24 1

(2)

Haarlem, den 19 juni 1926.

Sehr geehrter Herr Kollege,

Ich habe Ihren letzten Brief, für den ich bestens danke, mit lebhaftem Interesse gelesen und er hat viel dazu beigetragen, mir Ihre Auffassungen verständlicher zu machen. Ich sehe jetzt, dass die Schwierigkeiten, die ich empfand, zum Teil daher rührten, dass ich mich ~~zu sehr~~ in zu hohem Maasse an die Vorstellungen der jetzigen Quantentheorie gewöhnt hatte, sodass ich mich nicht sofort genügend davon befreien konnte. So kam ich z.B. dazu, es zu beanstanden, dass bei Ihnen die Ausstrahlung als etwas „Nebensächliches" auftritt.

Sie haben ganz Recht, wenn Sie sagen, dass dieses auch in der klassischen Theorie insofern der Fall ist, als z.B. das dem Strahlungswiderstande entsprechende Glied in der Bewegungsgleichung eines Elektrons gegen die anderen Glieder weit zurücktritt, sodass es oft in erster Annäherung vernachlässigt werden kann. Aber ich dachte an einen Quantensprung $2 \rightarrow 1$, wobei (wie ich mir, mit Bohr, vorstellte) die bestimmte endliche Energiemenge $E_2 - E_1$ mit der Frequenz $\nu_{21} = \frac{E_2 - E_1}{h}$ ausgestrahlt wird. Derartige Übergänge mögen selten vorkommen, aber bei jedem einzelnen Quantensprung ist die Ausstrahlung geradezu die Hauptsache.[1] Wenn es aber gelingt, Ihre Auffassung (Ausstrahlung des Differenztons) durchzuführen, und wenn wir dann an die Ausstrahlung ~~der bestimmten~~ gerade der Energiemenge $E_2 - E_1$ gar nicht mehr zu denken haben, so wird mich das auch schon befriedigen.

In diesem Zusammenhang hat mir auch Ihre Bemerkung über das „strahlungserregende Vermögen" eines bewegten Elektrons ganz gut gefallen. Auch hierbei dachte ich zu viel an die Energie des Elektrons.

---

1) Um mir den Vorgang einigermassen vorzustellen, habe ich mir oft gedacht, es gäbe einen Vibrator mit der Frequenz ν_{21}, der die Energie $E_2 - E_1$ aufnimmt und sie dann ruhig ausstrahlt; oder auch, das Atom verwandle sich, wenn es die Energie E_1 hat, zeitweise in einen Vibrator ν_{21}, und dieser werde wieder ein Bohr'sches Atom, wenn seine Energie durch Ausstrahlung auf E_2 abgenommen hat.

Wenn es gelingt, die Erscheinungen dadurch zu deuten, dass man mit dem bewegten Elektron eine bestimmte Frequenz verbindet, sodass man es mit einer Resonanz zu tun hat, so ~~wird~~ ist ~~alles~~ es viel schöner.

Indes erheben sich hier noch manche Fragen. Gesetzt, wir haben ein System mit den Grundschwingungen ν_1 und ν_2, und zwar ist

$$\nu_1 = \frac{E_0 + E_1}{h}, \quad \nu_2 = \frac{E_0 + E_2}{h}, \qquad (1)$$

wo E_1 und E_2 die (negativen) Energien sind, die wir dem Atom in zwei stationären Zuständen zuschreiben (nach Bohr), während E_0 ein hoher positiver Wert ist. Man kann sich nun vorstellen, dass unter dem Einfluss einer Bestrahlung von aussen mit der Frequenz $\nu_2 - \nu_1$ das System dazu veranlasst wird, wieder Licht von dieser selben Frequenz zu emittieren („Resonanz mit Differenzton"). Aber wie soll die Resonanz mit einem Elektron stattfinden? Bei de Broglie (geradlinig bewegtes Elektron) muss man unterscheiden zwischen der Frequenz im Inneren des Elektrons und jener der Wellen, die das Teilchen bei seiner Fortbewegung begleiten. Ich will mich hier an die erste halten, da ich von den Wellen in diesem Fall keine genügend klare Vorstellung habe.

Was nun die ~~„eigene" Fre~~ innere Frequenz betrifft, so wird diese, wenn sie für ein ruhendes Elektron den Wert ν_0 hat, für ein mit der Geschwindigkeit v bewegtes, nach der Relativitätstheorie

$$\nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \nu_0 - \nu_0 \cdot \frac{v^2}{2c^2}$$

betragen. Man kann wohl schwerlich anders tun, als $\nu_0 = \frac{mc^2}{h}$ setzen. Dann kommt

$$\frac{mc^2 - \frac{1}{2} m v^2}{h}.$$

Erfahrungsmässig kann nun das Elektron die Ausstrahlung $\nu_2 - \nu_1$ veranlassen, wenn

$$\frac{1}{2} m v^2 = E_2 - E_1$$

ist, sodass der letzte Ausdruck wird

$$\frac{mc^2 + E_1 - E_2}{h} \qquad (2)$$

Wie kann nun ein System mit den Grundfrequenzen (1) zur Resonanz gebracht werden, sodass es $\nu_{21} = \frac{E_2 - E_1}{h}$ ausstrahlt, unter dem Einfluss einer Einwirkung mit der Frequenz (2)? Man sieht es nicht einmal ein wenn man, was nahe liegt, $E_0 = mc^2$ setzt, und die Sache wird noch dadurch kompliziert, dass das Electron durch das Elektron hindurchfliegt, sodass es mit seinen raschen Schwingungen nacheinander verschiedene Punkte des Schwingungsfeldes angreift, sodass wohl noch etwas wie ein Doppler-Effekt in Betracht gezogen werden müsste.

