

(1)

Haarlem, den 27 Mai 1926.

11

Sehr geehrter Herr Kollege,

Endlich komme ich dazu, Ihre Schreiben zu beantworten und Ihnen für die freundliche Zusendung der Probilagen Ihrer drei Mitteilungen, die ich alle richtig erhalten habe, bestens zu danken. Die Lektüre derselben ist mir ein wahrer Genuss gewesen. Allerdings ist für ein endgültiges Urteil die Zeit noch nicht gekommen und besteht, wie man sieht, noch manche Schwierigkeit, auf die ich sogleich zu sprechen komme. Aber sogar wenn es sich zeigen sollte, dass man auf diesem Wege nicht zu einer befriedigenden Lösung gelangen kann, so wird man doch den Scharpsinn bewundern, der aus Ihren Überlegungen spricht, und hoffen dürfen, dass Ihre Bemühungen wesentlich dazu beitragen werden, tiefer in diese geheimnisvollen Dinge einzudringen.

Ganz besonders hat mir der Art und Weise gefallen, wie Sie die geeigneten Matrizen wirklich konstruieren und zeigen, dass dieselben den Bewegungsgleichungen genügen. Damit fällt ein Bedenken, das die Arbeiten von Hessenberg, Born und Jordan, sowie von Pauli bei mir erregt hatten; nämlich, dass ich nicht klar sehen konnte, dass z. B. in dem Fall des H. Atoms eine Lösung der Bewegungsgleichungen wirklich angegeben werden kann. Mit Ihrer feinen Bemerkung, dass die Operatoren q und $\frac{\partial}{\partial q}$ in ähnlicher Weise miteinander vertauschbar, oder nicht vertauschbar, sind wie in der Matrizenrechnung die q und die p , ist mir hier ein Licht aufgegangen. Immerhin bleibt es ein Wunder, dass man den Gleichungen, in welchen die q und die p ursprünglich Koordinaten und Impulse bedeuten, genügen kann wenn man unter diesen Größen

2
 Dinge versteht, die eine ganz andere Bedeutung haben und an jene Koordinaten und Momente nur noch von fern erinnern.
 Müsste ich nun zwischen Ihrer Undulationsmechanik und der Matrizenmechanik wählen, so würde ich, wegen der grösseren Anschaulichkeit, der ersteren den Vorzug geben, so lange man es nur mit drei Koordinaten x, y, z zu tun hat. Bei einem grösseren Zahl von Freiheitsgraden kann ich aber die Wellen und Schwingungen im q -Raum nicht physikalisch deuten und dann müsste ich mich also für die Matrizenmechanik entscheiden. Ihre Betrachtungen haben aber auch für diesen Fall den Vorteil, dass sie uns den wirklichen Lösung der Gleichungen näherbringen; das Problem der Eigenwerte ist prinzipiell für einen höher dimensionierten q -Raum dasselbe wie für einen dreidimensionalen Raum.

Es giebt übrigens noch einen Punkt, in dem ^{mir} Ihre Betrachtungen der Matrizenmechanik überlegen zu sein scheinen. Die Erfahrung macht uns mit Fällen bekannt, wo ein Atom während einer gewissen Zeit in einem seiner stationären Zustände besteht, und oft haben wir es mit ganz bestimmten Übergängen aus einem solchen Zustand in einen anderen zu tun. Wir brauchen also die Möglichkeit uns die stationären Zustände, jeden einzeln, vorzustellen und dieselben theoretisch zu untersuchen. ~~Das~~ ^{Eine} ~~ganze~~ ^{man} Matrx ist aber die Zusammenfassung aller möglichen Übergänge und man kann sie gar nicht in Stücke zerlegen. Da gegen spielen in Ihrer Theorie die den verschiedenen Eigenwerten E entsprechenden Zustände jeder seine eigene Rolle.

Gestatten Sie mir jetzt einige Bemerkungen, in welchen Sie freilich wohl nicht viel Neues finden werden.

