Herrn Prof. Dr. Franz Exner
Hochachtungsvoll
m. H.

Sonderabdruck

aus

Jahrbuch

der

Radioaktivität und Elektronik

Verlag von S. HIRZEL in Leipzig.

Im Verlage von **S. Hirzel** in **Leipzig** erscheint:

Jahrbuch

der

Radioaktivität und Elektronik

Unter Mitarbeit

von

S. A. Arrhenius (Stockholm), **P.** und Frau **S. Curie** (Paris), **J. Elster** und **H. Geitel** (Wolfenbüttel), **F. Giesel** (Braunschweig), **K. Hofmann** (München), **W. Marckwald** (Berlin), **E. Rutherford** (Montreal), **F. Soddy** (London), **W. Wien** (Würzburg)

und unter besonderer Mitwirkung

von

H. Becquerel in Paris und **Sir William Ramsay** in London

herausgegeben

von

Johannes Stark

in Göttingen.

Erster Band

1. Heft

Die Ausgabe erfolgt in Heften, die einzeln nicht käuflich sind.

4 Hefte bilden einen Band.

Preis für den Band 12—16 Mark.

Die experimentellen und theoretischen Untersuchungen am Atom der Elektrizität, dem Elektron, haben in den letzten Jahren eine neue Epoche der naturwissenschaftlichen Forschung eingeleitet. Neue große Arbeitsgebiete haben sich der Physik und Chemie erschlossen, wurzelnd in der Erfahrung entwickeln sich neue Theorien.

Vorbereitet durch die Untersuchung der elektrolytischen Dissoziation, hat die Physik mit Erfolg die Erforschung der Ionen in Gasen und Metallen aufgenommen; die Erfahrung über die Eigenschaften des isolierten

(Fortsetzung auf der 3. Umschlagseite.)

Aus: Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik. II. Band. Heft 3.

Über den Druck des Lichtes.

Von **Fritz Hasenöhrl.**

Inhaltsübersicht: Literatur; Bezeichnungen. — A. Der Lichtdruck nach der Maxwell-Hertzschen Theorie. 1. Die Maxwellschen Spannungen. 2. Der Druck eines einzelnen Lichtstrahls auf eine vollständig absorbierende Fläche. 3. Der Druck auf eine Fläche mit endlichem Reflexionsvermögen. 4. Durchsichtiger Körper. Drehmoment beim Durchgang eines Strahles durch eine planparallele Platte. 5. Giltigkeitsgrenzen der angestellten Berechnungen. — B. Der Lichtdruck nach der Theorie von H. A. Lorentz. 6. Ponderomotorische Kräfte der Lorentzschen Theorie. 7. Anwendung auf den Lichtdruck. Sätze von Hrn. Abraham. 8. Geometrisches über relativen Strahlengang und relative Strahlungsintensität. 9. Druck eines einzelnen Lichtstrahles. 10. Die Strahlung eines bewegten Körpers. 11. Reflexionsgesetz und Dopplereffekt an einem bewegten Spiegel. 12. Der Druck des Lichtes auf denselben. 13. Strenge Ableitung desselben Resultates. — C. Behandlung des Lichtdruckes von andern Gesichtspunkten. — 14. Volumkräfte statt der Oberflächenkräfte nach der Hertzschen Theorie. Methode von Lord Rayleigh. 15. Dasselbe nach der Theorie von Larmor. 16. Arbeiten von Poynting. 16. von Heaviside. 17. Larmors Berechnung des Lichtdruckes aus der elastischen Lichttheorie. — D. Anwendung auf die Thermodynamik der Strahlung. 18. Ableitung des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes. 19. Abrahams Methode zur Ableitung des Wienschen Verschiebungsgesetzes. 20. Widerstand des Lichtäthers. — E. 21. Mechanische Analogien. 22. Theorie der Kometenschweife von Arrhenius und Schwarzschild. 23. Einfluß des Lichtdruckes auf die Erdbewegung nach Poynting.

Literatur.

Die Anordnung der folgenden Literaturübersicht ist eine wesentlich chronologische. Die Zitate des Textes beziehen sich auf die hier angegebene Numerierung.

1. J. C. Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Deutsch von B. Weinstein. Berlin 1883. II. S. 548.
2. A. Bartoli, Sopra i movimenti prodotti dalla luce e dal calore sopra il radiometro di Crookes. Firenze; Le Monnier 1876; N. Cim. (3) **15**, 193–202, 1884; Exner Rep. **21**, 198–207, 1885.
3. A. Bartoli, Sulla transformazione in correnti elettriche delle Radiazione incidente sopra una superficie riflettente in movimento. Heraus-

gegeben von A. Roiti und V. Volterra. Linc. Rend. (5) **12** [2], 346—356; auch N. Cim. (5) **6**, 240—252, 1903.
4. L. Boltzmann, Über eine von Hrn. Bartoli entdeckte Beziehung der Wärmestrahlung zum zweiten Hauptsatze. Wied. Ann. **22**, 31—39, 1884.
5. — Ableitung des Stefanschen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur, aus der elektromagnetischen Lichttheorie. Wied. Ann. **22**, 291—294, 1884.
6. B. Galitzine, Über strahlende Energie. Wied. Ann. **45**, 479—495, 1892.
7. J. Larmor, Aether and Matter. Cambridge 1900. §§ 82—87. (Vergl. auch: A dynamical theory of the electric and luminiferous medium. Phil. Trans. 1894—1897.)
8. — On the relations of Radiation to Temperature. Brit. Ass. Rep. S. 657—659, 1900.
9. — Encykl. Brit. Vol. 32. Art. Radiation 1902.
10. — On the Intensity of the Natural Radiation from moving bodies and its mechanical Reaction. Boltzmann-Festschrift. S. 590—599, 1904. (Auch Phil. Mag. (6) **7**, 578—586.)
11. Lord Rayleigh, Note on the Pressure of Radiation, showing on Apparent failure of the usual Electromagnetic equations. Phil. Mag. (5) **45**, 522—525, 1898. (Siehe dazu auch J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) **46**, 154—155.)
12. — On the pressure of vibrations. Phil. Mag. (6) **3**, 338—346, 1902.
13. P. Drude, Lehrbuch der Optik. Leipzig 1900. 3. Abschnitt. S. 447 bis 449, 470—473.
14. D. A. Goldhammer, Über den Druck der Lichtstrahlen. Ann. d. Phys. **4**, 834—852. 1901. (Auch Arch. Néerl. 1900.)
15. H. Poincaré, Electricité et Optique. 2. éd. Paris 1901. S. 184 ff.
16. M. Thiesen, Über den Reibungswiderstand des Lichtäthers. Verh. d. D. Physik. Ges. **3**, 177—180, 1901.
17. H. Pellat, Démonstration de la loi de Maxwell-Bartoli. J. d. Phys. (4) **2**, 484—490, 1903.
18. V. v. Türin, Über die Intensität der Bewegungsenergie. Ann. d. Naturphil. **1**, 486—497, 1902.
19. — Über die wechselseitigen Beziehungen der Strahlungsenergie und der Bewegungsenergie. Ann. d. Naturphil. **3**, 270—282, 1904.
20. T. H. Havelock, On the Pressure of Radiation. Phil. Mag. (6) **6**, 157—173, 1903.
21. J. H. Poynting, Radiation in the Solar System: its effect on Temperature ant its Pressure on Small bodies. Phil. Trans. (A) **202**, 525—552, 1904. (Auch Nature **70**, 512—515.)
22. — Radiation Pressure. Nature **71**, 200—201, 1904.
23. — Radiation Pressure. Phil. Mag. (6) **9**, 393—406, 1905.
24. M. Abraham, Der Lichtdruck auf einen bewegten Spiegel und das Gesetz der schwarzen Strahlung. Boltzmann-Festschrift. S. 85—93. 1904.

25. M. Abraham, Zur Theorie der Strahlung und des Strahlungsdruckes. Ann. d. Phys. **14**, 236—287, 1904.
26. H. A. Lorentz, Encykl. d. Math. Wissensch. V, 2, Art. 13 u. 14 über Maxwellsche und Elektronentheorie. 1904. Insbesondere S. 163 und 269 ff. (Siehe dortselbst auch über die anderen Schriften desselben Verf.)
27. F. Hasenöhrl, Über die Veränderung der Dimensionen der Materie infolge ihrer Bewegung durch den Äther. Wien. Ber. IIa, **113**, 469 bis 490, 1904. Anhang.
28. — Zur Theorie der Strahlung bewegter Körper. Wien. Ber. IIa, **113**, 1039—1055, 1904.
29. — Zur Theorie der Strahlung in bewegten Körpern. Ann. d. Phys. **15**, 344—370, 1904; **16**, 589—592, 1905.
30. O. Heaviside, The Pressure of Radiation. Nature **71**, 439—440, 1905.
31. R. Hargreaves, Radiation and Electromagnetic Theory. Phil. Mag. (6) **9**, 313—350, 425—466, 1905.
32. S. Arrhenius, Über die Ursache der Nordlichter. Phys. Zeitschr. **2**, 81—87, 97—105, 1900.
33. K. Schwarzschild, Der Druck des Lichtes auf kleine Kugeln und die Arrheniussche Theorie der Kometenschweife. Münch. Ber. **31**, 293—338, 1902.
34. E. Buckingham, Notiz zur Ableitung des Stefanschen Gesetzes. Phys Rev. **17**, 277—280, 1904.

Bezeichnungen.

Was die in dem vorliegenden Berichte gewählten Bezeichnungsweisen betrifft, habe ich mich genau an die betreffenden Artikel der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften gehalten (l. c. 26); und zwar sowohl in bezug auf die elektromagnetischen Zustandsgrößen, als auch in bezug auf die Symbolik der Vektoranalysis. Ferner bediene ich mich im folgenden durchweg des auch dort benutzten „modifizierten gemischten" Maßsystems.

Die sonst nötigen, speziellen Bezeichnungsweisen sind an Ort und Stelle erläutert. Hier soll nur erwähnt werden, daß (in Kapitel B) für den Einfallswinkel oder Reflexionswinkel im absoluten, resp. relativen Strahlengange stets die Buchstaben φ, resp. ψ verwendet sind. Sonst sind die auf den relativen Strahlengang bezüglichen Größen durch einen Akzent gekennzeichnet (c', i' usw.). Der Index 1 bezieht sich stets auf den reflektierten Strahl; wenn es nötig ist (§ 13), wird der einfallende Strahl durch den Index o kenntlich gemacht; sonst beziehen sich auf den letzteren die Buchstaben ohne Index.

A.

1. Die Existenz eines Lichtdruckes ist zuerst von Maxwell (l. c. 1) behauptet worden. Der Wert desselben ergibt sich, falls sich das Licht

im Äther fortpflanzt, einfach aus den von ihm angegebenen Werten des Zwanges im elektromagnetischen Felde. „Es wirkt in einem Medium, in welchem sich eine Welle fortpflanzt in der Richtung der Fortpflanzung ein Druck, der an jeder Stelle numerisch ebenso groß ist, wie die dortselbst vorhandene, auf Volumeinheit bezogene Energie.“ Falls jedoch Dielektrizitätskonstante und Permeabilität des Mediums andere Werte haben als im Äther, führen die von Maxwell angegebenen Werte des Zwanges nicht zu diesem Resultat. Benutzt man aber die von Hertz angegebenen Werte, so erhält man allgemein die obige einfache Beziehung zwischen Energiedichte und Druck. Da man jetzt wohl allgemein annimmt, daß die Hertzschen Ausdrücke die richtigen sind, wollen wir hier gleich die letzteren unseren Betrachtungen zugrunde legen.

Sieht man von der Deformation des Mediums infolge der ponderomotorischen Kräfte elektromagnetischen Ursprungs ab, so sind die Spannungen in einem isotropen Medium durch die Ausdrücke[1])

$$X_x = \frac{\varepsilon}{2}(\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2) + \frac{\mu}{2}(\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2) \text{ usw.} \qquad (1)$$

$$X_y = Y_x = \varepsilon \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \mu \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y \text{ usw.}$$

gegeben.

Auf die Flächeneinheit einer Ebene, deren Normale durch n gegeben ist, wirkt demnach die Kraft, deren Komponenten

$$X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz \text{ usw.} \qquad (2)$$

sind, wofür man nach (1) auch setzen kann:

$$\frac{\varepsilon}{2}(2\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_n - \mathfrak{E}^2 \cos nx) + \frac{\mu}{2}(2\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_n - \mathfrak{H}^2 \cos nx) \text{ usw.} \qquad (3)$$

Die Spannungen X_x usw. sind Zugspannungen. Es ist daher die Normale n nach der Seite hin zu ziehen, wo das betrachtete elektromagnetische Feld herrscht. Ferner ist zu bemerken, daß in der Maxwell-Hertzschen Theorie diese Spannungen die gesamte ponderomotorische Kraft darstellen. Wollen wir daher die Kraftwirkung auf einen gegebenen Raum berechnen, so haben wir bloß die Ausdrücke

---

1) Siehe etwa Encyklop. d. math. Wiss. V, 2, S. 109. — Wir haben hier statt $\mathfrak{E}_w$ blos $\mathfrak{E}$ geschrieben, da wir von eingeprägten elektromotorischen Kräften absehen. — Maxwell hat in seinem Lehrbuch die Werte der Spannungen im elektrischen Felde nur für den Äther angegeben (Lehrbuch I, § 107). Für die Spannungen im magnetischen Felde gibt er jedoch andere Ausdrücke, nämlich $\frac{1}{2}(2\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x - \mathfrak{H}^2)$ usw. an (Lehrbuch II, § 641). Wir setzen hier ferner $X_y = Y_x$ usf.

