K. K. Ministerium für Cultus u. Unterricht.
1821
Büchersammlung des Dep. XI.
Inv.-Nr. 103 I.H.

N. 33.

N. 2.

Anfangsgründe
der
Geometrie.

Zum Gebrauche
der deutschen Normal- und Hauptschulen
in den
kaiserl. königl. Staaten.

Mit X. Kupfertafeln.

Kostet ungebunden (54 Kr. Conv. M. / 2 Fl. 15 Kr. W. W.)

Gebunden in ledern Rücken (1 Fl. 4 Kr. Conv. M. / 2 Fl. 35 Kr. W. W.)

Mit Seiner kais. königl. apost. Majestät allergnädigster Druckfreyheit.

Wien,
im Verlagsgewölbe des k. k. Schulbücher-Verschleißes
bey St. Anna in der Johannis-Gasse.
1821.

E5.2
I
1,593.358
Dauerentl.
an AHB

Vorrede.

Gegenwärtige Anfangsgründe der Geometrie sind zum Theile eine freye Übersetzung der Element. univ. mathes. auct. Rog. Boscovich. Romae. 1754. 8. maj.

Sie sind es nur zum Theil, weil Manches des Originals dem Zwecke der Volksschulen nicht ganz gemäß würde gewesen seyn, als z. B. coroll. 9. Nr. 78. et seq. pag. 149. — coroll. Nr. 109. et seq. pag. 158. und Vieles aus der Stereometrie.

Dagegen wurden den übrigen Sätzen so viele Anwendungen, als nur immer Platz greifen konnten, beygefügt.

Diese Zusätze enthalten einige Aufgaben über die Verwandlung, über die Theilung der

Flächen und Körper, die ersten Gründe des Feldmessens, und Einiges aus der Projectional-Zeichnung.

Da von den Schülern durchaus keine andern Vorkenntnisse als die gemeine Rechenkunst, nähmlich die 4 Rechnungsarten in ganzen Zahlen, in gemeinen und Decimal-Brüchen, die Ausziehung der Quadrat- und Kubik-Wurzel, und das Nöthigste von den Verhältnissen und Proportionen, gefordert werden, um aus diesen Anfangsgründen das Unentbehrlichste der Geometrie zu erlernen, auch für die Buchstabenrechenkunst und die Trigonometrie bey den ohne dieß so wenigen Lehrstunden der Mathematik keine Zeit übrig ist; so mußten einige sehr nützliche Auflösungen ohne Beweis vorgetragen werden.

Um eigene Lehrstunden für das so genannte theoretische Zeichnen entbehren zu können, sind auch von diesem Gegenstande manche Anwendungen gemacht worden, deren weitere Ausführung dem practischen Unterrichte vorbehalten ist.

An manchen Stellen sind weitere Ausführungen, es sind auch sogar manche Auflösungen dem Fleiße der Schüler überlassen. Dieß ist keines Weges geschehen um Kürze zu erzwingen, sondern nur darum, damit auch dem fleißigen und fähigen Zuhörer etwas zum eigenen Nachdenken bleibe, und daher der Lehrer bald die verschiedenen Classen kennen

ler-

lerne, in welche sich seine Schüler durch manche ihrer Ausarbeitungen und durch die Beantwortung verschiedener Fragen gleichsam von selbst eintheilen.

Das Ganze ist in zwey Abtheilungen eingetheilt. Die 1te enthält die ersten Gründe der ebenen Geometrie. Die 2te enthält die Anfangsgründe der Stereometrie mit Anwendungen auf das Zeichnen, weßwegen dieser Abtheilung die wichtigsten Sätze der Optik und der Perspectiv angehängt wurden. Die Anwendung der Lehrsätze von den Lagen der Ebenen auf die Zeichnung der Schatten ist ein Mittel so wohl das Nachdenken über die Verschiedenheit der Formen und die geometrische Bestimmung der Puncte zu wecken, als auch zur Ubung im Zeichnen selbst.

Jede Abtheilung ist in §e getheilt, und jedem §e eine Anzeige seines Inhaltes vorgesetzt.

Die Beweise, wo welche vorkommen, und manche minder wichtige Anwendungen unterscheiden sich von den Lehrsätzen, Aufgaben, Anwendungen u. dgl. durch eine kleinere Schriftart, damit der Lehrer und die Schüler, besonders wo nur 1 Jahrgang der 4. Classe vorhanden ist, das minder Nothwendige von dem, was vorgenommen werden muß, leichter unterscheiden können.

Am Ende jeder Abtheilung sind einige ältere und neuere mathematische Elementar-Werke deßhalb angezeigt worden, damit fähigere und fleißige Schüler nöthigen Falles in manchen Gelegenheiten eine weitere Ausführung zu finden wissen; deßhalb befinden sich unter den erst erwähnten Werken größten Theils solche, welche leicht, und ohne große Auslagen zu haben sind.

Eben der häufigen Anwendungen halber, mit welchen dieses Werkchen durchwebt ist, konnte die strengste Ordnung im Vortrage nicht immer beobachtet werden.

Wien am letzten November 1814.

Fr. J. Séeder.

Vorerinnerungen

von der

Mathematik überhaupt.

Was vermehret oder vermindert werden kann, ist eine Größe.

Die Wissenschaft, welche lehret, wie man Größen mit einander vergleicht, und aus bekannten Größen unbekannte findet, heißt die Mathematik oder Größenlehre.

Wie groß etwas sey, wird entweder durch die unmittelbare Vorstellung, die man davon hat, oder durch Vergleichung mit einer andern bekannten Größe gefunden. Messen heißt untersuchen, wie oft eine bekannte Größe in der zu messenden enthalten ist. Das Maß ist die bekannte, oder als bekannt angenommene Größe.

Jede Größe kann man abgesondert von allen anderen Eigenschaften betrachten. Dieß ist der Gegenstand der reinen Mathematik.

Betrachtet man aber zugleich die andern Eigenschaften der Sachen mit, bey welchen sich die Größe befindet; so gehört dieß in die angewandte Mathematik.

Die technische Mathematik enthält solche Wissenschaften, welche mehrere nicht mathematische Kenntnisse voraussetzen, z. B. die Baukunst u. s. w.

In

In der reinen Mathematik kommen entweder nur discrete, zerstreute Größen vor, wobey bloß auf die Menge der gleichartigen Größen gesehen wird, woraus ein gewisses Ganzes besteht, oder stetige, zusammenhängende Größen, bey welchen die gleichartigen Theile im unmittelbaren Zusammenhange an einander bestehen.

Dieser Unterschied der Größen bestimmt die beyden Haupttheile der reinen Mathematik: die Arithmetik oder Rechenkunst, und die Geometrie oder Meßkunst.

Es gibt allgemeine Kunstgriffe aus dem Bekannten das Unbekannte zu finden, indem man das letztere so ansieht, als wäre es schon gefunden.

Diese Kunstgriffe machen die allgemeine mathematische Erfindungskunst, die mathematische Analysis aus, welche so, wie die Mathematik überhaupt, in die gemeine und höhere eingetheilet wird.

Sie macht diejenigen, welche sie gründlich verstehen, fähig, selbst Wahrheiten zu erfinden, sie führet sie auf die dritte Stufe der mathematischen Kenntnisse; ohne sie ist es sehr schwer, in der reinen oder angewandten Mathematik weit zu kommen.

Die Gegenstände dieser letztern sind die Kräfte der Körper, mittels welcher sie Bewegung erregen oder hindern, das Licht und die Körper des Weltgebäudes.

Hieraus sind 3 Theile der angewandten Mathematik entstanden, nähmlich die Mechanik, Optik und Astronomie. Jeder derselben enthält seine Theile.

Es gibt wenig menschliche Verrichtungen, wovon nicht ein Theil auf mathematischen Gründen beruhet. Pflug und Wagen, Messer, Hämmer, Scheren, Mühlen, Springbrunnen u. s. f. sind Werkzeuge oder Ma-

schi-

schinen, deren Beschaffenheit und Gebrauch mathematische Kenntnisse beurtheilen lehren. Von solchen Dingen ist ein Theil physisch, der andere mathematisch.

Die Zeichenkunst und Perspectiv sind das Mathematische der Mahlerkunst, die Farben, ihre Mischung, Dauer u. dgl das Physische derselben.

