Feldphysik
Prof. Dr. Schrödinger

Martin Hengst

S.S. 1931 2. Heft.

XI (4d) Also $\Delta \mathfrak{A}_x = -\mathfrak{w}_x$, $\Delta \mathfrak{A}_y = -\mathfrak{w}_y$, $\Delta \mathfrak{A}_z = -\mathfrak{w}_z$

Das ergibt für die einzelnen Komponenten folgenden Wert.

$$\mathfrak{A}_x = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathfrak{w}_x' \, d\tau'}{r'}, \quad \mathfrak{A}_y = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathfrak{w}_y' \, d\tau'}{r'}, \quad \mathfrak{A}_z = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathfrak{w}_z' \, d\tau'}{r'}$$

oder kurz $\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathfrak{w}' \, d\tau'}{r'}$

Das ist – falls es überhaupt Lösungen gibt – eine Lsg. der vorgegebenen Glchg.

$$-\Delta \mathfrak{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} = \mathfrak{w}$$

u. damit für $\operatorname{div} \mathfrak{H} \equiv 0$ u. $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \mathfrak{w}$

$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ darzustellen.

(e) Es ist also noch zu prüfen, ob $\mathfrak{A}$ wirklich alle Bedingungen erfüllt.

Ist $\operatorname{div} \mathfrak{A} \equiv 0$ für $\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathfrak{w}' \, d\tau'}{r'}$?

Es ist offenbar

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\int d\tau' \left(\mathfrak{w}_x' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right) + \mathfrak{w}_y' \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r'}\right) + \mathfrak{w}_z' \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'}\right) \right)$$

Man darf hier jedoch nicht nach x, y, z partiell integrieren, da das keine laufenden Variablen, sondern Parameter sind.

Nun gilt aber $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right) = \frac{x - x'}{r'}$ u. $\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r'}\right) = \frac{x' - x}{r'}$

D. h. aber $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right) = -\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r'}\right)$ u. analog für y u. z. Demnach erhält man

$$4\pi \,\mathrm{div}\, \mathfrak{A} = +\int d\tau' \frac{1}{r'}\left(\frac{\partial w_x'}{\partial x'} + \frac{\partial w_y'}{\partial y'} + \frac{\partial w_z'}{\partial z'}\right) \quad \text{d. h.}$$

$$4\pi \,\mathrm{div}\, \mathfrak{A} = \int d\tau' \frac{1}{r'} \left(\mathrm{div}\, w\right)_{x'y'z'} .$$

$(\mathrm{div}\, w)_{x',y',z'} \equiv 0$ ist aber vorgegeben. denn rotor-feld ist stets quellenfrei

Damit $\mathrm{div}\, \mathfrak{A} \equiv 0$ u. alle Bedingungen erfüllt.

Somit ist u. quellenfreies Vektorfeld dessen Wirbelverteilung bekannt ist, als rotor feld dargestellt.

$\mathfrak{A}$ heißt Vektorpotential

(4) Die Frage nach der Eindeutigkeit der Lsg. $\mathfrak{A}$ ist bereits unter (3c) beantwortet. Es gibt sicher noch weitere Felder nämlich $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} + \mathrm{grad}\,\psi$, welche dieselbe div haben.

(5) Können nun umgekehrt zu einem $\mathfrak{A}$ zwei Vektoren $\mathfrak{H}'$ u. $\mathfrak{H}''$ gehören. Man bildet $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}'' - \mathfrak{H}'$. Damit ist

sicher div $\mathfrak{H}^+ \equiv 0$ und rot $\mathfrak{H}^+ \equiv 0$

Verlangt man, daß nun im ganzen Raum wirbel- u. quellenfreies Vektorfeld $\mathfrak{H}^+$ im Unendl. wie $\frac{1}{r^2}$ verschwindet, so ist wegen nur der Fall $\mathfrak{H}^+ \equiv 0$ denkbar. Dann also $\mathfrak{H}' \equiv \mathfrak{H}''$

(6) Es sei div $\mathfrak{v} = q$ u. rot $\mathfrak{v} = \mathfrak{w}$ vorgegeben. Man soll $\mathfrak{v}$ berechnen.

Man setzt hierzu

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{q'\,dt'}{r'} \quad \text{u.} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathfrak{w}'\,dt'}{r'}.$$

Dann ist $\mathfrak{v} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\mathfrak{A}$

falls $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi \equiv 0$

u. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{A} \equiv 0$ wird

Damit ist die Aufgabe gelöst ein beliebiges Vektorfeld $\mathfrak{v}$ in einen grad (~~quellenfreien~~ wirbelfr. Bestandteil) u. in ein rot (quellenfreien Bestandteil) zu zerlegen.

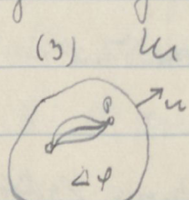
(6a) Können zwei verschiedene Vektoren $\mathfrak{v}'$ u. $\mathfrak{v}''$ zugleich Lösgn. obiger Aufgabe sein?

Nein, denn die Lsg ist eindeutig, wenn man verlangt, daß sie im Unendl. wie $\frac{1}{R^2}$ verschwindet, da denn! $\operatorname{div}(v'-v)=0$ u. $\operatorname{rot}(v'-v)=0$ nur Lsg. 0 besitzt.

XII. (1) Bis jetzt bestand die Annahme: das Feld erfüllt den ganzen Raum.
Aber in der Physik oft Fälle, wo Feld nur einen endl. Raumteil erfüllt, z. B. strömende Flüssigkeit in einem allseitig geschlossenen Kanal; oder der elektr. Strom auf e. Leiter.

(2) In e. begrenzten Raum sind nun die Lsgen. nicht stets eindeutig. Man muß hier gewisse Randbedingungen hinzuziehen.

(3) Man habe e. endl. Raumteil



es sei v vorgegeben, für den $\operatorname{div} v \equiv 0$ u. $\operatorname{rot} v \equiv 0$ gelte. Dann $v = \operatorname{grad}\varphi$ möglich, denn

Der Ansatz $\varphi_P = \int_0^P w_s\,ds$ gilt im begrenzten Raum (einfach zusammenhängend) genau so wie im unendl.

Es gilt dann $\operatorname{div} w = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi$.

(4a) Welche Randbedingungen erzwingen Eindeutigkeit der Lsg. von $\Delta\varphi = 0$

(a) Ist $w_n = 0$, d.h. $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ auf der ganz. Oberfläche, so muss φ verschwinden.

z.B. bei d. strömenden Flüssigkeit ist w_n der Geschwindigkeits ~~Komp~~. durch die Wand.

Um einzusehen, daß unter diesen Bedingungen d. wirbelfreies Feld unmöglich ist, setze man folgendes an

$$\int \varphi\,\Delta\psi\,d\tau = \int\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,df - \int(\operatorname{grad}\varphi\,\operatorname{grad}\psi)\,d\tau$$

u. setze hierin $\psi \equiv \varphi$. Dann wird $\int\varphi\,\Delta\varphi\,d\tau \equiv 0$ wegen $\Delta\varphi \equiv 0$

u. $\int|\operatorname{grad}\varphi|^2\,d\tau = \int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,df$

man beachte hierbei, daß φ stets von innen nach außen differenziert wird.

Da nun in $\iint |\mathrm{grad}\,\varphi|^2 d\tau$ der Integrand stets positiv ist, so muss für $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ auch $\mathrm{grad}\,\varphi \equiv 0$ werden, d. h. aber $\varphi \equiv 0$.

Das gilt auch für $\varphi =$ const.

(b) Wäre $\varphi = 0$ auf der Oberfläche vorgeschrieben, so gälte dasselbe.

Denn wäre sogar wegen der Stetigkeit $\varphi \equiv 0$

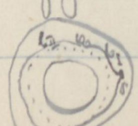
(b') so sei $\varphi =$ const.

Denn ist $\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = 0$ wegen Gauss

(c) Bei all diesen Überlegungen ist vorausgesetzt, dass φ eindeutig definiert ist.

(5) Diese Bedingung wird aber verletzt wenn man zu mehrfach zusammenhängenden Bereichen übergeht.

(a) Ein in sich geschlossener Kanal ist ein (zweifach) doppelt zusammenhängender Bereich

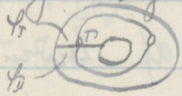


so existieren hier Kurven, die

nicht auf Null zusammenziehbar sind.