(2) oder (3) über die Begrenzung desselben zu integrieren, wobei die Normale nach außen zu ziehen ist. Wir brauchen also nur die Kraftkomponenten an der Außenseite dieser Begrenzungsfläche zu kennen; während der elektromagnetische Zustand im Innern des betrachteten Raumes nicht zur Geltung kommt. Gerade dieser Umstand macht den Ausdruck der ponderomotorischen Kraft durch Spannungen zur Berechnung des Lichtdruckes geeignet.

2. Wir wollen nun die Spannungen in einem durch Lichtbewegung erzeugten elektromagnetischen Felde berechnen. Dazu betrachten wir eine ebene linear polarisierte Welle, die in der Richtung der Z-Achse fortschreitet:

$$\mathfrak{E}_x = A \cdot \cos \nu\,(z - c' t);\quad \mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_z = 0$$

$$\mathfrak{H}_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot A \cdot \cos \nu\,(z - c' t);\quad \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_z = 0$$

$$c' = c/\sqrt{\varepsilon\mu}\,.$$

Setzt man diese Werte der Kraftkomponenten in (1) ein, so verschwinden alle Spannungen mit Ausnahme von

$$Z_z = -\left(\frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}_x^2 + \frac{\mu}{2}\mathfrak{H}_y^2\right) = -\varepsilon A^2 \cos^2 \nu\,(z - c' t).$$

Dies ist aber auch der Betrag der Energiedichte W. Da wir unter Z_z einen Zug verstehen, so können wir sagen, daß in der Fortpflanzungsrichtung der Welle ein Druck $-Z_z = W$ wirkt. Der zeitliche Mittelwert desselben ist gleich

$$\overline{W} = \frac{\varepsilon}{2} A^2.$$

Wir betrachten nun eine ebene, linear polarisierte Lichtwelle, deren Fortpflanzungsrichtung in der XZ-Ebene liegt und mit der Z-Achse den Winkel φ einschließt.

Setzen wir

$$\nu\,(x \sin \varphi + z \cos \varphi - c' t) = \Theta;\quad (c' = c/\sqrt{\varepsilon\mu}\,),$$

so ist der betrachtete Zustand durch die Ausdrücke

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{A}_x \cos \Theta \qquad \mathfrak{H}_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{A}_y \cos \varphi \cos \Theta$$

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{A}_y \cos \Theta \qquad \mathfrak{H}_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,(\mathfrak{A}_x \cos\varphi - \mathfrak{A}_z \sin\varphi) \cos \Theta \quad (5)$$

$$\mathfrak{E}_z = \mathfrak{A}_z \cos \Theta \qquad \mathfrak{H}_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{A}_y \sin \varphi \cos \Theta$$

$$\mathfrak{A}_x \sin \varphi + \mathfrak{A}_z \cos \varphi = 0 \quad (6)$$

gegeben. Die Dichte der gesamten elektromagnetischen Energie ist

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \frac{1}{2}\mu \mathfrak{H}^2 = \varepsilon \mathfrak{A}^2 \cos^2 \Theta,^1)$$

während die (nach Zeit oder Raum) mittlere Energiedichte den Wert

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\varepsilon \mathfrak{A}^2 \tag{7}$$

hat.

Fällt nun diese Welle auf eine Ebene, welche mit der XY-Ebene zusammenfällt, deren Normale also die Richtungscosinus (0,0,—1) hat, so wirkt auf die Flächeneinheit derselben entsprechend (2) eine Kraft, deren Komponenten nach den Koordinatenachsen den Betrag

$$-Z_x;\ -Z_y;\ -Z_z$$

haben.

Setzen wir nun die Werte (5) in die Ausdrücke (1) ein, so erhalten wir unter Benutzung von (6) nach einfacher Transformation:

$$\begin{aligned} Z_x &= -\varepsilon \mathfrak{A}^2 \sin\varphi \cos\varphi \cdot \cos^2\Theta \\ Z_y &= o \\ Z_z &= -\varepsilon \mathfrak{A}^2 \cos^2\varphi \cdot \cos^2\Theta. \end{aligned}$$

Daher ist das Zeitmittel der auf die Flächeneinheit der betrachteten Ebene wirksamen Kraft (vgl. (7)) gleich:

$$\overline{W} \sin\varphi \cos\varphi;\ o;\ \overline{W} \cos^2\varphi. \tag{8}$$

Dieselbe hat also eine tangentielle und eine normale Komponente. Sie kann als Druck aufgefaßt werden, dessen Richtung mit dem der Fortpflanzung der betrachteten Strahlung übereinstimmt und dessen Betrag gleich $\overline{W}\cos\varphi$, oder, wie wir auch sagen können, gleich der in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit auffallenden Energiemenge dividiert durch die Geschwindigkeit c' der Strahlung ist.

Hätten wir an Stelle von Θ die Größe $\nu(x\sin\varphi + z\cos\varphi + c't)$ als Argument der Zeitfunktion gewählt, so würden wir für $\mathfrak{H}$ denselben Wert wie früher erhalten, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen; da aber in den Ausdrücken (1) nur Produkte aus zwei Komponenten von $\mathfrak{H}$ auftreten, würden wir für die Zugspannungen dieselben Werte erhalten wie früher, und desgleichen auch für die Kraftwirkung auf die betrachtete Ebene in bezug auf Größe und Richtung.

Es ist also gleichgültig, ob die betrachtete Strahlung auf die Ebene auffällt oder ob sie dieselbe (in der gleichen aber entgegengesetzten Richtung) verläßt. Ferner bemerken wir noch, daß unser

1) $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}_x^2 + \mathfrak{A}_y^2 + \mathfrak{A}_z^2$.

Resultat vom Polarisationszustand und der Wellenlänge der Strahlung unabhängig ist.

Denken wir uns jetzt die betrachtete Ebene als Begrenzung eines Körpers, so wird der eben berechnete Lichtdruck die einzig wirksame Kraft sein, wenn die betrachtete Strahlung als allein bestehend angesehen werden kann; dies wird also bei auffallender Strahlung nur dann der Fall sein, wenn die Grenzebene das Reflexionsvermögen Null hat.

3. Hat die Grenzebene dagegen ein endliches Reflexionsvermögen r, so haben wir noch die Wirkung der reflektierten Strahlung, deren mittlere Dichte gleich $r\,\overline{W}$ ist, in Rechnung zu ziehen.

Es liegt die Vermutung nahe, daß sich die Wirkungen des einfallenden und des reflektierten Strahles einfach summieren. Man erkennt leicht, daß dann die normalen Druckkomponenten sich addieren, während die tangentiellen einander entgegen wirken; man hat also dann den normalen Druck:

$$(1 + r)\,\overline{W}\cos^2\varphi \tag{9}$$

und den tangentiellen Druck

$$(1 - r)\,W\cos\varphi\sin\varphi, \tag{10}$$

wenn $\overline{W}$ wieder die mittlere Energiedichte der einfallenden Welle ist.

Die Richtigkeit der gemachten Annahme, daß sich die Wirkung des einfallenden und reflektierten Lichtes addieren ist jedoch nicht von vornherein einleuchtend, da ja die Spannungen (1) quadratische Funktionen der Erregungskomponenten sind und nur die letzteren sich einfach superponieren. Wir wollen also die Frage näher untersuchen.

Die einfallende Welle sei wieder durch die Ausdrücke (5) gegeben; dann ist die an der Ebene $z = 0$ reflektierte Strahlung durch

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{E}_{x,1} = \mathfrak{A}_{x,1}\cos\Theta_1\,; \quad \mathfrak{H}_{x,1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{A}_{y_1}\cos\varphi\cos\Theta_1 \\
&\mathfrak{E}_{y,1} = \mathfrak{A}_{y,1}\cos\Theta_1\,; \quad \mathfrak{H}_{y,} \;= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,(\mathfrak{A}_{x,1}\cos\varphi + \mathfrak{A}_{z,1}\sin\varphi). \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cos\Theta_1 \\
&\mathfrak{E}_{z,1} = \mathfrak{A}_{z,1}\cos\Theta_1\,; \quad \mathfrak{H}_{z,1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{A}_{y,1}\sin\varphi\cdot\cos\Theta_1
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\Theta_1 = \nu\,(x\sin\varphi - z\cos\varphi - c'\,t)$$

$$\mathfrak{A}_{x,1}\sin\varphi - \mathfrak{A}_{z,1}\cos\varphi = 0$$

gegeben. Nun haben wir in die Formeln (1) die Werte $\mathfrak{E}_x + \mathfrak{E}_{x,1}$ usw. einzusetzen. Tun wir dies, so erhalten wir

$$Z_x = \varepsilon\,\{(\mathfrak{A}_x + \mathfrak{A}_{x,1})\,(\mathfrak{A}_z + \mathfrak{A}_{z,1}) + (-\mathfrak{A}_y + \mathfrak{A}_{y,1})\,(\mathfrak{A}_y + \mathfrak{A}_{y,1}).\sin\varphi\cos\varphi\}\cos^2\Theta,$$

da ja an der Ebene $x = 0$, $\Theta_1 = \Theta$ wird. Eine einfache Transformation ergibt

$$Z_x = \varepsilon \{(\mathfrak{A}_x \mathfrak{A}_z - \mathfrak{A}_y^2 \sin\varphi \cos\varphi + \mathfrak{A}_{x,1}\mathfrak{A}_{x,1} + \mathfrak{A}^2_{y,1} \sin\varphi\cos\varphi\} \cos^2\Theta$$

und weiter

$$Z_x = \varepsilon \{-\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}_1{}^2\} \sin\varphi\cos\varphi\cos^2\Theta.$$

Desgleichen ergibt sich:

$$Z_y = 0,$$
$$Z_z = -\varepsilon(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}_1{}^2)\cos^2\varphi\cos^2\Theta.$$

Beachten wir, daß $\mathfrak{A}_1{}^2 = r\mathfrak{A}^2$ und bilden wir wieder die Mittelwerte, so erkennen wir, daß die Ausdrücke (9) und (10) in der Tat richtig sind.

4. Ist der Körper, auf den das Licht auffällt, durchsichtig, so daß ein Teil des letzteren den Körper auf einer anderen Seite wieder verläßt, so muß natürlich auch der Einfluß der Spannungen an diesem letzteren Teil der Oberfläche in Betracht gezogen werden. Durchsetzt z. B. ein Lichtstrahl eine Glasplatte oder ein Prisma, so wird die gesamte ponderomotorische Wirkung berechnet als die Resultierende der Druckkräfte des einfallenden sowie des reflektierten und durchgelassenen Lichtes; jede derselben ist gleich der Energiedichte des betreffenden Lichtes mal dem cos des Winkels zwischen Normale und Fortpflanzungsrichtung und wirkt in der Richtung der Fortpflanzung desselben als Druck — also als gegen das Innere des Körpers gerichtete Kraft. Man erhält so im allgemeinen eine translatorische Kraft und ein Drehmoment.

Als einfaches Beispiel berechnen wir den Fall, daß ein senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Lichtbündel vom Querschnitt 1 unter dem Polarisationswinkel (φ) auf eine planparallele Platte auffällt. Dann wird bei jedem der beiden Übergänge in ein anderes Medium nichts reflektiert, alles Licht gebrochen. Daher ist die Energiedichte des hindurchgelassenen Lichtes der des einfallenden gleich und da auch die Fortpflanzungsrichtungen übereinstimmen, heben sich die translatorischen Wirkungen auf. Da jedoch Ein- und Austrittsstelle des Lichtes verschieden sind, wirkt ein Kräftepaar vom Momente (vgl. Fig. 1):

$$M = \overline{W}\cos\varphi \cdot \overline{CB}$$
$$= \overline{W}\cos\varphi \cdot d \cdot \frac{\sin(\varphi - b)}{\cos b}$$

worin d die Dicke der Platte und b der Brechungswinkel ist. Beachtet

man, daß für den Polarisationswinkel die Relation $tg\,\varphi = n = ctg\,b$ gilt, so können wir auch schreiben

$$M = \overline{W} \cdot \frac{n^2 - 1}{n\,(n^2 + 1)}.$$

Dieses Resultat wurde von Goldhammer (l. c. 14) auf etwas anderem Wege abgeleitet, woselbst sich auch andere Anwendungen finden.

5. Unsere Betrachtungsweise ist allerdings nicht exakt richtig; denn die ponderomotorischen Kräfte, welche eine Folge der Lichtbewegung sind, trachten nicht bloß die Körper als ganzes zu verschieben, sondern sie bewirken auch Deformationen der Materie, welchen durch die elastischen Kräfte das Gleichgewicht gehalten werden muß. (Man

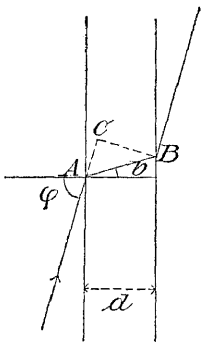


Fig. 1.

hätte hier die ponderomotorischen Kräfte elektromagnetischen Ursprungs in die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie resp. der Hydrodynamik als äußere Kräfte einzusetzen und daraus die Deformation zu bestimmen.) Auch der Äther kann unter dem Einfluß derselben nicht in Ruhe bleiben. Diese Deformationen werden eine Änderung der Konstanten ε und μ zur Folge haben und daher von Einfluß auf die Lichtbewegung und damit auch auf die ponderomotorischen Kräfte, die der Körper als ganzes erfährt, sein.

Von all dem haben wir hier abgesehen. Es ist dies auch berechtigt, da bei den regelmäßigen Lichtschwingungen die Deformationen verschwindend klein zweiter Ordnung sind. (Vgl. Goldhammer, l. c. 14. S. 841; Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen III, S. 531.)

