichung (2.84) bilden wir die Momente bezüglich des Raumwinkels. Die Indices (0) werden im Folgenden weggelassen, die Gleichungen sind jedoch im *comoving frame* zu lesen.

Nulltes Moment:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E_\nu}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{u} E_\nu) + \frac{1}{c} \frac{D}{Dt} (\vec{u} \vec{F}_\nu) + \vec{\nabla} \vec{F}_\nu + \\ & + \left[\mathbf{P}_\nu - \frac{\partial(\nu \mathbf{P}_\nu)}{\partial \nu} \right] \otimes \vec{\nabla} \vec{u} + \frac{1}{c^2} \left[\vec{F}_\nu - \frac{\partial(\nu \vec{F}_\nu)}{\partial \nu} \right] \cdot \vec{a} = 4\pi j_\nu - \alpha_\nu c_\nu \end{aligned} \quad (2.86)$$

Erstes Moment:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{F}_\nu}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} (\vec{u} \vec{F}_\nu) + \frac{1}{c} \frac{D}{Dt} (\vec{u} \mathbf{P}_\nu) + c \vec{\nabla} \mathbf{P}_\nu + \\ & + \frac{\vec{a}}{c} E_\nu + \frac{1}{c} \vec{F}_\nu \vec{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{c} \frac{\partial(\nu \mathbf{Q}_\nu)}{\partial \nu} \otimes \vec{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{c} \frac{\partial(\nu \mathbf{P}_\nu)}{\partial \nu} \cdot \vec{a} = -\alpha_\nu \vec{F}_\nu \end{aligned} \quad (2.87)$$

Die Größe \mathbf{Q}_ν sei definiert als

$$\mathbf{Q}_\nu \equiv \int \vec{n} \vec{n} \vec{n} I_\nu d\Omega \quad (2.88)$$

und hat die Eigenschaft, dass sie über alle Frequenzen integriert, verschwindet.

$$\int \mathbf{Q}_\nu d\nu = 0 \quad (2.89)$$

Die **frequenzintegrierten Momente** der STG im *comoving frame* ergeben die Kopplungsterme g^μ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{u}E) + \frac{1}{c} \frac{D}{Dt} (\vec{u}\vec{F}) + \vec{\nabla}\vec{F} + \mathbf{P} \otimes \vec{\nabla}\vec{u} + \frac{\vec{a}}{c^2} \vec{F} &= \int (4\pi j_\nu - \alpha_\nu c E_\nu) d\nu \\ &= g_{(0)}^0 \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} (\vec{u}\vec{F}) + \frac{1}{c} \frac{D}{Dt} (\vec{u}\mathbf{P}) + c\vec{\nabla}\mathbf{P} + \frac{\vec{a}}{c} E + \frac{1}{c} \vec{F}\vec{\nabla}\vec{u} &= - \int \alpha_\nu \vec{F}_\nu d\nu \\ &= - \frac{\vec{g}_{(0)}}{c} \end{aligned} \quad (2.91)$$

In einer weiteren Näherung können noch die Terme $\mathcal{O}(1/c^2)$ vernachlässigt werden. Gleichungen (2.86, 2.87) vereinfachen sich dann wie folgt.

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{u}E_\nu) + \vec{\nabla}\vec{F}_\nu + \left[\mathbf{P}_\nu - \frac{\partial(\nu\mathbf{P}_\nu)}{\partial\nu} \right] \otimes \vec{\nabla}\vec{u} = 4\pi j_\nu - \alpha_\nu c_\nu E_\nu \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{F}_\nu}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} (\vec{u}\vec{F}_\nu) + c\vec{\nabla}\mathbf{P}_\nu + \frac{1}{c} \vec{F}_\nu \vec{\nabla}\vec{u} - \\ - \frac{1}{c} \frac{\partial(\nu\mathbf{Q}_\nu)}{\partial\nu} \otimes \vec{\nabla}\vec{u} - \frac{1}{c} \frac{\partial(\nu\mathbf{P}_\nu)}{\partial\nu} \cdot \vec{a} &= -\alpha_\nu \vec{F}_\nu \end{aligned} \quad (2.93)$$

Und (2.90, 2.91) werden zu.

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{u}E) + \vec{\nabla}\vec{F} + \mathbf{P} \otimes \vec{\nabla}\vec{u} = \int (4\pi j_\nu - \alpha_\nu c E_\nu) d\nu \quad (2.94)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} (\vec{u}\vec{F}) + c\vec{\nabla}\mathbf{P} + \frac{1}{c} \vec{F}\vec{\nabla}\vec{u} = - \int \alpha \vec{F}_\nu d\nu \quad (2.95)$$

2.5.4 Zusammenfassende Bemerkungen

i.) Frequenzableitungen (∂_ν) spielen eine Rolle, wenn Linienopazitäten dominieren. Will man sich also zum Beispiel mit *liniengetriebene Winde* beschäftigen, dürfen diese Terme nicht vernachlässigt werden. Die Impulsübertragung der Photonen auf den Wind spielt eine wichtige Rolle. Berücksichtigt man den Dopplereffekt nicht korrekt, trifft man - vereinfacht gesprochen - die Linien nicht.

ii.) Kopplungsterme im *comoving frame*

$$\begin{aligned} g^0 &= \frac{1}{c} \int \int (j_\nu - \alpha_\nu I_\nu) d\nu d\Omega \\ \vec{g} &= \frac{1}{c} \int \int \vec{n} (j_\nu - \alpha_\nu I_\nu) d\nu d\Omega \end{aligned}$$

und die 'Transformation ins Ruhesystem'.

$$\begin{aligned} g^0 &\cong g_{(0)}^0 + \frac{\vec{u}}{c^2} \vec{g}_{(0)} \\ \vec{g} &\cong \vec{g}_{(0)} + \vec{u} g_{(0)}^0 \end{aligned} \quad (2.96)$$

- iii.) Die *Strahlungsenergiegleichung* $g_{(0)}^0$ beschreibt die Kopplung zwischen Strahlung und Materie.
- iv.) Die *Gesamtenergiegleichung* muss einen weiteren Term berücksichtigen, nämlich die Arbeit, die der Strahlungsdruck verrichtet.
- v.) Für die Diffusion gilt 'normalerweise' $\vec{F} \propto \vec{\nabla}E$. Das gilt aber nur im CMF und nicht im Ruhesystem - es fehlt der Beitrag des advektiven Flusses der Strahlungsenthalpie.
- vi.) Die Doppler-Terme sind wichtiger als die Aberrations-Terme (ist aber keine direkte Konsequenz der $\mathcal{O}(u/c)$ -Näherung).