Im allgemeinen wird nämlich

$$(C_I)\int_0^P v_s\, ds \neq (C_{II})\int_0^P v_s\, ds \quad \text{sein}$$

(b) Man kann nun u. eine Grenze einführen, über die nicht hinweg integriert werden darf, etwa 
dann wird aber φ an dieser ~~Stellen~~ Unstetigkeitsstellen besitzen.

Durch diese Grenze wird der Bereich einfach zusammenhängend.

(c) Der Sprung der Potentialfunktion φ ist jedoch unabhängig davon, wo die Fläche liegt u. zudem auf der Fläche konstant.

Man bildet zu diesem Zweck

$$\varphi_{II} - \varphi_I = (C)\int_I^{II} v_s\, ds, \quad \text{so als eindeutig war.}$$

$$\varphi'_{II} - \varphi'_I = (C')\int_I^{II} v_s\, ds$$

Man bezeichnet $(C')\int_I^{II} v_s\, ds = C$ als Zirkulation.

Es ist $\varphi_{II} - \varphi_I = \varphi_{II'} - \varphi_{I'}$.

$$\int |\operatorname{grad} \varphi|^2\, d\tau = \int_{I+II} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, df$$

Nun hat $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ auf I u. II denselben Wert, abgesehen vom Vorzeichen

Für $\varphi_{II} - \varphi_{I} = b$ wird dann

$$\int |\operatorname{grad}\varphi|^2 d\tau = -\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = \int_{I+II} \left[-\varphi_I \frac{\partial \varphi}{\partial n} + (\varphi_I + b)\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right] df$$

$$= b\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = b \int v_n \, df$$

$\int v_n \, df$ bedeutet physikal. die Stromstärke.

Hieraus folgt, daß Stromstärke durch jeden Querschnitt denselben Wert haben muß

$$\int v^2 d\tau = b \cdot \int v_n \, df$$

(d) Ist $b = 0$, so muß auch $v \equiv 0$ sein.

Ist $b \neq 0$, so ist die Strömung eindeutig bestimmt. Gäbe es zwei Vektoren v' u. v'', so wäre $v^* = v' - v''$ e. Strömung mit der Zirkulation $b^* = 0$

Gehört nun aber zu v die Zirkulat. b und zu v^* die Zirk. b^*, so gilt

$$\frac{b^*}{b} v = v^*$$

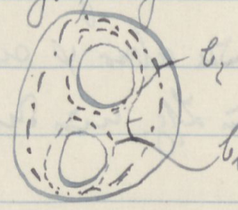
Dies ergibt für $b^* = 0$, $v^* \equiv 0$.

Abgesehen vom Quellgebiet, kann man

u. nicht-kleinsten Brennung im wesentlichen auf-
treten. Jede andere geht aus dieser nach Multi-
plikation mit t u. Zahlenfaktor hervor

Bei diesen Überlegungen ist nicht
bewiesen, ob überhaupt .. Lsg. existiert.

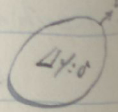
(6) Man betrachte jetzt einen drei-
fach zusammenhängenden Bereich.
Dieser läßt sich nicht durch eine, ein-
fach zusammenhängende Fläche in e. einfach
zusammenhängenden Bereich verwandeln.
Sondern hier sind 2 Trennungs-Flächen
notwendig, etwa



In diesem Fall sind
auch 2 Zirkulationen
vorzugeben zusammen mit übrigen
Bedingungen. Bzw. b als Summe
von b_1 u. b_2, etwa

(7)(a) Man betrachte wieder einfach zusammenhängende Bereiche

(a) Es sei i. Innern $\Delta\varphi = 0$ u. am Rande $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ vorgegeben.



Dann läßt sich $w = \operatorname{grad}\varphi$ eindeutig im Innern bestimmen.

Hätte man w' u. w'', so bildet man $w' - w'' = w^*$ ein im Innern wirbel- u. quellenfreies Feld mit

(b) Es sei auf dem Rde. $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ u. φ vorgegeben

dann wird $\operatorname{grad}(\varphi' - \varphi'') = 0$, d.

d.h. $\varphi' = \varphi'' + \text{const.}$

Da aber φ am Rde. fest vorgegeben, so muß die Lsg. eindeutig sein.

(c) Es sei $\varphi + h\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ am Rde vorgegeben wobei $h = \text{const.}$ sei.

Ist $h > 0$, so ist die Lsg. eindeutig falls überhaupt Lsg. existiert (wie bei a u. b).

Denn es ist zunächst $\int (\mathrm{grad}\,\varphi)^2 d\tau = \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} df$

Hätte man 2 Lösungen φ' u. φ'', so

bilde man $\varphi' - \varphi'' = \varphi^*$

Es wäre $\varphi' + h \frac{\partial \varphi'}{\partial n} =$ vorgegeb.

$$\varphi'' + h \frac{\partial \varphi''}{\partial n} = \text{"}$$

$$\varphi^* + h \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} = 0$$

d. h. $\varphi^* = -h \frac{\partial \varphi^*}{\partial n}$

Demnach gälte $\int (\mathrm{grad}\,\varphi)^2 d\tau = -h \int \varphi^{*2} df$

u. Relation, die für $h > 0$ nicht möglich, da rechts dann stets negativ, links dann stets positiv wäre.

(c') Ist $h < 0$, so liegen die Verhältnisse anders.

Elektrostatik.

XIII. (1) Die Aufgabe der Elektrostatik besteht nicht nur in der Berechnung des Elekt. Potentials aus der Ladungsverteilung $\rho(x,y,z)$

Es gilt nämlich gerade die Ladungsverteilung selbst zu bestimmen. Hierbei spielt die Beschaffenheit des Trägers der Ladung e. wesentliche Rolle. Es soll hier die Ladungsvertlg. i.a. auf e. Leiter untersucht werden.

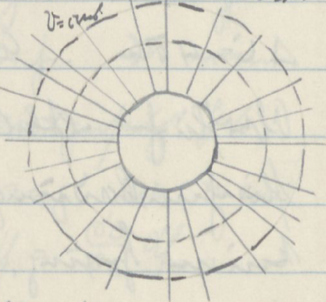
Auf einem Leiter befinden sich nach der Hypothese stets – auch wenn nicht besonders hinaufgebracht – Ladungen u. zwar gleichviel Ladungen entgegengesetzter Elektrizität. Hiervon stelle man sich die e. Sorte mindestens als frei beweglich vor. Auf dem ungeladenen Leiter befinden sich i. jedem Vol.-element gleichviel Ladungen von jeder Sorte.

Soll auf e. Leitersystem stat. Gleichgewicht herrschen, so muß $E = 0$ sein u. der Fall gerade i. Elektrostatik behandelt wer-

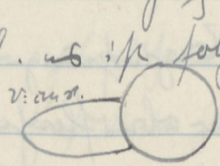
(2) Im Innern d. Leiters ist stets $\mathfrak{E}=0$, $V=\text{const.}$;
wobei $V=\int\frac{\rho\,d\tau'}{r}$, $\mathfrak{E}=-\operatorname{grad} V$.

Ferner $V=\text{const.}$ auf der Oberfläche u. $\Delta V=0$ im Außenraum. Damit ist nach V im Außenraum eindeutig gegeben. Im Unendl. setzt man $V=0$.

Das Kraftfeld im Außenraum hat dann folgende Gestalt: Um Leiteroberfläche lagern sich die Flächen gleichen Potentials herum (Äquipotentialflächen), auf denen die Kraftlinien senkrecht stehen. Die verlaufen von d. Leiteroberfläche, die ebenfalls äquipotential ist, ins Unendliche.



(2') Die Kraftlinien kehren nicht zur Leiteroberfläche zurück, d.h. es ist folgendes unmöglich (vgl. Bild)

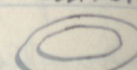


Denn

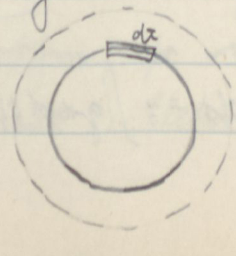
$$\int \mathfrak{E}_s\,ds=\int|\mathfrak{E}|\,ds=\pm\int|\operatorname{grad}V|\,ds\neq 0 \text{ da}$$

Beitrag an jeder Stelle positiv. Es müßte also ein unendl. Zuwachs d. Potentials eintreten; auf dem Leiteroberfläche soll aber $V = \text{const.}$ gelten. Die Kraftlinien verlaufen also ins Unendliche.