Daß Künstler und Handwerker, leider! so selten Kenntnisse von der Mathematik haben, beweiset nichts weniger, als daß die Mathematik ihnen unnütz sey. Man kann Lehren brauchen, ohne ihre Gründe zu wissen (die erste Stufe der mathematischen Kenntnisse), ohne einmahl zu wissen, daß sie in eine Wissenschaft gehören; wäre aber diese nicht getrieben worden, so hätten jene Lehren nicht erfunden werden können. Es ist zur Verbesserung einer Wissenschaft oder einer Kunst nicht genug zu wissen, daß etwas auf diese oder jene Art richtig zu Stande gebracht wird. Es ist unumgänglich nöthig auch die Ursachen zu wissen, worauf irgend ein Verfahren sich gründet. (Die zweyte Stufe der mathematischen Kenntnisse).

Wenn auch die Regeln, die man ohne ihre Richtigkeit zu wissen befolgt, richtig sind, so kann man dennoch bey ihrer Anwendung fehlen, weil man ihre Gränzen nicht kennt. Auch wird es allezeit schwerer, solche Regeln im Gedächtnisse zu behalten, deren Verbindung mit ihren Gründen man durch den Verstand nicht einsieht. Die Rechenkunst gibt hiervon Beyspiele.

Zuweilen macht man sich mathematische Regeln für eine Beschäftigung ohne ihren Zusammenhang aus allgemeinen Gründen einzusehen. So kann man sich eine Mathematik zu seinem Gebrauche erfinden, welche in die engen Gränzen dieses Gebrauches eingeschlossen ist. Dieses Vermögen mathematische Wahrheiten aus sich

selbst

selbst zu erfinden, wenn Neigung und Umstände dazu führen, kann man die natürliche Mathematik nennen.

Es bedarf keines Beweises, daß eine Wissenschaft nützlich sey, auf deren ungemein große und viele Anwendungen schon aus ihrer Erklärung geschlossen wird, deren Verbindung mit allen menschlichen Beschäftigungen so offenbar ist, wodurch zur Vervollkommnung derselben so Vieles beygetragen werden kann, welche daher den größten Einfluß auf die Befriedigung unserer wichtigsten Bedürfnisse und auf die Annehmlichkeiten des Lebens hat.

Übrigens ist noch zu bemerken, daß man in keiner Wissenschaft von den Regeln einer richtigen philosophischen Lehrart einen getreueren Gebrauch gemacht hat, als in der Mathematik; eben daher hat diese Lehrart vorzüglich den Nahmen der mathematischen erhalten. Sie ist die vortrefflichste ausübende Vernunftlehre.

Man kann bey dem Vortrage der schon erfundenen Wahrheiten anders verfahren, als bey der Erforschung solcher, die noch unbekannt sind. Dort ist es genug jeden Satz überzeugend darzuthun, obschon aus seinem Beweise nicht erhellet, wie seine Erfinder auf ihn gekommen sind.

Hier aber muß der Weg gezeigt werden, auf dem man zu dem Gesuchten kommt. Jene Lehrart nennet man die *synthetische*, diese die *analytische*.

Register.

A.

	Seite
Abbildung	256
Abmessung	75
Abschnitt (S. Kreis)	—
Absciſſe	45
Abstand	4
Abstecken	18
Abwägen	161
Achse	196
Ähnlich	102
Alhidadenregel	150
Analyſis (Einleit.)	—
Anstoſſen	159
Archimedes	128
Arithmetik (Einleit.)	—
Astronomie (Einleit.)	—
Asymtote	249
Aufnehmen	108
Aufriß	254
Augepunct	276
Ausdehnung	2
Ausmessen	72
Ausschnitt (S. Kreis u. Kugel)	—
Ausstecken	18. 19 u. f.

B.

	Seite
Beleuchtungswinkel	264
Berichtigen (rectificiren)	166
Berührungspunct	87. 138
= winkel	88
Bezeichnung der Puncte	4
= = Linien	18
Bild (S. Abbildung)	—
Bley (Senkel S. Senkbley)	—
Böschungswinkel	195
Bogen	94
= gedruckter	95
= gothischer	95
= höhe	95
= steigender	95
= überhobener	95
= voller	94
= weite	8
Brenn-Punct	243

C.

	Seite
Centesimal-Theilung	9
Ceulen (v.)	128
Charte	151
Cylinder S. Zylinder	—
Circul (S. Zirkel)	—
Commensurabel	83
Concentrisch	8
Congruent	28
Convergent	15
Copie	4

	Seite
Copiren	135
Cörper (S. Körper)	—
Cubic (Maß u. s. f.)	224
Curve	241

D.

	Seite
Deckend (S. congruent)	—
Dendrometer	118. 230
Diagonale	16
Differenz	98
Dipter-Kreuz	44
= Lineal	150
= Ebene	150
Discrete (Größen) (S. Einleit.)	—
Distanz	120
Distanzpunct	276
Divergent	16
Dodecaeder	191
Dreyecke	15
Durchmesser	8. 246
= scheinbarer	257
Durchschnitt	254
Durchschnittspunct	7

E.

	Seite
Ebene	7
Excentrisch	8
Einschneiden	157
Elementar-Geometrie (S. Einleit.)	—
Ellipse	242
Entfernung	259
= scheinbare	259
Entwurf	122
Eratosthenes	20
Erdachse	129
Exponent	98

F.

	Seite
Fässer	225
Figuren	15
= ausmessen	19
Fixpunct	4
Flächen	2
Forderungssätze	10
Fundamental-Linie (S. Grundlinie)	—
Fuß-Punct	276

G.

	Seite
Gefälle	168
Gemäß	38
Geometrie	1
Gesichtslinie	114
Glastafel	276
Gleichlaufend	16
= nahmig	103
Glieder (S. Verhältniß)	—
Grade	9
Gränze	2
Größe	2. 27
Größenlehre (S. Einleit.)	—
Grundfläche (Basis)	195
Grundlinie	28
Grundriß	254
Grundsätze	10

H.

	Seite
Halbmesser	8
Haltung	264
Höhen	31
= Diopter	118
= messen	115
= messer	118
Höhen	28
Horizont	170. 258
Horizontal	6
= Linie	6
Hyperbel	242

I.

Icosaeder	191
Incommensurabel	83
Inhalt	59. 65
Irrational	83

K.

Kante	196
Kegel	206
= schnitt	242
Keppler	25
Kernschatten	262
Klaftermaß	43
Korbbogen	96
Körper	2. 178. 261
Kreis	7
= abschnitt	8
Kreisausschnitt	8
= bogen	8
= fläche	8
= gedruckter	96
= größter	209
Kreuz-Diopter	44
Krümmung der Erde	170
Krümmungshalbmesser	40
Kugel	208
= schnitte	208

L.

Lagny	128
Leitlinie	244
= strahl	243
Leibniz	128
Leuchtende Körper	261
Licht	256. 263
Lineal	13
Linien	2
= (Scheitel u. steig.)	95
Lothrecht	6

M.

Maschine	128
Magnetnadel	157
Marinoni	65
Maß	38
= stab	38
Mathematik (S. Einleit.)	—
Mechanik (S. Einleit.)	—
Meridian	129
Messen (S. Einleit.)	—
Meßbalken	55
= gabel	151
= kette	42

	Seite
Meßschnur	43
= stangen	43
= tisch	149
Methode (S. Einleit.)	—
Metius	128
Minute	9
Mittelpunct (S. Kreis)	—

N.

	Seite
Neigung (S. Winkel)	—
Neigungswinkel	185
Netz	207. 237
Nivelle	165
Niveliren	161
Nivelier-Latte	165
Niveau-Plan	172
Nonius	113. 139
Normal (Rechtwinkelig).	12

O.

	Seite
Object	257
Octaeder	191
Odometer	140
Optik	264
Ordinate	45
Ovale	96
Oval-Zirkel	96

P.

	Seite
Parabel	242
Parallel	16
= Projection	252
Parallelogramm	22
Parallelepipedon	196
Parameter	243
Peripherie (S. Umfang.)	—
Perspectiv	256
Plan (S. Charte)	—
Pole	129
Polyeder	190
Polygon	22
Prätorius	151
Prisma	196
Profil	254
Projection	151. 251
Projections-Methode	252
Projiciren	252
Projicirungs-Linien	251
= Ebene	251
Proportion	99
Proportionale	99
Proportionirungs-Dreyeck	133
Puncte	2. 6. 7
Pyramide	196
Pyramidal-Projection.	252
Pythagoras	82

Q.

	Seite
Quadrant	109
Quadrat	15
Quadrat-Inhal	59
Quadriren	59

R.

	Seite
Rational	83
Rechennetz	66
Rechteck	16
Rechtwinkelig (S. Normal)	—
Rectificiren	166
Rhomboid	22
Rhombus	22
Riccioli	26
Ringfläche	8
Rollmaß	235
Romanus	128
Rundschatten	263

S.