2.6 Diffusionsterme im mitbewegten Koordinatensystem

Wir betrachten Gleichung (2.84) und dividieren durch α_ν .

$$\begin{aligned}
 I_{\nu_{(0)}} &= \frac{j_{\nu_{(0)}}}{\alpha_{\nu_{(0)}}} - \frac{1}{\alpha_{\nu_{(0)}}} \left[\left(1 + \frac{\vec{n}_{(0)} \vec{u}}{c} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial I_{\nu_{(0)}}}{\partial t} + \frac{\vec{u}}{c} \vec{\nabla} I_{\nu_{(0)}} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \vec{n}_{(0)} \vec{\nabla} I_{\nu_{(0)}} - \frac{\nu_{(0)}}{c} \left(\frac{\vec{a}}{c} + \vec{n}_{(0)} \vec{\nabla} \vec{u} \right) \vec{\nabla}_{\nu_{(0)} \vec{n}_{(0)}} I_{\nu_{(0)}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{c} \left(\frac{\vec{n}_{(0)} \vec{a}}{c} + \vec{n}_{(0)} \vec{\nabla} \vec{u} \vec{n}_{(0)} \right) I_{\nu_{(0)}} \right] \quad (2.97)
 \end{aligned}$$

Im *lokalen thermodynamischen Gleichgewicht* gilt

$$\frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = B_\nu(T) \quad (2.98)$$

und in erster Näherung sei $I_\nu \cong B_\nu$. Dann wird aus (2.97)

$$I_{\nu_{(0)}} = B_\nu - \frac{1}{\alpha_{\nu_{(0)}}} [1 + \dots]$$

und wir approximieren

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla}_{\nu_{(0)} \vec{n}_{(0)}} B_\nu &\cong \frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} \vec{n}_{(0)} \\
 \frac{\partial B_\nu}{\partial t} &\cong \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{\nu_{(0)}} &= B_\nu - \frac{1}{\alpha_{\nu_{(0)}}} \left[\left(1 + \frac{\vec{n}_{(0)} \vec{u}}{c} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \frac{DT}{Dt} \right) + \vec{n}_{(0)} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \vec{\nabla} T - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\nu_{(0)}}{c} \left(\frac{\vec{a}}{c} + \vec{n}_{(0)} \vec{\nabla} \vec{u} \right) \vec{n}_{(0)} \frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} + \frac{3}{c} \left(\frac{\vec{n}_{(0)} \vec{a}}{c} + \vec{n}_{(0)} \vec{\nabla} \vec{u} \vec{n}_{(0)} \right) B_\nu \right] \quad (2.99)
 \end{aligned}$$

Bilden nun das erste Moment bezüglich Ω auf (2.99), dividieren durch c und nähern die Frequenz im CMF durch die Ruhfrequenz $\nu_{(0)} \cong \nu$.

$$E_{\nu_{(0)}} = \frac{4\pi B_\nu}{c} - \frac{4\pi}{\alpha_\nu c^2} \left[\frac{\partial B_\nu}{\partial T} \frac{DT}{Dt} + \frac{\vec{\nabla} \vec{u}}{3} \left(3B_\nu - \nu \frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} \right) \right] \quad (2.100)$$

Es gilt darüberhinaus

$$B_\nu(T) \propto \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

und daher

$$3B_\nu - \nu \frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} = T \frac{\partial B_\nu}{\partial T}$$

womit aus (2.100) folgende Relation wird.

$$\begin{aligned} E_{\nu(0)} &= \frac{4\pi B_\nu}{c} - \frac{4\pi}{\alpha_\nu c^2} \left[\frac{\partial B_\nu}{\partial T} \frac{DT}{Dt} + \frac{\vec{\nabla} \vec{u}}{3} \left(T \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \right) \right] \\ &= \frac{4\pi B_\nu}{c} - \frac{4\pi}{\alpha_\nu c^2} \frac{dB_\nu}{dT} \left[\frac{DT}{Dt} + \frac{\vec{\nabla} \vec{u}}{3} T \right] \\ &= \frac{4\pi B_\nu}{c} - \frac{4\pi T}{\alpha_\nu c^2} \frac{dB_\nu}{dT} \left[\frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} + \frac{\vec{\nabla} \vec{u}}{3} \right] \end{aligned} \quad (2.101)$$

Mit κ_R definieren wir das (aus Astrophysik I bekannte) **Rosseland-Mittel** und schreiben Gleichung (2.101) noch einmal frequenzintegriert an.

$$\kappa_R \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} \frac{1}{\alpha_\nu} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu} \quad (2.102)$$

$$E_{(0)} = \frac{4\pi}{c} B \left[1 - \frac{4}{\kappa_R c} \left(\frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} + \frac{\vec{\nabla} \vec{u}}{3} \right) \right] \quad (2.103)$$

Die Unterschiede zwischen CMF und Ruhesystem stecken hier in \vec{u} .

3 Strahlende Strömungen

[09.01.2007]

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit strahlenden Strömungen (*radiative flows*), die zum Beispiel in Sternwinden oder Supernovae eine Rolle spielen. Es wird sich zeigen, dass Wellenphänomene in solchen Medien zu einer Dämpfung der Strahlung führen können, sich Wellen nichtlinear auszubreiten vermögen und es zu strahlenden Stoßwellen kommen kann.

Notation. In diesem Kapitel sei der Absorptionswirkungsquerschnitt α in Einklang mit der Literatur mit κ bezeichnet.

3.1 Störungen kleiner Amplitude

3.1.1 Voraussetzungen und Vereinfachungen

- i.) Das Medium ruht, d.h. $\vec{u} = 0$.
- ii.) Es werden nur frequenzintegrierte Strahlungsgrößen betrachtet (grauer Fall), es gelte LTE und anfängliches Strahlungsgleichgewicht. Außerdem komme es nur durch Strahlung zu Wärmeaustausch. Die Energiegleichung (1.48) vereinfacht sich dann zu

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = 4\pi\kappa(J - B) \quad (3.1)$$

und sei darüberhinaus der statische Fall angenommen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} &= c_v \frac{\partial T}{\partial t} \\ B &= \frac{ac}{4\pi} T^4 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dann vereinfacht sich (3.1) zu

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = 4\pi\kappa(J - B) \quad (3.3)$$

- iii.) Seien zunächst die typischen Zeitskalen der Störungen kurz im Vergleich zu den Änderungen im Strahlungsfeld (SF) selbst. Mit anderen Worten sei das SF als statisch angenähert. Im Allgemeinen wird man Rückwirkungen auf das SF berücksichtigen und I explizit bestimmen müssen. Vorerst beschäftigen wir uns aber mit der einfachsten Form der Strahlungstransportgleichung für den ebenen ('Richtung' s), statischen Fall.

$$\frac{\partial I}{\partial s} = \kappa(B - I) \quad (3.4)$$

- iv.) Linearisierung der Form

$$\begin{aligned} T &= T_0 + T_1 \\ B &= B_0 + B_1 = \frac{ac}{4\pi} T_0^4 + \frac{ac}{\pi} T_0^3 T_1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}\rho_0 c_v \left(\frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) &= 4\pi\kappa_0(J_1 - B_1) + 4\pi\kappa_1(J_0 - B_0) + 4\pi\kappa_0(J_0 - B_0) + \mathcal{O}(X^2) \\ \rho_0 c_v \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} \right) &= 4\pi\kappa_0(J_1 - B_1) + 4\pi\kappa_1(J_0 - B_0)\end{aligned}\quad (3.6)$$

v.) Strahlungsgleichgewicht als Anfangsbedingung bzw. für den Hintergrund. Das Medium sei als unendlich ausgedehnt und homogen angenommen; daraus resultiert ein homogenes Strahlungsfeld.

$$I_0 = J_0 = B_0 \quad (3.7)$$

wodurch sich (3.6) weiter vereinfacht.

$$\rho_0 c_v \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} \right) = 4\pi\kappa_0(J_1 - B_1) \quad (3.8)$$

Außerdem sei das ungestörte Strahlungsfeld isotrop.

3.1.2 Strahlungsdämpfung linearer Wellen

Die Strahlungstransportgleichung lautet unter Berücksichtigung aller Vereinfachungen

$$\frac{\partial I_1}{\partial s} = \kappa_0(B_1 - I_1) + \kappa_1 \underbrace{(B_0 - I_0)}_{=0} \quad (3.9)$$

und die formale Lösung lässt sich anschreiben (siehe Skriptum zu 'Astrophysik I', Dorfi).

$$I_1(\vec{x}_0, t) = \int_0^\infty B_1(\vec{x}_0 - \vec{n}s, t) \kappa_0 e^{-\kappa_0 s} ds \quad (3.10)$$

Betrachten wir das Moment bezüglich Ω auf obigen Ausdruck, so lässt sich J in Gleichung (3.3) ersetzen.