(2) Die Ladung kann auf e. Leiter nur auf der Oberfläche sitzen, da im Innern $V = \text{const}$, $\Delta V = 0$. Im Außenraum jedoch $\Delta V = 4\pi\rho$. Aus dieser Unstetigkeit a. d. Oberfläche erklärt sich, daß Ldg. nur als Oberflächenladung vorhanden. V selbst macht keinen Sprung.

(3) Auch bei zweifach zusammenhängenden Bereichen gibt es keine geschlossenen Kraftlinien, da auf der Leiteroberfläche eben $V = \text{const.}$ ist. 

(4) Beziehung zwischen Ladung auf der Leiteroberfläche u. dem Felde nahe der Oberfläche:



Auf das Volumelement $d\tau$ wende man Gauß an $\int \operatorname{div} \mathfrak{E}\, d\tau = \int \mathfrak{E}_n\, df$

Wenn man nicht sicher ist, ob hier Gauß wegen $\operatorname{div} \mathfrak{E}$ erlaubt ist, dann darf man doch $\int \mathfrak{E}_n\, df = 4\pi \sum e_i$ setzen.

Das Integral ist für den [illegible] in ~~all~~ den Rändern, die $\perp$ Oberfläche, gleich Null. Es bleibt demnach nur noch das Integral über die äußere Oberfläche. Da man hier aber ein Volelement vorausgesetzt hat, fällt das Integralzeichen weg u. man erhält

$$\mathfrak{E}_n\, df = 4\pi\sigma\, df = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}\, df$$

Hierin ist σ die Ladungsdichte u. zwar

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_n = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \pm\frac{1}{4\pi}|\mathfrak{E}|$$

n = Normale in den Außenraum.

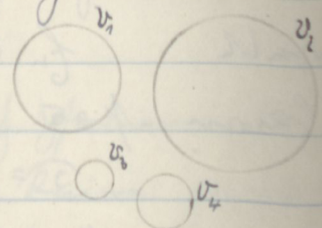
Man sieht hierbei sogleich, daß auf dem ganzen Leiter Ladungen gleichen Vorzeichens sich befinden (da sonst kein Gleichgewicht). Infolgedessen können auch auf u. geladenen Leiter Kraftlinien nicht zugleich beginnen

u. unten.

Löst man die Potentialaufgabe mit $V = 5$ z. B., u. herrscht a. d. Leiter das Potential 7,5, so braucht man nur obige Lsg. mit Faktor 1,5 zu multiplizieren. Im wesentlichen also nur eine Lsg.

Es ist $-\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V}{\partial n}\, df = e$, die Ladung auf d. Kugel.

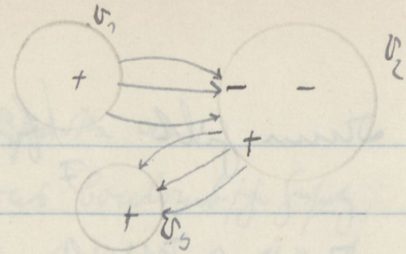
VII. (1) Man habe jetzt mehrere Leiter mit den Potentialen V_1, V_2, V_3 . .



Die Kraftlinien werden in diesem Fall nicht ins Unendliche verlaufen, sondern von dem Leiter höheren Potentials zu den Leitern niederen Potentials.

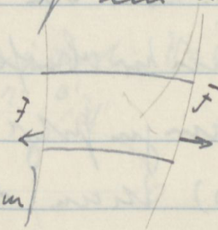
(2) Es kann Leiter geben, deren Ladungen verschiedenen Vorzeichen haben.

Es ist denn etwa möglich sein.



Der Leiter, der unter allen das höchste Potential hat kann nur der, der unter allen das kleinste Potential hat, nur Ladungen einer Art auf sich tragen.

(2) Das Kraftlinienbild zeigt jetzt mit beschränkter Genauigkeit nicht nur Richtung, sondern auch Stärke des Feldes. Die Kraftliniendichte ist ein Maß für die Stärke des Feldes.

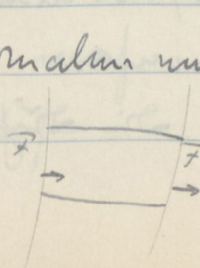


Röhren der Kraftlinien durch F = Kraftröhren. (Lichtleerer Raum)

Auf die Kraftröhren wendet man Satz v. Gauß an d. h.

$$\int_{F+F'} E_n\,df = 0,$$ da keine Ladung drinnen.

Wählt man aber die Normalen entsprechend anders, etwa

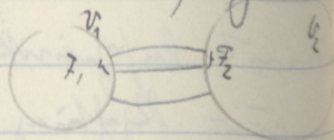


Dann gilt $\int_F f_n\, df = \int_{F'} f_n\, df$

Da das Feld f senkrecht auf den Äquipotentialflächen, gilt $f_n = |f|$

Also $\int_F |f|\, df = \int_{F'} |f|\, df$

(2') Daraus leitet man für Kraftlinienröhren zwischen zwei Leiteroberflächen folgendes ab:



$$\int_F |f|\, df = \int_{F'} |f|\, df$$

d. h. aber die Ladungen auf den beiden Leiteroberflächenstücken sind entgegengesetzt gleich.

(3) Man wähle jetzt u. Kraftröhren mit unendl. kl. Querschnitt.

Dann gilt $|f|\,\Delta q = |f'|\,\Delta q'$

oder $\frac{|f|}{|f'|} = \frac{\Delta q'}{\Delta q} = \frac{1}{\Delta q} : \frac{1}{\Delta q'}$

Δq bedeutet u. beliebig kleines Flächenelement.

Die Dichte der Kraftlinien ~~gibt~~

also eigen die Grössen d. Feldstärken an.

Das ist bedingt durch das Coulombsche Gesetz, denn dieses verlangt $\Delta V = 0$ mit $V = \frac{1}{r^2}$

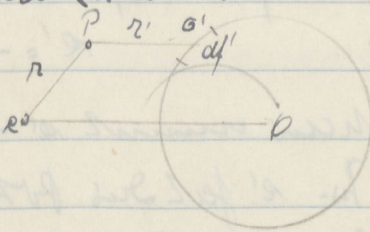
Wenn man eine Kugel a. d. Welt hat, u. sonst nichts, so Äquipotentialflächen = Kugelflächen.

(4) Man denke sich hier die Aufgabe stets so, dass die Potentiale vorgegeben sind, auch wenn die Ladungen gegeben sind

(4') Bspg. Beeinflussung u. Kugel durch Pkt. förmige Ladung.

Auf Kugeloberfläche sei zunächst $V = 0$

Auf jedem Flächen-element herrscht Ladungsverteilung σ'

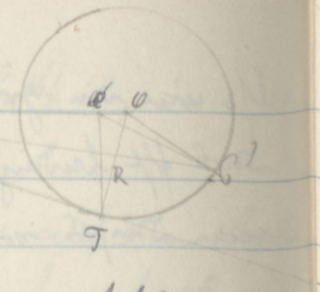


$$V_p = \frac{e}{r} + \int \frac{\sigma' df'}{r_1}$$

$$V' = \int \frac{\sigma' df'}{r'}$$

Diese Aufgabe lässt leicht nach Kelvin auf rein geom. Art lösen.

Tangente $\overline{eT}$



Projektion von $\overline{eT}$ auf

$\overline{eO}$ ist $\overline{ee'}$

Dann P' beliebig, $\overline{eP'} = r$ gesetzt.