	Seite
Saunderson W.	231
Schatten	263
Scheitel	97
Schlagschatten	263
Schiefe	6
Schraffiren	74
Schrot- (Setz-) Wage	50
Secante	8
Section	159
Secunde	9
Sehen	257
Sehe-Pyramide	257
" Winkel	257
" Gränze	258
Sehestrahlen	256
Sehne	8
Seiten (S. Figuren)	—
Setzlatte	163
Senkbley	5
Sharp	128
Spitze	11. 206
Standlinie	121
Station	151
Steigung ('s Linie)	97
Stereometrie	1
Strahlen-Pyramiden	262
Synthetisch (S. Einleit.)	—

T.

	Seite
Tafel (S. Glastafel)	—
Tangente	8
Tetraeder	191
Theil (aliquoter)	38
Theilring	110
Toisiren	224
Transporteur	24
Transversal	111. 113
Trapez	22
Trapezoid	23
Triangel-Netz	158
Trianguliren	158
Trigonometrie (S. Einleit.)	—

U.

	Seite
Überschlag	231
Umfänge (Verh. derf.)	146
Umgeschrieben	127
Undurchsichtig	261
Unregelmäßige (Körper)	190
Verhältnisse	98
Verjüngt	38
Vernier	119. 139

Register.

Seite

Vertical 5
Verwandeln .... 61. 64 u. f.
Vielecke 22
Vieta 35. 128
Visir-Strahl 114
= Stäbe 227
Visir-Lineal (S. Alhidade) —
Vorausmaß 231

W.

Wage (die Inhalte zu finden) 65
Wagerecht 5
Wasserrecht 5
= wage 150. 162
Winkel 11
= am Mittelpunct . 23
= äußere 23
= benachbarte 14
= (Böschungs-) ... 195
= Größe derselben .. 11
= innere 17. 23
= (Körper-) 189
Winkel-(Maß) (Brett) 13
= messen 108
= (Messer) .... 109 u. f.
= (Reben) 14
= rechte 12
= (Scheitel) ... 11. 14
= spitze 11. 12
= stumpfe 12
= (Umfangs-) ... 24
= (Vertical-) 14
= (Wechsel-) 16
Würfel (Cubus) 196

Z.

Zeichnung 5
= geometrische 5
= perspectivische 276
= von fr. Hand 5
= der Inhalte 64
Zerstreuungs-Punct .. —
Zirkel (Greif) 235
= Linie 7
Zollmanns-Scheibe 150
Zone 208
Zylinder 206

I. Abtheilung.

Die ebene Geometrie.

§. 1.

Einleitung. Puncte. Linien. Flächen. Körper. Von der Möglichkeit dieser Dinge. Über die Bestimmung der Puncte. Anwendung für das Zeichnen. Die gerade Linie. Arten der Puncte und Linien. Anwendungen. Anmerkung.

Die Geometrie ist die Wissenschaft von den ausgedehnten Größen. Sie wird eingetheilt in die ebene Geometrie, und in die körperliche Geometrie, (die Stereometrie). Die Geometrie in engerer Bedeutung handelt von den ausgedehnten Größen in einer ebenen Fläche; die Stereometrie hingegen von den ausgedehnten Größen, die nicht bloß in einer Ebene liegen, wie die geometrischen Körper sind.

Die erste Abtheilung betrachtet die geradlinigen ebenen Figuren, und den Kreis, überhaupt die Flächenfiguren, d. i. solche Räume, welche entweder von geraden Linien, oder von einer einzigen krummen Linie, der Kreis- oder Zirkel-Linie, begränzt sind.

Die zweyte Abtheilung, betrachtet zuerst die von ebenen Flächen begränzten Räume, die körperlichen Räume, Körperfiguren, dann einige auch von gebogenen Flächen begränzte Körper, wobey gleichfalls keine andere krumme Linie, als die Kreislinie vorkommt. Z. B. Die Kugel, die Walze und der Kegel.

Die Elementar-Geometrie betrachtet übrigens nur das, was aus den geraden Linien und der Kreislinie gefolgert wird.

Man versteht unter der Gränze einer Sache das Äußerste dieser Sache, wo sie aufhört.

Die Gegenstände der Geometrie sind die stetigen Größen, das sind jene, deren Theile im unmittelbaren Zusammenhange auf einander folgen, so, daß zwischen dem Ende der einen und dem Anfange der andern nichts ist, was nicht zu einer der Größen gehörte.

Man versteht unter den geometrischen Ausdehnungen die stetigen Größen, nähmlich die Linien als die einfachen Ausdehnungen, die Flächen als die zweyfachen und die Körper als die dreyfachen geometrischen Ausdehnungen.

Die geometrischen Körper werden von Flächen, die Flächen von Linien, und die Linien von Puncten begränzt.

Puncte sind die Gränzen aller Ausdehnungen. Sie sind untheilbar. Man denkt sich dieselben ohne alle Ausdehnung.

Linien sind Ausdehnungen in die Länge. Sie werden ohne alle Breite oder Dicke gedacht.

Flächen sind Ausdehnungen in die Länge und Breite ohne Dicke.

Körper sind dreyfache geometrische Ausdehnungen, in die Länge, Breite und Dicke (Tiefe oder Höhe).

Gerade Linien sind jene, deren Theile überall dieselbe Richtung haben. Krumme Linien hingegen sind jene, deren Theile ihre Richtung in jedem Puncte verändern.

Zur mehrerer Deutlichkeit denke man sich die vollkommen ebene Tafel KL (Fig. I.) Deren erster Theil A sey weiß, der zweyte B schwarz, der dritte D roth, und der vierte C von blauer Farbe.

Die Gränze EI, welche den weißen Theil von dem schwarzen trennt, hat keine Breite. Weder in dem schwarzen, noch in dem weißen Felde liegt ein Theil der beyden gemeinschaftlichen Gränze; also hat diese selbst keine Breite, mithin ist sie nur in ihrer Länge theilbar. Dasselbe gilt von den Gränzen IG, IH und IF. Dieses gibt den Begriff von einer Linie.

Der Ort, wo diese Linien zusammen treffen, nähmlich in I hat weder Breite noch Länge, also auch keine Theile. Dieses ist die Bezeichnung eines mathematischen Punctes, aus welchem man den Grundsatz ableitete: eine gerade Linie kann eine andere gerade Linie nur in einem Puncte schneiden.

Hätte die Tafel KL eine, wenn auch noch so kleine Dicke; so würde die Gränze, welche z. B. den weißen Theil A von dem schwarzen B scheidet, die Länge EI, so viele Breite haben, als die Dicke der Tafel beträgt, diese Gränze selbst hingegen kann keine Dicke haben. Dieses ist der Begriff von einer Fläche.

Würden alle Farben der Tafel KL in eine einzige verwandelt, oder mit einer einzigen überzogen; so würde die Gränze EF aufhören gesehen zu werden, doch ist sie vorhanden, sobald der Ort bestimmt ist, wo der weiße Theil aufhöret, und der schwarze anfängt. Deßhalb würden dann, wenn auch die Farben nicht mehr vorhanden wären, dennoch die Merkmahle des Punctes, der Linie und der Fläche vorhanden seyn.

Hieraus ist zu ersehen, daß dieser Punct und jene Linie keine solchen Dinge sind, wie es z. B. ein Draht, der so hart seyn müßte, daß er beynahe keine Dicke hätte; oder wie es die Striche einer Zeichnung (die Contouren) wirklich sind.

Puncte, Linien und Flächen dieser Art, sind keine Dinge, welche sich der Verstand, da er von verschiedenen Sachen urtheilet, erst schaffen muß; sondern sie bestehen wirklich, unabhängig von der bloßen Einbildung. Mathematische Körper gibt es zwar nicht, doch gibt es Eigenschaften derselben, welche gegenseitig nicht getrennt werden können.

Daher ist ein Punct das Ende (die Gränze) einer Linie, eine Linie das Äußerste (die Gränze) einer Fläche, und eine Fläche die Gränze eines Körpers.

Man sagt zuweilen (besonders bey dem Zeichnen): ein Punct ist die genaueste Bestimmung eines Ortes. Z. B. Wenn in irgend einem Raume, in einem Garten u. d. gl. der Ort bestimmt werden soll, wo etwa ein Baum zu setzen, oder an einer Wand der Ort, wo ein Nagel einzuschlagen ist u. s. f.; so könnte man in dieser Hinsicht die erst angeführte Erklärung annehmen.