1. In Ihrer Wellengleichung¹⁾

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

ist E eine von den Koordinaten unabhängige Konstante; es giebt ebenso viele Wellenprobleme, wie es Eigenwerte E giebt, und zwar kommen hierbes im besonderen die Eigenwerte ~~von~~ E in Betracht,

¹⁾ Ich beschränke mich auf das H-Atom.

da nur mit diesen den Randbedingungen genügt werden kann. Ihre Berechnung der Eigenwerte zeigt, dass man unter E die Energie des Elektrons verstehen muss, in dem Sinne, dass man die Energie gleich Null setzt, wenn das Elektron sich ohne Geschwindigkeit in unendlicher Entfernung vom Kern befindet. Anders gesagt, $E + \frac{e^2}{2}$ ist in ~~etwa~~ irgend einem Punkte x, y, z , die kinetische Energie, welche das Elektron bei vorgeschriebenem E haben würde wenn es sich in jenem Punkte befände. Dieser kinetischen Energie entspricht die Geschwindigkeit

$$u = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{e^2}{2} \right)} \dots \dots \dots (2)$$

2. Da die Gleichung (1) keine Differentialquotienten nach dem Zeit enthält, so kann man aus ihr nur die ~~Wellenlänge~~ ^{Wellenlänge} in einem bestimmten Punkte ableiten; man hat nämlich

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{h} \sqrt{2m \left(E + \frac{e^2}{2} \right)} \dots \dots \dots (3)$$

veränderlich von Punkt zu Punkt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit w der Wellen, und die mit ihr durch die Relation

$$w = v \lambda \dots \dots \dots (4)$$

verbundene Frequenz v kann man aus (1) gar nicht ableiten. Hier bleibt eine gewisse Willkür bestehen.

Nun ist aber ein Grundgedanke Ihrer Theorie (und ein sehr schöner), dass die Geschwindigkeit des Elektrons u der „Gruppengeschwindigkeit“ gleich sein soll. Dies erfordert die Beziehung

$$\frac{1}{u} = \frac{d}{dv} \left(\frac{v}{w} \right), \dots \dots \dots (5)$$

und wenn man diese in den Vordergrund setzt, so gelingt auch die Bestimmung von v und w .

Zur Gl. (5) ist erstens zu bemerken, dass ~~man~~ wir uns ~~hier~~ v , w und u sämtlich positiv denken wollen, und zweitens, dass in einem bestimmten Punkte λ , u (und w), wie aus (2) und (3) hervorgeht, sich mit v ändern können, weil diese Grösse irgendwie mit E zusammenhängt. Bei der in (5) vorkommenden Differentiation nach v muss man dann aber die Eigenwerte E verlassen. Dagegen scheint nichts zu sein; man kann sich sehr gut Zustände vor-

1) Es ist sehr schön, dass Sie diese Berechnung haben durchführen können, und dass Sie dabei zu den von der Balmer'schen Formel verlangten Werten gekommen sind.

stellen (Einfach laufende Wellen), die ^{wohl} der Wellengleichung, aber nicht allen Randbedingungen genügen.

Aus (4) und (5) folgt

$$\frac{1}{u} = \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{\lambda} \right),$$

also

$$\sqrt{\frac{m}{2(\mathcal{E} + \frac{e^2}{2})}} = \frac{1}{h} \frac{d}{dv} \sqrt{2m(\mathcal{E} + \frac{e^2}{2})}$$

$$v = \frac{1}{h} \left(\mathcal{E} + \frac{e^2}{2} + \text{const} \right).$$

Da „const“ setzen will unabhängig von $\mathcal{E}$, so können wir für die Konstante setzen $\mathcal{E}_0 - \frac{e^2}{2}$, wo $\mathcal{E}_0$ nicht nur unabhängig von $\mathcal{E}$, sondern auch von x, y, z ist. Also

$$v = \frac{1}{h} (\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}) \dots \dots \dots (6)$$

Damit ist der Bedingung genügt, dass die Frequenz an allen Stellen des Feldes die gleiche sein soll.