Beh.: $\Delta eOP' \sim \Delta e'OP'$

Bew. Δ bei O gemeinsamen Winkel

ferner ist $\overline{OT}^2 = R^2 = e'O \cdot eO$

Dann $e'O : R = R : eO$

u. ferner $\frac{e'O}{OP'} = \frac{R}{eO} = \frac{e'P'}{eP'} = \frac{r'}{r}$, $eO = a$

d. h. $\frac{r'}{r} = \text{const} = \frac{R}{a}$

Daraus folgt $\frac{\text{const}}{r'} - \frac{1}{r} = 0$

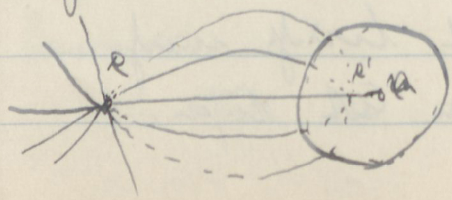
oder für konst. b $\quad -\frac{be}{r'} + \frac{e}{r} = 0$

$e' = -be = \frac{-R}{a} e$, also $e' < e$

Man nennt e' d. elektr. Bild

Die e' hat das Potential die sie fingierten Ladg. die Eigenschaft, das Feld der influenzierten Ldg. auf Kugel zu ersetzen

Folgendes Bild des Feldes ergibt sich



e' hat die Ltg. die gesamte wirkliche
Zeichnung bzw. ist auf d. Kugel ist
e' < e d. h. nicht alle unendlichen
Kurven auf e', ein Teil geht ins Un-
endliche.

Um die Flächendichte auf der Kugel
zu bekommen, muss man e' berechnen
ändern: Fe ⊥ Kugelfläche, setzt sich
zusammen a. d. Feldstärke die durch
e u. die durch e' erzeugt wird, ihre
Komponenten:

XV. Elektrostat. Feld mit fest im Raum verteilten Leitern (Anzahl k)

(1) Wir haben k Leiter

$1 \quad 2 \quad . \quad . \quad . \quad k$, u. e. Lsg.

$V'(x,y,z)$: V_1' V_2' . . . V_k', der d. Ladungen e_1', e_2', . . . e_k' a. d. Leitern entsprechen. Dann ist auch für $b = \text{const.}$ $b \cdot V'(x,y,z)$ e. Lsg. d. Potentialaufgabe.

Die Ladungen berechnen sich aus

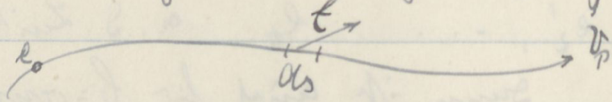
$$e_k' = \frac{1}{4\pi}\int f_n \, df = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V_n}{\partial n} \, df$$

Hat man e. 2. Lsg. $V''(x,y,z)$, der die Potentiale V_1'', V_2'', . . , V_k'' und d. Ladungen e_1'', e_2'', . . , e_k'' a. d. Leitern entsprechen, so ist auch

$$V'(x,y,z) + V''(x,y,z)$$ e. Lsg., der die Potentiale $V_1' + V_1''$, $V_2' + V_2''$, . . , $V_k' + V_k''$ u. d. Ladungen $e_1' + e_1''$, $e_2' + e_2''$, . . , $e_k' + e_k''$ entsprechen

Allgemein ist auch $b' \cdot V'(x,y,z) + b'' \cdot V''(x,y,z)$ wieder e. Lsg.

(2) Welche Arbeit muss man leisten, um e aus dem Unendl. a. d. Stelle P mit Potential V_P zu bringen? Man denke sich e sehr klein, da sonst durch Influenzwirkung e. Änderung d. Feldes hervorgerufen würde.



Verschiebt man e um ds, so leistet man die Arbeit $-e\frac{\partial V}{\partial s}ds$, wegen $E_s ds = -\frac{\partial V}{\partial s}ds$

Also für den Gesamtpunkt P gilt

$$+e\int_{\infty}^{P}\frac{\partial V}{\partial s}ds = e\cdot V_P$$

(3) Arbeitsleistung bei e. Feld, dessen Zustand $V_1, V_2, \dots, V_n$

mit $e_1, e_2, \dots, e_n$ sei.

Man denke sich zunächst e. Zustand, bei dem d. Potentiale $\alpha V_1, \dots, \alpha V_n$ u. d. Ladungen herrschen $\alpha e_1, \dots, \alpha e_n$, wobei $0 \le \alpha \le 1$, α = variabel gedacht.

(ε sei ε u. kleine Zahl.

Bringt man Ladung εe_k auf d. Leiter k, so muss man die Arbeit $\varepsilon e_k \cdot \alpha V_k$ leisten (nach (2)) bei d. Konst. α.

Dann wird die Gesamtarbeit, abgesehen v. Gliedern höherer Ordnung gleich

$$\sum_k (\varepsilon e_k \cdot \alpha V_k) = \alpha\, d\alpha \sum e_k V_k \quad \text{für } \varepsilon = d\alpha.$$

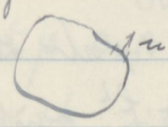
u. demnach wird

$$A = \int_0^1 \alpha\, d\alpha \sum_{k=1}^{n} e_k V_k = \frac{1}{2}\sum_1^n e_k V_k$$

da Ladung beim Hinaufbringen linear anwächst.

Die Energie d. Feldes ist also $W = \frac{1}{2}\sum e_k V_k$

(4) Umformung von W im Spezialfall, k. d. Leiter



Ladungsdichte ist $\sigma = \frac{1}{4\pi} F_n = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$

u. demnach $e_k = -\frac{1}{4\pi}\int_{(k)} \frac{\partial V}{\partial n}\, df$

daher $W = -\frac{1}{8\pi}\sum V_k \int_{(k)} \frac{\partial V}{\partial n}\, df = -\frac{1}{8\pi}\sum \int_{(k)} V \frac{\partial V}{\partial n}\, df$

$$= -\frac{1}{8\pi}\int_{O} V \frac{\partial V}{\partial n}\, df$$

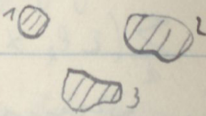
wobei über Gesamtoberfläche des Feldes, d.h. die Σ Leiteroberflächen integriert werde.

(4') Umformung nach Green

Es gilt für e. Fktion. V, die in irgend. Raum def.

$$\int V \Delta V \, d\tau = \int V \frac{\partial V}{\partial n} \, df - \int (\operatorname{grad} V)^2 \, d\tau$$

wobei über den nicht schraffierten Teil des Raumes integriert werde



Soll. n geht hier also als äußere Normale ins Innere der Leiter.

Es gilt dann also wegen [illegible] der n-Richtungen.

$$\int V \Delta V \, d\tau = -\int V \frac{\partial V}{\partial n} \, df - \int (\operatorname{grad} V)^2 \, d\tau = 0$$

also $$W = \frac{1}{8\pi} \int (\operatorname{grad} V)^2 \, d\tau$$

Es sieht so aus, als ob in $d\tau$ die Energiemenge $\frac{1}{8\pi} E^2$ aufgespeichert ist. Man bezeichnet daher $\frac{1}{8\pi} E^2$ als Energiedichte.

Man kann sich also anstatt Ladung auf Leitern $1, \ldots k$, die Ladungen im Feld lokalisiert denken.

Die kritische Umformung ist keine zunächst formale u. bedingt durch formale Mathem. umformung. Geht auf Faraday-Max-well zurück. Hier Anschauungs-streit sinnlos; erst später zeigt sich Tragfähigkeit der neuen Anschauung bei Übertragung der Theorie an bewegte Leiter.

(5) Aus $W = \frac{1}{8\pi}\int (\text{grad } V)^2 \, d\tau$ folgt, daß

$$W \geq 0$$

u. dann! $W = 0$ ist, wenn alle Leiter ungeladen sind.

(Arbeit, alle Leiter von Ldg 1 auf Ldg. 2 zu bringen ist größer als 1 an 2 zu nähern.

(5') Man löst das Problem zunächst für $e_h = 0$, $h \neq k$ u. $e_k = 1$

d.h. man bringt e_k auf 1 $(k=1)$ u. löst hierfür Potentialaufgabe

Die Leiter 1 2 . k . . n mögen für $e_k = 1$ p_{1k}, p_{2k} p_{kk} p_{nk} als Potentiale haben. Die Größen p_{hk} heißen

Potentialkoeffizienten.

Ist nun $e_k > 1$, so entstehen auf den Leitern $1, 2 \ldots k, \ldots$ die Potentiale $p_{1k}e_k, p_{2k}e_k, \ldots p_{kk}e_k \ldots p_{nk}e_k$

Hat man wiederum auf den Leitern die Ldgsverteilung $e_1, e_2, \ldots e_k, \ldots e_n$ so wird d. Potential V_l auf l.ten Leiter

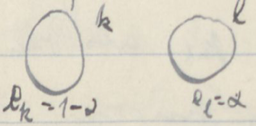
$$V_l = \sum_k p_{lk} e_k$$

Entsprechend gilt $W = \frac{1}{2} \sum_l \sum_k p_{lk} e_l e_k$, worin d. Koeffizienten Funktionen d. Konfiguration d. Leiter sind.