Der Abstand, die Entfernung eines Punctes von einem anderen Puncte, ist die gerade Linie, welche beyde verbindet.

Ein in die Erde gesetzter gerader Stab, welcher sich nach keiner Gegend hin mehr oder weniger neigen darf, als nach jeder andern, bezeichnet im Feldmessen einen Punct. Bezeichnungen der Puncte, die bey der Aufnahme einer Gegend gebraucht werden, und unverändert bleiben, als z. B. Bäume, Thürme u. d. gl. nennt man fixe Puncte, Fixpuncte.

Soll eine Zeichnung nachgemacht (copirt) werden, so kommt es vorzüglich darauf an, alle Puncte in der Nachahmung (Copie) so zu bestimmen, wie sie im Originale (Urbilde, Muster) bestimmt sind. Geschieht dieses mit den beyden Werkzeugen der Geometrie, dem Zirkel-Instrumente und dem Lineale; so sagt man, die Zeichnung sey eine geometrische Zeichnung. Bestimmt man aber die Puncte nur mittels des Augenmaßes; so nennet man die Zeichnung eine Freyehand-Zeichnung, z. B. Blumen, einige Ornamente u. d. gl. Zuweilen wird auch beydes verbunden. So z. B. bestimmt man beym Zeichnen der Situations-Pläne und Karten die wichtigsten Puncte mit dem Zirkel-Instrumente, minder wichtige Puncte mit freyer Hand, u. s. f.

Wichtig für jede Art der Zeichnung ist die Eintheilung der geraden Linien und der Puncte. Es gibt nähmlich verticale (senkrechte, bleyrechte, lothrechte); es gibt horizontale (wagerechte, wasserrechte) Linien; endlich solche, die weder vertical noch horizontal sind. Man nennt sie schiefe Linien.

Ein an einen Faden gebundenes Gewicht spannet den Faden, wenn es frey spielen kann, nach der Richtung der Schwere, nähmlich nach einer Linie, die verlängert in den Mittelpunct der Erdkugel treffen müßte. Diese Richtung nennt man die verticale Richtung; eine nach dieser Richtung gezogene Linie, eine verticale (senkrechte) Linie. In nicht gar zu großen Entfernungen von einander sind die Richtungen der Schwere mit einander fast gleichlaufend. Zur Bestimmung verticaler Linien bedient man sich des Senkbleyes (Bleysenkels-Schußbleyes), welches aus einem Faden mit dem daran befestigten Gewichte besteht.

Ist die gerade Linie, welche einen Punct mit einem andern Puncte verbindet, eine verticale Linie; so nennt man diese Puncte, verticale, senk- oder lothrechte Puncte. In diesem Falle steht ein Punct genau über dem andern, und dieser genau unter dem ersten.

Weil durch zwey Puncte die Länge und die Lage einer jeden geraden Linie gegeben wird; so erhält man die Vertical-Linie, wenn zwey verticale Puncte gegeben sind.

Trifft eine gerade Linie auf eine verticale Linie so, daß sich die erste gegen den Anfangs-Punct der zweyten nicht mehr neigt, als gegen den Endespunct derselben; so nennt man diese gerade Linie eine horizontale Linie. Ist Gleichgewicht vorhanden, so nennet man den Balken einer Wage wagerecht oder horizontal. Das Züngelchen der Wage wäre dann vertical. Die Oberfläche eines stille stehenden Wassers bildet eine horizontale Fläche, eine in dieser gezogene gerade Linie ist eine Horizontal-Linie.

Träfe die vorerwähnte gerade Linie, die verticale Linie, gerade in ihren Anfangs- oder Endespunct, so denkt man sich diese verlängert.

Die Puncte einer horizontalen Linie sind horizontale Puncte. Von diesen Puncten steht keiner höher oder tiefer als jeder andere Punct derselben Linie. Verbindet man zwey mit einander wagerechte Puncte durch eine gerade Linie; so erhält man eine wagerechte Linie. Zwey wagerechte Puncte bestimmen also eine Horizontal-Linie.

Sind Linien oder Puncte weder vertical noch horizontal; so sind sie schiefe Linien, oder schiefe Puncte. Bey allen diesen Erklärungen wird angenommen, daß die Puncte und die Linien in einer Ebene liegen.

Man

Man unterscheidet: Anfangs- und Endespuncte, Berührungs-Puncte, Durchschnittspuncte, Wendungspuncte, und Mittelpuncte.

Die Bestimmung verticaler und horizontaler Puncte aus freyer Hand, (nach freyem Auge) ist ein vorzügliches Mittel zur Übung im Augenmaße. Eben so die Bestimmung mehrerer Puncte, welche mit zwey gegebenen Puncten in einer und derselben geraden Linie liegen müssen, oder die Verbindung zweyer gegebener Puncte mit einer geraden Linie u. m. dgl.

Fast in den meisten Fällen liegen alle Puncte und Linien einer Zeichnung in derselben ebenen Fläche, d. i. in einer solchen Fläche, worin man von jedem Puncte zum andern gerade Linien ziehen kann. Das Gegentheil findet bey gekrümmten Flächen Statt. Doch gibt es solche, worin nur nach einer gewissen, aber nicht nach jeder Richtung gerade Linien gezogen werden können. Z. B. Auf der gebogenen Fläche einer Walze, eines trichterförmigen Körpers u. dgl. m.

§. II.

Die Kreislinie. Ihre Entstehung, und die zur Kreislinie gehörigen Linien. Eintheilung der Kreislinie in Grade u. s. f. Die Centesimal-Eintheilung.

Wenn eine gerade Linie sich immer in derselben Ebene um ihren unbeweglichen Anfangs- oder Endespunct herumdreht, und zwar so lange, bis diese Linie in ihre anfängliche Lage kommt, so beschreibt ihr Endes- oder Anfangspunct eine krumme, in sich zurückkehrende Linie, die Kreis- oder Zirkellinie. Der von dieser krummen Linie umschlossene Raum ist die Kreis- oder Zirkelfläche. Ihre Gränze nennt man

auch Peripherie, Umfang. Alle gerade Linien in dieser Fläche von dem Mittelpuncte, d. i. dem oben erwähnten unbeweglichen Anfangs- oder Endespuncte, bis an den Umfang gezogen, sind von gleicher Länge, vermöge der Entstehung der Kreislinie.

Die gerade Linie durch den Mittelpunct gezogen, und beyderseits von der Peripherie begränzet, wird der Durchmesser oder Diameter genannt.

Der Durchmesser theilt die Kreislinie in 2 gleich große Theile. Die Hälfte desselben ist der Halbmesser oder Radius. Einen Theil des Umkreises heißt man einen Kreisbogen oder Zirkelbogen. Jede Gerade, welche die Kreislinie in zwey nicht gleich große Theile theilet, nennt man eine Sehne, Chorda oder Bogenweite.

Gerade Linien, welche die Kreislinie in einem Puncte berühren, heißen Tangenten oder Berührungslinien. Gerade Linien, welche die Kreislinie durchschneiden oder verlängert durchschneiden würden, heißen Secanten, oder Durchschnittslinien.

Ein Kreisabschnitt ist jede von einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen begränzte Fläche. Ein Kreisausschnitt ist jene Fläche, welche von zwey Halbmessern und dem dazwischen enthaltenen Kreisbogen begränzt ist. Concentrisch sind Kreise, wenn sie einerley, excentrisch, wenn sie verschiedene Mittelpuncte haben. Die zwischen dem größern und kleinern Kreise enthaltene Fläche nennt man eine Ringfläche.

In Fig. 2. ist ADEBR oder FGLK die Zirkel- oder Kreislinie; der Durchmesser ist AB oder FL; daher sind die Geraden CA, CD, CE und CB, welche halbe Durchmesser, oder Halbmesser genannt werden,

den, einander gleich, 1.2 ist die Tangente, 3.4 die Secante.

Jede Kreislinie pflegt man in 360 gleiche Theile zu theilen, welche Theile Grade genannt werden; jeder Grad wird in 60 Minuten, jede Minute in 60 Secunden getheilt u. s. f.

Man pflegt die Zahlen der Grade, Minuten, Secunden u. s. w. durch eigene darüber gesetzte Zeichen oder Buchstaben zu unterscheiden z. B. $35° - 25' - 36'' - 42'''$ oder $35^G - 25^M - 36^S - 42^T$ heißt fünf und dreyßig Grade, fünf und zwanzig Minuten, sechs und dreyßig Secunden und zwey und vierzig Terzien u. s. w.

Haben zwey Kreise denselben Mittelpunct, und die geraden Linien CD, CE enthalten einen Bogen von 30 oder 40 Graden; so ist es klar, daß sie auch eben so viele Grade in der äußern Kreislinie enthalten.