Mit ν definieren wir den **Diffusionskoeffizienten der Strahlung**, der Reziprokwert einer typischen Zeitskala, auf der radiativer Energieaustausch stattfindet

$$\nu \equiv \frac{4ac}{\rho_0 c_v} \kappa_0 T_0^3, \quad [\nu] = t^{-1} \quad (3.11)$$

und sei θ der Winkel zwischen \vec{x}_0 und \vec{n} , sodass $\mu = \cos \theta$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_1(\vec{x}_0, t)}{\partial t} &= \frac{4\pi\kappa_0}{\rho_0 c_v} \left[-\frac{ac}{\pi} T_0^3 T_1(\vec{x}_0, t) + \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int_0^\infty \frac{ac}{\pi} T_0^3 T_1(\vec{x}_0 - \vec{n}s, t) \kappa_0 e^{-\kappa_0 s} ds \right] \\ &= -\nu \left[T_1(\vec{x}_0, t) - \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int_0^\infty T_1(\vec{x}_0 - \vec{n}s, t) \kappa_0 e^{-\kappa_0 s} ds \right] \\ &= -\nu \left[T_1(\vec{x}_0, t) - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty T_1(x_0 \pm \xi, t) \kappa_0 e^{-\kappa_0 \xi / |\mu|} \frac{d\xi}{|\mu|} \right]\end{aligned}\quad (3.12)$$

Ansatz (Separationsansatz).

$$T_1 = \Phi_1(k, t) e^{ik(x-x_0)} \quad (3.13)$$

Verschiedene Lösungen lassen sich aufgrund der Linearität superponieren.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} e^{ik(x-x_0)} &= -\nu \left[\Phi_1 e^{ik(x-x_0)} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty \Phi_1(k, t) e^{ik(x_0 \pm \xi - x_0)} \kappa_0 e^{-\kappa_0 \xi / |\mu|} \frac{d\xi}{|\mu|} \right] \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} &= -n(k) \Phi_1\end{aligned}\quad (3.14)$$

$$n(k) \equiv \nu \left[1 - \int_0^1 d\mu \int_0^\infty \cos \frac{\mu ky}{\kappa_0} e^{-y} dy \right] \quad (3.15)$$

Die Lösung von (3.14) lässt sich nun bestimmen (Gl. 3.17). Definieren wir zunächst noch die **radiative Relaxationszeit** t_{RR} .

$$t_{RR}(k) \equiv \frac{1}{n(k)} \quad (3.16)$$

$$\Phi_1(k, t) = \Phi_1(k, 0) \exp\left(\frac{t}{t_{RR}}\right) \quad (3.17)$$

In der Regel ist $n(k)$ positiv, was zum Ausdruck bringt, dass heißere Zonen in kühlere strahlen. Betrachten wir die Zeitskalen, auf denen sich die Störungen wegdamfen noch etwas genauer. Wir können $n(k)$ noch etwas einfacher anschreiben (3.18) und den funktionalen Verlauf studieren. Mit $\zeta \equiv \kappa_0/k$ definieren wir eine dimensionslose Variable.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos \frac{\mu ky}{\kappa_0} e^{-y} dy &= \left[1 + \left(\frac{k}{\kappa_0} \right)^2 \mu^2 \right]^{-1} \\ n(k) &= \nu (1 - \zeta^2 \cot^{-1} \zeta)\end{aligned}\quad (3.18)$$

Nun lässt sich für jedes k (Störung) in Abhängigkeit von der Opazität auswerten, in welcher Zeit sich radiative Störungen wegdamfen.

Die *optische Dicke der Störung* τ_λ lässt sich folgendermaßen bestimmen.

$$\frac{\kappa_0}{k} = \frac{\kappa_0 \lambda}{2\pi} = \frac{\tau_\lambda}{2\pi} \quad (3.19)$$

Wertet man (3.18) für verschiedene Werte von ζ und $n(k)/\nu$ aus, so zeigt sich, dass Störungen mit kürzeren Wellenlängen schneller weggedämpft werden. Betrachten wir den Grenzfall unendlicher optischer Dicke (keine Dämpfung).

ζ	$n(k)/\nu$
0.0	1.0
0.2	0.725
0.6	0.382
1.0	0.215
∞	0

$$\zeta \rightarrow \infty : \quad n(k) \cong \frac{\nu k^2}{3\kappa_0^2}$$

bzw. mit $\nu = \frac{4ac}{\rho c_v} \kappa_0 T_0^3$

$$t_{RR} \cong \frac{\rho c_v T_0}{a T_0^4} \frac{l}{c \lambda_p} \cong \frac{\epsilon}{E_{\text{rad}}} t_d \quad (3.20)$$

wobei l eine *typische Längenskala*, λ_p die *mittlere freie Weglänge der Photonen* und t_d eine *Diffusionszeitskala*.

Folgerung. Je kleiner die Wellenlänge einer Störung (lineare Wellen), desto schneller wird sie weggedämpft. In die radiative Relaxationszeit der Strahlungsdämpfung (3.20) gehen das Verhältnis von innerer Energie des Mediums zu der Energie, die in der Strahlung steckt, sowie die Diffusionszeitskala ein.

Die hier präsentierten Ableitungen gehen auf Edward Spiegel zurück. In ihrer Anwendung ist jedoch immer darauf zu achten, welche (klarerweise nicht immer gerechtfertigten) Approximationen und Voraussetzungen in obigen Formalismus eingehen.

Betrachten wir den Eddington-Faktor f . Ist I_1 bekannt, lässt sich f über J und K bestimmen.

$$\begin{aligned} f &= \frac{K}{J} \\ &= \frac{\int_0^1 \mu^2 (1 + \zeta^2 \mu^2)^{-1} d\mu}{\int_0^1 (1 + \zeta^2 \mu^2)^{-1} d\mu} \\ &= \zeta \frac{(1 - \zeta \cot^{-1} \zeta)}{\cot^{-1} \zeta} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Laut Voraussetzung der Isotropie sollte $f = 1/3$ sein; das ist jedoch nur für den Fall $\zeta = \kappa_0/k \rightarrow \infty$ gewährleistet.

3.1.3 Zusätzlicher Energie-Input

In stellaren Winden kommt es durch den Massentransport weg vom Stern zu einem zusätzlichen Energie-Input in den Wind. Betrachten wir eine radiative Schichtung mit konstantem Input \dot{q} im stationären Fall.

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = 4\pi\kappa_0(J_0 - B_0) + \dot{q} = 0 \quad (3.22)$$

Für $\dot{q} \neq 0$ folgt, dass $J_0 \neq B_0$ gelten muss und die vorher angeführten Vereinfachungen können so nicht länger gemacht werden. Für die linearisierte STG und die linearisierte Energiegleichung gelten nun nachstehende Beziehungen.

$$\begin{aligned} \kappa_1(I_0 - B_0) &\neq 0 \\ 4\pi\kappa_1(J_0 - B_0) &\neq 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

In diesem Fall definiert man sich folgende Größen.