(5'') W ist hier als quadrat. Form dargestellt, die nach (5) positiv definit ist.

Es soll noch gezeigt werden, daß hier auch $p_{lk} = p_{kl}$ gilt.

Man greift den k. u. l. Leiter heraus. Auf allen übrigen Leitern sei $e_\nu = 0$ u.



$e_k = 1-\alpha$, $e_l = \alpha$

Dann ist

$$V_k = (1-\alpha)\, p_{kk} + \alpha\, p_{kl}$$
$$V_l = \alpha\, p_{ll} + (1-\alpha)\, p_{lk}$$

Man bringe jetzt kl. Elektrizitätsmenge $d\alpha$ vom k. zu l. Leiter hinüber: $(k) \xrightarrow{d\alpha} (l)$

Dann muß man folgende Arbeit leisten

$$(V_l - V_k)\, d\alpha$$
$$= (\alpha p_{ll} + (1-\alpha) p_{lk} - (1-\alpha) p_{kk} - \alpha p_{kl})\, d\alpha.$$

Man habe zunächst $\alpha = 0$, d.h.

$$e_k = 1, \quad e_l = 0$$

Bringt man nun α vom k. zum l.ten Leiter so wird $\quad W = \frac{1}{2} p_{kk}$

Setzt man jetzt den Transport kleiner Elektrizitätsportionen $d\alpha$ fort, so gilt

$$W = \int_0^1 (\alpha p_{ll} + (1-\alpha) p_{lk} - (1-\alpha) p_{kk} - \alpha p_{kl})\, d\alpha = \tfrac{1}{2} p_{ll} + \tfrac{1}{2} p_{lk} - \tfrac{1}{2} p_{kk} - \tfrac{1}{2} p_{kl}$$

Da $\int_0^1 \alpha\, d\alpha = \frac{1}{2}$ u. $\int_0^1 (1-\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}$ u.s.f.

also $\quad \frac{1}{2} p_{ll} + \frac{1}{2} p_{lk} - \frac{1}{2} p_{kk} - \frac{1}{2} p_{kl} = \frac{1}{2} p_{kk}$

(6) Man $W_e = \frac{1}{2} \sum_{l,k} p_{lk}\, e_l e_k \quad , \quad V_l = \sum p_{lk}\, e_k$

Dann für $\quad e_l = \sum_k c_{lk} V_k$

Man bilde $\frac{1}{2}\sum_l e_l V_l = \frac{1}{2}\sum_{l,k} c_{lk} V_l V_k = W_V$

Es sind $W_V = W_e$ als Zahlenwerte gleich, als quadrat. Formen aber verschieden.

W_V u. W_e heißen adjungierte qu. Formen.

Es ist $c_{lk} = c_{kl}$. c_{kk} heißt Kapaz. d. k. Leiters.

(6') Wie bekommt man zu e. quadrat. Form die adjungierte?

Es ist $V_l = \sum_k p_{lk} e_k = \frac{\partial W_e}{\partial e_l}$, n Linearformen.

Man bilde also die n Stück partiellen Ableitungen, setze diese n Linearformen gleich neuen Variablen u. setze diese i. die ~~ursprg~~ ursprüngl. quadr. Form ein.

Es ist $e_l = \sum c_{lk} V_k = \frac{\partial W_V}{\partial V_l}$

Vgl. i. Mechanik: kinet. Energie $T(q_k, \dot{q}_k)$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = p_k$ als Impulse eingeführt.

Reziprozitätseigenschaft der adjung. Formen.

(6'') Potentialkoeffizien u. Kapazitäten (c_{lk}) hängen nur v. Konfiguration des Leitersystems ab. — c_{lk} heißt Influenzierungskoeffizient — Anschauliche Bedeutung v. $c_{kl} = c_{lk}$

(7) Man kann annehmen, daß die p_{lk} u. c_{lk} von unendl. vielen Parametern abhängen: $c_{kl}(s)$, $p_{kl}(s)$

Dann gilt

$$\frac{\partial W_e}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{l,k} \frac{\partial p_{lk}}{\partial s} e_l e_k = -\frac{\partial W_v}{\partial s} = -\frac{1}{2} \sum \frac{\partial c_{lk}}{\partial s} v_l v_k$$

Bew. Es ist $W_v + W_e = \sum_k e_k v_k$

Man denkt sich e_k u. v_k u. ihre Parameter variiert. Vollständige Variation ~~der beiden~~ beider Seiten:

$$\sum_k \frac{\partial W_v}{\partial v_k} dv_k + \frac{\partial W_v}{\partial s} ds + \sum_k \frac{\partial W_e}{\partial e_k} de_k + \frac{\partial W_e}{\partial s} ds$$
$$= \sum_k e_k \, dv_k + \sum_k v_k \, de_k$$

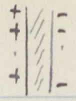
also

$$\frac{\partial W_v}{\partial s} ds = -\frac{\partial W_e}{\partial s} ds$$

(8) $P_s ds = -dW$ bzw. $P_s ds = -\frac{\partial W}{\partial s} ds$

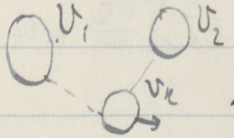
also $P_s = -\frac{\partial W_s}{\partial s}$

u. nicht $P_s = -\frac{\partial W_v}{\partial z}$, da dieser Ausdruck nicht unzweideutig definiert



Nähert man Platten, so leistet Feld Arbeit, nimmt aber das gleiche an Energie auf (Maxwellsche Sätze)

(9) Es war $W = \frac{1}{8\pi}\int f^2 d\tau = \frac{1}{8\pi}\int (\mathrm{grad}\,V)^2 d\tau$



Raum außerhalb der Leiter wird mit τ bezeichnet.

Es soll δW gebildet werden, d.h. man hält Aufladung auf d. Leitern fest (als Konstante) ändert (variiert) aber etwas die Verteilung d. Funktion V in τ

Es wird $\delta W = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{grad}\,V \cdot \delta\,\mathrm{grad}\,V\, d\tau$

Es ist $\delta\,\mathrm{grad}\,V = \mathrm{grad}\,\delta V$

Daher $\delta W = -\frac{1}{4\pi}\int \Delta V\, \delta V\, d\tau - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V}{\partial n}\delta V\, df$ nach Green. Da nun $\delta V = 0$ auf Oberfläche nach Vor. u. da ferner $\Delta V = 0$

ist $\delta W = 0$, also Energie e. Extremum.

(10) In (7) waren de_k, dV_k, ds willkürlich in $W_0 + W_e = \sum e_k V_k$

Es soll jetzt aber e. Funktion $\psi(x,y,z)$ be-

bestimmt werden, deren Ränder gegeben sind u. die möglichst wenig variabel ist.

Stärke der Variabilität kann durchaus sinnvoll durch $\operatorname{grad}^2\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2$ gemessen werden. Vielleicht auch andere Möglichkeiten, Variabilität zu messen das soll hier aber nicht untersucht werden.

Es soll also $F = \frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right\}d\tau$ ein Extremum werden.

Es gilt $\delta F = \int\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\delta\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\delta\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\delta\psi}{\partial z}\right)d\tau$

da aber $\int\psi'\frac{\partial\varphi'}{\partial x}d\tau = -\int\varphi'\frac{\partial\psi'}{\partial x}d\tau + \int\psi'\varphi'\cos nx\, df$

gilt, so ist für $\psi' \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x}$ u. $\varphi' = \delta\psi$, sicher

$$\delta F = \int\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\delta\psi + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\delta\psi + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\delta\psi\right)d\tau + \int\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta\psi\cos nx + \dots\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\psi}{\partial y}\delta\psi\cos ny + \frac{\partial\psi}{\partial z}\delta\psi\cos nz\right)df$$
$$= -\int\Delta\psi\,\delta\psi\,d\tau + \int\frac{\partial\psi}{\partial n}\delta\psi\,df = 0$$

wobei $\int\frac{\partial\psi}{\partial n}\delta\psi\,df = 0$, da auf Rd: $\delta\psi = 0$.