Ferner wird nach (3) und (4) ¹⁾

$$W = \frac{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}}{\sqrt{2m(\mathcal{E} + \frac{e^2}{2})}} \dots \dots \dots (7)$$

3. Ihre Vermutung, dass die Umwandlung, welche unser Dynamik = wird erfahren müssen, dem Übergange von Strahlenoptik zu Wellenoptik ähnlich sein wird, klingt sehr verlockend, aber ich habe doch Bedenken dagegen.

Wenn ich Sie recht verstanden habe, so wäre ein „Teilchen“, ein Elektron z. B. einem „Wellenpaket“ vergleichbar, das ~~sich~~ sich mit der Gruppengeschwindigkeit fortbewegt.

Aber ein Wellenpaket kann nie auf der Dauer zusammenhalten und auf einen kleinen Raum beschränkt bleiben. Die geringste Dispersion des Mittels wird es in der Fortpflanzungsrichtung auseinander ziehen, und

¹⁾ Ist $\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}$ negativ, so kann man setzen $v = -\frac{1}{h} (\mathcal{E}_0 + \mathcal{E})$,

$W = -\frac{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}}{\sqrt{2m(\mathcal{E} + \frac{e^2}{2})}}$ (beide positive Größen), aber der Gleichung (5) wird dann genügt durch

~~u~~ $u = -\sqrt{\frac{2}{m} (\mathcal{E} + \frac{e^2}{2})}$ (negativ). Die Wellengeschwindigkeit W und die ^{Richtung} Gruppengeschw. u hätten in diesem Fall entgegengesetzte.

abgesehen von jeder Dispersion wird es sich in der Querrichtung immer mehr verbreitern („Diffraktion“). Wegen dieser unvermeidlichen Verwischung scheint mir ein Wellenpaket wenig geeignet, um Dinge zu repräsentieren, ^{denen} ~~die~~ wir eine einigermaßen dauerhafte individuelle Existenz zuschreiben wollen.

Wie Sie selbst bemerken, ist ^{nun} ~~es~~ im Felde des H-Atoms ~~mit~~ die in Rede stehende Verwischung weit fortgeschritten. Ein Wellenpaket kann nur dann auf längere Zeit zusammenhalten, wenn seine Dimensionen gross gegen die Wellenlänge sind. Da nun aber die ~~bei~~ durch (3) bestimmte Wellenlänge von der Grössenordnung der Bohr'schen Ellipsenbahnen ist, so kann von einem Wellenpaket, klein im Vergleich mit den Dimensionen einer solchen Ellipse und sich entlang dieser Linie bewegend, keineswegs die Rede sein.

Sie können natürlich, indem Sie den Konstanten E_0 in (6) und (7) einen hohen positiven Wert beilegen (man kann an $E_0 = mc^2$ denken) zu beliebig hohen Frequenzen ν mit entsprechend grosser Fortpflanzungsgeschwindigkeit w gelangen¹⁾, aber an der durch (3) gegebenen Wellenlänge können Sie nichts ändern.

4. Wenn wir uns dazu entschliessen, das Elektron sozusagen ganz anzulösen und durch ein Wellensystem zu ersetzen, so hat das einen Nachteil und einen Vorteil.

Der Nachteil, und zwar ein ^{schwer} ~~sehr~~ wiegender, ist dieser: Was wir von dem Elektron des Wasserstoffatoms annehmen, müssen wir wohl auch von allen Elektronen in allen Atomen voraussetzen; wir müssen sie alle durch Wellensysteme ersetzen. Wie soll ich dann aber die Erscheinungen der Photoelektricität und das Entweichen von Elektronen aus erhitzten Metallen verstehen? Hier kommen die

1) Setzt man $E_0 = mc^2$, und nach der gewöhnlichen Formel $m = \frac{2}{3} \frac{E^2}{c^2 R}$ (R Radius des Elektrons), und versteht man ferner unter E die Energie in einer Bohr'schen Kreisbahn vom Radius z , sodass $E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{z}$ ist, so wird

$$w = c \left[\sqrt{\frac{2}{3} \frac{z}{R}} - \sqrt{\frac{3}{8} \frac{R}{z}} \right].$$

Da $z \gg R$, so wird $w \gg c$. Natürlich ist nichts dagegen, da es sich hier um etwas ganz anderes als die gewöhnliche Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen handelt.