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &\equiv B_1 + \frac{\partial \ln \kappa_0}{\partial \ln T} (B_0 - J_0) T_1 \\ \tilde{\nu} &\equiv \frac{4\pi\kappa_0}{\rho c_v} \left[\frac{ac}{\pi} T_0^3 + \frac{\partial \ln \kappa_0}{\partial \ln T} (B_0 - J_0) \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Im Allgemeinen ist $\dot{q} > 0$ (Energiezufuhr) und $B_0 > J_0$, was zum Ausdruck bringt, dass Strahlung Energie wegtransportiert. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass der Term $\frac{\partial \ln \kappa_0}{\partial \ln T}$ negativ wird, dass das Medium also weniger effizient strahlt als es geheizt wird. Dann wird die Störung thermisch instabil.

Folgerung. Es hängt von den Eigenschaften der Opazität κ_0 im Medium ab, ob sich eine durchlaufende Welle aufschaukelt, das heißt Energie vom Strahlungsfeld in die Welle abgegeben wird.

Auf dieses Phänomen trifft man bei Sternenschwingungen, wo der κ -Effekt bei einem gewissen Opazitätsverlauf zu sich verstärkenden Schwingungen führt.

3.1.4 Zeitabhängiges Strahlungsfeld

Mit t_λ wird eine neue Zeitskala eingeführt, die einer *Photonenflugzeit* entspricht.

$$t_\lambda \equiv \frac{\lambda_p}{c} = \frac{1}{\kappa c} \quad (3.25)$$

Wir betrachten die **linearisierten Momente der STG** und setzen wieder $\vec{v} = 0$.

$$\frac{1}{\kappa c} \frac{\partial J_1}{\partial t} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial H_1}{\partial x} = B_1 - J_1 \quad (3.26)$$

$$\frac{1}{\kappa c} \frac{\partial H_1}{\partial t} + \frac{1}{3\kappa} \frac{\partial J_1}{\partial x} = -H_1 \quad (3.27)$$

Im Gleichgewicht einer isotropen Konfiguration gilt $H_0 = 0$ (Isotropie) und $J_0 = B_0$ (Strahlungsgleichgewicht). Die Energiegleichung schreibt sich dann

$$\rho c_v \frac{\partial T_1}{\partial t} = 4\pi\kappa(J_1 - B_1) \quad (3.28)$$

wobei wieder $B_1 = \frac{ac}{\pi} T_0^3 T_1$.

Ansatz.

$$\begin{aligned} J_1 &= A e^{ikx} e^{-nt} \\ H_1 &= B e^{ikx} e^{-nt} \\ T_1 &= C e^{ikx} e^{-nt} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Setzt man diesen Ansatz in das nullte Moment (3.26) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} t_\lambda A e^{ikx} (-n e^{-nt}) + \frac{1}{\kappa} B (ik) e^{ikx} e^{-nt} &= \frac{ac}{\pi} T_0^3 C e^{ikx} e^{-nt} - A e^{ikx} e^{-nt} \\ t_\lambda A (-n) + \frac{1}{\kappa} B (ik) &= \frac{ac}{\pi} T_0^3 C - A \end{aligned} \quad (3.30)$$

und analog das erste Moment (3.27) und die Energiegleichung (3.28), wodurch wir ein Gleichungssystem erhalten, das wir in Matrixform aufschreiben.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} nt_\lambda & -\frac{ik}{\kappa} & 1 \\ -\frac{ik}{3\kappa} & nt_\lambda - 1 & 0 \\ \nu & 0 & n - \nu \end{pmatrix}}_{\equiv G} \begin{pmatrix} J_1 \\ H_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.31)$$

Gesucht werden Lösungen mit $\det G = 0$.

$$(nt_\lambda - 1)^2(n - \nu) - \nu(nt_\lambda - 1) + \frac{k^2}{3\kappa^2}(n - \nu) = 0 \quad (3.32)$$

Wir definieren neue Variablen $z \equiv nt_\lambda$, $\alpha \equiv \nu t_\lambda$ und $\beta \equiv k^2/3\kappa^2$ und erhalten letztendlich eine *Dispersionsrelation* (3.33).

$$z^3 - (2 + \alpha)z^2 + (1 + \alpha + \beta)z - \alpha\beta = 0 \quad (3.33)$$

Gleichung (3.33) ist dritter Ordnung und hat demensprechend drei Nullstellen. Man erhält entweder drei reelle Lösungen oder eine reelle und zwei zueinander konjugierte komplexe Lösungen.

Wir betrachten drei **Grenzfälle**.

3 Strahlende Strömungen

i.) $t_\lambda \rightarrow 0$, entspricht $c \rightarrow \infty$ also 'quasistatischer Strahlung'. Wir dividieren (3.33) durch α , rücksostituieren und lassen t_λ gegen Null gehen.

$$\begin{aligned} \frac{n^3 t_\lambda^3}{\nu t_\lambda} - (\alpha + 2) \frac{n^2 t_\lambda^3}{\nu t_\lambda} + (\alpha + \beta + 1) \frac{n t_\lambda}{\nu t_\lambda} &= \beta \\ (\beta + 1) \frac{n}{\nu} &= \beta \end{aligned}$$

Auflösen nach n führt letztendlich zu (3.34).

$$\begin{aligned} n &= \nu \frac{\beta}{\beta + 1} \\ &= \nu \frac{\frac{k^2}{3\kappa^2}}{\frac{k^2}{3\kappa^2} + 1} \\ &= \nu \frac{1}{1 + \frac{3\kappa^2}{k^2}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Die Lösung (3.34) entspricht dem Fall der *Eddington-Lösung*. Man erhält thermische Relaxation auf einer Zeitskala $1/n$.

$$J_1 = \left(1 + \frac{3\kappa^2}{k^2}\right)^{-1} B_1, \quad H_1 = -\frac{ik}{3\kappa} J_1 \quad (3.35)$$

ii.) $\nu \rightarrow \infty$, entspricht extrem hoher Wärmekapazität $c_v \rightarrow 0$. Die Störung im strahlenden Fluid kann nur über Strahlung propagieren.

$$\begin{aligned} z^3 - 2z^2 + (\beta + 1)z &= 0 \\ z(z^2 - 2z + \beta + 1) &= 0 \\ z((z - 1)^2 + \beta) &= 0 \end{aligned}$$

Man erhält drei Lösungen $z_1 = 0$, $z_{2,3} = 1 \pm ik/\sqrt{3}\kappa$.

$$\begin{aligned} z_1 = n = 0 &\rightarrow B_1 \text{ beliebig, } J_1 \text{ wie oben} \\ z_{2,3} &\rightarrow J_1 = e^{-t/t_\lambda} e^{ik(x \pm ct/\sqrt{3})}, \quad H_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} J_1 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der auf der Zeitskala t_λ *gedämpften Strahlungswelle* (e^{-t/t_λ} -Term) ist $v_{\text{Phase}} = v_{\text{Gruppe}} = c/\sqrt{3}$, weil wir von einer Näherung für optisch dicke, isotrope Medien ausgegangen sind. Im optisch dünnen Fall können sich die Wellen frei mit $v = c$ ausbreiten.

iii.) Homogene Störungen mit $k = 0 \rightarrow \beta = 0$.

$$\begin{aligned} z(z^2 - (\alpha + 2)z + \alpha + 1) &= 0 \\ z(z - 1)(z - (\alpha + 1)) &= 0 \end{aligned}$$

Die drei Lösungen lauten $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ und $z_3 = \alpha + 1$.

$$z_1 = n = 0 \rightarrow J_1 = B_1, \quad H_1 = 0 \quad (3.37)$$

Die triviale Lösung ergibt ein isotropes Strahlungsfeld mit Nettofluss $H_1 = 0$.

$$z_2 = 1 \rightarrow n_2 = \frac{1}{t_\lambda} \rightarrow B_1 = J_1 = 0, \quad H_1 \text{ beliebig} \quad (3.38)$$

Für lange Zeitskalen wird die Asymmetrie im Strahlungsfeld abgebaut und das Strahlungsfeld isotrop. Man spricht auch von der *Isotropisierungsmode* (*isotropization mode*). Photonen werden laufend absorbiert und in beliebige Richtungen reemittiert; die anfängliche Anisotropie wird auf der Zeitskala t_λ ausgeglichen.

$$z_3 = \alpha + 1 \rightarrow n_3 = \nu + \frac{1}{t_\lambda} \rightarrow J_1 = -\frac{B_1}{\nu t_\lambda}, H_1 = 0 \quad (3.39)$$

Auf dieser Zeitskala $(\nu + \frac{1}{t_\lambda})^{-1}$ findet Energieaustausch statt (*Austauschmode*). Es gilt totale Energieerhaltung, wobei Strahlungsenergiedichte und Gasenergiedichte einem ständigen Wandel unterliegen.