Es muß also $-\int\Delta\psi\,\delta\psi\,d\tau = 0$ sein

(10') Vgl. Analogon i. Mechanik.

Notwendige Bedingung ist $\Delta\psi = 0$

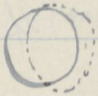
Sollte Bereich ins ∞ reichen, so sind die Randwerte durch Bedingungen im Unendl. zu ersetzen. Das ist 2. Randbdg. für $\Delta\psi$.

Man ggl. geom. Bedeutung d. Glchg. $\Delta\psi = 0$.

(II) Man löste ~~fu~~ anfangs erst d. Potentialproblem für jeden einzelnen Leiter u. berechnete daraus d. allg. Fall.

Kann man ähnlich nicht auch Werte aus Potential u. Feldstärke berechnen? Nein, da Feldstärke unbekannt.

Daher sollen jetzt auch Randwerte u. Rd. variiert werden, d.h. Konfiguration des Leitersystems soll abgeändert werden.



Also auf d. Leiter soll etwas verschoben werden.

δn gibt an, um wieviel jedes Flächenelement in Richtung d. äußeren Normale verschoben wird.

Weiter führt man δV ein.

Unter Vernachlässigung v. Gliedern höherer Ordnung gilt

$$\delta W = \frac{1}{4\pi}\int (\operatorname{grad} v \operatorname{grad} \delta v)\, d\tau - \frac{1}{8\pi}\int \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2 \delta n\, df$$

τ hier nur d. ursprüngliche Volumen.

$$= -\frac{1}{4\pi}\int \Delta v\, \delta v\, d\tau - \frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right) \delta n\, df - \frac{1}{8\pi}\int \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2 \delta n\, df$$

vgl. Mechanik: Variation d. Hamiltonschen Integrals: erst Variation bei festen Grenzen, dann Variation bei variablen Grenzen. $\delta q_B = \delta q_B' + \dot q\, \delta t$.

Hier ist $\int \Delta v\, \delta v\, d\tau = 0$ und

$$\delta v = \delta v_1 - \delta n \frac{\partial v}{\partial n}$$

Dann ist $\delta W = -\frac{1}{4\pi}\sum \int \frac{\partial v}{\partial n}\, \delta v_k\, df + \frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2 \delta n\, df - \frac{1}{8\pi}\int \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2 \delta n\, df$

$$= -\frac{1}{4\pi}\sum \int \frac{\partial v}{\partial n}\, \delta v_k\, df + \frac{1}{8\pi}\int \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2 \delta n\, df$$

Nun ist $-\frac{1}{4\pi}\int_{(k)} \frac{\partial v}{\partial n}\, df = \frac{1}{4\pi}\int_{(k)} f_n\, df = e_k$

also $\delta W = +\sum_k e_k\, \delta v_k + \frac{1}{8\pi}\int f_n^2\, \delta n\, df$

f_n auf Leiter senkr., daher n weglassbar.

(11') (a) Ist $\delta v_k = 0$, d. h. Potential konstant, so $\delta W = \frac{1}{8\pi}\int f^2 \delta n\, df$. Das gilt also, wenn man Leiter mit best. Potential so auflädt, daß Potential sich nicht ändert i. daß überall Vol.-Zuwachs positiv ist.

(a) Ist $\delta e_k = 0$, d.h. Ldg. konstant, so

$$\delta W = \underbrace{\sum e_k \delta V_k}\ + \frac{1}{8\pi}\int f^2 \delta_n\, df$$

$$= \delta \sum e_k V_k - \underbrace{\sum V_k \delta e_k}_{=0} + \frac{1}{8\pi}\int f^2 \delta_n\, df$$

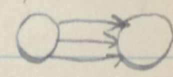
$$\delta W = 2\,\delta W + \frac{1}{8\pi}\int f^2 \delta_n\, df, \quad \delta W = -\frac{1}{8\pi}\int f^2 \delta_n\, df$$

also wie naive Vorstellung v. Leiter i. Feld verschluckter Energie.

(1'') Ist nun $\sigma = \frac{1}{4\pi}|f|$ $\qquad f^2 = |f|\,|f|$

Daher $\delta W = -\int \delta_n \frac{|f|}{2}\sigma\, df$

$\frac{|f|}{2}\sigma\, df$ ist d. Arbeit, die auf Flächenelement wirkt. (wichtig z.B. falls Hg-Leiter im Feld)

Kraft, die Feld auf Oberfläche d. Leiter ausübt so gedacht, als ob Gummischnüre mit Spannung $\frac{1}{8\pi} f^2$ pro df an df zerren, von Faraday entwickelte Anschauung  nicht hemmend, daß Feldstärke verschieden. Aber Gummischnüre würden zusammenfallen, daher elast. Kre-

Dieser angenommen 

Überdruck v. unten gegen Druck von oben

XII. Spannungstensor.

(1) Spannungszustand in e. deform. Körper, z.B. Kautschuksäule verbogen u. verdrillt  Jedes Stück des oberen Körpers übt

Schnitt

auf df e. gew. Kraft aus.

Diese Kraft sicher proportional z. df, denn nimmt man e. benachbartes df, so ändert sich

Kraft im allgem. nicht [illegible] auf df (reibungslose Flüssigkeiten) man zerlege sie in bzg. auf ein Koordinatensystem in Richtung der einzelnen Achsen.

Spannungskomponenten in Richtung der Normalen n : $X_n\,df$, $Y_n\,df$, $Z_n\,df$.

Das sind Komponenten d. Kraft K_n, die auf df $\perp$ u. nicht.

(2) Es genügen 9 Größen, um Spannung an e. beliebigen Stelle zu berechnen.

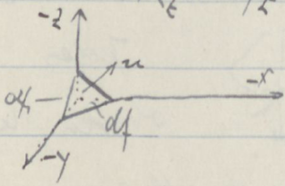
Man gibt die Kraftkomponenten für e. df in Richtung

der x-Achse $X_x \quad Y_x \quad Z_x$

" y " $X_y \quad Y_y \quad Z_y$

" z " $X_z \quad Y_z \quad Z_z$ an

Man lege



wobei $df_1 \perp x$, $df_2 \perp y$, $df_3 \perp z$, $df \perp n$.

Gesamtkraft auf Tetraeder wird für die X-Komponente

$$X_x\, df_1 + X_y\, df_2 + X_z\, df_3 + X_n\, df$$

Diese Summe muß verschwinden, falls Gleichgewicht herrschen soll.

Da nun $df_1 = df \cos(-x, n) = -df \cos(n x)$ gilt, so wird

$$0 = -X_x\, df \cos(n, x) - X_y\, df \cos(n y) - X_z\, df \cos n z + X_n\, df$$

Also $X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz)$

$Y_n = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz)$

$Z_n = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz)$

Man nennt (X_n, Y_n, Z_n) e. Tensor

Jede Komponente ist hier e. Vektor.

Bei e. Vektor gilt $a_n = a_x \cos(nx) + \dots + a_z \cos(nz)$

Hier entsprechend 3 solcher Gleichungen.

(3) Es ist $X_{-x} = -X_x$

$Y_{-x} = -Y_x$

(4) Voraussetzung d. elast. Gleichgewichts ist überflüssig, um zu obigen Gleichungen zu kommen.

Wenn setzen i. e. elast. Medium an

$m \cdot b = X_x df_1 + \quad \dots \quad + X_n df$

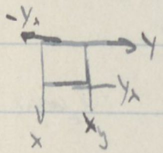
Hierin ist m unendl. klein zu denken, etwa v. Dimension δ^3. Geht man zur Grenze über, so müssten $b = \frac{f}{\delta^3}$ u. unendl. groß werden. Das aber physikal. unmöglich.

(5) Diagonalglieder des Tensors heißen Druck- bzw. Zugspannung, f. $X_x < 0$, bzw. $X_x > 0$

auch Normalspannungen f. Diagonalfl.
Die übrigen heißen Schub- od. Scherungsspannungen.

(6) Es ist stets $X_y = Y_x$

Bew. Man denke sich u. Parallelepiped herausgeschnitten



Man berechne d. gesammte Drehmoment nach Verteilung der an diesem Parallelepipedon in Betracht kommenden Schubspannungen

Y_x ist Kraft auf Fläche, deren Normale i. x Richtg.