Nach der neuen Eintheilung der Kreislinie, der Centesimal-Eintheilung, sind die Benennungen Grade, Minuten ꝛc. entbehrlich. Man gibt nur aliquote Theile des = 1 gesetzten Viertelzirkels, Quadranten an.

Demnach ist z. B.

d. Winkel od. Bog. v. $90^G = 1$

" " " " $60^G = 0'66666 = 1 . \frac{2}{3}$

" " " " $45^G = 0'5000 = 1 . \frac{1}{2}$

" " " " $30^G = 0'33333 = 1 . \frac{1}{3}$

" " " " $1 = \frac{1}{90.60} = 0'000185185$

" " " " $5^M = 0'000185185 \times 5 = 0'0009259$

" " " " $n^M = \frac{n}{90.60}$ u. s. f.

§. III.

Die Forderungssätze der Geometrie. Die Grundsätze derselben.

Die Forderungssätze der Geometrie sind:

1. Von einem Puncte zu einem andern eine gerade Linie ziehen.
2. Eine gerade Linie verlängern, so daß sie sammt ihrer Verlängerung nur eine gerade Linie ausmache.
3. Aus einem gegebenen Puncte als dem Mittelpuncte mit einer als Halbmesser gegebenen Zirkelweite eine Kreislinie beschreiben.
4. Von einer längern Geraden eine gegebene kürzere hinweg nehmen. Was geometrisch gemacht wird, wird durch diese Forderungssätze gemacht; im Gegentheile sagt man, es sey nicht geometrisch zu Stande gebracht worden.

Die Grundsätze der Geometrie sind:

a. Von einem Puncte zu einem andern Puncte kann man nur Eine gerade Linie ziehen, aber unzählig viele krumme.

b. Die kürzeste Entfernung eines Punctes von dem andern Puncte, ist die gerade Linie, welche die beyden Puncte mit einander verbindet. Sind zwischen den beyden Puncten mehrere andere krumme, oder gebrochene Linien gezogen, welche gegen die Gerade zu, hohl (concav) sind, und einander nicht schneiden; so sind sie desto länger, je weiter sie von der Geraden abstehen.

c. Zwey gerade Linien können keinen Raum einschließen. Daher muß ein mit geraden Linien begränzter Raum (eine ebene, geradlinige Figur) wenigstens 3 Seiten (Gränzlinien) haben.

§. IV.

Winkel. Gleichheit derselben. Ihre Zeichnung.

Ein geradliniger Winkel ist die Neigung zweyer geraden Linien gegen einander, welche sich in einem Puncte treffen.

Die beyden geraden Linien, welche den Winkel bilden, heißen die Schenkel des Winkels. Der Punct, in dem sie einander berühren oder schneiden, ist die Spitze oder der Scheitel des Winkels.

Winkel benennt man entweder mit einem am Scheitel gesetzten Buchstaben, oder mit drey Buchstaben, wovon die zwey äußern an den Endespuncten der Schenkel, der mittlere an dem gemeinschaftlichen Berührungspuncte derselben, nähmlich am Scheitel des Winkels stehen.

Von außen nennet man den Winkel zuweilen Ecke. Bey der Größe eines Winkels kommt es nicht auf die Länge der Schenkel, sondern nur auf die Größe der Neigung an, welche ein Schenkel gegen den andern hat.

Zwey gerade Linien HK und FL, welche in einem Puncte C zusammen kommen, machen die Winkel LCH, HCF, FCK und KCL, deren keiner größer wird, wenn man die genannten Linien, die Schenkel nähmlich, verlängert. Hingegen wird die Größe des Winkels verändert, wenn die Öffnung, welche die Schenkel bilden, größer oder kleiner wird, da die Größe eines Winkels bloß in der Neigung einer geraden Linie gegen eine andere gerade Linie besteht.

Deßwegen nimmt man zum Maße eines Winkels jene Anzahl von Graden, welche durch die Schenkel

in

in dem aus der Spitze des Winkels als dem Mittelpuncte beschriebenen Kreisbogen abgeschnitten werden.

Enthält der Bogen EB 60°, so enthält auch der Winkel LCH 60°; und weil der Bogen HL dieselbe Anzahl der Grade enthält, so ist zum Maße des Winkels LCH jeder Kreisbogen dienlich, der aus dem Puncte C als dem Mittelpuncte beschrieben worden ist.

Soll daher Fig. 3. und Fig. 2. an dem Puncte M einer gegebenen Geraden ON ein dem gegebenen Winkel LCH gleicher Winkel gezeichnet werden, so wird sowohl in C als in M mit was immer für einem, jedoch gleichem Halbmesser der Bogen BE, welcher die Schenkel CL und CH schneidet, beschrieben, mit derselben Eröffnung des Zirkel-Instrumentes wird aus M der Bogen PQ unbestimmt weit gezogen, endlich aus P mit der Weite BE ein Durchschnittspunct Q bestimmt, welcher einen Bogen PQ (von so viel Graden als der Bogen BE) angibt. Wird dann die Gerade MQR gezogen; so ist der Winkel NMR gleich dem Winkel LCH. Der Beweis dieses Verfahrens ist §. XIV.

§. V.

Normal. Schief. Wie rechte Winkel zu zeichnen sind. Neben-Vertical oder Scheitelwinkel. Anwendungen.

Eine Linie ist einer andern Linie **normal**, (rechtwinkelig) wenn sie mit dieser beyderseits gleiche Winkel macht. Dergleichen sind die Winkel GCL, und GCF (Fig. 2.) Solche Winkel werden **rechte** Winkel genannt. Ein **stumpfer** Winkel ist der, welcher größer als ein rechter ist, wie FCH. Ein **spitziger** Winkel ist jener, welcher kleiner als ein rechter ist, wie HCL.

Um

Um rechte Winkel ohne Beyhülfe des Zirkel-Instrumentes zu zeichnen, bedient man sich eines Werkzeuges, welches aus zweyen mit einander unter einem rechten Winkel verbundenen Linealen oder Latten besteht. Auch kann es aus einem Brette, welches die Form eines rechtwinkeligen Dreyeckes hat, (Winkelbrette) bestehen. Um dieses Werkzeug zu prüfen wird eine gerade Linie FL gezogen, in einem Puncte derselben C eine Normale errichtet, aus demselben Puncte, wird von der andern Seite wieder eine Normale errichtet. Fallen diese beyden Linien in eine und dieselbe Gerade CG; so ist das Werkzeug richtig, im Gegentheile unrichtig.

Ebenfalls ist es leicht (nach dem Vorhergehenden) das Instrument zur Ziehung der geraden Linie (das Lineal) zu prüfen. Denn wird eine gerade Linie gezogen, sodann das Lineal umgewendet, an die Endepuncte gelegt, und wieder eine gerade Linie gezogen; so müssen diese beyden geraden Linien nur eine und dieselbe gerade Linie ausmachen (in einander fallen), wenn das Lineal richtig ist.

Ein rechter Winkel enthält den vierten Theil des ganzen Umkreises d. i. 90°, ein stumpfer mehr als 90°, ein spitziger weniger.

Es ist klar, daß die Gerade HC, welche der Geraden FL begegnet, entweder mit ihr zwey rechte Winkel macht, im Fall, daß die erste der zweyten normal ist, oder zwey andere Winkel, welche zusammen so groß sind, als zwey rechte. Denn die Winkel FCH, und HCL zusammen haben die halbe Kreislinie, d. i. 180°, also so viel als zwey rechte Winkel zu ihrem Maße.

Die Winkel, welche entstehen, wenn wie viel immer gerade Linien sich in einem Puncte schneiden,

oder von einem Puncte ausgehen, (die benachbarten Winkel) machen zusammen 360° aus, also so viel als 4 rechte Winkel.

Werden die geraden Linien HC, LC verlängert, so ist leicht einzusehen, daß sie nicht in eine gerade Linie zusammen fallen können; sondern sie machen die unter sich gleichen Winkel FCK, LCH, welche an der Spitze entgegen gesetzte, Vertical- oder Scheitelwinkel genannt werden. Da die halbe Kreislinie FKL der halben Kreislinie HLK gleich ist; so sind, wenn man den gemeinschaftlichen Theil KL wegnimmt, die übrigen Bögen FK und HL einander gleich.

Es sind also die Scheitel- oder Vertical-Winkel einander gleich. Um Scheitelwinkel zu erhalten sind immer zwey gerade sich durchschneidende Linie erforderlich. Verlängert man die beyden Schenkel eines gegebenen Winkels; so erhält man seinen Scheitel- und seinen Nebenwinkel.