Nun wollen wir noch die Unterschiede zwischen optisch dünnen und optisch dichten Medien herausarbeiten.

i.) $\beta = k^2/3\kappa^2 \ll 1$ - optisch dick.

Entwickeln für kleine β (Linearisierung) ergibt wieder drei Lösungen für n .

$$n_1(k) = \nu \frac{k^2}{3\kappa^2} (1 + \nu t_\lambda)^{-1} \quad (3.40)$$

Die erste Lösung ergibt wieder thermische Relaxation auf einer typischen Zeitskala,

$$n_2(k) = \nu \left(1 - \frac{k^2}{3\kappa^2} \frac{\nu t_\lambda - 1}{\nu t_\lambda} \right) \quad (3.41)$$

Lösung zwei entspricht der Isotropisierungsmode

$$n_3(k) = \nu + \frac{1}{t_\lambda} - \left(\frac{k^2}{3\kappa^2} \frac{1}{\nu t_\lambda^2 (1 + \nu t_\lambda)} \right) \quad (3.42)$$

und n_3 gibt wieder die Austauschmode auf einer endlichen Zeitskala.

ii.) $\beta \gg 1$ - optisch dünn.

$$\begin{aligned} z^3 - (\alpha + 2)z^2 + (\alpha + \beta + 1)z - \alpha\beta &= 0 & | \frac{1}{\beta} \\ z - \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Die einzige reelle Lösung ist also $nt_\lambda = \nu t_\lambda \rightarrow n = \nu$, eine gedämpfte Störung.

Mit einer Entwicklung für große β ergeben sich zwei weitere gedämpfte Lösungen

$$z_{2,3} = c\kappa \pm \frac{ick}{\sqrt{3}} \quad (3.43)$$

mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $c/\sqrt{3}$.

3.2 Marshak-Wellen

Bisher haben wir uns mit kleinen Störungen beschäftigt. Nun sollen sogenannte *Marshak-Wellen* bzw. *Verdampfungsfronten* betrachtet werden. Solche thermische Wellen resultieren aus Wärmeleitungsprozessen in opaken, strahlenden Fluiden. Es tritt nichtlineare Wärmeleitung auf, wenn eine heiße Quelle in kaltes Umgebungsmaterial strahlt. Derartige Konfigurationen findet man im Rahmen der Sternentstehung oder bei SN-Explosionen.

Ansatz (Nichtlineare Diffusionsgleichung - Fluss im optisch dicken Bereich).

$$F = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.44)$$

Ansatz (Opazität).

$$\kappa = \kappa_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-n}, \quad \kappa_0 = \kappa(T = T_0 = T(z = 0)) \quad (3.45)$$

$n = 0$ entspricht zum Beispiel reiner Elektronenstreuung, der Fall $n = 3$ heißt *Kramers-Opazität* und gilt im stellaren Bereich zwischen $10^5 - 10^7 K$.

$$\begin{aligned} F &= -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa_0 T_0^n} T^n \frac{\partial T}{\partial z} \\ &= -\frac{16\sigma}{3(4+n)\kappa_0 T_0^n} \frac{\partial}{\partial z} T^{n+4} \\ \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \vec{F} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{16\sigma}{3(n+4)\rho\kappa_0 T_0^n} \frac{\partial T^{n+4}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.2.1 Selbstähnliche Lösungen

Wir führen die dimensionslose Temperatur $\Theta \equiv T/T_0$ ein und suchen *selbstähnliche Lösungen*, sodass sich obige partielle Differentialgleichung zu einer gewöhnlichen DG vereinfacht. Diese selbstähnlichen Lösungen hängen sehr stark von der Wahl der Randbedingungen ab. Die Wahl eines fixen T_0 ist einigermaßen 'unphysikalisch' und sollte durch einen konstanten Strahlungsinput ersetzt werden. Dann hält der Ansatz selbstähnlicher Lösungen jedoch nicht mehr stand.

Wir führen also eine neue Variable $\xi \equiv Kzt^{-1/2}$ ein.

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = Kt^{-1/2}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{2}Kt^{-3/2}z$$

und setzen in (3.46) ein

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\rho c_v T_0 \frac{d\Theta}{d\xi} Kzt^{-3/2} &= \frac{16\sigma}{3(n+4)\rho\kappa_0 T_0^n} T_0^{n+4} \frac{d^2 \Theta^{n+4}}{d\xi^2} (Kt^{-1/2})^2 \\ -\frac{d\Theta}{d\xi} \underbrace{Kzt^{-1/2}}_{=\xi} &= 2 \frac{16\sigma}{3(n+4)\rho^2 \kappa_0 c_v T_0^{n+1}} T_0^{n+4} \frac{d^2 \Theta^{n+4}}{d\xi^2} K^2 \end{aligned}$$

Man erhält also die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-\xi \frac{d\Theta}{d\xi} = 2AK^2 \frac{d^2 \Theta^{n+4}}{d\xi^2} \quad \text{mit} \quad A = \frac{16\sigma T_0^3}{3(n+4)\rho^2 \kappa_0 c_v} \quad (3.47)$$

und benützt man noch die Freiheit in der Wahl der Konstanten $K = \sqrt{1/(2A)}$, vereinfacht sich (3.47) zu

$$-\xi \frac{d\Theta}{d\xi} = \frac{d^2 \Theta^{n+4}}{d\xi^2}. \quad (3.48)$$

3 Strahlende Strömungen

Die Randbedingungen lauten

$$\Theta(\xi = 0) = 1, \quad \Theta(\xi > \xi_{\max}) = 0. \quad (3.49)$$

Prinzipiell existieren beliebig viele Lösungen zum gestellten Problem. Es werden nun Lösungen gesucht mit der 'richtigen' Steigung an der Stelle ξ_{\max} , außerdem soll der Fluss außerhalb dieses Bereiches verschwinden. Betrachten wir im Folgenden also die Umgebung des Punktes ξ_{\max} .