Man erhält d. Kräftepaare $\left.\begin{array}{l} Y_x\,dy\,dz \\ -Y_x\,dy\,dz \end{array}\right\}$

mit d. Drehmoment $Y_x\,dy\,dz\,dx$

analog $\left.\begin{array}{l} X_y\,dz\,dx \\ -X_y\,dz\,dx \end{array}\right\}$ $X_y\,dy\,dz\,dx$

Befindet sich Element i. Ruhe, so gilt

$Y_x\,dy\,dz\,dx = X_y\,dy\,dz\,dx$

d. h. $Y_x = X_y$

Dies gilt selbst wenn Körper in Bewegung ist, gilt diese Relation, da

Drehmoment = Winkelbeschl. × Trägheitsmoment.

wobei Trägheitsmoment v. Dimension l^5

ist, was beim Grenzübergang zu unendl.

grosser Winkelbeschleunigung führen würde.

(6') Der oben besprochene Tensor heißt

deutlicher Tensor 2. Ranges od. Dyade.

Tensor 1. Ranges ~~(Stufe)~~ ≡ Vektor.

Wir haben 2 Definition der Dyade:

(a) V. Dyade sprechen wir stets dann, wenn

e. „Vektor" vorliegt, dessen Komponenten

von den Komponenten e. anderen, eigentlichen Vektors linear u. homogen abhängen.

(b) Dyade = 9gliedrige Matrixe, die sich

bei Koordinatentransform. (i. zur Drehung)

genau so umrechnet, wie Koordinaten

d. Systems

Äquivalenz von (a) u. (b) wird hier nicht gezeigt.

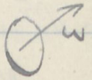
(6'') Bsp. e. symmetr. Tensors ist die

Matrix $\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$, jedoch nicht d. allgemeinste

Beispiel.

Weiteres Bsp. i. analyt. Mechanik.

Trägheitstensor


Es sei starrer Körper gegeben, der um e. festen Pkt. drehbar sei. Seine Winkelgeschwindigkeit $\omega \begin{cases} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{cases}$ läßt sich als Vektor darstellen.
kompon. d.

Dann sind Vektors d. Impulsmomentes J_x, J_y, J_z lin. Fktion. d. Winkelgeschwindigkeit u. zwar

$$J_x = \Theta_{11}\,\omega_x + \Theta_{12}\,\omega_y + \Theta_{13}\,\omega_z$$

Die Θ_{ik} bilden Trägheitstensor

Θ_{kk}: Trägheitsmomente, errechnet aus $\Theta_{11} = \int (y^2+z^2)\rho\, dv$

weiter gilt $\Theta_{12} = -\int xy\rho\, dv$. Trägheitstensor bildet kein Tensorfeld, im Gegensatz zum Spannungstensor.

Zu jedem Pkt läßt sich eine Achsenkreuz-orientierung angeben, sodaß nur die Glieder d. Hauptdiagonale von Null verschieden sind.

Man spricht dann v. Hauptträgheitsachsen u. -momenten.

Ein solches Koordinatenkreuz ist nicht allgemein für d. gegen. Raum angebbar.

(7) 

Kraft auf df X_n

Nach Mechanik ist dann die resultierende Kraft $\int df(X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz)$

$$= \int \rho b_x \, d\tau$$

wobei linke Seite i. Vol integral verwandelbar: $\int d\tau\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \rho b_x\right) = 0$ gilt dann für jedes bel. Flächenelement

daher muß Integrand a. jeder Stelle verschwinden also erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= \rho b_x \\ \text{—} \quad \text{—} \quad \cdot \quad &= \rho b_y \\ \text{—} \quad \cdot \quad \cdot \quad &= \rho b_z \end{aligned}\right\} (*)$$

Das sind eigentlich die Grundgleichungen der Bewegungsgleich. d. Elastizitätstheorie Es treten lediglich noch entsprechende Deformationsbedingungen hinzu

Lineare partielle Gleichungssystem

wird v. invarianten Diff.quotienten gebildet.
Man nennt die linke Seite des Systems
Divergenz des Tensors
Die Divergenz $\mathrm{Div}(T)$ bildet also e. Vektor
Gleichgewichtsbedingung wird $\mathrm{Div}(T) = 0$.

(7') Drehmoment $\mathfrak{D}$ nach Mechanik:

$$\mathfrak{D} = \sum_{Oberfl.} [r\,\mathfrak{K}]$$

u. weiter gilt

$$\mathfrak{D} = \frac{d}{dt}\sum m[r\dot{r}] \quad , \text{wobei } m[r\dot{r}] = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

also $\mathfrak{D} = \sum m[r\ddot{r}]$

$$\mathfrak{D}_z = \int df\,(xY_n - yX_n) = \int df\,\big(x\{Y_x\cos nx + Y_y\cos ny + Y_z\cos nz\} - y\{X_x\cos nx + X_y\cos ny + X_z\cos nz\}\big)$$

u. in e. Vol.integral verwandelt:

$$= \int d\tau\left(\frac{\partial(xY_x)}{\partial x} + \frac{\partial(xY_y)}{\partial y} + \frac{\partial(xY_z)}{\partial z} - \frac{\partial(yX_x)}{\partial x} - \frac{\partial(yX_y)}{\partial y} - \frac{\partial(yX_z)}{\partial z}\right)$$

$$= \int \rho\, d\tau\,(x b_y - y b_x)$$

Nach Glchg (*) in (7) gilt dann

$$\int d\tau\,(Y_x - X_y) = 0 \qquad \text{für jede Oberfläche}$$

also $Y_x - X_y = 0$, d.h. $Y_x = X_y$

dgl. für zu umgekehrten Komp. v. (6)

(5) Jeder Spannungstensor a. einer bestimmten Stelle läßt sich durch geeignete Orientierung d. Koordinatensystems so darstellen, daß nur die Normalspannungen (i. d. Hptdiagonale) von Null verschieden sind, die Schubspannungen dagegen verschwinden.

Wir setzen: $\cos nx = \alpha$, $\cos ny = \beta$, $\cos nz = \gamma$

u. die Komponenten: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Dann ist also
$$X_n = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma$$
$$Y_n = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma$$
$$Z_n = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma$$

worin nach (7') $a_{ux} = a_{xu}$?

Es soll also d. Richtung ausfindig gemacht werden, in der
$$X_n = t\alpha,\quad Y_n = t\beta,\quad Z_n = t\gamma \text{ wird.}$$

Für dieses t muß dann
$$\begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{21} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22}-t & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-t \end{vmatrix} = 0$$

werden.

Ergibt nach Fundamentalsatz d. Algebra
3 Lösungen s_1, s_2, s_3

Im allgemein. also 3 Systeme
Ein zu s_r gehörendes Richtungssystem
bezeichnen wir mit $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$

(a) Die s_r sind reell.

Ein System $s_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ergibt
folgendes:

$$\begin{array}{c|l} \alpha_1^* & a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 + a_{13}\gamma_1 = s_1\alpha_1 \\ \beta_1^* & \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \gamma_1^* & a_{31}\alpha_1 + a_{32}\beta_1 + a_{33}\gamma_1 = s_1\gamma_1 \end{array}$$

$\alpha_1^*, \beta_1^*, \gamma_1^*$ die zu $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ konj. kompl. Größen
Multipliziert u. addiert man, so
erhält man rechts $s_1(\alpha_1\alpha_1^* + \beta_1\beta_1^* + \gamma_1\gamma_1^*)$

Nun gehe man zu den konj. kompl. Größen
v. $\alpha_1^*, \beta_1^*, \gamma_1^*, s_1^*$ über, für diese müssen obige Gleichungen ebenfalls gelten. Multipliziert
man hier mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ u. addiert, so
stimmen die linken Seiten i. beiden
Fällen überein, d. h. für die rechten Seiten
gilt: $s_1(\alpha_1\alpha_1^* + \beta_1\beta_1^* + \gamma_1\gamma_1^*) = s_1^*(\alpha_1\alpha_1^* + \beta_1\beta_1^* + \gamma_1\gamma_1^*)$

d.h. aber $s_1 = s_1^*$

weil $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \neq 0, 0, 0$ der trivialen Lsg

da dann Formeln unbrauchbar ~~als~~ Richtungs-cosin.