Mit der Zusendung Ihrer Note „Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik" haben Sie mir eine grosse Freude gemacht, und als ich sie gelesen hatte, war mein erster Gedanke: ~~Laut~~ einer Theorie, die einen Einwand in so überraschender und schöner Weise ~~widen~~ widerlegt, muss man schon auf dem rechten Wege sein. Leider hat sich meine Freude alsbald wieder getrübt; ich kann nämlich nicht einsehen, wie Sie z. B. im Fall des Wasserstoffatoms Wellenpakete konstruieren können, die (ich denke jetzt an die sehr hohen Bohr'schen Bahnen) sich wie das Elektron bewegen. Die dazu erforderlichen kurzen Wellen stehen nicht zu Ihrer Verfügung. Ich habe diesen Punkt schon in meinem ersten Briefe berührt, und möchte jetzt etwas näher darauf eingehen. Vorher erlaube ich mir aber, Ihnen einige Rechnungen mitzuteilen, zu denen Ihre Note mich veranlasst hat. Vielleicht kann die Methode, die ich dabei benutzt habe, in irgend einem Fall Anwendung finden.

Da wir vorläufig schwerlich darauf hoffen dürfen, in komplizierteren Fällen die Wellenpakete wirklich zu konstruieren, so stellte ich mir die Frage: wenn man annimmt, dass es Wellengruppen giebt, die dauernd auf einen kleinen Raum beschränkt bleiben, kann man dann beweisen, dass sie sich in einem Kraftfelde genau so wie ein Elektron bewegen müssen? Natürlich würde man dies sofort behaupten können, wenn man die Aussagen der gewöhnlichen Optik über die Fortpflanzung ~~anlangend~~ (Lichtstrahlen, Gruppengeschwindigkeit) auf die jetzt vorliegenden Fälle übertragen dürfte. Man muss ~~da~~ aber mit dieser Übertragung vorsichtig sein; wie Sie bemerken ist in der Optik von einer kontinuierlichen Reihe von Frequenzen die Rede, hier aber nur von einzelnen diskreten Frequenzen. Ihr Resultat zeigt schon, dass man in dem betrachteten Fall etwas anderes (und zwar <u>mehr</u>, nämlich ein wirklich dauerndes Zusammenbleiben) ableiten kann als aus den besagten optischen Sätzen.

Ich habe die Methode zunächst am linearen Vibrator versucht, und dann auf das H-Atom angewandt.

Linearer Vibrator.

Ihre Wellengleichung lautet, wenn ich einen der Eigenwerte einsetze

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (2n+1-x^2)\psi = 0 \qquad n=0,1,2,\dots \qquad (3)$$

und die einem bestimmten Wert n entsprechende Frequenz ist[1]

$$\tfrac{1}{2}(2n+1)\nu_0 \qquad (4)$$

Aus (3) leite ich ab (ähnlich wie Sie in Ihrem letzten Briefe von $L[u]+Eu=0$, auf $LL[u]+\frac{h^2}{4\pi^2}\ddot{u}=0$ übergehen)

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-x^2\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}-x^2\right)\psi = (2n+1)^2\psi,$$

oder da nach (4)

$$\frac{d^2}{dt^2} = -(2n+1)^2\pi^2\nu_0^2$$

ist,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x^2\right)\psi + \frac{1}{\pi^2\nu_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} - 2x^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - 4x\frac{\partial\psi}{\partial x} + (x^4-2)\psi + \frac{1}{\pi^2\nu_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (5)$$

Dies ist die „Bewegungsgleichung". Durch Multiplikation mit $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ leite ich aus ihr eine Gleichung ab, die, wenn (5) die Bewegungsgleichung eines materiellen Systems wäre, die „Energiegleichung" sein

---

1) Sie sagen nämlich, dass in der Lösung der Faktor $e^{(2n+1)\pi i\nu_0 t}$ auftritt.

2) Man kann sich durch direkte Substitution davon überzeugen, dass

$$\psi = e^{-\frac{1}{2}(x-A\cos 2\pi\nu_0 t)^2}\cos\left[\pi\nu_0 t + a\sin 2\pi\nu_0 t\left(x-\tfrac{1}{2}a\cos 2\pi\nu_0 t\right)\right]$$

oder (einfacher) der komplexe Ausdruck, von dem dies der reelle Teil war, der Gleichung (5) genügt.

Würde und die ich jetzt, nur um einen Namen zu haben, ebenso benennen will. Die Gleichung hat die Gestalt

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x} = 0 \qquad (6)$$

wo ε und $\mathfrak{J}$ Funktionen von x und t sind. Die erste möge die „Energie pro Längeneinheit" und die zweite der „Energiestrom pro Zeiteinheit" heissen, wobei wir aber gar nicht an wirkliche Energie denken wollen. Die Grössen ε und $\mathfrak{J}$ sind nur mathematische Hilfsgrössen.