B.

6. Nach der Lorentzschen Theorie ist die Resultierende aller Kräfte auf ein von der (ruhenden) ganz im Äther gelegenen Fläche σ umgebenes System

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2,$$

worin $\mathfrak{F}_1$ sich als Resultierende aus den auf σ wirkenden Spannungen ergibt, also

$$\mathfrak{F}_{1,x} = \int d\sigma\, X_n$$

$$= \frac{1}{2}\int d\sigma \left\{ 2\mathfrak{d}_x\mathfrak{d}_n - \mathfrak{d}^2 \cos(nx) + 2\mathfrak{h}_x\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}^2 \cos(nx)\right\} \text{usw.} \quad (12)$$

und

$$\mathfrak{F}_2 = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{s}\, dS \quad (13)$$

ist, worin $\mathfrak{s}$ den Vektor

$$c\,[\mathfrak{d}.\,\mathfrak{h}]$$

bedeutet. Man nennt die Größe, deren zeitliche Abnahme die Kraft $\mathfrak{F}_2$ gibt, die elektromagnetische Bewegungsgröße oder den elektromagnetischen Impuls $\mathfrak{G}$.

Hat man mit rein periodischen Vorgängen zu tun, wie es die Lichtschwingungen sind, so verschwindet der zeitliche Mittelwert der Kraft $\mathfrak{F}_2$; für die Berechnung des Lichtdruckes auf einen ruhenden Körper ist also nur $\mathfrak{F}_1$ maßgebend und wir erhalten genau dasselbe Resultat wie nach der Maxwellschon Theorie. (Siehe Gl. (3)).

Für die Berechnung der ponderomotorischen Kräfte des Lichtes auf einen bewegten Körper, womit wir uns in diesem Kapitel hauptsächlich beschäftigen wollen, ist jedoch eine andere von Herrn M. Abraham herrührende Methode geeigneter. In derselben wird die Kraft $\mathfrak{F}_1$ eliminiert und blos $\mathfrak{F}_2$ zur Berechnung der gesamten Wirkung verwendet.

Diese letztere ist die allein wirksame, wenn man die Fläche σ nach allen Seiten hin ins Unendliche rücken läßt und dabei $\mathfrak{F}_1$ verschwindet. Dies ist z. B. bei der quasistationären Bewegung eines Elektrons der Fall. In unserem Falle trifft dies aber gerade nicht immer zu. Geht z. B. von einem im endlichen gelegenen Punkte Licht aus, so werden im allgemeinen die Größen $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ im unendlichen nur klein von der Ordnung r^{-1} und $\mathfrak{F}_1$ behält einen endlichen Wert.

Denkt man sich die Fläche σ so weit gerückt, daß sie von den elektromagnetischen Störungen noch nicht erreicht wurde[1]), so ist aller-

1) Vgl. M. Abraham, Ann. d. Phys. **10**, 127, 1903; denselben Schluß verwendet auch Kirchhoff bei Ableitung des Huyghensschen Prinzips. Vorl. über Optik. S. 28.

dings der Wert von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ an der Fläche σ sicher gleich Null; aber es scheint wenigstens nicht ausgeschlossen, daß $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ sich an der Stirnfläche der sich ausbreitenden Wellen diskontinuierlich ändern [1]) — dann sind aber die partiellen Integrationen, die zum Ausdruck für $\mathfrak{F}$ führen, nicht gestattet.

7. Wir können jedoch auch auf folgendem Wege gehen, der von diesen vielleicht zu erhebenden Einwänden frei ist.

Wir betrachten einen Lichtstrahl, der sich im Äther in der Z-Richtung fortpflanzt. Im Äther sind die Lorentzschen Gleichungen mit den Maxwellschen identisch. Wir können daher denselben Ansatz machen wie in § 2 und haben blos statt $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ zu schreiben und $\varepsilon = \mu = 1$ zu setzen. Wir haben also die Lichtwelle durch $(\mathfrak{d}_x, 0, 0)$ und $(0, \mathfrak{h}_y, 0)$ gegeben. Und zwar ist $\mathfrak{d}_x = \mathfrak{h}_y$. Es ist dann

$$- Z_z = \frac{1}{2}\mathfrak{d}_x^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{h}_y^2 = \mathfrak{d}_x^2 = W. \tag{14}$$

Ferner ist die in der Volumeinheit enthaltene Bewegungsgröße

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c}[\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{h}];$$

also in unserem Falle

$$\mathfrak{G}_x = \mathfrak{G}_y = 0; \quad \mathfrak{G}_z = \frac{1}{c}\mathfrak{d}_x\mathfrak{h}_y = \frac{1}{c}\mathfrak{d}_x^2 = \frac{1}{c}W, \tag{15}$$

wo W wieder die Energiedichte bedeutet.

Ebenso wie man einen Lichtstrahl als Träger elektromagnetischer Energie auffaßt, kann man auch sagen, daß er elektromagnetische Bewegungsgröße mitführt. Letztere ist stets nach der Fortpflanzungsrichtung des Strahls orientiert und ihrem Betrage nach pro Volumeinheit gleich der Energiedichte dividiert durch c; oder auch gleich der Energiemenge, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit einer senkrecht zur Strahlenrichtung gelegenen Ebene durchsetzt, dividiert durch c^2.

Halten wir an dieser Auffassungsweise fest und vergleichen wir (14) und (15), so sehen wir, daß der Bestandteil der Kraft $\mathfrak{F}_1$, der einem bestimmten Flächenstück entspricht, gleich ist der in der Zeiteinheit durch dasselbe nach dem Inneren der Fläche σ hindurchgetragenen elektromagnetischen Bewegungsgröße. (Diese beiden Größen haben ja den Wert $W\cos\varphi$, wenn φ der Winkel zwischen der Normalen des betrachteten Flächenstücks und der Strahlenrichtung ist.)

---

1) Siehe A. E. A. Love. Proc. Math. Soc. (2) **1**, 37, 1904.

Wir wollen jetzt die Kraft $\mathfrak{F}$ berechnen, die das Parallelstrahlenbündel S auf den beliebig bewegten Körper K ausübt. Wir umschließen denselben mit einer beliebigen, jedoch ganz im Äther gelegenen, ruhenden Fläche σ. Es ist dann $\mathfrak{F}$ die Summe von $\mathfrak{F}_1$, wobei das Oberflächenintegral über σ zu erstrecken ist, und von $\mathfrak{F}_2$, das Raumintegral über den von σ begrenzten Raum erstreckt. $\mathfrak{F}_2$, die Abnahme der Bewegungsgröße in diesem Raume ist gleich der vom Körper K vernichteten Bewegungsgröße weniger der durch σ eintretenden. Letztere ist aber nach dem früheren gleich dem auf σ wirkenden Druck, also gleich der Kraft $\mathfrak{F}_1$. Also ist die Summe $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$ gleich der vom Körper K in der Zeiteinheit vernichteten Bewegungsgröße.

Wenn der Körper K nicht, wie eben angenommen, die Strahlung als solche und damit ihre Bewegungsgröße vernichtet, sondern Strahlungsenergie und Bewegungsgröße ausstrahlt, so ergibt sich durch den analogen Gedankengang, daß dann die Kraft auf K entgegengesetzt gleich ist, der von K in der Zeiteinheit erzeugten Bewegungsgröße.

Allgemein ist also die Kraft auf K gleich dem Überschuß der in der Zeiteinheit vernichteten Bewegungsgröße über die erzeugte. Ist der Körper schwarz und nehmen wir an, daß in seinem Inneren keine elektromagnetischen Schwingungen als solche bestehen können, so ist die Kraft gleich der Differenz der in der Zeiteinheit auffallenden Strahlung weniger der emittierten dividiert durch c.[1]) Ist der Körper reflektierend, so können wir uns denken, daß die auffallende Strahlung vernichtet, die reflektierte vom Körper erzeugt wird. Die Kraft auf einen reflektierenden Körper ist daher gleich dem Überschuß der in der Zeiteinheit einfallenden Bewegungsgröße über die reflektierte. (Wir beachten, daß die Bewegungsgröße ein Vektor ist, dessen Richtung mit der Strahlenrichtung übereinstimmt.)

Diese Sätze rühren von Herrn M. Abraham her (l. c. 24 u. 25). Zu genau demselben Resultat führte die alte Emissionstheorie des Lichtes; nur ist zu beachten, daß nach Lorentz die mitgeführte Bewegungsgröße gleich ist der Energiedichte dividiert durch c; während die Emissionstheorie dafür den doppelten Betrag liefern würde.

Fällt Strahlung auf eine bewegte Fläche, und wollen wir den Druck auf dieselbe berechnen, so haben wir zu sehen, inwieweit die Menge

1) Es hat diese Vorstellung wohl nur als Abstraktion Berechtigung, denn der schwarze Körper muß ja denselben Brechungsexponenten haben, wie die Umgebung — es muß also wohl ein Teil seiner Energie elektromagnetischen Charakters sein — und letzterer wird wohl, wenigstens im Falle der Bewegung, auch eine bestimmte Bewegungsgröße zukommen.

der in der Zeiteinheit auffallenden Energie und Bewegungsgröße durch die Bewegung modifiziert wird. Dazu sind einige rein geometrische Betrachtungen nötig, die wir gleich folgen lassen.

8. Denken wir uns eine Ebene f vom Flächeninhalt 1, und den ganzen umgebenden Raum von paralleler Strahlung erfüllt, derart, daß in der Volumeinheit im Zeitmittel die Energiemenge W enthalten sei.[1]) Sei erst f dauernd in AB (Fig. 2) und sei φ der Einfallswinkel der sich in der Richtung CA fortpflanzenden Strahlung. Es fällt dann in der Zeiteinheit auf AB die ganze Energie auf, welche im Zylinder $ABDC$ enthalten ist, wenn AC gleich der Lichtgeschwindigkeit c ist; da das Volumen dieses Zylinders gleich $c\cos\varphi$ ist, fällt also in der Zeiteinheit die Energiemenge $Wc\cos\varphi$ auf f.

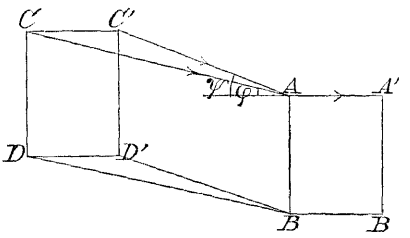


Fig. 2.

Wenn sich nun die Fläche AB in der Richtung des Pfeiles mit gleichförmiger Geschwindigkeit $w=\beta c$ bewegt und nach Verlauf der Zeiteinheit in $A'B'$ angelangt ist, $(\overline{AA'}=w)$ so fällt jetzt während dieser Zeit weniger Energie auf, als früher, da die zu Beginn links von der Ebene $C'D'$ befindliche Energie die Ebene während der betrachteten Zeit nicht mehr erreicht; nur die unmittelbar an $C'D'$ befindliche Energie erreicht die bewegte Ebene gerade in der momentanen Lage $A'B'$, $(\overline{CC'}=\overline{AA'}=w)$. Die mit der Geschwindigkeit w bewegte Ebene f wird also in der Zeiteinheit nur von der im Zylinder $ABC'D'$ enthaltenen Energie, also von der Energiemenge

$$W\,(c\cos\varphi - w)$$

getroffen.

Diese Verhältnisse legen es nahe, neben der „absoluten" Geschwindigkeit und Fortpflanzungsrichtung c und CA, die „relative" Geschwin-

1) Wir schreiben in diesem und den folgenden Abschnitten nur mehr W, statt wie früher $\overline{W}$.

digkeit c', und die „relative" Fortpflanzungsrichtung $C'A$ einzuführen; es sei ψ der Winkel, den letztere mit der Bewegungsrichtung von f, und daher auch mit der Normale einschließt. Die in der Zeiteinheit auffallende Energie ist dann auch durch

$$W c' \cos \psi$$

gegeben. Es ist ja, wie man sofort sieht,

$$c' \cos \psi + w = c \cos \varphi$$

ist. Ferner ergeben sich leicht die folgenden Beziehungen, in denen bereits $\beta = w/c$ eingeführt ist:

$$c' \cos \psi = c\,(\cos \varphi - \beta), \tag{16}$$

$$c' \sin \psi = c \sin \varphi, \tag{17}$$

$$\cos \varphi = \beta \sin^2 \psi + \cos \psi \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi} = \beta \sin^2 \psi + \cos \psi \cos \alpha, \tag{18}$$

$$c' = c \sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \varphi}, \tag{19}$$

$$c' = c\,(-\beta \cos \psi + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi}) = c\,(-\beta \cos \psi + \cos \alpha). \tag{20}$$

Den Winkel zwischen der absoluten und relativen Fortpflanzungsrichtung nennt man den Aberrationswinkel α; es ist:

$$\sin \alpha = \beta \sin \psi.$$

Diese Formeln sind unter der Voraussetzung abgeleitet, daß der Sinn der Bewegungsrichtung des Bezugssystemes derselbe ist, wie der der auffallenden Strahlen; wenn die Ebene f anstatt vor den Strahlen gleichsam zu fliehen, denselben entgegenkäme, so müßte das Vorzeichen von w geändert werden.