Wir integrieren Gleichung (3.48) (partielle Integration)

$$\xi\Theta + \int_{\xi}^{\infty} \Theta d\xi = -\frac{d\Theta^{n+4}}{d\xi}$$

und betrachten die Variable ξ relativ zu ξ_{\max} indem wir $\xi \equiv \xi_{\max} - \Delta\xi$ definieren.

$$\begin{aligned} (\xi_{\max} - \Delta\xi)\Theta + \underbrace{\int_{\xi}^{\xi_{\max}} \Theta d\xi}_{\cong \Theta\Delta\xi} + \underbrace{\int_{\xi_{\max}}^{\infty} \Theta d\xi}_{=0} &= -\frac{d\Theta^{n+4}}{d\xi} \\ \xi_{\max}\Theta &= -\frac{d\Theta^{n+4}}{d\xi} \\ \xi_{\max}d\xi &= -(n+4)\Theta^{n+2}d\Theta \quad | \int \\ \xi_{\max}\xi &= -\frac{n+4}{n+3}\Theta^{n+3} + C \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die Integrationskonstante C kann über die RB zu $C = \xi_{\max}^2$ bestimmt werden.

Für Gleichung (3.50) können numerisch Lösungen gesucht werden, indem bei einem gewählten ξ_{\max} zu integrieren begonnen wird und durch Variation jener Anfangspunkt gesucht wird, an dem $\Theta(\xi = 0) = 1$ gilt. Die numerisch gefundenen Werte für ξ_{\max} , an denen diese Bedingung erfüllt wird, werden in folgender Tabelle für verschieden gewählte n (Ansatz 3.45) aufgelistet.

n	ξ_{\max}	ε
0	1.231	0.94
1	1.171	0.951
2	1.143	0.96
3	1.120	0.965
10	1.057	0.982
↓	↓	↓
∞	1	1

Je größer n , desto 'rechteckiger' wird die Lösungskurve von $\Theta(\xi)$. Die in der Tabelle vorkommende Größe ε ist ein Maß für die Energie.

$$\begin{aligned} E &= \rho c_v \int_0^{z_{\max}} T(z) dz \\ &= \underbrace{\left(\frac{3\rho^4(4+n)\kappa_0 c_v^3}{32\sigma t T_0} \right)^{1/2}}_{=const \equiv a} \underbrace{\int_0^{\xi_{\max}} \Theta d\xi}_{\equiv \varepsilon} \\ &= a\varepsilon \end{aligned} \quad (3.51)$$

Vergleicht man obigen Ausdruck wieder mit der Konstanten K , ergibt sich

$$a = \frac{\rho c_v T_0 K}{\sqrt{t}}. \quad (3.52)$$

Folgerung. Die Ausbreitung der Welle ist proportional \sqrt{t} .

3.2.2 Bemerkungen zu nichtlinearen Wellen

i.) Der *Energieaustausch durch Strahlung* (Heizung) ist im Allgemeinen ein Prozess, der relativ rasch von sich geht. Das bedeutet, dass die Approximation eines statischen Mediums ($u = 0$) gerechtfertigt ist (vgl.: Ionisationsfronten in 'Astrophysik I', Dorfi).

ii.) Die *nichtlineare Diffusionsgleichung*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (T^n \vec{\nabla} T) \quad (3.53)$$

führt zu einer Front-Ausdehnung proportional $t^{1/(n+2)}$.

iii.) Wie eingangs erwähnt, spiegelt die gewählte *Randbedingung* konstanter Temperatur T_0 im Allgemeinen nicht die physikalischen Gegebenheiten wider. Wählt man eine winkelabhängige Einstrahlungsintensität ($\cos \theta \equiv \mu$)

$$I(z = 0, \mu) \equiv I^- \quad (3.54)$$

führt das auf

$$I^- = I(-1 \leq \mu \leq 0) = \frac{\sigma}{\pi} T_0^4 \quad (3.55)$$

und es ist unumgänglich, die STG für diese speziellen RB zu lösen. Dann erhält man

$$\left(\frac{1}{2} T^4 - \frac{1}{3} \underbrace{\frac{1}{\kappa \rho}}_{=\lambda_p} \frac{\partial T^4}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} T_0^4 \quad (3.56)$$

und es zeigt sich, dass die vorhin angewandte Randbedingung für $\kappa \rightarrow \infty$ zum richtigen Ergebnis führt. Andernfalls muss (3.56) mitgelöst werden und die Ähnlichkeitstransformation ist nicht erlaubt ($\xi_{\max} \rightarrow z_{\max}$).

3.3 Strahlungsdruckgetriebene Winde

3.3.1 Windgleichung

Ausgehend von einer sphärischen, stationären Konfiguration und der Näherung isothermen Plasmas formulieren wir die Bewegungsgleichung für das Medium.

$$\rho u \frac{du}{dr} = -\frac{dp}{dr} - \frac{GM\rho}{r^2} + f_{\text{rad}} \quad (3.57)$$

Wegen der Isothermie ergibt sich wieder die EOS

$$p = c_s^2 \rho, \quad c_s = \text{const} \quad (3.58)$$

die wir in (3.57) einsetzen.

$$u \frac{du}{dr} = -\frac{1}{\rho} c_s^2 \frac{d\rho}{dr} - \frac{GM}{r^2} + \frac{f_{\text{rad}}}{\rho} \quad (3.59)$$

Für stationäre Winde gilt

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho u) = 0 \quad (3.60)$$

was den konstanten Massenverlust \dot{M} zum Ausdruck bringt.

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho u = \text{const} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad 2 \ln r + \ln \rho + \ln u &= \text{const} & \Big| \frac{d}{dr} \\ \frac{2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{u} \frac{du}{dr} &= 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Wir eliminieren den Dichtegradienten in (3.59) und erhalten

$$\begin{aligned} u \frac{du}{dr} &= \frac{2c_s^2}{r} - \frac{c_s}{u} \frac{du}{dr} - \frac{GM}{r^2} + \frac{f_{\text{rad}}}{\rho} \\ \frac{1}{2} \frac{du^2}{dr} - \frac{1}{2} \frac{c_s^2}{u^2} \frac{du^2}{dr} &= \frac{2c_s^2}{r} - \frac{GM}{r^2} + \frac{f_{\text{rad}}}{\rho} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_s^2}{u^2} \right) \frac{du^2}{dr} &= \frac{2c_s^2}{r} - \underbrace{\frac{GM}{r^2} + \frac{f_{\text{rad}}}{\rho}}_{\equiv g_{\text{eff}}} \end{aligned} \quad (3.63)$$

mit (3.63) die **stationäre Windgleichung**. Die Gleichung hat an $r = r_c$ einen singulären bzw. kritischen Punkt (*Schallpunkt*), wo $u = c_s$ wird. Mit g_{eff} wurde die *effektive Schwerebeschleunigung* eingeführt.

Bemerkungen. • Wenn $f_{\text{rad}} = 0$, bleibt folgende Gleichung aufzulösen

$$\frac{2}{c_s} r_c - \frac{GM}{r_c^2} = 0 \quad (3.64)$$

und der kritische Punkt bestimmt sich zu

$$r_c = \frac{GM}{2c_s^2}. \quad (3.65)$$

- Im Allgemeinen ist f_{rad} eine Funktion der Geschwindigkeit und deren räumlicher Ableitung und die Bestimmung des Schallpunktes wird nicht trivial.

3.3.2 Impulsbeitrag durch Strahlung

Wir wollen den durch die Strahlung auf den Wind übertragenen Impuls nun etwas näher betrachten und machen betrachten den hydrodynamischen Kopplungsterm (2.30).

$$\frac{f_{\text{rad}}}{\rho} \equiv g_{\text{rad}} = \frac{\pi}{c\rho} \int_0^\infty \kappa_\nu F_\nu d\nu \quad (3.66)$$

Im Fall frequenzunabhängiger Opazität κ_ν ergeben sich über die Leuchtkraft L folgende Abhängigkeiten.

$$L = 4\pi r^2 F = \text{const} \quad \rightarrow \quad F \propto \frac{1}{r^2} \quad (3.67)$$

Daher ist auch g_{rad} und somit die effektive Schwerebeschleunigung g_{eff} proportional $1/r^2$.