Sie sind übrigens nicht eindeutig bestimmt, denn man kann, wenn f eine beliebige Funktion von x und t ist, zu ε die Grösse $\frac{\partial f}{\partial x}$ und zu $\mathfrak{J}$ die Grösse $-\frac{\partial f}{\partial t}$ addieren, ohne dass (6) aufhört zu gelten. Im Folgenden ist denn auch von einem „geeignet gewählten" ε die Rede.

Es wird angenommen, dass für $x = -\infty$ und $x = +\infty$ alle ~~abhäng~~ abhängigen Variabelen verschwinden. Dann folgt aus (6)

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon\, dx = 0$$

oder

$$\int \varepsilon\, dx = \text{konst}, \quad \ldots\ldots \qquad (7)$$

d.h., die „Gesamtenergie" ist konstant.

Ich definiere nun den „Schwerpunkt des Wellensystems" durch die Gleichung

$$X = \frac{\int \varepsilon x\, dx}{\int \varepsilon\, dx} \qquad (8)$$

(als ob ε eine materielle Dichte wäre) und beweise, dass bei geeignet gewähltem ε

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -4\pi^2 \nu_0^2 X \qquad (9)$$

ist. D.h. der Schwerpunkt des Wellensystems macht einfach harmonische Schwingungen mit der Frequenz ν_0. Dies gilt wie lang auch die Strecke sein möge, über die sich das Wellensystem ausbreitet. Ist nun das System auf ein äusserst kleines Intervall von x beschränkt, so wird der Schwerpunkt in diesem Intervall liegen

(Bemerkung hierzu weiter unten) und dann dürfen wir schliessen, dass das Wellensystem mit der Frequenz ν_0 hin und her schwingt.

Beweis. Da der Nenner in (8) unabhängig von t ist, so können wir für die zu beweisende Gleichung (9) schreiben

$$\frac{d^2}{dt^2}\int \varepsilon x\, dx + 4\pi^2\nu_0^2 \int \varepsilon x\, dx = 0$$

Nun ist

$$\frac{d}{dt}\int \varepsilon x\, dx = \int x \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dx = -\int x \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x} dx = \int \mathfrak{I}\, dx,$$

und folglich

$$\frac{d^2}{dt^2}\int \varepsilon x\, dx = \int \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial t} dx.$$

Es ist also zu beweisen:

$$\int\left(\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial t} + 4\pi^2\nu_0^2 \varepsilon x\right) dx = 0,$$

oder

$$\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial t} + 4\pi^2\nu_0^2 \varepsilon x \,(=)\, 0, \qquad (10)$$

wo (=) bedeutet „gleich bis auf Glieder, die Differentialquotienten nach x sind, und also bei der Integration nach x verschwinden, „belanglose Glieder", wie wir sagen wollen."

„Naheliegende Werte von $\mathfrak{I}$ und ε, auf die man sogleich kommt wenn man (5) mit $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ multipliziert, sind

$$(\mathfrak{I}) = \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} - 2x^2\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)^2 + 2x^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + (x^4-2)\psi^2 + \frac{1}{\pi^2\nu_0^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2\right].$$

Die Klammern ~~um~~ um $\mathfrak{I}$ und ε sollen andeuten, dass dies nur vorläufige und nicht die geeignet gewählten Werte sind. Es zeigt sich nämlich, dass man wohl daran tut, zu $(\mathfrak{I})$ und (ε) die Grössen

$$-2\frac{\partial}{\partial t}(\psi^2 x), \quad \text{bzw.} \quad 2\frac{\partial}{\partial x}(\psi^2 x) \qquad (11)$$

zu addieren. Wir setzen also

$$\mathfrak{I} = \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} - 2x^2\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial t} - 4x\psi\frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad (12)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)^2 + 2x^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + (x^4-2)\psi^2 + \frac{1}{\pi^2\nu_0^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + 4\frac{\partial}{\partial x}(x\psi^2)\right] \qquad (13)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial^4\psi}{\partial x^3\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} - \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial t^2} -$$
$$- 2\frac{\partial^2(x^2\psi)}{\partial x\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Da belanglose Glieder in S auch belanglose Glieder in $\frac{\partial S}{\partial t}$ liefern, so kann man S umformen, indem man wie bei der partiellen Integration nach x verfährt, und belanglose Glieder fortlässt. Z. B. das erste Glied in (12):

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} (=) - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t};$$

das erste und zweite Glied in (12) zusammengenommen:

$$-2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}$$

Dies liefert für $\frac{\partial S}{\partial t}$:

$$-2\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial t}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t^2},$$

wo das erste Glied belanglos ist, während man das zweite durch

$$2\cdot\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

ersetzen darf. Behandelt man die anderen Glieder in (12) in ähnlicher Weise, so kommt schliesslich

$$\frac{\partial S}{\partial t} (=) 2\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - 4x\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - 2x^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - 2x\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \qquad (14)$$

Wir haben jetzt die Werte (13) und (14) in (10) einzuführen. Dabei heben sich die Glieder mit $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$. Eben um dies zu erreichen war es nötig die Grössen (11) zu addieren. Auch alles Übrige verschwindet (unter fortwährender Ausschaltung belangloser Glieder), wenn man in (14) für $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ den aus der Bewegungsgleichung (5') folgenden Wert einführt. Damit ist unser Satz bewiesen.