Es ist also der Scheitelwinkel eines rechten Winkels ein rechter Winkel, der eines stumpfen Winkels ein stumpfer Winkel, und der eines spitzigen Winkels ein spitziger Winkel.

Der Nebenwinkel eines rechten Winkels ist ein rechter Winkel, der eines stumpfen Winkels ein spitziger, und der eines spitzigen ein stumpfer Winkel.

Zieht man den Nebenwinkel von zwey rechten Winkeln ab; so erhält man den andern Nebenwinkel. Man erhält den Nebenwinkel eines gegebenen Winkels, wenn man einen seiner Schenkel von der Spitze des Winkels an verlängert.

Demnach ist es leicht, einen Winkel zu zeichnen, welchen z. B. zwey Mauern Fig. 7. u. dgl. mit einander machen, z. B. den Winkel 1.2.3. Denn legt

man

man an 2.3. eine Latte ab.; so ist der Winkel 1.2.a. bekannt, dieser von 180° abgezogen gibt den Winkel 1.2.3.

Leicht läßt sich der Winkel sogleich mittels zweyer Latten angeben; denn es ist der Winkel a2b. so groß als der Winkel 1.2.3. Fig. 8.

§. VI.

Figur. Dreyecke, Vierecke, Necke. Arten der Dreyecke. Quadrate, Parallelogramme, Rechtecke. Parallele Linien. Einige Eigenschaften derselben. Wechselwinkel. Parallelen ziehen.

Eine mit Linien begränzte Fläche, eine Flächenfigur, wird nach der Zahl ihrer Seiten, Dreyeck, 4eck, 5eck, 6eck . . . allgemein ein neck oder nseit benennet.

Ein gleichseitiges Dreyeck ist jenes, dessen drey Seiten gleich groß sind, wie ABC Fig. 4.

Ein gleichschenkeliges Dreyeck, wird jenes genannt, das zwey Seiten von gleicher Größe hat, wie ABC Fig. 5.

Ein ungleichseitiges Dreyeck, ist jenes dessen drey Seiten einander ungleich sind, wie ABC Fig. 6.

Ein rechtwinkeliges Dreyeck ist jenes, welches einen rechten Winkel, wie BAC Fig. 6.

Ein stumpfwinkeliges, welches einen stumpfen, und ein spitzwinkeliges, welches zwey spitzige Winkel hat.

Ein Quadrat ist eine Figur von vier einander gleichen Seiten begränzt, welche unter rechten Winkeln verbunden sind.

Hat das Viereck rechte Winkel, und nur die gegen über stehenden Seiten sind einander gleich, so wird es ein Rechteck genannt. Fig. 9.

Diagonale heißt jede Gerade, welche von einer Ecke einer 4seitigen Figur an die entgegen gesetzte Ecke gezogen ist.

Parallel oder gleichlaufend werden in einer Ebene liegende Linien genannt, welche wie weit immer verlängert, weder näher zusammen, noch weiter aus einander laufen, daher immer gleich weit von einander entfernt sind. Im Gegentheile nennet man sie convergent oder divergent, zusammen oder aus einander laufend.

Aus dem Begriffe der Parallel-Linien selbst lassen sich einige Eigenschaften derselben ableiten, mit deren Beweisen die Mathematiker sich große Mühe geben.

Es sind folgende:

Gerade Linien Fig. 10. in einer und derselben Ebene laufen entweder zusammen, wie GI, FD, und zugleich aus einander von der andern Seite betrachtet, wie GH, FD, oder sie haben überall gleiche Abstände, wie AB, DC.

Wird nun in diesem Falle eine Gerade EO gezogen, welche die beyden Parallel-Linien in G und F schneidet; so ist klar, daß die beyden Parallel-Linien überall dieselbe Neigung gegen die Gerade EO haben müssen.

Hieraus folgt:

1tens, daß der Winkel OFD dem Winkel OGB gleich ist, wovon der erste der äußere, der andere der innere und entgegen gesetzte genannt wird.

2tens. Da der Winkel EFC dem Scheitelwinkel DFO gleich ist; so werden auch die Winkel BGF und GFC (die Wechselwinkel) einander gleich seyn.

3tens

3tens: da die Nebenwinkel OFD und GFD zusammen zweyen rechten Winkeln gleich sind, nähmlich OFD + GFD = 180° und BGO = DFO ist; so ist auch BGO + DFG = 180°, d. i. die inneren Winkel sind zusammen zweyen rechten Winkeln gleich. Ebenfalls: so oft der Winkel OFD dem innern und entgegen gesetzten FGB gleich ist, werden die beyden geraden Linien AB, CD, gegen die sie durchschneidende Gerade EO die nähmliche Neigung haben, und daher weder zusammen, noch aus einander laufen, sondern unter sich parallel seyn.

Sind daher die Wechselwinkel BGF, GFC einander gleich, so ist auch der äußere Winkel DFO dem inneren BGF gleich, und die beyden Linien AB und DC sind mit einander parallel.

Dieses sind die drey vorzüglichsten Eigenschaften der Parallel-Linien, aus deren jeder geschlossen werden kann, daß zwey Gerade parallel sind; nähmlich 1tens, wenn der äußere Winkel dem inneren entgegen gesetzten gleich ist; 2tens, wenn die Wechselwinkel einander gleich sind; 3tens, wenn die inneren an derselben Seite liegenden Winkel zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich sind.

Sind (Fig. 11.) die zwey Geraden AB, HK einer dritten Geraden CD parallel; so sind sie unter sich parallel; denn wird die Gerade EO gezogen, welche die Parallelen in G, F, I, schneidet; so ist die Neigung der Geraden KH, BA zur Geraden EO dieselbe, wie die Neigung der Geraden CD zu derselben Linie EO.

Soll (Fig. 10.) durch einen gegebenen Punct F eine Gerade mit einer andern Geraden GB parallel gezogen werden; so zieht man durch F eine willkührliche Gerade OFE, macht dann in F einen Winkel OFD

gleich dem Winkel OGB; es wird sodann FD der GB parallel seyn.

Soll man mit einer auf dem Felde gegebenen Geraden AB (Fig. 12.) eine Parallele ausstecken, so kann dieses auf mehrere Arten geschehen.

Entweder steckt man eine schiefe Linie 1, 2 durch den gegebenen Punct n aus, und macht den Winkel 2no so groß, als der Winkel nRA ist, dieß gibt die Parallele OT.

Oder (Fig. 13.) man nimmt den Abstand des Punctes N von der Linie AB (die Normale), und beschreibt dann aus den Puncten A und B mit derselben Weite die Bögen, O, T, welche auf dem Felde mit einem spitzigen Holze oder Nagel und mit Hülfe einer Schnur in den Boden eingeritzt (tracirt) werden; O, N und T werden in der verlangten Parallele liegen. Diese ist die Tangente der beyden Bögen.

§. VII.

Gerade Linien auf dem Felde. Aussteckung derselben. Bemerkungen hierbey.

Linien auf dem Felde bezeichnet man entweder durch ausgespannte Schnüre, durch an einander gelegte Latten, oder durch mehrere in gewissen Entfernungen von einander vertical eingesteckte Stäbe, so nähmlich, daß der nächste Stab am Auge jeden folgenden deckt. Das Auge muß aber von dem ersten Stabe so weit entfernt seyn, daß nach der Richtung der Berührungs-Linie visitirt werden kann; daß nähmlich die Sehstrahlen die Stäbe nur berühren.

Wenn (Fig. 14.) zwey Puncte A und B einer geraden Linie gegeben sind; so findet man einen dritten D außer A und B, wenn man den Stab D dem Au-

ge in A, oder den Stab A dem Auge in D verdeckt, und zwischen A und B, wenn man den Stab D so einsteckt, daß dieser den Stab B dem Auge in A oder den Stab A dem Auge in B verdeckt.

Im ersten Falle kann jener, der den Stab D einsteckt, sich selbst nach A und B richten, im zweyten Falle aber muß er sich von einem andern richten lassen, außer er wollte vorläufig N nach A und B, und sodann D nach B und N bestimmen.

Wenn (Fig. 15. und 16.) zwey Puncte A und B einer Geraden und zwey Puncte C und D einer andern Geraden gegeben sind; so findet man ihren Durchschnitt E, wenn man sich in einen Punct Q der Geraden CD stellet, und sodann in dieser Geraden CD gegen die Gerade AB so lange fort geht, bis man in den Punct E kommt, der beyden Geraden gemein ist.