6
Teilchen ganz nett und unversehrt zum Vorschein; ~~und~~ wie haben sie sich wieder, einmal aufgelöst, zusammenballen können?

Ich will ^{hiermit} ~~gar~~ nicht sagen, dass es nicht im Innern der Atome manche Metamorphosen geben könnte. Will man sich vorstellen, dass die Elektronen nicht immerfort kleine Planeten sind, die um den Kern herumkreisen, und kann man mit einer solchen Vorstellung etwas erreichen, so habe ich nichts dagegen. Aber wenn wir den Elektronen gerade ein Wellenpaket als Vorbild stellen, so veranschaulicht uns denselben den Weg zur Wiedherstellung. Denn es ist wohl viel verlässlicher, dass ein Wellenpaket, einmal zerwischt, sich wieder zusammenballen soll.

Der Vorstoß, von dem ich sprach, besteht in Folgendem. Bestände noch immer das in einem Kreise oder einer Ellipse herumlaufende Elektron, so würde man erwarten, dass in der Wellengleichung (1) [ich fasse nämlich einen Punkt ins Auge, wo das Elektron sich gerade ~~befindet~~ nicht gerade befindet] nicht nur das von dem Kernfeld abhängige Glied $\frac{e^2}{r}$, sondern auch ein ähnliches Glied, das sich auf das elektrische Feld des Elektrons bezieht, vorkommen wird. Beide Felder Das eine Feld ist so gut wie das andere und sie sind von gleicher Grösseordnung. Änderte man aber Gl. (1) in dieser Weise, so würde die Berechnung der Eigenwerte von E hinfällig und ergäben sich unsagliche Komplikationen. Ist ~~aber~~ das Elektron als solches nicht mehr da, so kann man ^(schon eher) ~~eben~~ damit zufrieden sein, dass in der Gleichung nur das von der Kernladung herrührende Glied vorkommt.

5. Wir wollen jetzt Bohr's stationäre Zustände mit den Energien $E_1, E_2, \text{u.s.w.}$ durch „stationäre Wellensysteme“ mit den Frequenzen

$$\nu_1 = \frac{1}{h} (E_0 + E_1), \quad \nu_2 = \frac{1}{h} (E_0 + E_2), \text{ u.s.w.} \quad (8)$$

ersetzen. Indem Sie dem Gliede E_0 einen hohen positiven Wert geben, können Sie erreichen, dass diese Grundfrequenzen so hoch liegen, dass sie sich in keiner Weise bemerklich machen können (Sie können auch annehmen, dass sie unfähig sind zu strahlen, d. h. dass zunächst zwischen dem Feld, in welchem die entsprechenden Wellensysteme beste-

hen, und dem gewöhnlichen elektromagnetischen Felde, obgleich beide den ~~ganzen~~ selben Raum füllen, gar kein Zusammenhang besteht). Die beobachteten Strahlungen haben die Frequenzen

$$\nu_i - \nu_k = \frac{1}{h} (\epsilon_i - \epsilon_k)$$

und es fragt sich, wie hiervon Rechenschaft gegeben werden kann. Hier bieten sich uns zwei Wege, den der Schwebungen und den der Kombinationsöne.