Ich habe gesagt, dass, wenn die Erregung auf ein sehr kleines Intervall von x beschränkt bleibt, der Schwerpunkt X innerhalb dieses Intervalles liegt. Das ist klar wenn ε überall dasselbe Vorzeichen hat, braucht aber nicht wahr zu sein, wenn diese „Dichte" in einem Teile des Gebietes positiv und in einem anderen negativ ist. ~~Leider kann ich nicht beweisen, dass~~ Nun sind zwar die meisten Glieder in (13) positiv; aber ich kann nicht beweisen, dass der Gesamtwert an allen Stellen positiv ist. Schreibt man für das letzte Glied $4\psi^2 + 4x\frac{\partial(\psi^2)}{\partial x}$, so zerfällt ε in einen Teil d, der in dem kleinen Gebiete an allen Stellen positiv ist, und den Teil

$$b = 2x\frac{\partial(\psi^2)}{\partial x},$$

der, wegen der kleinen Wellenlänge viele Maale das Vorzeichen wechselt. Man „fühlt" wohl, dass sowohl in $\int \varepsilon\, dx$, wie auch in $\int \varepsilon x\, dx$ der Beitrag von b gegen den von a herrührenden zurückhält, und dann muss der Schwerpunkt in dem Gebiete liegen.

Übrigens kann man sauber beweisen, dass, und zwar in allen Fällen, auch wenn die Erregung nicht auf einen kleinen Raum beschränkt ist, die Gesamtenergie

$$E = \int \varepsilon\, dx$$

positiv ist.

Aus (13) folgt nämlich, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)^2 + 2x^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + (x^4-2)\psi^2\right] = A$$

setzt,

$$E = \int A\, dx + \frac{1}{2\pi^2\nu_0^2}\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Andererseits aus der Bewegungsgleichung (5'), wenn man diese mit ψ multipliziert und dann nach x integriert,

$$2\int A\, dx + \frac{1}{\pi^2\nu_0^2}\int \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\, dx = 0 \quad (16)$$

Aus (15) und (16), wenn man $\int A\, dx$ eliminiert,

$$E = \frac{1}{\pi^2\nu_0^2}\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 dx - \frac{1}{4\pi^2\nu_0^2}\frac{d^2}{dt^2}\int\psi^2\, dx.$$

Hier wollen wir jetzt zu den zeitlichen Mittelwerten für einen langen Zeitraum übergehen. Für das letzte Glied dürfen wir den Mittelwert wohl gleich Null setzen (stationärer Zustand) und wegen der Konstanz von E ist $\overline{E} = E$. Also

$$E = \overline{\frac{1}{\pi^2\nu_0^2}\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 dx}$$

und daher positiv.

Der benutzte Kunstgriff ist demjenigen ähnlich, den man beim Beweise des Virialsatzes anwendet, und das Resultat entspricht dem Satze, dass bei Systemen mit einfachen Schwingungen ~~und~~ die zeitlichen Mittelwerte der potentiellen Energie U und der kinetischen T gleich sind, und daher die Gesamtenergie $= 2T$.

Wasserstoffatom.

Wellengleichung

$$\Delta\psi + \frac{2m}{K^2}(h\nu - V)\psi = 0 \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

V ist die potentielle Energie des Elektrons und zwar so gerechnet, dass sie im Unendlichen nicht verschwindet, sondern einen hohen positiven Wert (etwa mc^2) hat.

Bewegungsgleichung, wenn man

$$\frac{2m}{K^2} = \alpha \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

setzt, und

$$K = \frac{h}{2\pi} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

berücksichtigt, nach einfacher Umformung

$$(\Delta - \alpha V)^2 \psi = -2\alpha m \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

oder[2]

$$\Delta^2\psi - 2\alpha\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) - 2\alpha V.\Delta\psi - \alpha\Delta V.\psi + \alpha^2 V^2\psi + 2\alpha m\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad (20)$$

Hieraus kann wieder durch Multiplikation mit $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ die Energiegleichung abgeleitet werden, und zwar jetzt in der Form

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

ε Energie pro Volumeneinheit; s_x, s_y, s_z Komponenten des Energiestroms. Hieraus folgt[1] die Konstanz der Energie. ($d\tau$ Volumenelement)

$$\frac{d}{dt}\int\varepsilon\, d\tau = 0, \quad \int\varepsilon\, d\tau = \text{Konst}$$

Wir definieren jetzt, bei zweckmässiger Wahl von ε, die Koordinaten des Schwerpunktes

$$x = \frac{\int\varepsilon x\, d\tau}{\int\varepsilon\, d\tau}, \quad y = \frac{\int\varepsilon y\, d\tau}{\int\varepsilon\, d\tau}, \quad z = \frac{\int\varepsilon z\, d\tau}{\int\varepsilon\, d\tau} \quad (22)$$

Wir können sagen die räumlichen Mittel von x, y, z, wenn jedem Einzelwert das Gewicht $\varepsilon\, d\tau$ beigelegt wird.