Man hat nun aber meistens nicht mit paralleler Strahlung zu tun, sondern mit Strahlung, die nach einem gegebenen Gesetz nach allen Richtungen verteilt ist. Ist dann $W \sin \varphi\, d\varphi\, dl$ die Dichte der Strahlung, die sich zwischen den Polarwinkeln φ und $\varphi + d\varphi$ resp. l und $l + dl$ fortpflanzt, so setzt man meistens $W c = i$, und dann ist

$$i \sin \varphi\, d\varphi\, dl$$

die Energiemenge, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit einer senkrecht zum Strahlengang gestellten ruhenden Ebene trifft. Man nennt i die Strahlungsintensität, und die eben betrachtete Strahlung die absolute. Da die Normale zur Ebene f mit dieser (absoluten) Strahlungsrichtung den Winkel φ einschließt, so wird die Flächeneinheit dieser Ebene im Zustand der Ruhe von der Energiemenge

$$i \sin \varphi \cos \varphi\, d\varphi\, dl$$

getroffen. Wenn sich die Fläche f in der früher gegebenen Art bewegt, so verändert sich der Betrag der auffallenden Energie im Ver-

hältnis $c\cos\varphi : c'\cos\psi$; es wird also f jetzt in der Zeiteinheit von der Energiemenge

$$i\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,dl\cdot\frac{c'\cos\psi}{c\cos\varphi}=i\sin\varphi\,d\varphi\,dl\cos\psi\,\frac{c'}{c}$$

getroffen. Dieser Ausdruck läßt sich in der Form

$$i'\sin\psi\cos\psi\,d\psi$$

schreiben; wenn wir die früheren Beziehungen und die aus Differentiation von (18) folgende Gleichung:

$$\sin\varphi\,d\varphi=\sin\psi\,d\psi\,\frac{c'^2}{c^2\cos\alpha} \tag{21}$$

benützen, so ergibt sich

$$i'=i\,\frac{c'^3}{c^3\cos\alpha} \tag{22}$$

Es hängt dies damit zusammen, daß die Energiedichte in beiden Bezugssystemen denselben Wert haben muß. Also

$$\frac{i\sin\varphi\,d\varphi\,dl}{c}=\frac{i'\sin\psi\,d\psi\,dl}{c'} \tag{23}$$

ist. Wir wollen $i'\sin\psi\,d\psi\,dl$ die (totale) relative Strahlung und i' die Intensität der (totalen) relativen Strahlung nennen; die Gleichung (22) verknüpft also die Strahlungsintensitäten derselben Strahlung im absoluten und relativen Strahlengang.

9. Nach dem früheren können wir sagen: die hervorgehobene Strahlung $i\sin\varphi\,d\varphi\,dl$ führt per Volumeinheit die Energiemenge $i\sin\varphi\,d\varphi\,dl/c$ und die Bewegungsgröße $i\sin\varphi\,d\varphi\,dl/c^2$ mit. Auf die ruhende Fläche f fällt per Zeiteinheit die Energiemenge $i\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,dl$, und die Bewegungsgröße $i\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,dl/c$ auf; auf die bewegte Fläche f fällt per Zeiteinheit die Energiemenge

$$i\sin\varphi\cos\psi\,\frac{c'}{c}\,d\varphi\,dl=i'\sin\psi\cos\psi\,d\psi\,dl$$

und die Bewegungsgröße

$$i\sin\varphi\cos\psi\,\frac{c'}{c^2}\,d\varphi\,dl=\frac{i'}{c}\sin\psi\cos\psi\,d\psi\,dl.$$

Nun ist nach dem früheren die auffallende Bewegungsgröße gleich dem Druck der Strahlung. (Vorausgesetzt, daß sonst keine Strahlung vorhanden ist; wenn also die Ebene f schwarz ist.) Für die Richtung der Bewegungsgröße ist aber die absolute Fortpflanzungsrichtung der Strahlen maßgebend — also wirkt der Strahlungsdruck gleichfalls in dieser Richtung; wir können denselben daher in die normale resp. tangentielle Komponente

$$p_n = i \sin\varphi \cos\psi \frac{c'}{c^2} d\varphi\, dl \cdot \cos\varphi\,,$$

$$p_t = i \sin\varphi \cos\psi \frac{c'}{c^2} d\varphi\, dl \cdot \sin\varphi$$

zerlegen. Setzen wir für $c' \cos\psi$ wieder $c\,(\cos\varphi - \beta)$ ein, so wird

$$p_n = i \sin\varphi \cos\varphi \frac{1}{c} (\cos\varphi - \beta)\, d\varphi\, dl\,. \tag{24}$$

$$p_t = i \sin^2\varphi \frac{1}{c} (\cos\varphi - \beta)\, d\varphi\, dl\,. \tag{25}$$

Beachten wir, daß $i \sin\varphi\, d\varphi\, dl/c$ die Dichte der Energie ist, so erkennen wir, daß diese Ausdrücke ganz mit denen von Maxwell (Gl. (8)) übereinstimmen, wenn $\beta = 0$ gesetzt wird.

Wir wollen diese beiden Druckkomponenten noch durch die Intensität i' im relativen Strahlengang ausdrücken: benützen wir dazu die Gleichungen (23), (17), (18) und (20), so wird

$$p_n = i' \sin\psi \cos\psi \frac{1}{c} (\beta \sin^2\psi + \cos\psi \cos\alpha)\, d\psi\, dl\,, \tag{26}$$

$$p_t = i' \sin\psi \cos\psi \frac{1}{c} (-\beta \cos\psi \sin\psi + \sin\psi \cos\alpha)\, d\psi\, dl\,. \tag{27}$$

Nun denken wir uns, daß die betrachtete Strahlung nicht auf die bewegte Ebene f auffällt, sondern von derselben emittiert wird; und zwar sei jetzt $i'_1 \sin\psi \cos\psi\, d\psi\, dl$ die von der Flächeneinheit ausgesandte Strahlung, deren relative Fortpflanzungsrichtung durch ψ gegeben ist. Die von der Flächeneinheit ausgesandte Bewegungsgröße ist wieder gleich $i'_1 \sin\psi \cos\psi\, d\psi\, dl/c$; sie weist nach der Richtung der absoluten Fortpflanzung; um die normale und tangentielle Druckkomponente zu erhalten, haben wir wieder mit $\cos\varphi$ resp. $\sin\varphi$ zu multiplizieren; drücken wir diese Werte durch ψ aus, so haben wir jetzt in (16) bis (20) β mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen, da die Bewegungsrichtung von Bezugssystem und Strahlung entgegengesetzt ist; also wird jetzt:

$$p_{n,1} = i_1' \sin\psi \cos\psi \frac{1}{c} (-\beta \sin^2\psi + \cos\psi \cos\alpha)\, d\psi\, dl\,, \tag{26a}$$

$$p_{t,1} = i_1' \sin\psi \cos\psi \frac{1}{c} (\beta \cos\psi \sin\psi + \sin\psi \cos\alpha)\, d\psi\, dl\,. \tag{27a}$$

Oder wenn wir diese Größen durch die auf den absoluten Strahlengang bezüglichen Größen i_1 und φ ausdrücken, so wird

$$p_{n,1} = i_1 \sin\varphi \cos\varphi \frac{1}{c} (\cos\varphi + \beta)\, d\varphi\, dl\,, \tag{24a}$$

$$p_{t,1} = i_1 \sin^2\varphi \frac{1}{c} (\cos\varphi + \beta)\, d\varphi\, dl\,. \tag{25a}$$

10. Wir wollen nun die gewonnenen Gesichtspunkte dazu verwenden, um einige Schlüsse über den Druck auf absorbierende und emittierende, bewegte, schwarze Flächen zu ziehen. Wir betrachten also die bewegte Ebene f (Fig. 2) als schwarz. Die umgebende Strahlung ist im absoluten Strahlengange durch $i \sin\varphi\, d\varphi\, dl$ gegeben. Auf f fällt in der Zeiteinheit die Strahlung $i' \sin\psi \cos\psi\, d\psi\, dl$ (wo i' und ψ durch (22) und (16) gegeben ist). Diese Strahlung kann aber nicht ganz von f absorbiert, d. h. in Wärme verwandelt werden, denn sie leistet in der Zeiteinheit die Druckarbeit $w p_n$. Es kann also nur

$$i' \sin\psi \cos\psi\, d\psi\, dl - w p_n$$

oder entsprechend (26);

$$i' \sin\psi \cos\psi \cos\alpha \frac{c'}{c}\, d\psi\, dl$$

absorbiert werden.

Betrachten wir f dagegen als emittierend, und ist wieder $i_1' \sin\psi \cos\psi\, d\psi\, dl$ die in der Zeiteinheit ausgesandte (totale) relative Strahlung, so beachten wir, daß diese Strahlung in der Zeiteinheit die Arbeit $w p_{n,1}$ leistet. Und dieser Arbeitsbetrag kann nirgends anders herrühren, als aus dem Energieinhalt von f. Somit gibt f in Summa in der Zeiteinheit die Energie

$$i_1' \sin\psi \cos\psi\, d\psi\, dl + w p_{n,1} = i_1' \sin\psi \cos\psi \cos\alpha \frac{c_1'}{c}\, d\psi\, dl$$

ab, wo c_1' die relative Geschwindigkeit des emittierten Strahles, also

$$c_1' = c\,(\beta \cos\psi + \cos\alpha) \qquad (20\,a)$$

ist. Schreiben wir die gesamte in der Zeiteinheit von f aufgenommene, resp. abgegebene Energie in der Form

$$i_0 \sin\psi \cos\psi\, d\psi\, dl$$

resp.

$$i_{0,1} \sin\psi \cos\psi\, d\psi\, dl, \qquad (28)$$

so ist

$$i_0 = i' \cos\alpha \frac{c'}{c};\quad i_{0,1} = i_1' \cos\alpha \frac{c_1'}{c}.$$

Man könnte die Größen i_0 und $i_{0,1}$ die wahre Strahlungsintensität nennen — im Gegensatze zur totalen relativen Strahlungsintensität i' resp. i_1'. Man hat dann zu beachten, daß (28) die gesamte von f infolge der Strahlung abgegebene Energie ist, die aber nicht ganz als Strahlungsenergie, sondern eben zum Teil auch als Arbeit zum Vorschein kommt.

Es hat natürlich gar keine Schwierigkeit dieselben Beziehungen aufzustellen, falls sich f in der entgegengesetzten Richtung bewegt.

Ob die wahre (relative) Strahlung eines bewegten Körpers von der Geschwindigkeit der Translation abhängt, ist eine zur Zeit noch offene Frage; jedenfalls kann diese Abhängigkeit nur durch Größen von der Ordnung β^2 gegeben sein. Doch ist hier nicht der Platz auf dieses Problem näher einzugehen.

11. Wir wollen nun den Druck des Lichtes auf einen bewegten Spiegel berechnen. Wir müssen uns dazu vor allem über die Reflexion an demselben klar werden. Sei der Spiegel senkrecht zur Z-Achse orientiert und bewege er sich gleichfalls in der positiven Z-Richtung. Seine Oberfläche ist also durch die Gleichung $z = w\,t$ gegeben. Die einfallende Welle schreite in demselben Sinne fort; wir haben also wieder den durch Fig. 2 schematisch gegebenen Fall.

Die [1]) Erregungskomponenten in der einfallenden Welle seien durch Ausdrücke von der Form

$$A \cos \nu\,(x \sin \varphi \cos l + y \sin \varphi \sin l + z \cos \varphi - ct)$$

gegeben; dann ist also ν der Schwingungszahl proportional und φ ist der Einfallswinkel (im absoluten Strahlengange), während l das Azimut der Strahlenrichtung bezüglich der Z-Achse angibt.

Die reflektierte Welle sei durch

$$A_1 \cos \nu_1\,(x \sin \varphi_1 \cos l_1 + y \sin \varphi_1 \sin l_1 - z \cos \varphi_1 - ct)$$

gegeben, wo dann φ_1 der Reflexionswinkel ist. Wenn wir nun annehmen, daß an der Oberfläche des Spiegels irgendwelche Bedingung vorgeschrieben ist, welche die Lichtvektoren der einfallenden und reflektierten Welle in Beziehung setzt, so ist die Erfüllung derselben nicht anders möglich, als wenn für alle Punkte der Ebene des Spiegels das Argument der trigonometrischen Funktion für beide Wellen denselben Wert hat; es muß also für $z = w\,t$

$$\begin{aligned} &\nu\,(x \sin \varphi \cos l + y \sin \varphi \sin l + z \cos \varphi - ct) \\ &= \nu_1\,(x \sin \varphi_1 \cos l_1 + y \sin \varphi_1 \sin l_1 - z \cos \varphi_1 - ct) \end{aligned}$$

sein; und zwar für alle Werte von x, y und t; daraus folgt:

$$\begin{aligned} \nu \sin \varphi \cos l &= \nu_1 \sin \varphi_1 \cos l_1\,, \\ \nu \sin \varphi \sin l &= \nu_1 \sin \varphi_1 \sin l_1\,, \\ \nu\,(w \cos \varphi - c) &= \nu_1\,(-w \cos \varphi_1 - c) \end{aligned}$$

oder

$$l = l_1\,, \tag{29}$$

1) Die hier gegebene Methode ist die Verallgemeinerung eines Gedenkens von Larmor (l. c. 8 und 9); vergl. Hasenöhrl l. c. 28.

$$\nu \sin \varphi = \nu_1 \sin \varphi_1 ,$$
$$\nu (1 - \beta \cos \varphi) = \nu_1 (1 + \beta \cos \varphi_1) .$$

Die erste Gleichung besagt, daß einfallender Strahl, reflektierter Strahl und das Lot in einer Ebene liegen; die zwei letzten können wir in der Form

$$\frac{\sin \varphi}{1 - \beta \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi_1}{1 + \beta \cos \varphi_1} \tag{30}$$

und

$$\frac{\nu}{\nu_1} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} = \frac{1 + \beta \cos \varphi_1}{1 - \beta \cos \varphi} \tag{30a}$$

schreiben, welche das Reflexionsgesetz und den Dopplereffekt ausdrücken.