Von dem ersten lässt sich nicht viel sagen. Gesehen, man könnte die fundamentalen Gleichungen, aus welchen die Wellengleichung (1) hervorgeht, ich meine die eigentlichen "Bewegungsgleichungen", die noch kein ϵ , aber dafür Differentialquotienten nach der Zeit enthalten. ~~Man~~ Auch wenn diese Fundamentalgleichungen linear sind, so würde sich die Superposition zweier Lösungen $\psi_1 = a_1 \cos(2\pi\nu_1 t + b_1)$ und $\psi_2 = a_2 \cos(2\pi\nu_2 t + b_2)$ zu Schwebungen führen; kein Instrument (Resonator, Gitter), in dem allen nach linearen Gleichungen vor sich geht, würde aber auf diese ~~Schwebungen~~ Schwebungen wie auf Schwingungen von der Frequenz $\nu_1 - \nu_2$ reagieren. Immerhin kann man sich denken, obgleich der Vorgang vorläufig im Dunklen bleibt, dass in irgend einer Weise eine Schwingung (mit Ausstrahlung) zustande kommt, von der Periode, die der Frequenz der Interferenzmaxima entspricht.

Die Entstehung von Kombinationschwingungen lässt sich etwas näher beleuchten. Zunächst ist dafür nötig, dass die Fundamentalgleichungen nicht linear sind, aber das ist denn auch hinreichend. Enthält z. B. eine Fundamentalgleichung ein Glied mit ψ^2 , und bestehen zugleich erst die beiden mit ψ_1 und ψ_2 angedeuteten Schwingungen, so tritt infolgedessen ein Glied mit

$$2\psi_1\psi_2 = a_1 a_2 \cos[2\pi(\nu_1 - \nu_2)t + b_1 - b_2] + a_1 a_2 \cos[2\pi(\nu_1 + \nu_2)t + b_1 + b_2] \quad (9)$$

auf, wo die erste Grösse eben den Differenzton vorstellt. ^{ganz} Klar ist, um dann einzusehen, wie dieser zur Ausstrahlung gelangt, hätte man sich über den Zusammenhang des schwingenden Systems mit dem elektromagnetischen Felde Rechenschaft zu geben. Was den in (9) angedeuteten Summationston betrifft, so kann man

annehmen, dass er sich wegen seiner hohen Frequenz $\nu_1 + \nu_2$ nicht bemerklich machen kann.

Man kann übergens, wenn man sich der Kombinations-schwingungen bedient, auch die Absorption ziemlich gut verstehen, was wohl schwer halten würde, wenn man die Lichterscheinungen auf Schwebungen zurückführen wollte.

Gesetzt, es befinde in dem Atom bereits der erste Schwingungs-
 Zustand $\psi_1 = a \cos(2\pi\nu_1 t + b_1)$ und es wirke nun (einfallendes
 Licht) eine Kraft von der Frequenz $\nu_2 - \nu_1$. Diese kann (wenn
 auch nicht durch ~~die~~ kräftige Resonanz) Schwingungen wie
 $\psi' = a' \cos[2\pi(\nu_2 - \nu_1)t + b']$ erzeugen. Infolgedessen wird in dem
 Gliede mit ψ^2 der Fundamentalgleichung die Grösse
 $2\psi_1 \psi' = a_1 a' \cos[2\pi\nu_2 t + b_1 + b'] +$

2 $\rightarrow$ 1 der Energie $h(\nu_2 - \nu_1)$ aufnimmt und diese dann ruhig ausstrahlt.

6. Ich darf vielleicht hinzufügen, dass mein Landsmann V. A. zu. Eins vor vielen Jahren (als man die Spektralgeseetze noch nicht kannte) bemerkte, dass es in den linienreichen Spektren viele Linienpaare giebt, für welche $\Delta \nu$ nahe gleich ist. Eine Wahrscheinlichkeitsberechnung (ähnlich wie die welche gedreht hatten um zu beweisen, dass die Doppelsterne nicht zufällige scheinbare Annäherungen sind) hat ihm dann gezeigt, dass die Zahl der Differenzen $\Delta \nu$, die um weniger als eine bestimmte Grösse ϵ voneinander verschieden sind, viel grösser ist als man nach den Gesetzen des Zufalls erwarten dürfte. Nachdem er hiernächst die Realität der Gleichheiten $\Delta \nu = \Delta' \nu = \Delta'' \nu = \dots$ bewiesen hatte, kam er auf den Gedanken, es möchten viele Spektrallinien von Kombinationserschwingungen herrühren.