---

2) Es ist nicht nötig, $\Delta V = 0$ zu benutzen

---

1) Ich integriere unverfroren über den Ursprung hin und nehme an, dass die Integrale über die unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes verschwinden. Unter dem Zeichen $\int$ sind jetzt Grössen wie $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ oder $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ belanglos.

Ebenso die Mittelwerte der Komponenten der auf eine Ladung e wirkenden Kraft

$$-\overline{\frac{\partial V}{\partial x}} = -\frac{\int \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}\, d\tau}{\int \varepsilon\, d\tau}, \text{ u.s.w.} \tag{23}$$

Schliesslich wollen wir die Verhältnisse

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{-\frac{\partial V}{\partial x}}, \quad \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{-\frac{\partial V}{\partial y}}, \text{ u.s.w.}$$

betrachten. Es wird sich zeigen, dass für diese mit weitgehender Annäherung der Wert $\frac{1}{m}$ gesetzt werden kann. D.h.

Der Schwerpunkt des Wellensystems bewegt sich wie ein Punkt von der Masse m, auf den die genannte mittlere Kraft wirkte.

Bei dem Beweise können wir uns auf die x-Richtung beschränken. Da der Nenner $\int \varepsilon\, d\tau$ in (22) und (23) konstant ist, so ist zu berechnen das Verhältnis

$$\omega = \frac{\frac{d^2}{dt^2}\int \varepsilon x\, d\tau}{\int -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}\, d\tau} = \frac{J_2}{J_1} \tag{24}$$

Um J_2 zu berechnen:

$$\frac{d}{dt}\int \varepsilon x\, d\tau = \int x \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\, d\tau = \int x\left(\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z}\right) d\tau = \int S_x\, d\tau$$

$$J_2 = \int \frac{\partial S_x}{\partial t}\, d\tau.$$

Die nächstliegenden Werte von ε, S_x, u.s.w., auf die man so gleich kommt wenn man die Bewegungsgleichung (20) mit $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ multipliziert, sind

$$(\varepsilon) = \frac{1}{2}(\Delta\psi)^2 + \alpha V\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\alpha \Delta V \cdot \psi^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 V^2 \psi^2 + \alpha m \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \tag{25}$$

$$(S_x) = \frac{\partial \Delta\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \Delta\psi \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial t} - 2\alpha V \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t}, \text{ u.s.w.} \tag{26}$$

Indes ist es auch jetzt ~~nötig~~ nötig, hierzu gewisse mit (21) verträgliche Glieder zu addieren, und zwar ist der Zweck dabei diesmal, es so einzurichten, dass sowohl in ε, wie in $\frac{\partial S}{\partial t}$ neben Differentialquotienten von ψ nach den Koordinaten, nur $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ und nicht $\frac{\partial}{\partial t}$ vorkommt, sodass, wenn man $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ der Bewegungsgleichung (20) entnimmt, nur Differentialquotienten nach x, y, z übrig bleiben. Die Glieder in (25) und (26), die in dieser Weise umzuformen sind, sind die folgenden:

a. Das Glied $\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t}$ in (26). Wir fügen hinzu

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\cdot\psi\right), \qquad (27)$$

sodass entsteht

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x\partial t}\cdot\psi\right),$$

was für $\frac{\partial S_x}{\partial t}$ liefert:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^3\Delta\psi}{\partial x\partial t^2}\cdot\psi\right).$$

Dem Ausdruck (27) entsprechend haben wir zu S_y und S_z zu addieren:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}\cdot\psi\right) \text{ und } -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Delta\psi}{\partial z}\cdot\psi\right),$$

also zu div S

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\psi\cdot\operatorname{grad}\Delta\psi),$$

und zu ε

$$\frac{1}{2}\operatorname{div}(\psi\cdot\operatorname{grad}\Delta\psi).$$

b. Das Glied $-\Delta\psi\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}$ in (26). Wir addieren zu S_x

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\psi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),$$

und ähnliche Ausdrücke zu S_y und S_z. Also zu div S

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\Delta\psi\cdot\operatorname{grad}\psi)$$

und zu ε

$$-\frac{1}{2}\operatorname{div}(\Delta\psi\cdot\operatorname{grad}\psi).$$

c. Das Glied $-2\alpha V\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t}$ in (26). Es ist hinzuzufügen zu S_x

$$\alpha V\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\psi\right)=\frac{1}{2}\alpha V\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(\psi^2)}{\partial x},$$

zu S_y und S_z entsprechende Ausdrücke; zu div S:

$$\frac{1}{2}\alpha V\frac{\partial}{\partial t}\Delta(\psi^2)+\frac{1}{2}\alpha\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial(\psi^2)}{\partial x}+\text{u.s.w.}\right]$$

und zu ε

$$-\frac{1}{2}\alpha V\Delta(\psi^2)-\frac{1}{2}\alpha\left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial(\psi^2)}{\partial x}+\text{u.s.w.}\right]$$

d. Das Glied $\alpha m\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$ in (25). Hier fügen wir hinzu

$$-\alpha m\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right), \qquad (28)$$

sodass wir bekommen

$$-\alpha m\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

Nicht nötig, das alles genau zu lesen. Es kommt nur auf (29) und (30) an.