Aus (30) ergibt sich ferner

$$\sin \varphi_1 = \frac{\sin \varphi (1 - \beta^2)}{1 + \beta^2 - 2 \beta \cos \varphi} ; \quad \cos \varphi_1 = \frac{(1 + \beta^2) \cos \varphi - 2 \beta}{1 + \beta^2 - 2 \beta \cos \varphi} , \tag{31}$$

und daraus die weitere Relation

$$\frac{\cos \varphi - \beta}{\cos \varphi_1 + \beta} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1} . \tag{32}$$

Führen wir statt φ den Winkel ψ mit Hilfe der Gleichungen (16) ff. ein; statt φ_1 den Winkel ψ_1 mit Hilfe derselben Gleichungen, in denen nur das Vorzeichen von β zu verkehren ist, so werden die Gleichungen (30) und (30a):

$$\frac{\sin \psi}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi}} = \frac{\sin \psi_1}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi_1}} ,$$
$$\frac{\nu}{\nu_1} = \frac{c_1'}{c'} \frac{\sin \psi_1}{\sin \psi} .$$

Aus diesen Gleichungen folgt weiter:

$$\psi = \psi_1 , \tag{33}$$

$$\frac{\nu}{\nu_1} = \frac{c_1'}{c'} = \frac{\beta \cos \psi + \cos \alpha}{-\beta \cos \psi + \cos \alpha} . \tag{34}$$

Deren erste besagt, im Verein mit (29), daß bei der Reflexion an einem bewegten Spiegel das gewöhnliche Reflexionsgesetz für die relative Strahlenrichtung gilt[1]), während die zweite den Dopplereffekt in seiner Abhängigkeit von der relativen Strahlenrichtung angibt.

12. Wenn Strahlung auf einen bewegten Spiegel fällt, so wird

1) Dieser Satz gilt nur bei Bewegung des Spiegels in der Richtung seiner Normale (oder auch senkrecht dazu); für beliebige Bewegungsrichtung ist der Satz nur in erster Näherung richtig.

von derselben, wie auch von der reflektierten Strahlung Arbeit geleistet, wenn sich der Spiegel so bewegt, daß er vor der auffallenden Strahlung zurückweicht; bewegt er sich dagegen der auffallenden Strahlung entgegen, so muß von außen her Arbeit gegen die Strahlung geleistet werden. Das Äquivalent ist wohl nirgends anders als in einem Minus oder Plus der reflektierten Strahlung zu suchen. Wir können daher sagen, der Überschuß der auffallenden über die reflektierte Strahlung ist gleich der Arbeit der Strahlung bei der Reflexion. Es handelt sich hier offenbar um die Menge der strahlenden Energie, welche den Spiegel faktisch trifft und verläßt — und diese ist durch die relative Strahlung gegeben.

Indem wir wieder den Index 1 für die reflektierte Strahlung verwenden, ist der Überschuß der auffallenden über die reflektierte Strahlung durch

$$(i' - i_1') \sin\psi \cos\psi \, d\psi \, dl = w P_n \tag{35}$$

gegeben; derselbe muß ja gleich sein der Arbeit des Strahlungsdruckes per Zeiteinheit, also gleich $w P_n$, wenn wir die Normalkomponente des gesamten Druckes auf den Spiegel mit P_n bezeichnen; dieser letztere ist aber auch durch die Formeln (26) und (26a) ausdrückbar; es ist ja:

$$P_n = p_n + p_{n1} = i' \sin\psi \cos\psi \, d\psi \, dl \frac{1}{c} (\beta \sin^2\psi + \cos\psi \cos\alpha)$$
$$+ i_1' \sin\psi \cos\psi \, d\psi \, dl \frac{1}{c} (-\beta \sin^2\psi + \cos\psi \cos\alpha),$$

(ψ hat je nach dem früheren für den reflektierten Strahl denselben Wert, wie für den einfallenden).

Setzen wir diesen Wert von P_n in (35) ein, so wird nach einfacher Reduktion:

$$i_1' = i' \frac{\cos\alpha - \beta\cos\psi}{\cos\alpha + \beta\cos\psi}$$

oder

$$i_1' = i' \frac{c'}{c_1'}. \tag{36}$$

Die Intensitäten der relativen Strahlung des einfallenden und reflektierten Lichtes verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen relativen Geschwindigkeiten. Und zwar gilt dieser Satz in gleicher Weise, ob der Spiegel vor der einfallenden Strahlung zurückweicht, oder ihr entgegenkommt.

Benützen wir ferner (22) und die analoge Gleichung

$$i_1' = i_1 \frac{c_1'^3}{c^3 \cos\alpha}$$

und beachten, daß $\cos\alpha$ für beide Strahlen denselben Wert hat, so ergibt sich weiter

$$\frac{i}{i_1} = \frac{i'}{i_1'}\left(\frac{c_1'}{c'}\right)^3$$

oder

$$\frac{i}{i_1} = \left(\frac{c_1'}{c'}\right)^4 \tag{37}$$

als Verhältnis der absoluten Strahlungsintensitäten des einfallenden und reflektierten Strahles.

Wir können nun natürlich auch den Wert von P durch i' ausdrücken, es ist

$$w\,P_n = \sin\psi\cos\psi\,i'\left(1-\frac{c'}{c_1'}\right)d\psi\,dl$$

oder

$$P_n = 2\,\frac{i'}{c_1'}\sin\psi\cos^2\psi\,d\psi\,dl. \tag{38}$$

Wollen wir wieder die absolute Intensität und Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Strahlung verwenden, so ist nach (22), (16) und (21)

$$P_n = 2\,\frac{i\sin\varphi\,d\varphi\,dl}{c}\,\frac{(\cos\varphi-\beta)^2}{1-\beta^2}\,. \tag{39}$$

Der gesamte tangentielle Druck ist

$$P_t = p_t - p_{t,1}\,,$$

da ja die beiden Komponenten desselben einander entgegenwirken; setzt man für i_1' seinen Wert in (27a) ein, und bildet die Differenz von (27) und (27a) so ergibt sich

$$P_t = 0\,.$$

Bei der Reflexion an einem bewegten vollkommenen Spiegel tritt also nur ein Normaldruck auf.

13. In der vorgetragenen Ableitung der Gesetze der Reflexion an einem bewegten Spiegel ist außer den Grundsätzen der Lorentzschen Theorie auch die Gültigkeit des Huyghensschen Prinzips für die Konstruktion der Richtung des reflektierten Strahles vorausgesetzt. Obwohl diese letztere Annahme sehr plausibel ist, ist es doch wünschenswert, den entsprechenden Ausdruck direkt aus den Grenzbedingungen der Theorie abzuleiten.

Außerdem werden wir dadurch instand gesetzt, den Lichtdruck auf den bewegten Spiegel streng abzuleiten. Unsere bisherige Schlußweise leidet ja an demselben Mangel, den wir bereits bei Besprechung der

Maxwellschen Theorie (§ 3) hervorhoben. So wie die Maxwellschen Spannungen, so ist ja auch die Bewegungsgröße eine quadratische Funktion der Erregungskomponenten, und es ist von vornherein nicht einzusehen, daß allein die Bewegungsgrößen der beiden Strahlen jede für sich in Betracht kommen. Herr Abraham hat hier den Weg angegeben. Er leitet[1]) ab, daß an der Oberfläche des bewegten Spiegels die tangentiellen Komponenten des Vektors $(\mathfrak{d}' =) \mathfrak{d} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{h}]$ und die normalen Komponente des Vektors $\mathfrak{h}$ verschwinden müssen; nehmen wir also an, daß der Spiegel senkrecht zur Z-Achse orientiert ist und sich in der Richtung seiner Normalen, so wie in Fig. 2 angegeben, bewegt, so ist an seiner Oberfläche

$$\mathfrak{h}_z = 0 \tag{40}$$

und

$$\begin{aligned} (\mathfrak{d}_x' =)\ \mathfrak{d}_x - \beta \mathfrak{h}_y &= 0\,, \\ (\mathfrak{d}_y' =)\ \mathfrak{d}_y + \beta \mathfrak{h}_x &= 0\,, \end{aligned} \tag{41}$$

Nun benutzen wir den ursprünglichen Ausdruck für die ponderomotorische Kraft nach der Lorentzschen Theorie (Gl. (12) u. (13)). Unter σ[2]) verstehen wir eine Fläche, die mit dem Spiegel verbunden ist (also dessen Bewegungen mitmacht) und die der Oberfläche desselben unendlich nahe, aber noch ganz im Äther liegt. Unter σ' verstehen wir eine feststehende Fläche, die mit σ in dem betrachteten Augenblick zusammenfällt. Dann ist die gesamte ponderomotorische Kraft durch

$$\mathfrak{F}_x = \int X_n d\sigma - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma'} \mathfrak{s}_x dS \text{ usw.}$$

gegeben; wofür sich auch

$$\mathfrak{F}_x = \int X_n d\sigma - \frac{d}{c^2 dt} \frac{1}{} \int_{\sigma} \mathfrak{s}_x dS + \frac{1}{c^2} \int \mathfrak{w}_n \mathfrak{s}_x d\sigma$$

schreiben läßt. (Die an die Raumintegrale angefügten Indizes σ und σ' bedeuten, daß dieselben über den von σ resp. σ' umschlossenen Raum zu erstrecken sind.) Da es sich nur um den Mittelwert der Kraft in einem Zeitraum, der gegen die Periode der Lichtschwingungen groß ist, handelt, fällt der zweite Summand fort. Setzen wir noch für die Spannungskomponente X_n und für $\mathfrak{s}_x$ ihren Wert ein, so wirkt per Flächeneinheit die Kraft, deren Komponenten

1) l. c. 25, S. 263.
2) Vergl. Enzykl. d. math. Wissensch. V, 2, S. 269.

$$\mathfrak{F}_x = \frac{1}{2}\left|2\mathfrak{d}_x\mathfrak{d}_n - \mathfrak{d}^2\cos(nx) + 2\mathfrak{h}_x\mathfrak{h}_n - \mathfrak{h}^2\cos(nx)\right| + \frac{\mathfrak{w}_n}{c}(\mathfrak{d}_y\mathfrak{h}_z - \mathfrak{d}_z\mathfrak{h}_y)$$

usw. sind. Da wir nun $\cos(nx) = \cos(ny) = 0$; $\cos(nz) = -1$; ferner $\mathfrak{w}_n = -\mathfrak{w}_z = -\beta c$; $\mathfrak{w}_x = \mathfrak{w}_y = 0$ zu setzen haben, wird $\mathfrak{d}_n = -\mathfrak{d}_z$; $\mathfrak{h}_n = -\mathfrak{h}_z$ und wir haben:

$$\mathfrak{F}_x = -\frac{1}{2}(2\mathfrak{d}_x\mathfrak{d}_z + 2\mathfrak{h}_x\mathfrak{h}_z) - \beta(\mathfrak{d}_y\mathfrak{h}_z - \mathfrak{d}_z\mathfrak{h}_y),$$

$$\mathfrak{F}_y = -\frac{1}{2}(2\mathfrak{d}_y\mathfrak{d}_z + 2\mathfrak{h}_y\mathfrak{h}_z) - \beta(\mathfrak{d}_z\mathfrak{h}_x - \mathfrak{d}_x\mathfrak{h}_z),$$

$$\mathfrak{F}_z = -\frac{1}{2}(2\mathfrak{d}_z^2 - \mathfrak{d}^2 + 2\mathfrak{h}_z^2 - \mathfrak{h}^2) - \beta(\mathfrak{d}_x\mathfrak{h}_y - \mathfrak{d}_y\mathfrak{h}_x).$$

(Wir bemerken, daß man aus diesen Ausdrücken sofort die in § 9 auf anderem Wege erhaltenen Gleichungen ableiten kann. Betrachten wir einen einzelnen Strahl, der etwa durch die Gleichungen (43) gegeben sein mag; setzen wir diese Werte der Erregungskomponenten in die obigen Ausdrücke ein, so ergibt sich nach einfacher Transformation (der Index 0 kann hier wegbleiben):

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{A}^2\sin\varphi(\cos\varphi - \beta),$$
$$\mathfrak{F}_y = 0,$$
$$\mathfrak{F}_z = \mathfrak{A}^2\cos\varphi(\cos\varphi - \beta).$$

Da wir nun $\mathfrak{A}^2 = W$ zu setzen haben, wo W die Energiedichte ist, erkennen wir die Identität dieser Werte mit den in (24) und (25) angegebenen, da ja dort $W = \frac{i\sin\varphi\, d\varphi\, dl}{c}$ zu setzen ist.)