(b) $s_1 \perp s_2$

Man multipliziere jetzt mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ u. addiere bzw. setze die Gleichungen für $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ an, multipliziere mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

dann wird $s_1(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = s_2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2)$

für $s_1 \neq s_2$ folgt hieraus $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$

d.h. $\left.\begin{matrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{matrix}\right\} \perp \left\{\begin{matrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{matrix}\right.$

Es sind weiterhin n. Theorie d. lin. Glchgen (Lsgen erfüllen e Ebene) auch $\left.\begin{matrix}\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2\\ \lambda\beta_1 + \mu\beta_2\\ \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2\end{matrix}\right\}$ Lsg.

Für $s_1 = s_2 = s_3$ ist jede Richtung bereits Hptrichtung

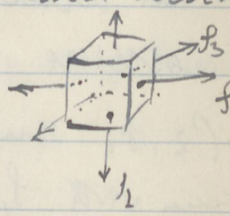
Wählt man s_1, s_2, s_3 als Koordin.-achsen, so nimmt der Tensor folgende

Gestalt an: $x_1 = s_1\alpha_1,\ y_1 = s_1\beta_1,\ z_1 = s_1\gamma_1$

(8') Wählt man x, y, z in Richtung der s_ν, so hat die Säkulargleichg. folgende Gestalt

$$(s_1-s)(s_2-s)(s_3-s) = \begin{vmatrix} s_1-s & 0 & 0 \\ 0 & s_2-s & 0 \\ 0 & 0 & s_3-s \end{vmatrix} = 0$$

Dann Spannungszustand denkbar einfach zu beschreiben



Tensorinvarianten:

$$(s_1-s)(s_2-s)(s_3-s) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} \\ \cdot & & \\ & \cdot & a_{33}-s \end{vmatrix}$$ gilt stets

da e. Gleichg., die die 3 Wurzeln s_1, s_2, s_3 hat, sich eben als Säkulargleichg. schreiben läßt. Koeffizientenvgl. ergibt

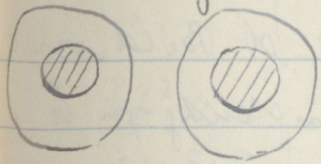
$s_1 s_2 s_3 = \| a_{ik} \|$

$s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1$ = lin. Verbind. v. Unterdet. 2. Grades

$s_1 + s_2 + s_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$: Spur od. Lineare Skal.

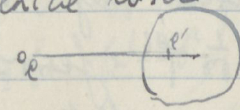
Diese 3 Gleichgen. gelten für ein beliebig orientierten Koordinatensystem, in dem Tensor gebildet wird.

XIII (1) Es sei d. elektrost. Problem für Leiter mit vorgeschrieb. Potential gelöst



Ersetzt man e. Äquipotentialfläche d. e. Leiter, so wird auf df d. Leiters e. Zug v. Größe $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2$ ausgeübt, im übrigen bleibt d. Feld unverändert. Man kann a. diese Art d. elektro-stat. Problem für Leiter mit komplizierter Oberfläche lösen

Wir lösten z. B.



die Beeinflussung e. Kugel durch Ldg. e dahin, daß wir zur Annahme e. fiktiven Ladung e' kamen. Umgekehrt kann man die Äquipotentialflächen zu Ladungen e u. e' aufstellen u. unter diesen e. Kugelfläche durch Leiter ersetzt denken

(2) Wird Äquipotentialfläche d. e. Leiter ersetzt, so wirkt auf df $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2$, wir nehmen nun an, daß dieser Zug auch dann im Felde herrscht, falls Leiter nicht

vorhanden. Wir kennen also die Hpt.
spannungen i. Felde.
Das genügt noch nicht, d. Bild von
fiktiven Spannungen eindeutig zu be-
schreiben. Daher noch vernünftige Zusatz-
annahmen nötig (die vorläufig gewisser-
maßen nur ästhetischer Natur sind)
Also wird m. Spannungszustand so
definieren, daß a. e. best. Stelle e. Zug v.
Größe $\frac{1}{8\pi} f^2$ herrscht, auch wenn Leiter
nicht a. d. Stelle. (Bereits oben angenommen)
Weiter nehmen wir an; daß die Kom-
ponenten d. Sp. quadrat. v. d. Feldstärke
abhängen, d.h. v. f_x, f_y, f_z.
Außerdem soll resultierende Kraft
a. Stück d. leeren Raumes Null sein.
(Das hat prakt. Bedeutung)
(3) Aus dem Vektor f können
wir nun genau 2 Formen bilden.
Das wird nicht bewiesen, es sei plausibel.

man bilde $\begin{pmatrix} \mathfrak{f}_x^2 & \mathfrak{f}_x\mathfrak{f}_y & \mathfrak{f}_x\mathfrak{f}_z \\ \mathfrak{f}_x\mathfrak{f}_y & \mathfrak{f}_y^2 & \mathfrak{f}_y\mathfrak{f}_z \\ \mathfrak{f}_x\mathfrak{f}_z & \mathfrak{f}_y\mathfrak{f}_z & \mathfrak{f}_z^2 \end{pmatrix}$

u. $\begin{pmatrix} \mathfrak{f}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{f}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{f}^2 \end{pmatrix}$. Aus diesen beiden

Tensoren bilde man e. lin. Kombin.

$$\mu \begin{pmatrix} \mathfrak{f}_x^2 - \lambda\mathfrak{f}^2 & \mathfrak{f}_x\mathfrak{f}_y & \mathfrak{f}_x\mathfrak{f}_z \\ \mathfrak{f}_x\mathfrak{f}_y & \mathfrak{f}_y^2 - \lambda\mathfrak{f}^2 & \mathfrak{f}_y\mathfrak{f}_z \\ \mathfrak{f}_x\mathfrak{f}_z & \mathfrak{f}_y\mathfrak{f}_z & \mathfrak{f}_z^2 - \lambda\mathfrak{f}^2 \end{pmatrix}$$

Das ist für bel. λ u. μ der allgem. Tensor, der sich aus d. Komponenten der Feldstärke i. quadr. Abhängigkeit bilden läßt.

(4) Jetzt wähle man μ u. λ so, daß

$$0 = \int d\tau \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right), \quad \text{daher}$$

$$0 = \int d\tau \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right)$$

$$0 = \int d\tau \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) \text{ wird.}$$

Und zwar soll das über jeden Raum gelten, es muß also Integrand verschwinden.

Dann gilt also:

$$2f_x\frac{\partial f_x}{\partial x} - 2\lambda\left(f_x\frac{\partial f_x}{\partial x} + f_y\frac{\partial f_y}{\partial x} + f_z\frac{\partial f_z}{\partial x}\right) + f_x\frac{\partial f_y}{\partial y} + f_y\frac{\partial f_x}{\partial y} + f_x\frac{\partial f_z}{\partial z} + f_z\frac{\partial f_x}{\partial z} = 0$$

Das muss auch für $f_x \neq 0$, $f_y = f_z = 0$ gelten. Also

$$2 f_x\frac{\partial f_x}{\partial x} - 2\lambda\left(f_x\frac{\partial f_x}{\partial x}\right) + f_x\frac{\partial f_y}{\partial y} + f_x\frac{\partial f_z}{\partial z} = 0$$

Obige Annahme, dass $f_y = f_z = 0$, darf erst nach Differentiation gemacht werden, da nicht notwendig $\frac{\partial f_y}{\partial y} = 0$ für $f_y = 0$.

Fügt man zu obiger Relation noch

$$f_x\frac{\partial f_x}{\partial x} - f_x\frac{\partial f_x}{\partial x} = 0$$

hinzu, so wird wegen $\operatorname{div} f = 0$

$$(2 - 2\lambda - 1)\, f_x\frac{\partial f_x}{\partial x} = 0, \quad \text{d.h. } \lambda = \tfrac{1}{2}$$

Also nimmt d. Tensor für $f_y = f_z = 0$ die Gestalt

$$\mu\begin{pmatrix} \frac{1}{2}f_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}f_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}f_x^2 \end{pmatrix}$$

an.

Da nun Spannung in x Richtg. darin $\frac{1}{2}f_x^2$, gleich $\frac{1}{8\pi}f_x^2$ werden soll, so muss

$$\mu = \frac{1}{4\pi}$$

sein.