Der Ausdruck (28) zeigt, dass wir die S zu ändern haben um

$$\alpha m \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\alpha m \frac{\partial^3(\psi^2)}{\partial t^3}.$$

Wir erreichen das, wenn wir zu S_x, S_y, S_z addieren $\frac{\partial \chi}{\partial x}, \frac{\partial \chi}{\partial y}, \frac{\partial \chi}{\partial z}$, wo χ eine durch die Gleichung

$$\Delta \chi = \frac{1}{2}\alpha m \frac{\partial^3(\psi^2)}{\partial t^3}$$

bestimmte Hilfsfunktion ist. Diese zu S_x, S_y, S_z hinzuzufügenden Glieder sind aber belanglos.

Das Resultat der Rechnung wird $\left(F^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right)$

$$J_1 = \int\left[-\alpha^2 V^2 \frac{\partial V}{\partial x}\psi^2 + 2\alpha V \frac{\partial V}{\partial x}\psi\Delta\psi - \frac{1}{2}\alpha\psi^2\frac{\partial (F^2)}{\partial x} - \psi\Delta^2\psi\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\right]d\tau \qquad (29)$$

$$J_2 = \frac{1}{m}\int\left[-\alpha^2 V^2 \frac{\partial V}{\partial x}\psi^2 + 2\alpha V \frac{\partial V}{\partial x}\psi\Delta\psi - \frac{1}{4}\alpha\psi^2\frac{\partial (F^2)}{\partial x} - \left\{(\Delta\psi)^2 + \frac{1}{2}\psi\Delta^2\psi\right\}\frac{\partial V}{\partial x}\right]d\tau \qquad (30)$$

Es handelt sich jetzt darum, die Grössenordnung der verschiedenen Glieder ins Auge zu fassen. Dabei beachten wir, dass die Radien der Bohr'schen Kreisbahnen bestimmt werden durch

$$r_n = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 e^2 m}.$$

Nach (18) und (19) hat man also

$$\alpha = \frac{8\pi^2 m}{h^2} = \frac{2}{e^2 r_1}, \qquad (31)$$

wenn r_1 der Radius der ersten Kreisbahn ist.

Für den Wert, den die potentielle Energie V im Unendlichen annimmt, dürfen wir setzen

$$V = \frac{e^2}{R},$$

wenn R eine Grösse von der Grössenordnung des Radius des Elektrons, in gewöhnlicher Weise aus Ladung und Masse berechnet, bedeutet. Wäre nämlich der genannte Wert mc^2, so könnte man dafür auch schreiben $\frac{2}{3}\frac{e^2}{a}$, wenn man die bekannte Formel für die elektromagnetische Masse[1] berücksichtigt, und mit a den Radius bezeichnet. Dann wäre also $R = \frac{3}{2}a$.

Für einen Punkt in der Entfernung r vom Kern ist zu setzen

---

1) $m = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2 a}$ (Flächenladung, gewöhnliche elektrostatische Einheiten)

$$V = \frac{e^2}{R} - \frac{e^2}{r}.$$

Während also V selbst von der Grössenordnung $\frac{e^2}{R}$ ist, sind die ersten, zweiten u.s.w. Differentialquotienten nach den Koordinaten der Reihe nach von den Ordnungen

$$\frac{e^2}{r^2}, \quad \frac{e^2}{r^3}, \quad \text{u.s.w.}$$

Endlich sind die entsprechenden Differentialquotienten von ψ von den Ordnungen

$$\frac{\psi}{\lambda}, \quad \frac{\psi}{\lambda^2}, \quad \text{u.s.w.}$$

Aus dem Gesagten geht hervor, dass sowohl in J_1 wie auch in J_2 die vier unter dem Integralzeichen stehenden Glieder sich verhalten wie Grössen von den Ordnungen

$$\frac{1}{r_1^2 R^2} \qquad \frac{1}{r_1 R \lambda^2} \qquad \frac{1}{r_1 r^3} \qquad \frac{1}{\lambda^4}$$

Nun ist, wie wir sogleich sehen werden λ nicht kleiner als eine Grösse von der Ordnung $\sqrt{r_1 r}$. Von den vier Gliedern übersteigt also, wegen der kleinen Grösse von R, das erste bei weitem alle anderen, sodass es nur auf dieses erste Glied ankommt. Da nun dieses in den beiden Integralen in (29) und (30) dasselbe ist, so wird das gesuchte Verhältnis (24) in ~~erster~~ grosser Annäherung

$$\frac{1}{m},$$

was wir beweisen wollten.

Da nun aber, eben wegen der grossen Werte von λ, ein kleines zusammenbleibendes Wellenpaket (sagen wir von der Grössenordnung R) nicht existieren kann, so können wir aus dem abgeleiteten Satze nicht ableiten (wie wir sonst hätten können), dass ein solches Wellenpaket sich wie ein Elektron bewegt.

Was nun die Grösse der Wellenlänge betrifft, so schreiben wir zunächst für die Wellengleichung (17)

$$\Delta\psi + \alpha\left(h\nu - \frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0$$

und bemerken, dass hier $h\nu - \frac{e^2}{R}$ die Stelle des ~~Eigen~~ von Ihnen berechneten Eigenwertes von E vertritt. Dieser ist für den n^{ten} Schwingungszustand $-\frac{e^2}{2r_n}$. Die Wellengleichung wird somit, wenn man auch den Wert von α (31) substituiert

$$\Delta\psi + \frac{1}{r_1}\left(-\frac{1}{r_n} + \frac{2}{r}\right)\psi = 0$$

Daraus folgt für die Wellenlänge (n^{ten} Bewegungszustand)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{r_1}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r_n}\right)}}$$

In einem bestimmten Punkt (r) kommen also keine kleineren Wellenlängen vor als

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{r r_1}\,;$$

wohl dagegen grössere, und zwar wenn r_n sich dem Werte r nähert, sehr grosse.