Beachtet man die Gleichungen (40) und (41), so erkennt man, daß

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{F}_y = 0,$$
$$\mathfrak{F}_z = \frac{1}{2}(\mathfrak{h}^2 - \mathfrak{d}^2).$$

Die tangentiellen Kraftkomponenten verschwinden also. Die Kraft $\mathfrak{F}_z$ wirkt in der Richtung der Spiegelnormale; der Druck ist also

$$P = \mathfrak{F}_z = \frac{1}{2}(\mathfrak{h}^2 - \mathfrak{d}^2). \tag{42}$$

Aus dem Bestehen der Gleichungen (40) und (41) folgt, genau wie aus den allgemeinen Betrachtungen des § 11, das durch die Gleichungen (29) bis (34) gegebene Reflexionsgesetz. Da die beiden Strahlen in einer Ebene mit dem Lot liegen, können wir sie durch die folgenden, den Gleichungen (5) und (11) analogen Ausdrücke darstellen, wobei die

Indizes 0 und 1 sich auf den einfallenden und den reflektierten Strahl beziehen:

$$\Theta_0 = \nu_0 \,(x \sin \varphi_0 + z \cos \varphi_0 - ct),$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_{x,0} &= \mathfrak{A}_{x,0} \cdot \cos \Theta_0, & \mathfrak{h}_{x,} &= -\mathfrak{A}_{y,0} \cos \varphi_0 \cdot \cos \Theta_0, \\ \mathfrak{d}_{y,0} &= \mathfrak{A}_{y,0} \cdot \cos \Theta_0, & \mathfrak{h}_{y,0} &= (\mathfrak{A}_{x,0} \cos \varphi_0 - \mathfrak{A}_{z,0} \sin \varphi_0) \cdot \cos \Theta_0, \\ \mathfrak{d}_{z,0} &= \mathfrak{A}_{z,0} \cdot \cos \Theta_0, & \mathfrak{h}_{z,0} &= \mathfrak{A}_{y,0} \sin \varphi_0 \cdot \cos \Theta_0, \end{aligned} \qquad (43)$$

$$\mathfrak{A}_{x,0} \sin \varphi_0 + \mathfrak{A}_{z,0} \cos \varphi_0 = 0.$$

resp.:

$$\Theta_1 = \nu_1 \,(x \sin \varphi_1 - z \cos \varphi_1 - ct),$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_{x,1} &= \mathfrak{A}_{x,1} \cdot \cos \Theta_1, & \mathfrak{h}_{x,1} &= \mathfrak{A}_{y,1} \cos \varphi_1 \cdot \cos \Theta_1, \\ \mathfrak{d}_{y,1} &= \mathfrak{A}_{y,1} \cdot \cos \Theta_1, & \mathfrak{h}_{y,1} &= -(\mathfrak{A}_{x,1} \cos \varphi_1 + \mathfrak{A}_{z,1} \sin \varphi_1) \cdot \cos \Theta_1, \\ \mathfrak{d}_{z,1} &= \mathfrak{A}_{z,1} \cdot \cos \Theta_1, & \mathfrak{h}_{z,1} &= \mathfrak{A}_{y,1} \sin \varphi_1 \cdot \cos \Theta_1, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{A}_{x,1} \sin \varphi_1 + \mathfrak{A}_{z,1} \cos \varphi_1 = 0.$$

Setzen wir nun in die Gleichungen (40) und (41) $\mathfrak{d}_x = \mathfrak{d}_{x,0} + \mathfrak{d}_{x,1}$ usw. ein und berücksichtigen, daß an der Oberfläche des Spiegels $\Theta_0 = \Theta_1$ ist; transformieren wir ferner die erhaltenen Gleichungen mit Hilfe der Gleichungen (29) bis (34), so erhalten wir die Beziehungen:

$$\begin{gathered} \mathfrak{A}_{x,0} \operatorname{tg} \varphi_0 + \mathfrak{A}_{x,1} \operatorname{tg} \varphi_1 = 0, \\ \mathfrak{A}_{y,0} \sin \varphi_0 + \mathfrak{A}_{y,1} \sin \varphi_1 = 0, \\ \mathfrak{A}_{z,0} - \mathfrak{A}_{z,1} = 0. \end{gathered}$$

(Bei einem ruhenden Spiegel ist $\varphi_0 = \varphi_1$, und es reduzieren sich die Gleichungen auf bekannte Beziehungen.)

Wir erhalten also für die Komponenten der Erregungen an der Spiegeloberfläche:

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_x &= \mathfrak{A}_{x,0}\left(1 - \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\operatorname{tg} \varphi_1}\right) \cdot \cos \Theta_0, & \mathfrak{h}_x &= -\mathfrak{A}_{y,0} \cos \varphi_0 \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\operatorname{tg} \varphi_1}\right) \cdot \cos \Theta_0, \\ \mathfrak{d}_y &= \mathfrak{A}_{y,0}\left(1 - \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_1}\right) \cdot \cos \Theta_0, & \mathfrak{h}_y &= \mathfrak{A}_{x,0} \frac{1}{\cos \varphi_0}\left(1 + \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_1}\right) \cdot \cos \Theta_0, \\ \mathfrak{d}_z &= 2\,\mathfrak{A}_{z,0} \cdot \cos \Theta_0, & \mathfrak{h}_z &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werte in Gleichung (42) ein, so erhalten wir nach einigen Transformationen, bei denen insbesondere die Gleichungen (31) zu benutzen sind

$$P = \frac{2(\cos \varphi_0 - \beta)^2}{1 - \beta^2} (\mathfrak{A}_x^2 + \mathfrak{A}_y^2 + \mathfrak{A}_z^2) \cos^2 \Theta_0$$

oder

$$P = \frac{2(\cos \varphi_0 - \beta)^2}{1 - \beta^2} W_0, \qquad (44)$$

wenn wir unter W_0 die Dichte der Energie der einfallenden Welle verstehen, in voller Übereinstimmung mit Gleichung (39).

Wenn die Strahlung senkrecht auf den Spiegel einfällt, so ergibt sich dieses Resultat sehr einfach. Es ist ja dann wegen der Transversalität der Wellen $\mathfrak{d}_x = 0$, und aus (40) und (41) ergibt sich

$$\mathfrak{d}^2 = \beta^2 \mathfrak{h}^2,$$

also

$$P = \frac{1}{2} \mathfrak{h}^2 (1 - \beta^2).$$

Die gesamte Energiedichte ist dagegen

$$W = \frac{1}{2} (\mathfrak{h}^2 + \mathfrak{d}^2) = \frac{1}{2} \mathfrak{h}^2 (1 + \beta^2),$$

woraus

$$P = W \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}$$

folgt.

Hier ergeben sich auch einfache Beziehungen zwischen den Energiedichten der einfallenden und reflektierten Welle, die wir mit W_0 und W_1 bezeichnen. Es ist nämlich

$$W_1 = W_0 \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2, \tag{45}$$

woraus sich ferner

$$W = W_0 + W_1$$

ergibt (s. M. Abraham l. c. 25, S. 268). Diese einfache Beziehung, daß die Gesamtdichte gleich ist der Summe aus den Dichten der beiden Wellen, gilt jedoch nur für den Fall senkrechter Inzidenz. Ferner heben wir nochmals hervor, daß der Druck auf einen bewegten Spiegel nicht gleich ist der gesamten Energiedichte an seiner Oberfläche.

C.

14. Im vorhergehenden haben wir zur Berechnung des Lichtdrucks stets die Darstellung der ponderomotorischen Kräfte durch Spannungen benützt (zu denen nach der Lorentzschen Theorie noch die Kraft $\mathfrak{F}_2$ dazu kam). Diese Spannungen sind natürlich gewissen, auf das Volumelement wirksamen Kräften äquivalent. Man kann daher den Lichtdruck auch aus diesen berechnen; mathematisch sind die zwei Methoden identisch, vom physikalischen Standpunkte dagegen liefert uns jede eine eigene Anschauungsweise. Wir wollen daher auch diese letztere Methode, und zwar zuerst von den Hertzschen Gleichungen ausgehend, hier in Kürze besprechen:

Nach Hertz wirkt auf das Volumelement eines beliebigen Körpers die Kraft:

$$\mathfrak{F}_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z};$$

setzen wir für X_x usw. ihre Werte aus (1) ein, so wird

$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{E}_x \operatorname{div} \mathfrak{D} - \frac{1}{2}\mathfrak{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c}\left[\mathfrak{E} \cdot \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right]$$
$$+ \mathfrak{H}_x \operatorname{div} \mathfrak{B} - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\mu}{c}[\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{E}].$$

Betrachten wir jetzt die durch die Ausdrücke

$$\frac{1}{c}\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}; \qquad \mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_z = 0,$$
$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}; \qquad \mathfrak{B}_x = \mathfrak{B}_z = 0$$

gegebene linearpolarisierte Welle, so wirkt auf die Schichte des betrachteten Mediums zwischen z_1 und z_2, wenn dasselbe homogen ist, die Kraft

$$\int_{z_1}^{z_2} \mathfrak{F}_x dz = \frac{1}{c}\int_{z_1}^{z_2}\left(\varepsilon \mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial t} + \mu \mathfrak{H}_y \mathfrak{E}_x\right) dz = -\int_{z_1}^{z_2} dz\left(\varepsilon \mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} + \mu \mathfrak{H}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}\right)$$
$$= -\left|\frac{1}{2}\left(\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2\right)\right|_{z_1}^{z_2} = W_1 - W_2.$$

Die gesamte Kraft ist also gleich der Differenz der Energiedichten an der Ein- und Austrittsstelle, oder gleich der in der Zeiteinheit von der betrachteten Schichte absorbierten Energie, dividiert durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Wir sehen also, daß die Kraft des Lichtes auf ein beliebiges Medium wesentlich durch die Absorption bedingt ist, worauf Larmor (l. c. 7 u. 10) besonders aufmerksam macht.

Nehmen wir an, daß die Schichte die ganze Strahlung absorbiert, so ist $W_2 = 0$ und die Kraft wird gleich W_1. Wollen wir nun die Kraft des auffallenden Lichtes auf einen Körper berechnen, der im Äther liegt und nichts von der auffallenden Strahlung hindurchläßt, so beachten wir, daß W_1 gleich ist der Energiedichte an der Grenzebene, aber im Innern des Körpers. Außer der oben für den homogenen Körper berechneten Wirkung kommt aber noch an der Diskontinuitätsfläche die Kraft

$$-\frac{1}{2}\mathfrak{E}^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

in Betracht. Ist die Trennungsebene senkrecht zur Z-Achse, haben wir also senkrechte Inzidenz, so ist $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in der Grenzschichte kontinuierlich, und es gibt der obige Ausdruck über letztere integriert den Beitrag zur Kraft

$$-\frac{1}{2}\mathfrak{E}^2(\varepsilon-1)-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2(\mu-1),$$

da ja ε und μ im Äther den Wert 1 haben. Die gesamte Kraft ist dann:

$$W_1-\frac{1}{2}\mathfrak{E}^2(\varepsilon-1)-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2(\mu-1)=\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2),$$

also gleich der Energie der einfallenden Welle, was natürlich mit dem in Kapitel A gefundenen Resultat übereinstimmt.

(Die vorstehende Methode ist im Anschluß an J. J. Thomson[1]) von Lord Rayleigh angegeben worden [l. c. 11]. Doch nimmt letzterer für die Kraft den Wert $-\frac{1}{c}[\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{C}]$ an, was dasselbe Resultat liefert wie bei uns $-\frac{\mu}{c}[\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{C}]-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\frac{\partial\mu}{\partial x}$. Die „Hertzsche“ Kraft $\frac{\varepsilon}{c}\left[\mathfrak{C}\cdot\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\right]$ berücksichtigt Lord Rayleigh nicht. Er erhält daher auch für die Kraft im letztbehandelten Falle nur $\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2$[2]) an Stelle des hier angegebenen $\frac{1}{2}(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{E}^2)$. Lord Rayleigh bezeichnet jedoch auch dieses Resultat als in Übereinstimmung mit dem Maxwellschen Satz, was dem Verf. unverständlich ist.)

Die ponderomotorischen Kräfte der Lorentzschen Theorie sind im Falle rein periodischer Vorgänge mit den Hertzschen Ausdrücken identisch; also könnten die eben vorgetragenen Überlegungen gerade so nach der Lorentzschen Theorie durchgeführt werden.

Wir gewinnen also einen neuen Gesichtspunkt, wie man sich das Zustandekommen des Lichtdrucks vorstellen kann. Betrachten wir z. B. einen vollkommenen Spiegel, den wir uns nach der elektromagnetischen Lichttheorie unendlich gut leitend zu denken haben. Das auffallende Licht induziert in einer unendlich dünnen Grenzschichte elektrische und magnetische Ströme, welche das äußere Feld im Innern des Leiters

1) Elements of the mathematical theory of electricity and magnetism. Cambridge 1895, § 241.

2) In der dort gebrauchten Bezeichnungsweise $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2=\frac{1}{16\pi}\mathfrak{H}^2$ Maximum.

vollständig kompensieren. Auf diese wirkt die magnetische resp. elektrische Kraft des Lichtstrahles, und zwar senkrecht auf beide, also in der Richtung der Fortpflanzung des Strahles.

15. Larmor (l. c. 7, S. 130) entnimmt seiner Theorie, die sich in vielen Punkten mit der von H. A. Lorentz deckt, als Wert für die ponderomotorische Kraft den Ausdruck:

$$\frac{1}{c}[(\mathfrak{E}-\dot{\mathfrak{E}})\cdot\mathfrak{H}]:$$

wir können dafür auch setzen:

$$\frac{1}{c}[\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{H}]-\frac{1}{c}[\dot{\mathfrak{E}}\cdot\mathfrak{H}]-\frac{1}{c}[\mathfrak{E}\cdot\dot{\mathfrak{H}}]+\frac{1}{c}[\mathfrak{E}\cdot\dot{\mathfrak{H}}]$$
$$=-\frac{1}{c}[\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{C}]+\frac{1}{c}[\mathfrak{E}\cdot\dot{\mathfrak{H}}]-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{H}].$$

Das letzte Glied verschwindet, wenn man nur den zeitlichen Mittelwert der Kraft sucht. Wendet man nun diesen Ausdruck auf denselben Fall an, den wir gerade früher behandelt haben, so erhalten wir wieder:

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathfrak{F}_x\,dx=\frac{1}{c}\int_{x_1}^{x_2}\left(\mathfrak{E}_x\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial t}+\mathfrak{H}_y\mathfrak{C}_x\right)dx=-\left|\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2\right)\right|_{x_1}^{x_2}.$$

Da $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ an der Grenzfläche $x=$ konst. kontinuierlich sind, können wir darunter auch die Werte dieser Größen im Äther an der Grenzfläche verstehen. Herrscht in $x=x_2$ elektromagnetische Ruhe, wird also die gesamte Strahlung absorbiert, so ist die gesamte Kraft:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2\right).$$

(Unter μ ist natürlich der Wert dieser Konstante im Innern des absorbierenden Körpers zu verstehen.)