Fällt der Durschnitt E außer die gegebenen Puncte, so kann derjenige, welcher den Stab E einstecket, sich selbst nach C und D und nach A und B richten; fällt aber der Durchschnitt zwischen A und B, so muß er sich von einem andern aus A nach B richten lassen, oder vorläufig einen Punct N suchen, und sich nach C und D und nach N und A richten; fällt endlich der Durchschnittspunct E zwischen A und B und zwischen C und D, so muß er sich von einem andern aus C nach D und wieder von einem andern aus A nach B richten lassen.

Wenn (Fig. 17.) zwischen zwey unzugänglichen Puncten, z. B. zwischen den Spitzen zweyer Thürme A und B, Puncte in der Richtung AB zu bestimmen sind, und zwey Personen stellen sich in C und D nach einer geraden Linie ACD; so liegt auch der Thurm B in der Geraden ACD, sobald jener, der in D ist, den Thurm B dem Auge in C verdeckt. Gehen also C

und D, sobald der in C den Thurm B neben dem in D vorbey sieht, gegen die Gerade AB so lange fort, daß der in D sich auf dem Wege beständig mit C und A in einer geraden Linie hält; so werden C und D in der Geraden AB seyn, sobald D den Thurm B dem Auge in C verdeckt; denn in diesem Falle haben die Geraden ACD und CDB zwey Puncte C und D gemein, also machen sie nur eine und dieselbe Gerade aus.

Bey dem Einstecken eines Stabes muß auf dessen senkrechte Stellung genau gesehen werden, was entweder mit dem Senkel oder bloß nach dem Auge gemacht werden kann.

Soll (Fig. 18.) eine Gerade auch durch irgend eine Tiefe abgesteckt werden, so kann dieses, wenn einmahl zu beyden Seiten der Tiefe die Gerade ausgesteckt ist, mittelst einer Schnur und eines daran gehängten Gewichtes leicht gefunden werden.

Ist endlich über einen Hügel oder über einen Berg eine Gerade abzustecken; so ist es hinlänglich, wenn auf dem Gipfel desselben ein Punct bestimmet wird, der mit 2 in der Ebene angenommenen oder gegebenen Puncten in einer Geraden liegt. Alle andern noch zu bestimmenden Puncte werden nach dem vorigen eingetragen.

§. VIII.

Wie Eratosthenes den Umfang der Erde gemessen hat.

Aus den Eigenschaften der Parallelen läßt sich erklären, wie Eratosthenes den Umfang der Erde gemessen hat. In der Stadt Sienes waren Brunnen, in die zur Zeit des Sommer-Solstitii (die Zeit, da die Sonne in den Sommerpunct kommt, die Sonnenwende) die Strahlen

bis

bis auf den Grund hinabfielen, wenn die Sonne senkrecht darüber stand. Weiters nahm er an, daß Sienes und Alexandria in demselben Meridian gelegen wären, so, daß es in beyden Städten zugleich Mittag sey, und beyde 5000 Stadien von einander entfernet wären.

Es sey (Fig. 19.) T der Mittelpunct der Erde PAP der beyden Städten gemeine Meridian. Sienes, worüber die Sonne senkrecht steht, sey in P. Wird der Sonnenstrahl SP verlängert, so geht er durch den Mittelpunct der Erde. In A sey Alexandria. In diesen Punct stellte Eratosthenes die hohle Halbkugel CA so, daß der Stift AE in ihrem Mittel und zugleich senkrecht auf dem Horizonte stand, mithin verlängert durch den Mittelpunct der Erde gegangen seyn würde.

Dann beobachtete er den Schatten, welchen der Stift in der hohlen Halbkugel zur Zeit des Solstitii verursachte, und fand, daß er Mittags den fünfzigsten Theil des ganzen Umkreises d. i. 7° — 12′ betragen hat.

Da die Sonnenstrahlen SPT, SEB wegen der sehr großen Entfernung der Sonne von der Erde als parallel angenommen werden können; so sind die Winkel BET, ETP Wechselwinkel, deßwegen ist auch der Winkel ATP, daher der Bogen AP der fünfzigste Theil des ganzen Umfanges der Erde. Daher, wenn AP 5000 Stadien beträgt, so beträgt der ganze Umfang 50.5000 = 250,000 Stadien oder 31250 geometrische Schritte, wenn 8 Stadien für 1000 Schritte gerechnet werden.

Zu einer genauen Messung des Umfanges der Erde ist diese Methode mehrerer Ursachen wegen nicht brauchbar, indem Eratosthenes annahm, daß Sienes und Alexandria unter demselben Meridian liegen, daß beyde Städte 5000 Stadien von einander entfernt, und daß die Sonnenstrahlen mit einander parallel sind.

Dennoch kann dieses dazu dienen, sowohl den Scharfsinn dieses Geometers zu bewundern, als auch zu erkennen, wie viel Nützliches und Angenehmes sich aus dem Studium der Geometrie ableiten lasse.

§. IX.

§. IX.

Parallelogramme. Vierseitige Figuren. Vielseitige Figuren.

Ein Parallogramm ist eine vierseitige Figur, in welcher die entgegen gesetzten Seiten mitsammen gleichlaufend sind.

Ein Trapezoid ist ein Viereck, in welchem keine Seite mit der andern gleichlaufend ist.

Im Trapez sind zwey Seiten mit einander parallel.

Ein Rhombus, wenn nur die entgegen gesetzten Winkel, hingegen alle Seiten gleich groß sind.

Ein Rhomboid, wenn nur die entgegen gesetzten Winkel und die entgegen gesetzten Seiten gleich groß sind.

Vielseitige, vielwinkelige Figuren nennet man Vielecke, Polygone: z. B. Fünfecke, Sechsecke u. s. f. Sind die Seiten und die Winkel wechselweise gleich groß, so nennet man die Polygone regelmäßig, im Gegentheile unregelmäßig.

§. X.

1. Lehrsatz von den Dreyecken. Folgerungen hieraus. Winkel am Mittelpuncte. Transporteur. Ziehung einer Parallele im Dreyecke. Kepplers Messung des Umfanges der Erde. Addition der Winkel.

Wenn an was immer für einem geradlinigen Dreyecke (Fig. 20.) eine Seite verlängert wird; so ist der (dadurch entstandene) äußere Winkel den zweyen inneren und entgegen gesetzten gleich, und alle 3 Win-

kel eines Dreyeckes zusammen machen zwey rechte Winkel (d. i. 180^G) aus.

In dem Dreyecke ABC, wenn die Seite AC nach D verlängert wird, wird der Winkel BCD der äußere genannt. Dieser also wird den beyden innern entgegen gesetzten Winkeln A und B zusammen genommen gleich seyn.

Wird fürs erste CE der Seite AB parallel gezogen, so ist der äußere Winkel ECD dem innern und entgegen gesetzten BAC gleich, und der Winkel BCE ist dem Wechselwinkel ABC gleich. Also ist der ganze Winkel BCD den beyden Winkeln A und B zusammen gleich.

Die drey Winkel des Dreyeckes ABC zusammen genommen d. i. A, B und C sind zwey rechten Winkeln gleich, sie enthalten zusammen 180^G. Denn die Winkel BCD, BCA sind zusammen zwey rechten Winkeln gleich, aber BCD ist dem Winkel B und A gleich, daher sind die Winkel B, A und BCA zusammen so groß als zwey rechte Winkel.

Soll der Winkel am Mittelpuncte eines regelmäßigen Vieleckes angegeben werden, so darf man nur die Summe aller dieser Winkel, d. i. 360^G durch die Anzahl der Winkel, oder was eben so viel ist, durch die Anzahl der Seiten des gegebenen Vieleckes theilen. Die Zahl, welche man durch diese Theilung erhält, ist der Mittelpuncts-Winkel. Zieht man diesen von 180^G ab, so erhält man den Winkel am Umfange. So z. B. ist der Mittelpuncts-Winkel, im regelmäßigen Fünfecke $= \frac{360^G}{5} = 72^G$, im regelmäßigen Sechsecke ist er $= \frac{360^G}{6} = 60^G$, im regelmäßigen Siebenecke ist er $= \frac{360^G}{7} = 51\frac{3}{7}{}^G$ u. s. f.

Dann

Dann ist der Winkel am Umfange des regelmäßigen Fünfeckes $= 180^G - 72^G = 108^G$, der Winkel am Umfange des regelmäßigen Sechseckes ist $= 180^G - 60^G = 120^G$, jener am Umfange des regelmäßigen Siebeneckes ist $= 180^G - 51\frac{3}{7}^G = 128\frac{4}{7}^G$ u. s. f. Je größer also die Anzahl der Seiten eines regelmäßigen Vieleckes wird, desto kleiner wird der Winkel am Mittelpuncte dieses Vieleckes, und desto größer der Winkel am Umfange.