Ein geeigneter Ansatz für g_{rad} ist, die ausgeübte Kraftdichte als Summe der Beiträge durch Thomsonstreuung, das Kontinuum und Linienwechselwirkung aufzuschreiben.

Ansatz.

$$g_{\text{rad}} = g_{\text{rad,Th}} + g_{\text{rad,K}} + g_{\text{rad,L}} \quad (3.68)$$

Sei n_e die *Elektronendichte* und mit σ_T der *Thomson-Querschnitt* bezeichnet.

$$g_{\text{rad,Th}} = \frac{n_e \sigma_T}{c \rho} \frac{L}{4\pi r^2} \quad (3.69)$$

Der Quotient n_e/ρ drückt den *Ionisationsgrad* des Plasmas aus und sei im Wind eine konstante Größe. Wir definieren $\gamma \equiv g_{\text{rad,Th}}/g$ und schreiben die Wingleichung an.

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_s^2}{u^2} \right) \frac{du^2}{dr} = \frac{2c_s^2}{r} - \frac{GM}{r^2} (1 - \gamma) + g_{\text{rad,L}} + g_{\text{rad,K}} \quad (3.70)$$

In den meisten Fällen ist $g_{\text{rad,K}}$ vernachlässigbar, wir setzen diesen Beitrag daher im Folgenden Null.

Als Referenz betrachten wir Zeta Puppis, ($T_{\text{eff}} = 42000K$, $R = 19R_{\text{Sonne}}$, $Y = 0.17$, $\log g = 3.5$), für den sich unter der Annahme $g_{\text{rad,L}} = 0$ ein kritischer Punkt

$$r_c = \frac{GM(1 - \gamma)}{2c_s^2} = 136R_{\text{Stern}}$$

errechnet. Die spektroskopischen Beobachtungsdaten lassen hingegen darauf schließen, dass der kritische Punkt viel näher am Stern zu finden ist.

$$r_{c,\text{beob}} = 1.1R_{\text{Stern}}$$

Die Annahme $g_{\text{rad,L}} = 0$ ist also grob falsch.

In der Theorie strahlungsdruckgetriebener Winde muss daher g_{rad} explizit bestimmt werden.

$$g_{\text{rad}} = \frac{4\pi}{c} \frac{1}{2\rho} \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \kappa_\nu I_\nu \mu d\mu \quad (3.71)$$

Ein Vergleich der Opazität mit dem Beitrag der Thomsonstreuung liefert einen Faktor 10^5 , auch wenn im Wind eines heißen Sterns nur sehr wenige Elektronen gebunden sind. Die vielen Metalllinien im UV-Bereich ($T_{\text{eff}} = 42000K$) erlauben sehr effektiven Impulstransport von der Strahlung auf die Materie des Windes; die Linienopazität dominiert. Bei einem Abstand von etwa zwei Sternradien wird außerdem eine Windgeschwindigkeit von etwa 1000km s^{-1} gemessen und der Dopplereffekt ist signifikant.

Ansatz. Für jede Linie gilt im einfachsten Fall

$$g_{\text{rad,L}} = \frac{\text{absorbierter Impuls}}{\Delta t \Delta m} = \frac{L}{c} \frac{L_\nu}{L} \Delta\nu \frac{1}{\Delta m} \quad (3.72)$$

wo der Ausdruck L/c den Gesamtimpuls im Strahlungsfeld angibt.

$$\frac{\Delta\nu_i}{\nu_i} \cong \frac{\Delta u}{c}, \quad \Delta m = 4\pi r^2 \rho \Delta r \quad (3.73)$$

Um den kollektiven Effekt zu bestimmen, summiert man über alle Spektrallinien i

$$\begin{aligned} g_{\text{rad,L}} &= \frac{L}{c} \sum_i \frac{L_{\nu_i}}{L} \Delta\nu_i \frac{1}{\Delta m} \\ &= \frac{L}{c^2} \frac{1}{4\pi r^2 \rho \Delta r} \sum_i \frac{L_{\nu_i}}{L} \Delta\nu_i \Delta u \end{aligned} \quad (3.74)$$

und definiert sich die konstante Größe

$$N_{\text{eff}} \equiv \sum_i \frac{L_{\nu_i}}{L} \Delta\nu_i. \quad (3.75)$$

Mit Hilfe des Massenverlustes \dot{M} (3.61) erhält man

$$\begin{aligned} g_{\text{rad,L}} &= \frac{L}{c^2} \frac{u}{\dot{M}} N_{\text{eff}} \frac{\Delta u}{\Delta r} \\ &= \frac{L}{c^2} \frac{u}{\dot{M}} N_{\text{eff}} \frac{du}{dr} \end{aligned} \quad (3.76)$$

das heißt $g_{\text{rad,L}} \propto u \frac{du}{dr}$. In dieser Abschätzung wurde der Strahlungstransport aber außen vor gelassen, es findet daher keine 'Interaktion mit anderen Linien' statt. Gleichung (3.76) überschätzt den Beitrag zum Impulstransport, bessere Ergebnisse liefert folgender Ansatz.

$$\left(u \frac{du}{dr} \right)^\alpha, \quad \alpha = 0.6 \dots 0.7 \quad (3.77)$$

3.3.3 CAK-Theorie

Die in (3.75) definierte Größe N_{eff} ist nur in erster Näherung konstant. Eine verbesserte Herangehensweise stammt von Castor, Abbott und Klein (CAK-Theorie). Bei genauerer Betrachtung der Linienstärken stellt sich heraus, dass es viele schwache Linien, einige mittlere und wenige starke Spektrallinien gibt. Man ersetzt die Summe über alle Linien daher durch ein Integral, das man mit einem geeigneten Linienprofil gewichtet.

Im Rahmen der Theorie wird die *Sobolev-Näherung* herangezogen, welche die Interaktion zwischen Photon und dem Ion als lokal und eindeutig festsetzt. Es treten daher keine Gradienten innerhalb einer Linie auf. Das führt zu einer eindeutigen Zuordnung zwischen optischer Tiefe und der Geschwindigkeit des Windes. Die Approximation setzt voraus, dass die Geschwindigkeit eine monoton zunehmende Funktion ist (Stoßwellen seien hier also ausgeklammert).

Für eine Linie mit Index i gilt

$$\tau_S^i = v_{\text{th}}^i k^i \frac{\rho(r)}{du/dr} \quad (3.78)$$

mit der *Linienstärke* k^i und der *thermischen Geschwindigkeit* v_{th}^i . Sieht man von sehr ausgedünnten Plasmen ab, ist es gerechtfertigt v_{th} für alle Ionen gleich groß anzunehmen.

$$\Delta\nu_i = \frac{L_\nu}{L} \Delta\nu (1 - e^{-\tau_S^i}) \quad (3.79)$$

Verwenden wir nun dieses Ergebnis, um den Beitrag der Linien i zu bestimmen.

$$g_{\text{rad,L}}^i = \frac{L}{c^2} \frac{L_\nu}{L} \nu_i (1 - e^{-\tau_S^i}) \frac{1}{4\pi\rho} \frac{du}{dr} \quad (3.80)$$

Dieser Ausdruck geht für $\tau \rightarrow \infty$ in die Näherung (3.75) über. Für sehr schwache Linien zeigt die Entwicklung ($\tau \ll 1$)

$$\begin{aligned} g_{\text{rad,L}}^i &= \frac{L}{c^2} \frac{L_\nu}{L} \nu_i \left(v_{\text{th}}^i k^i \frac{\rho}{du/dr} \right) \frac{1}{4\pi\rho} \frac{du}{dr} \\ &= \frac{L}{c^2} \frac{L_\nu}{L} \nu_i (v_{\text{th}}^i k^i) \frac{1}{4\pi r^2} \end{aligned} \quad (3.81)$$

dass $g_{\text{rad,L}}^i$ mit dem Quadrat des Abstandes abnimmt.