Im Gegensatze zu den früher vorgetragenen Theorien sollte also der Druck auf einen absorbierenden Körper nicht allein von der auffallenden Energiemenge, sondern auch von der Permeabilität des letzteren abhängig sein.

Ist letztere gleich 1, so verschwindet diese Differenz der Resultate. Unter Beschränkung auf diesen Fall hat Havelock (l. c. 20) von den Larmorschen Ausdrücken ausgehend auch den Fall schiefer Inzidenz behandelt und gelangt natürlich für diesen Fall zu dem von uns in Kapitel A statuierten Resultate.

16. Poynting geht bei seinen Studien über den Druck des Lichtes (l. c. 21) vom folgenden Satze aus, den ich in beinahe wörtlicher Über-

setzung folgen lasse: Wir können ein Strahlenbündel als einen Strom von Bewegungsgröße (momentum) auffassen, deren Richtung mit der Achse des Bündels übereinstimmt. Ist W die Energiedichte, c die Geschwindigkeit der Strahlen, so ist die Dichte der Bewegungsgröße W/c. Wenn eine Fläche Strahlung emittiert resp. absorbiert, so verliert resp. gewinnt sie damit auch Bewegungsgröße. Die Kraft auf die Fläche ist gleich der von derselben gewonnenen Bewegungsgröße.

Wenn die Fläche ruht, ist diese Auffassungsweise durch die Resultate der Maxwellschen Theorie, auf die sich der Verf. stützt, gerechtfertigt. Poynting wendet sie jedoch auch auf bewegte Körper an. Wir sahen früher, daß die Lorentzsche Theorie auch für bewegte Körper zu diesem Resultate führt. Da aber Poynting die letztere nicht einmal erwähnt, sondern den obigen Satz gleichsam als Prinzip hinstellt, sind seine Betrachtungen, wie auch Larmor (l. c. 10, S. 590) bemerkt, „naturally somewhat uncertain".

Sehr originell ist die Methode, durch welche Poynting an anderer Stelle den Druck auf eine bewegte Fläche berechnet (l. c. 21, S. 551): Es bewege sich die strahlende Fläche A mit der Geschwindigkeit w gegen die (ruhende) absorbierende Fläche B, welche, ebenso wie die Umgebung, auf der Temperatur 0^0 A sein soll. Wir betrachten ein paralleles Strahlenbündel, das von A senkrecht emittiert wird; sei W die Energiedichte desselben, wenn A ruht; W', wenn A in Bewegung ist. Der Druck auf A ist $p = W$, wenn A ruht; er sei p', wenn A sich bewegt. Die bewegte Fläche A entsendet also per Sekunde die Bewegungsgröße p'; dieselbe fällt endlich auf B. Wir setzen nun A in einem bestimmten Moment in Bewegung und lassen in demselben Augenblick der Ausstrahlung dieser Fläche freien Raum; es lege A so die Strecke d in der Richtung gegen B zurück und höre dann gleichzeitig auf, sich zu bewegen und Strahlung zu emittieren. Es hat also A während der Zeit d/w Strahlung emittiert und damit auch im ganzen die Bewegungsgröße $p' \cdot d/w$; da B ruht, ist der Druck auf B gleich der per Zeiteinheit empfangenen Bewegungsgröße, also gleich W'. Da aber A der ausgesandten Strahlung nachfolgt, wird B nur während der Zeit $d/w - d/c$ von Strahlung getroffen. „Nehmen wir an, daß die gesamte von B absorbierte Bewegungsgröße der von A ausgesandten gleich ist", so muß

$$p' \cdot \frac{d}{w} = W' \left(\frac{d}{w} - \frac{d}{c} \right), \qquad (46)$$
$$p' = W' (1 - \beta)$$

sein. Weiters macht Poynting die Annahme, „daß die Fläche A gleichviel innere Energie per Zeiteinheit in Strahlung verwandelt, ob sie in

Bewegung oder Ruhe ist"; (nach unserer früher gebrauchten Terminologie würden wir sagen: Die wahre relative Ausstrahlung ist von der Bewegung unabhängig), daß aber auch der Betrag wp' mechanischer Energie per Sekunde in Strahlung umgesetzt wird; dann ist also

$$W'(c - w) = Wc + p'w$$

oder

$$W'(1 - \beta) = W + \beta \cdot W'(1 - \beta).$$

Also wird

$$W' = W(1 - \beta)^{-2}$$

und

$$p' = W(1 - \beta)^{-1}.$$

Die Gleichung (46) stimmt nun in der Tat mit dem obigen überein, denn setzen wir in (26) i' sin $\psi d\psi dl = W'c'$, sonst $\psi = 0$, so wird

$$p_n = W' \frac{c'}{c} = W'(1 - \beta).$$

Es ist bemerkenswert, daß die zwei Annahmen, die wir in Gänsefüßchen angeführt haben und die wohl erst zu begründen wären, zusammen zu demselben Resultat führen, wie die Lorentzsche Theorie.

Heaviside macht (l. c. 30) in einer kurzen Note über unseren Gegenstand zuerst die Bemerkung, daß es nicht angeht, für den Druck auf einen bewegten Spiegel den Wert der gesamten Energiedichte an der Oberfläche desselben anzunehmen. Durch eine genauere Analyse gelangt er für den Fall senkrechter Inzidenz auf einen vollkommenen Spiegel zum Werte

$$2p_1 \frac{v - u}{v + u}.$$

(Gleichung (13) S. 440) für den Druck; in unserer Bezeichnungsweise ist dieser Ausdruck gleich:

$$2W_0 \frac{c - w}{c + w},$$

stimmt also vollständig mit unserer Gleichung (44) überein.

17. Larmor hat ferner (l. c. 8 und 9) den Wert des Lichtdrucks auf einen bewegten Spiegel mittelst einer originellen, von der elektromagnetischen Lichttheorie ganz unabhängigen Methode berechnet. Er geht dabei von der Änderung der Wellenlänge nach dem Dopplerschen Prinzip aus; schließt aus der Existenz linearer Beziehungen, die an der Oberfläche des Spiegels erfüllt werden müssen, auf die Gleichheit der Amplituden der einfallenden und reflektierten Schwingungen und kann daraus für jede Wellenbewegung, deren Energiedichte dem Quadrate der Wellenlänge umgekehrt proportional ist, also auch für die Licht-

schwingungen der alten Elastizitätstheorie, den Druck auf eine reflektierende Ebene berechnen.

Betrachten wir einen Strahl, der, wie in Fig. 2 angedeutet, senkrecht auf einen bewegten Spiegel auffällt, so ist das Verhältnis der Wellenlängen der beiden Strahlen nach Gleichung (30a) [1]:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Daher ist die Energiedichte der reflektierten Welle

$$W_1 = W_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^2 = W_0 \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2.$$

(Vergl. Gleichung (45)). Die Differenz zwischen der in der Zeiteinheit auffallenden und reflektierten Energiemenge ist

$$W_0 c' - W_1 c'_1 = Pw,$$

gleich der Arbeit des Drucks der Strahlung; da $c' = c(1-\beta)$; $c'_1 = c(1+\beta)$ ist, erhalten wir also

$$Pw = W_0 c \left[(1-\beta) - (1+\beta)\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2\right],$$

woraus

$$P = 2W_0 \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

folgt, was mit Gleichung (44) für $\varphi = 0$ ganz übereinstimmt.

D.

18. Soweit wir im vorhergehenden nur eine einzelne Lichtwelle (sowie die derselben entsprechende reflektierte Welle) betrachteten, waren unsere Rechnungen exakt. In der Thermodynamik der Strahlung hingegen hat man nicht mit einer einzelnen Welle, sondern mit dem Inbegriff der einzelnen Strahlen zu tun, welche die Hohlraumstrahlung ausmachen. Es ist vornherein nicht einzusehen, wie sich die Druckwirkungen der einzelnen Wellen zusammensetzen werden. [2]) Wenn wir daher im folgenden annehmen werden, daß sich dieselben einfach addieren, so ist das eine neue Hypothese, welche derjenigen ganz analog ist, welche die Energiedichte der Hohlraumstrahlung als Summe der den einzelnen Strahlen entsprechende Energien auffaßt. Da diese Schwierigkeit also nicht dem von uns behandelten Gegenstande eigentümlich ist, wollen wir hier darauf nicht näher eingehen.

1) Wir kennzeichnen wieder die einfallende Welle durch den Index 0.

2) Diese Schwierigkeit haben wir stillschweigend übergangen, als wir in § 8 von paralleler Strahlung zur Strahlung $i \sin\varphi\, d\varphi\, dl$ übergingen.

Denken wir uns einen allseitig von vollkommenen Spiegeln abgegrenzten Raum, in dem Strahlungsenergie nach allen Richtungen gleichmäßig verteilt sei. Und zwar sei $i\,d\omega$ die Energiemenge, die sich in Richtungen bewegt, welche im elementaren räumlichen Öffnungswinkel $d\omega$ enthalten sind. Die der betrachteten Strahlung entsprechende Energiedichte ist durch $i\,d\omega/c$ gegeben. Die gesamte (mittlere) Dichte ist dann

$$\frac{1}{c}\int d\omega\, i = \frac{4\pi i}{c} = W = \frac{4e}{c}.$$

Wir bemerken, daß $\pi i = e$ das Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers ist, der mit dem betrachteten Hohlraum im Wärmegleichgewicht stehen würde; dessen Temperatur also gleich der Temperatur der betrachteten Hohlraumstrahlung ist. Wir wollen jetzt den Druck der Hohlraumstrahlung auf ein Element df der spiegelnden Begrenzung berechnen. Nehmen wir jetzt die nach innen gezogene Normale des Elementes als Achse für Polarkoordinaten, so übt die durch die Winkel φ, l bestimmte Strahlung also $i \sin\varphi\, d\varphi\, dl$ auf die Flächeneinheit den normalen Druck $2\pi i \sin\varphi\, d\varphi\, dl \cdot \cos^2\varphi/c$ aus. Der gesamte Druck auf das betrachtete Element df ist daher

$$p\,df = \frac{2\,i\,df}{c}\int_0^{2\pi} dl \int_0^{\pi l_0} \sin\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{4\pi i}{3c}\, df = \frac{W}{3}\, df;$$

und zwar ist das ein senkrechter Druck, da sich die tangentiellen Komponenten, wie man leicht einsieht, gegenseitig aufheben.

Diese Beziehung zwischen der Energie und dem Druck der Hohlraumstrahlung ermöglicht es, die Gesamtstrahlung eines schwarzen Körpers als Funktion der Temperatur darzustellen. Es gelingt dies wie zuerst Boltzmann (l. c. 5) gezeigt hat, durch Anwendung des zweiten Hauptsatzes. Boltzmann konstruiert einen Kreisprozeß, in dessen einzelnen Phasen das Volumen des Hohlraumes verändert und derselbe mit schwarzen Körpern verschiedener Temperatur in Verbindung gebracht wird. Wie immer, wenn es sich um Anwendung des zweiten Hauptsatzes handelt, ist dieser Weg physikalisch anschaulicher, aber weitläufiger als die Methode, die von der Betrachtung des Entropiedifferentials ausgeht.

Der Kürze wegen wollen wir hier diese zweitgenannte Methode verwenden.

Sei das (gesamte) Emissionsvermögen des schwarzen Körpers

$$e = \varphi(T),$$

worin φ eine (vorläufig unbekannte) Funktion der absoluten Temperatur T ist.

Die in einem Hohlraum vom Volumen v enthaltene Energie (die innere Energie) ist

$$U = v\,W = v\,\frac{4\,e}{c} = v\,\frac{4}{c}\,\varphi\,(T).$$

Also ist das Differential der Entrogie

$$\frac{dU + p\,dv}{T} = \frac{1}{T}\left[\frac{4}{c} v\,\varphi'\,(T)\,d\,T + dv\left(\frac{4}{c}\,\varphi\,(T) + p\right)\right].$$

Dies muß nach dem zweiten Hauptsatze ein vollständiges Differential sein, d. h. es muß

$$\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{4\,v\varphi'\,(T)}{c\,T} = \frac{\partial}{\partial T}\,\frac{\frac{4}{c}\,\varphi\,(T) + p}{T}$$

sein, woraus

$$T\,\frac{dp}{dT} = p + \frac{4}{c}\,\varphi\,(T)$$

folgt. Wenn eine der beiden Größen $\varphi(T)$ oder p bekannt ist, kann mit Hilfe dieser Gleichung die andere bestimmt werden.

Setzen wir nach dem früheren

$$p = \frac{1}{3}\,W = \frac{4}{3\,c}\,\varphi\,(T),$$

so wird diese Gleichung

$$T\,\varphi'\,(T) = 4\,\varphi\,(T),$$

woraus sich durch Integration

$$\varphi\,(T) = \text{Konst.}\ T^4$$

ergibt, also das von Stefan empirisch aufgestellte Gesetz, das jetzt allgemein das Stefan-Boltzmannsche Gesetz genannt wird.