Dies ist der Grund, weshalb es mir scheint, dass Sie bei der jetzigen Gestalt Ihrer Theorie nicht imstande sein werden, Wellenpakete zu konstruieren, ~~die sehr hohe B~~ welche die in sehr hohen Bohr'schen Bahnen laufenden Elektronen repräsentieren können. Denn soviel dürfen wir doch wohl der klassischen Optik entnehmen,[1] dass ~~das~~ ein Wellenpaket sehr viele Wellenlängen umfassen muss. In Ihrem Beispiel des linearen Vibrators hatten Sie den Vorteil, dass beliebig kurze Wellen zur Verfügung standen.

Sie sprechen in Ihrem Briefe davon, dass eine gewisse in ψ quadratische Grösse die elektrische Dichte (und nicht etwa eine Energie) bedeuten könnte, ~~woraus ich entnehme, dass~~ wobei Sie sich das Elektron als "verwischt" vorstellen. Ich möchte nun fragen, wenn wir eine in den Formeln vorkommende Grösse ρ ~~als~~ mit der Dichte ~~der~~ einer Ladung identifizieren, wäre es dann nicht schön (und erwünscht) ~~dass~~ wenn $\int \rho \, d\tau = \text{konst.}$ wäre? Das dürfte wohl kaum

---

1) Man könnte es auch wohl aus der jetzt in Betracht kommenden Bewegungsgleichung ableiten (Analogon zum Huygens'schen Prinzip)

zutreffen mit $\rho = \psi\bar{\psi}$. Würde es nicht näher liegen, für ρ einen der Werte zu nehmen, die ich im Vorhergehenden mit E bezeichnet und Energie genannt habe? $\int E\,d\tau$ ist ja konstant.

Eine zweite Frage: können Sie positive und negative Ladung unterscheiden?

Eine Schwierigkeit, auf die ich bereits hinwies, besteht darin, dass das in den Formeln vorkommende V (mit dem Gliede $-\frac{e^2}{r}$) sich nur auf das Feld des Kernes bezieht; ~~sollte es nicht~~ kann man sich auf dieses Potential beschränken, wenn auch negative Ladung vorhanden ist, entweder ~~ob~~ kontinuierlich über den Raum verbreitet, oder in einem Elektron konzentriert? Ändert man an dem Gliede $\frac{e^2}{r}$, so läuft man Gefahr die richtigen Eigenwerte von E zu verlieren.

Das sind alles dunkle Punkte. Andererseits ist es wieder erfreulich, dass, wenn Sie $\psi\bar{\psi}$ für die Ausstrahlung verantwortlich machen (Sie könnten dasselbe mit jeder quadratischen Grösse erreichen), Sie schon dadurch die Differenztöne und die ausgestrahlten Frequenzen zum Vorschein kommen lassen, ohne dass noch weitere Annahmen (Nichtlinearität der Gleichungen) nötig sind.

Ich möchte zum Schluss, wenn Sie es erlauben, kurz zusammen(fassen, was jetzt wie mir scheint) ~~nach meiner Meinung~~ ~~fassen, was jetzt~~, soweit sie entwickelt ist, und soweit sie aufrecht erhalten kann, von Ihrer Theorie gesagt werden kann, wobei ich insbesondere an das H-Atom denke. Ich lasse dabei die Energiepakete fallen, und spreche auch nicht von dem Verwischen oder Auflösen des Elektrons.

1. In dem Kernfelde können schwingende Wellenzustände bestehen, die einer bestimmten Bewegungsgleichung gehorchen. Es werden Vorschriften gegeben um diese aus den Bewegungsgleichungen eines Elektrons abzuleiten.

2. Die möglichen Wellenzustände haben bestimmte (sehr hohe) Frequenzen, die man durch Berücksichtigung der ~~Wellenzus~~ Grenzbedingungen (für $r = 0$ und $r = \infty$) findet. In jedem Punkte bestimmte W und λ, abhängig von Punkt, unabhängig von Richtung.

3 Für die Ausstrahlung wird eine ~~quadratische~~ in Bezug auf ψ quadratische Grösse ~~abhä~~ verantwortlich gemacht. Dies führt, sobald zwei der genannten Bewegungszustände mit den Frequenzen ν_1 und

Das in der Bewegungsgleichung vorkommende Potential V ist das von der Kernladung abhängige. ~~Ein Einfluss auf dieses Potential~~ Die Ladung des Elektrons hat auf dieses Potential keinen Einfluss

ν_2 zugleicherzeit bestehen, zu der ausgestrahlten Frequenz $\nu_2 - \nu_1$ [und zu einer Frequenz $\nu_2 + \nu_1$, die sehr hoch liegt und von der wir absehen dürfen [oder wollen]]).