Später hat Rayleigh einmal den Bemerkung gemacht, dass ^{man} das einfache Auftreten in den Spektralformeln von der ersten Potenz der Frequenzen (während dynamischen Gesetze vielmehr auf ν^2 führen) vielleicht als eine Andeutung kinematischer Beziehungen betrachten kann.

Nach allen diesen Bemühungen habe ich es ~~dennoch~~ als eine wirkliche ~~sehr~~ Vereinfachung empfunden als Bohr zeigte, dass jede angestrahelte Frequenz mit einer bestimmten Energiedifferenz zusammenhängt, wovon ~~der~~ wodurch die allgemeine Struktur der Spektralformeln sofort klar wird. So habe ich einigermassen den Geschmack für die Erklärung aus Kombinationserschwingungen verloren, aber ich kann ihn ja wiedergewinnen, wenn es sonst mit Ihrer Theorie gut geht.

7. Eine wirkliche Schwierigkeit, was die Kombinationserschwingungen betrifft, finde ich aber in den energetischen Verhältnissen. Was die Energie der stationären Wellensysteme betrifft, kann man zunächst, da man über die Amplitude frei verfügen kann, jede beliebige Annahme machen, auch wenn man bereits Gl. (6) für die Frequenz angenommen hat. Indes liegt es auf der Hand, wenn man Bohr's stationäre Zustände durch die stationären Wellensysteme ersetzt, zwischen diesen bestimmte Energiedifferenzen anzunehmen. Die Tatsache dass bestimmte Energieabträge (bei Elektronenstoss) erforderlich sind um gewisse Strahlungsgeschwindigkeiten hervorzurufen,

Beobachtungen in Einklang zu bringen ist.

Natürlich würde man dieser Schwierigkeit entgehen können durch die Annahme, dass die einzelnen Schwingungszustände nicht gerade die in (10) angegebenen Energien zu haben brauchen, aber wo bleiben dann die Energiestufen?

Ferner, nach Bohr wird bei dem Übergang $3 \rightarrow 2$ gerade die Energie $E_3 - E_2$ ausgesandt; der Bewegungszustand 3 verschwindet und wird durch 2 ersetzt. Kann man sich vorstellen, dass bei der durch die Differenzschwingungen verursachten Strahlung auch gerade die Energie $E_3 - E_2$ emittiert wird, und was wird dann aus den Energien der beiden Wellensysteme? Ähnliche Fragen, auf die ich nicht einzugehen brauchen, erheben sich wenn man den umgekehrten Vorgang, die Absorption betrachtet.

^{schliesslich}
Zusammenfassend möchte ich sagen. In der Bohrschen Theorie kann man es als ~~etwas~~ ^{unbefriedigend} empfinden, dass die emittierten Frequenzen gänzlich von den Frequenzen der wirklich stattfindenden periodischen Bewegungen verschieden sind. In Ihrer Theorie ist es schön dass diese Verschiedenheit die beiden der Frequenzen in einen viel einfacheren Zusammenhang (nämlich $\nu_{\text{emittiert}} = \nu_2 - \nu_1$, wenn ν_1 und ν_2 „innere“ Frequenzen sind) miteinander gebracht werden; nichtsdestoweniger ist es nicht leicht diesen Zusammenhang zu verstehen.

Es wird mir sehr lieb sein, wenn Sie mir einmal schreiben wollen, wie Sie über das oben Gesagte denken. Insbesondere, es zu entschuldigen, wenn ich vielleicht Ihre Meinung nicht immer richtig verstanden habe.

Mit freundlichen Grüßen und in vorzüglicher Hochachtung

Ihr ergebener

H. A. Lorentz