Wir haben hier für den Druck den Wert genommen, der sich auf den ruhenden Spiegel bezieht; es ist dies natürlich vollkommen berechtigt, da die Anwendung des zweiten Hauptsatzes ohnehin unendlich langsame, reversible Volumenänderungen fordert.

19. Indem W. Wien[1]) auch die Änderung der Wellenlänge bei der Änderung des Volumens in Betracht zog, gelang es ihm, das sogenannte Verschiebungsgesetz abzuleiten. Da dies jedoch nicht un-

1) W. Wien, Berl. Ber. S. 55, 1893 und Wied. Ann. 52, 132, 1894.

mittelbar mit unserem Thema zusammenhängt, genüge dieser Hinweis. Im engen Zusammenhang mit den Ausführungen des Kapitels B ist dagegen die elegante Methode, mittels deren M. Abraham (l. c. 24) das Wiensche und das Stefan-Boltzmannsche Gesetz mit einem Schlage abgeleitet hat, die wir jetzt folgen lassen.

Betrachten wir die Formeln (29) bis (32), so sehen wir, daß dieselben richtig bleiben, wenn gleichzeitig φ mit φ_1, ν mit ν_1 und β mit $-\beta$ vertauscht wird. Auch der Wert des Druckes bleibt gültig, wenn dies geschieht und auch noch i mit i_1 vertauscht wird. (Vergl. Gl. (38); unsere Vertauschung führt ja c' in c_1' über, und da ψ für beide Strahlen denselben Wert hat, erkennen wir aus (36) sofort die Richtigkeit unserer Behauptung). Wir erkennen aus alledem, daß die Reflexion an einem bewegten Spiegel ein im thermodynamischen Sinne reversibler Vorgang ist; in einem Falle wird Arbeit in strahlende Wärme verwandelt, im anderen Falle Wärme in Arbeit.

Setzen wir nun

$$i = H d\nu;\ i_1 = H_1\, d\nu_1;$$

es sollen also die Schwingungszahlen der zwei Strahlungen zwischen ν und $\nu + d\nu$, resp. ν_1 und $\nu_1 + d\nu_1$ liegen. H und H_1 nennt man dann die Helligkeiten der zwei Bündel. Bezeichnen wir ferner mit T und T_1 ihre Temperaturen, so verlangt das Kirchhoffsche Gesetz, daß

$$H = f(\nu, T);\ H_1 = f(\nu_1, T) \tag{47}$$

sei: daß also für beide Strahlenbündel dieselbe universelle Beziehung zwischen H, ν und T gelte.

Es wird nun die Energiemenge $i' \sin\psi\, d\psi\, dl \cdot \cos\psi$ in der Zeiteinheit in die Energiemenge $i_1' \sin\psi\, d\psi\, dl \cdot \cos\psi$ verwandelt. Da der Vorgang reversibel ist, muß

$$\frac{i' \sin\psi \cos\psi\, d\psi\, dl}{T} = \frac{i_1' \sin\psi \cos\psi\, d\psi\, dl}{T_1}$$

sein, also:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{i'}{i_1'} = \frac{c_1'}{c'}. \tag{48}$$

(Diese letzte Gleichung folgt aus (36)).

Nun haben wir ferner die Beziehungen (34):

$$\frac{\nu}{\nu_1} = \frac{d\nu}{d\nu_1} = \frac{c_1'}{c'} \tag{49}$$

und (37):

$$\frac{i}{i_1} = \left(\frac{c_1'}{c'}\right)^4 = \frac{H d\nu}{H_1 d\nu_1},$$

also

$$\frac{H}{H_1} = \left(\frac{c_1'}{c'}\right)^3 \tag{50}$$

Aus (48), (49) und (50) folgt also:

$$\frac{H}{H_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^3 = \left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^3,$$

woraus man sofort schließen kann, daß die durch (47) definierte Funktion die Form $\nu^3 \cdot g\left(\frac{T}{\nu}\right)$ haben muß; es ist also:

$$H = \nu^3 \cdot g\left(\frac{T}{\nu}\right).$$

Dies ist das Verschiebungsgesetz in der Fassung von M. Planck[1]). Dasselbe enthält auch das Stefan-Boltzmannsche Gesetz:

$$\int_0^\infty H d\nu = \text{const. } T^4.$$

Das Bemerkenswerte ist eben, daß letzteres nicht zur Ableitung vorausgesetzt werden mußte, sondern sich mit einem Schlage ergibt.

20. Denken wir uns eine spiegelnde Fläche in einem Raume befindlich, welche von nach allen Richtungen gleichmäßig verteilter Strahlung erfüllt ist, so erhalten wir den gesamten auf die Flächeneinheit wirksamen Druck, wenn wir Gleichung (39) über alle möglichen Werte von l und φ integrieren.

Wenn die Fläche mit der Geschwindigkeit $w = \beta c$ in der Richtung ihrer Normalen vor der einfallenden Strahlung zurückweicht, ist der größte zulässige Wert von φ gleich $90^0 - \text{arc sin } \beta$. Noch stärker geneigte Strahlen können die Fläche gewissermaßen nicht mehr einholen.

Der gesamte Druck wird also gleich

$$\frac{1}{1-\beta^2}\,\frac{2i}{c}\int_0^{2\pi} dl \int_0^{\pi - \text{arc sin }\beta} \sin\varphi\, d\varphi\, (\cos\varphi - \beta)^2$$

$$= \frac{4\pi i}{c(1-\beta^2)}\int_\beta^1 dx\,(x-\beta)^2 = \frac{4\pi i}{3c\,(1-\beta^2)}(1-\beta)^3.$$

Nun sei die Rückseite der Fläche auch spiegelnd; berechnen wir den Druck auf letztere, so haben wir zu beachten, daß dieselbe der Strahlung entgegenkommt; der auf sie wirksame Druck hat also den Wert, der sich aus dem vorigen Ausdruck durch Vertauschung von β

1) M. Plank, Ann. d. Phys. 4, 560, 1901.

mit $-\beta$ ergibt. Bewegt sich daher eine Platte, die auf beiden Seiten vollständig spiegelt, in der Richtung ihrer Normale, in einem mit Strahlung erfüllten Raume, so wirken sich die Kräfte auf beiden Seiten entgegen und die gesamte Wirkung ist in der Richtung der Bewegung gleich:

$$\frac{4\pi i}{3c(1-\beta^2)}\left\{(1-\beta)^3-(1+\beta)^3\right\}.$$

Führen wir wieder die Energiedichte der Strahlung $W=4\pi i/c$ ein, so wird dieser Ausdruck gleich:

$$-W\frac{2\beta\left(1+\frac{\beta^2}{3}\right)}{1-\beta^2}.$$

Dieser Wert wurde zuerst von M. Abraham (l. c. 25) angegeben. Man kann diese Kraft als Widerstand deuten. Die Existenz derselben wurde zuerst von M. Thiesen (l. c. 16) behauptet. Doch stimmt der Wert, den Thiesen abgeleitet hat, nur in dem in β linearen Gliede mit dem hier gegebenen überein. (Es kommt dies daher, daß Thiesen bei der Reflexion an einem bewegten Spiegel das Reflexionsgesetz für die absolute Strahlenrichtung als gültig annimmt, was wohl ein Versehen ist.)

Ist β klein gegen 1, so ist der Widerstand gleich $-2\beta W$. Derselbe ist so gering, daß er, wenn die Erde als Reflektor aufgefaßt würde, die Jahresdauer nur ganz unmerklich verringern würde. Dagegen muß er auf die Bewegung von Gasmolekülen einen merklichen Einfluß haben. Man wird also die Möglichkeit ungehemmter Bewegungen der letzteren nicht zugeben können. (Thiesen l. c. 16, S. 180).

E.

21. Die prinzipielle Wichtigkeit des Lichtdruckes bewegt Lord Rayleigh (l. c. 12) an einigen Beispielen zu untersuchen, inwieweit mechanische Schwingungen einen Druck ausüben.

So betrachtet er unter anderem eine unendlich lange gespannte Saite, welche transversal schwingt. Durch zwei (bewegliche) Ringe, die der Saite aufgesteckt sind, sollen die Schwingungen auf einen bestimmten Teil der Saite beschränkt sein. (Die Schwingungen werden an den Ringen reflektiert.) Der Ring erfährt einen Druck, der gleich ist der auf der Längeneinheit der Saite enthaltenen Energie.

Auch den Druck der Schallwellen berechnet Lord Rayleigh

und kommt wieder zu dem Resultat, daß der Druck auf eine reflektierende Fläche gleich ist der Energiedichte der Schallbewegung.

Sehr eingehend wird der Druck, den die Schwingungen einer Saite ausüben, von Havelock (l. c. 20) behandelt, der auch im Anschluß daran, wie bereits erwähnt, den Druck der Lichtschwingungen nach der Larmorschen Theorie behandelt.

Es hat daher den Anschein, als ob jede fortschreitende Welle als Träger einer Art Bewegungsgröße aufgefaßt werden könnte, welch letztere dem Betrage nach gleich der Energiedichte ist und nach der Fortpflanzungsrichtung der Welle orientiert ist. (Siehe darüber Poynting l. c. 23).

22. Schon Kepler (1619) versuchte das Verhalten der Kometenschweife im Perihel durch die Wirkung des Lichtdruckes, den ja auch die damals allgemein akzeptierte Emissionstheorie forderte, zu erklären. Diese Ansicht wurde auch von Longomontanus (1622) und Euler (1746) vertreten.[1])

Vom elektromagnetischen Standpunkte ist dieser Frage Arrhenius (l. c. 32) nahegetreten und nach ihm Schwarzschild (l. c. 33). Letzterer berechnet den Lichtdruck auf eine kleine reflektierende Kugel, wobei er auch die Beugung des Lichtes an derselben berücksichtigt. Es handelt sich darum, zu bestimmen, wann die Wirkung des Lichtdruckes der Gravitation das Gleichgewicht hält. Da ersterer der Oberfläche, letztere dem Volumen der Kugel proportional ist, nimmt dieses Verhältnis mit abnehmendem Kugelradius zu; jedoch nicht unbegrenzt, sondern es erreicht eben infolge der Beugung ein Maximum für Kugeln von der Größenordnung der Wellenlänge. Um das Verhalten der gestrecktesten Kometenschweife zu erklären, müßte dieses Verhältnis den Maximalwert 18,5 erreichen können. (Von der Entfernung von der Sonne ist das Verhältnis unabhängig, da ja beide Wirkungen dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional sind.) Schwarzschild gelangt nun zum Resultat, daß, wenn die gesamte Sonnenstrahlung als von der Wellenlänge 0,6 μ angenommen wird und die Dichte der Schweifteilchen $= 1$ ist, daß dann der „Druck des Lichtes gleich ist der Schwerkraft, sobald der Kugeldurchmesser bis auf 2,5 $\lambda = 1{,}5\ \mu$ herabsinkt. Bei weiterer Verkleinerung der Kugel wächst der Druck über die Schwerkraft hinaus, bis er sie bei einem Kugeldurchmesser von 0,3 $\lambda = 0{,}18\ \mu$ um das 18fache übertrifft. Von diesem Maximalwerte sinkt er schnell wieder ab und wird bereits für den Kugeldurchmesser

1) Zitiert nach P. Lebedew, Ann. d. Phys. 6, 434, 1901.

$0{,}12\,\lambda = 0{,}07\,\mu$ wieder der Schwerkraft gleich, um sich sodann rasch der Null zu nähern." „Ein Überwiegen des Druckes der Strahlung über die Schwerkraft findet also nur für gewisse, zwischen verhältnismäßig engen Grenzen liegende Kugelgrößen (0,07—1,5 μ) statt; innerhalb dieses Bereiches wächst aber der Druck bis auf das 18fache der Schwerkraft."

Bei dieser Berechnung ist, wie erwähnt, $\lambda = 0{,}6\,\mu$ angenommen. Zieht man die wirkliche Verteilung der Energie im Sonnenspektrum in Betracht, so sinkt der Maximalwert auf etwa die Hälfte herab. Doch ist in der Berechnung ein gewiß zu geringer Wert der Solarkonstante (2,5) angenommen und kann auch die Dichte der Schweifteilchen leicht kleiner als 1 sein, wodurch wieder das nötige Verhältnis 18,5 erreicht werden kann.

23. Mit ähnlichen Betrachtungen hat sich auch Poynting (l. c. 21, 22) befaßt, ohne jedoch die Beugung des Lichtes mit in Rechnung zu ziehen.

Letzterer hat auch (l. c. 23) interessante Berechnungen über den Widerstand angestellt, den die Erde bei ihrer Bewegung um die Sonne infolge ihrer Ausstrahlung erleidet. (Die Berechnung dieses Widerstandes ist natürlich ganz analog der früher angegebenen Berechnung des Widerstandes eines reflektierenden Körpers in einem von Strahlung erfüllten Raum.)

Die Widerstandskraft ist ca. 2500 kg. „Aber es tritt noch ein anderer Effekt auf, welcher diese Widerstandskraft mehr als kompensiert. Die Hemisphäre der Erde, welche auf der im Sinne der Jahresbewegung vorderen Seite liegt, ist infolge der bei der Erwärmung durch die Sonne auftretenden Verzögerung kälter als die andere; strahlt daher weniger aus und erleidet einen geringeren Druck. Nimmt man an, daß die vordere Hemisphäre auf 300^0, die hintere auf 301^0 befindlich ist, so würde diese beschleunigende Kraft gleich 165000 kg sein. Die Wirkung all dieser Kräfte ist jedoch so gering, daß sie sich der Beobachtung ganz entzieht.

Wien, im Juni 1905.

(Eingegangen 16. Juni 1905.)