Vom Elektron ist soweit noch kaum die Rede. Es muss aber wohl irgendwie an den Vorgängen beteiligt sein, was schon daraus hervorgeht, dass das Spektrum eines Atoms durch Verlust eines Elektrons gründlich geändert wird. Darum füge ich noch Folgendes hinzu.

4. Es gibt bei einem der genannten Schwingungszustände „ausgezeichnete" Linien[1], dadurch gekennzeichnet, dass bei festgehaltenen Endpunkten

$$\delta \int \frac{ds}{w} = 0 \qquad (32)$$

ist; w Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Die ausgezeichneten Linien sind für den $n$ten Zustand genau die n-quantigen Bahnen des Elektrons in der Bohr'schen Theorie.

Beweis. Man kann (32) ersetzen durch

$$\delta \int \frac{ds}{\lambda} = 0. \qquad (33)$$

Nun steht für den $n$ten Zustand, den wir betrachten wollen, $E = E_n$ fest, und in der Wellengleichung

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\kappa^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0 \quad \ldots\ldots \qquad (34)$$

bedeutet $E + \frac{e^2}{r}$ die kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$, die ~~der~~ ein Elektron mit der Gesamtenergie E_n an der betrachteten Stelle haben würde. Leitet man nun aus (34) λ ab, so wird $\lambda \sim \frac{1}{v}$ (mit konstantem Faktor); also verwandelt sich (33) darin, dass bei vorgeschriebenem E_n

$$\delta \int v\, ds = 0$$

sein soll. Das ist aber gerade die Bedingung, welche die Bewegung eines Elektrons bestimmt.

5. Man sieht zugleicherzeit, dass die ausgezeichneten Linien geschlossen sind (Ellipsen oder Kreise). Sie haben nun die weitere Eigenschaft, dass ihr Umfang, in Wellenlängen ausgedrückt (ich meine $\int \frac{ds}{\lambda}$) eine ganze Zahl ist.[2]

Beweis: Aus (34) folgt für die Wellenlänge:

---

1) Ich nenne sie so und spreche nicht von „Lichtstrahlen", weil von der physikalischen Bedeutung dieser letzteren (Begrenzung eines weiten Bündels) nicht mehr die Rede ist.

2) Wir können hierüber sprechen, auch ohne gerade an eine Fortpflanzung der Linie entlang, zu denken.

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{2m}{K^2}\cdot\frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^2v^2}{K^2}, \quad \lambda = \frac{2\pi K}{mv} = \frac{h}{mv}.$$

Also
$$\int \frac{ds}{\lambda} = \frac{1}{h}\int mv\,ds = \frac{2}{h}\int T\,dt = \frac{2}{h}\,\Theta\,\overline{T},$$

wenn Θ die Umlaufszeit des Elektrons in der betrachteten Bahn und $\overline{T}$ das zeitliche Mittel der kinetischen Energie ist. Nun ~~ist~~ gilt aber bei der Bewegung in einer Keplerellipse der Satz
$$\overline{T} = -E,$$
~~wo~~ wenn E die Energie ist (potentielle Energie im Unendlichen Null). Wir haben daher zu berechnen
$$-\frac{2}{h}\,\Theta\,E_n$$
und können das für eine Kreisbahn tun, da ja für alle n-Quantenbahnen, seien es Kreise oder Ellipsen, die Umlaufszeit Θ dieselbe ist. Nun ist für eine Kreisbahn vom Radius r_n
$$E_n = -\frac{e^2}{2r_n}$$

$$\Theta = \frac{2\pi r_n}{v_n},$$

sodass unser Ausdruck wird
$$\frac{2\pi e^2}{hv_n}.$$

Also, da nach einer bekannten Formel $v_n = \frac{2\pi e^2}{nh}$ ist,
$$\int \frac{ds}{\lambda} = n.$$

---

6. Aus irgend einem Grunde[1] kann das Elektron sich nur in einer ausgezeichneten Linie bewegen. Dabei bleiben wir einigermaassen im Unsichern darüber, was das Elektron tun wird, wenn zwei der Schwingungszustände zugleicherzeit bestehen.

Wie Sie sehen nähert man sich mit dem zuletzt gesagten den Ausführungen de Broglie's. Ihm gegenüber haben Sie den Fortschritt

---

1) Schwer zu sagen, weshalb. Man könnte hier an ~~die~~ de Broglie's Auffassung denken: innere Schwingungen des Elektrons, Übereinstimmung in Phase zwischen diesen und der begleitenden Welle.

gemacht, dass Sie uns die Wellenzustände klar vor Augen stellen und das ist ein wichtiger Schritt.

Indes, wenn wir die Wellenpakete aufgeben müssen, und damit einen der Grundgedanken Ihrer Theorie, die Umwandlung der klassischen Mechanik in eine undulatorische, so würde damit etwas verloren gehen, das sehr schön gewesen wäre. Es würde mich sehr freuen, wenn Sie hier einen Ausweg finden könnten.

Übrigens wäre ich sehr zufrieden wenn man nun auch für einige andere Fälle (Relativitätskorrektion, Mitbewegung des Kernes, Stark- und Zeemaneffekt) soweit kommen könnte, wie nach dem oben, 1 – 6 gesagten, für das Balmer-spektrum.

Mit freundlichen Grüssen und in vorzüglicher Hochachtung

Ihr ergebener

H. A. Lorentz