Castor, Abott und Klein hatten seinerzeit etwa 250000 Linien zur Verfügung, um zu ihren Ergebnissen zu kommen. Die Linienstärke wird als Potenzgesetz angesetzt

$$\begin{aligned} dN(k) &= \int_0^\infty \frac{L_\nu \nu_i}{L} n(k, \nu) d\nu dk \\ &= N_0 (1 - \alpha) \left(\frac{k}{s_e} \right)^{\alpha-2} \frac{dk}{s_e} \end{aligned} \quad (3.82)$$

wobei α die zu bestimmende empirische Größe ist und im Wertebereich $0.5 \leq \alpha \leq 0.7$ zu finden ist.

$$s_e \equiv \frac{n_e \sigma_T}{\rho} \quad (3.83)$$

Mit Hilfe einer kleinen Nebenrechnung können wir obiges Integral ausführen und den kollektiven Effekt aller Linien im Rahmen der CAK-Theorie anschreiben. Wir betrachten die Gammafunktion

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

bzw. das Integral

$$N(k > k_0) = \int_{k_0}^\infty dN(K) = N_0 \left(\frac{k}{s_e} \right)^{\alpha-1}$$

und vergleichen mit der Summe über $g_{\text{rad,L}}^i$.

$$\begin{aligned} g_{\text{rad,L}} &= N_0 \frac{1}{4\pi r^2} v_{\text{th}} s_e \left(\frac{du/dr}{s_e v_{\text{th}} \rho} \right)^\alpha \Gamma(\alpha) \\ &= N_0 \frac{1}{4\pi r^2} v_{\text{th}} s_e \left(\frac{4\pi r^2 u du/dr}{s_e v_{\text{th}} \dot{M}} \right)^\alpha \Gamma(\alpha) \end{aligned} \quad (3.84)$$

Somit ist der Impulsbeitrag durch Linieneffekte zum Wind bestimmt und wir können die Windgleichung für $u \gg c_s$ aufschreiben.

$$\begin{aligned} r^2 u \frac{du}{dr} &= \underbrace{\frac{L}{c^2} s_e v_{\text{th}} \frac{N_0}{4\pi} \left(\frac{4\pi}{s_e v_{\text{th}} \dot{M}} \right)^\alpha \Gamma(\alpha)}_{=const} \left(r^2 u \frac{du}{dr} \right)^\alpha - GM(1 - \gamma) \\ &= C \left(r^2 u \frac{du}{dr} \right)^\alpha - GM(1 - \gamma) \end{aligned}$$

Zur Diskussion des Ergebnisses definieren wir $y \equiv r^2 u \frac{du}{dr}$.

$$y + GM(1 - \gamma) = Cy^\alpha \quad (3.85)$$

Gesucht werden Lösungen, wo die Tangenten links und rechts der Gleichung übereinstimmen. Es zeigt sich, dass nur eine solche Lösung existiert.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \rightarrow 1 &= \alpha C y^{\alpha-1} |_{\text{Schnittpunkt}} \\ &= \alpha C D^{\alpha-1} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Drückt man sich aus obiger Gleichung C aus und betrachtet den Schnittpunkt D in Gleichung

(3.85), ergibt sich

$$\begin{aligned}
 D + GM(1 - \gamma) &= \frac{1}{\alpha D^{\alpha-1}} D^\alpha \\
 GM(1 - \gamma) &= D \frac{1 - \alpha}{\alpha} \\
 \frac{\alpha}{\alpha - 1} GM(1 - \gamma) &= D
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

Lösen wir also die Bewegungsgleichung. Da die Ausströmgeschwindigkeit des Windes am Rand des Sterns relativ gering ist, wählen wir als RB $u(r = R_{\text{Stern}}) = 0$.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{du^2}{dr} &= \frac{D}{r^2} \quad | \int dr \\
 \frac{1}{2} u^2 &= -\frac{D}{r} + \text{const} \\
 &= D \left(\frac{1}{R_{\text{Stern}}} - \frac{1}{r} \right) \\
 &= \frac{\alpha}{1 - \alpha} GM(1 - \gamma) \left(\frac{1}{R_{\text{Stern}}} - \frac{1}{r} \right) \\
 u^2 &= \underbrace{\frac{2GM(1 - \gamma)}{R_{\text{Stern}}}}_{=u_{\text{esc}}^2} \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left(1 - \frac{R_{\text{Stern}}}{r} \right)
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Für $r \rightarrow \infty$ ergibt sich eine Windgeschwindigkeit

$$u_\infty = u_{\text{esc}} \sqrt{\frac{\alpha}{1 - \alpha}} \neq u_\infty(\dot{M}). \tag{3.89}$$

Folgerung. Die Geschwindigkeit des strahlungsgetriebenen Windes in großer Entfernung vom Stern ist keine Funktion der Massenverlustrate.

Die Größe u_{esc} lässt sich spektroskopisch über den Dopplereffekt sehr gut bestimmen. Beobachtungen stützen die oben angeführten Ableitungen.

Bemerkungen. • *Etwa zehn Prozent der absorbierten/emittierten Photonen strahlen zurück in die Atmosphäre des Sterns. Im Wind kann sich die Strahlung nicht frei ausbreiten. Dieser Effekt wird wind blanketing genannt.*

- *Generell kann man nicht davon ausgehen, dass sich die Photonen radial bewegen; die Geometrie des Strahlungsfeldes sollte berücksichtigt werden, zumal der Unterschall-Überschall-Übergang sehr nahe am Stern stattfindet.*
- *Nimmt man 'bessere Physik' mit, ergeben sich dünnere, schnellere Winde als in der hier präsentierten Approximation.*

Literatur

- Bohren, C.F., Huffman, D.R.: 1983, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, Wiley, New York
- Castor, J.: 2004, *Radiation Hydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK
- Courant, R., Friedrichs, K.O.: 1976, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Springer, New York
- Kudritzki, R.P., Yorke, H.W., Frisch, H.: 1988, *Radiation in moving gaseous Media*, 18th Advanced Saas Fee Course, Swiss Soc. of Astrophysics and Astronomy, Geneva Observatory
- Landau, L.D., Lifschitz, E.M.: 1976, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band VI: Hydrodynamik*, Akademie Verlag, Berlin (Ost)
- Lamers, H.J.G.M., Cassinelli, J.P.: 1999, *Introduction to Stellar Winds*, Cambridge University Press, Cambridge
- Mihalas, D.: 1978, *Stellar Atmospheres*, 2nd Edition, Freeman, San Francisco
- Mihalas, D., Mihalas, B.W.: 1984, *Foundations of Radiation Hydrodynamics*, Oxford University Press, New York
- Rybicki, G.B., Lightman, A.P.: 1979, *Radiative Processes in Astrophysics*, Wiley, New York
- Shapiro, S.L., Teukolsky, S.A.: 1983, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, Wiley, New York
- Shu, F.H.: 1991, *The Physics of Astrophysics*, Vol. I,II, University Science Books, Mill Valley
- Zel'dovich, Ya.B., Raizer, Yu.P.: 1967, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Vol. I, II, Academic Press, New York