Jedes regelmäßige Vieleck, (Tab. III. Fig. 69.) enthält so viele gleich große, gleichschenkelige Dreyecke als das Vieleck Seiten hat. Die Grundlinien dieser Dreyecke sind die Seiten des Vieleckes. Wäre also eine Gerade z. B. 3,4 gegeben, um mit dieser ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen, so kann diese Aufgabe leicht aufgelöset werden, besonders wenn man mit einem zur Auftragung der Winkel dienlichen Werkzeuge, dem Transporteur, Rapporteur, versehen ist. Solche Werkzeuge bestehen aus einem Viertel- oder Halbkreise, der in seine Grade getheilt ist. Diese Werkzeuge gewähren aber nur wenig Genauigkeit, besonders wenn sie sehr klein, und die Theilstriche auf ihren Rändern nicht sehr fein sind.

Soll man also mit einer gegebenen Länge z. B. 3,4 ein regelmäßiges Vieleck, 1,2,3,4,5,6 von einer gegebenen Anzahl Seiten zeichnen, so sucht man den Mittelpunct und den Umfangswinkel. Man zeichnet dann an dem Anfangs- und an dem Endespuncte der gegebenen Seite zwey gleich große Winkel a und b, deren jeder dem halben Winkel am Umfange gleich seyn muß. Die Schenkel dieser Winkel werden sich in einem gewissen Puncte C schneiden. Dieser ist der Mittelpunct des verlangten Vieleckes, aus welchem dann der Kreis 4, 3, 2, 1, 5, 6 gezogen, und die ge-

gebene Seite 4,3 so oft herum getragen wird, als es angeht. Kommt man richtig wieder auf dem Punct 4, so ist ohne Fehler gearbeitet worden, was aber selbst bey vieler Übung nicht immer zutrifft.

Soll man (Fig. 22.) eine Linie 1,2 im Dreyecke abc so ziehen, daß sie mit einer Seite ab parallel ist, den Anfangspunct in ac, den Endespunct in bc hat; so wird 1,2 aus a auf ab getragen. Dadurch erhält man den Punct 0. Eine durch diesen mit ac Parallele gibt den Punct 2, und eine durch diesen mit ab Parallele wird der gegebenen Linie 1,2 gleich seyn. Diese Aufgabe ist für verschiedene Fälle der Geometral-Zeichnung sehr wichtig.

Die drey Winkel eines jeden Dreyeckes sind zusammen so groß, als die drey Winkel eines jeden andern Dreyeckes zusammen. Haben also zwey Dreyecke zwey Winkel mit einander gleich; so haben sie auch den dritten gleich; und sind zwey Winkel eines Dreyeckes bekannt, so ist es auch der dritte; denn man darf nur die Summe dieser beyden bekannten Winkel von 180° abziehen, so zeigt der Rest die Größe des dritten Winkels.

Der Nutzen dieses Satzes ist sehr groß. Aus ihm lehrte der berühmte Astronom Keppler den Umfang der Erde messen, ohne zur Sonne oder zu den Sternen seine Zuflucht zu nehmen.

Es seyen T und M (Fig. 21.) die Gipfel zweyer hinlänglich von einander entfernten Berge, und AB der dazwischen enthaltene Bogen, welcher genau gemessen worden ist. Ebenfalls müssen die Winkel CTM und CMT gemessen werden. Diese Winkel sind von dem Senkbley nach der Verlängerung des Halbmessers der Erde und dem Gesichtsstrahl TM entstanden. Die Summe dieser Winkel von 180° abgezogen, gibt den Winkel ACB, woraus man erkennt, der wievielte Theil des ganzen Umfanges der Bogen AB sey. Da nun seine Länge bekannt seyn muß; so läßt sich hieraus der ganze Umfang berechnen.

Ein

Ein anderer Geometer Ricciolius brauchte diese Methode auf dem Glockenthurme zu Muti und auf dem Gipfel des Berges Paterno, der von Bologna nicht weit entfernt ist. Er fand den Winkel CTM $= 90^G - 15^M - 7^S$, den Winkel CMT $= 89^G - 26^M - 13^S - 27^T$. Diese zusammen von 180^G abgezogen geben für den Winkel C $= 18^M - 39^S - 33^T$. Da der Abstand beyder Orte $= 20016\frac{1}{5}\frac{1}{0}\frac{1}{0}$ geometrische Schritte (von Bologna) betrug; so war es leicht, daraus die Länge eines Grades d. i. 64363 und für den ganzen Umfang 23,179680 geometrische Schritte zu finden.

Viel genauer haben neuere Geometer den Umfang der Erde gemessen. Aus den verschiedenen Messungen folgt, daß die Grade von den Polen an gegen den Äquator zu, kleiner werden, und im Gegentheil. Für den gegenwärtigen Gebrauch, wobey wir die Erde für eine Kugel annehmen können, legen wir mit Cassini die Resultate der Messung des Piccard zu Grunde, nähmlich für einen Grad 57060 Klafter d. i. 68 Pariser-Meilen und 472 geometrische Schritte. Daher wird der ganze Umfang der Erde 24649 Meilen und 920 geometrische Schritte enthalten; demnach weniger als es Riccioli fand, wenn man nähmlich annimmt, daß sich der Pariser-Fuß zu jenem von Bologna verhält, wie $1682\frac{2}{3}$ zu 1440.

Soll man (Fig. 23.) einen Winkel zeichnen, welcher so groß ist, als mehrere Winkel zusammen; so kann dieses auf mehrere Arten geschehen. Man kann am Anfange einer Geraden 1,2 einen der Winkel z. B. den Winkel a zeichnen, am Ende den andern Winkel b. Durch die Verlängerung der Schenkel erhält man den äußern Winkel c, der so groß ist, als die Winkel a und b zusammen.

Auf dieselbe Art läßt sich die Summe von mehreren Winkeln bestimmen.

Eben so leicht kann man die Summe der Winkel durch die Zeichnung der ihre Größe bestimmenden Kreisbögen angeben.

Aus dem, was von den Parallelen gesagt wurde, läßt sich eine Methode ableiten, jede geometrische Zeichnung in derselben Größe ohne Beyhülfe des Zirkel-Instrumentes geschwinde und sicher zu copiren, (abzuschieben). Das Original muß mit dem zum Nachzeichnen bestimmten Papiere in derselben Ebene liegen.

Von dieser für das Zeichnen wichtigen Anwendung wird in den Vorlesungen ausführlich gehandelt.

§. XI.

Von der Congruenz überhaupt. Figuren sind einander gleich oder ähnlich. 1. Satz der Gleichheit der Dreyecke. Anwendung für das gleichschenkelige und das gleichseitige Dreyeck. Das regelmäßige 6eck. Von Zeichnung der Dreyecke.

Unter gleichen Größen versteht man hier jene, die in nichts, unter ähnlichen aber jene, die nur in der Größe von einander verschieden sind.

Gerade Linien sind einander gleich, wenn sie sich wechselweise decken. Man stellet sich nähmlich vor, daß die eine Linie auf die andere so gelegt werde, daß der Endespunct der zweyten auf den Endespunct der ersten, zugleich auch der Anfangspunct der zweyten auf den Anfangspunct der ersten zu liegen kommt.

Zwey oder mehrere Winkel sind einander gleich, wenn sie sich decken, d. i. wenn, da die Spitzen auf einander gelegt werden, auch jeder Schenkel des ersten Winkels in den Schenkel des andern Winkels fällt, wenn auch die ganze Schenkel nicht gleich lang sind, vermöge der Erklärung des Winkels.

Dreyecke sind einander gleich und ähnlich, wenn sie sich wechselweise decken. Dem Flächenraume nach können Dreyecke einander gleich seyn, und sich dennoch nicht decken.

Figuren sind einander deckend (congruent), wenn ihre Gränzen einander decken. Linien und Winkel müssen sich decken, wenn sie gleich groß sind.

Wenn zwey Dreyecke zwey Seiten und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich groß haben; so haben sie auch die dritte Seite, den ganzen Flächenraum, und die anderen beyden, den gleichen Seiten entgegen gesetzten Winkel gleich groß. (Fig. 24.)

In den Dreyecken ABC, DEF seyen die Seiten AB und BC den Seiten DE und EF des andern Dreyeckes gleich, und der Winkel B sey so groß als der Winkel E; so wird auch die dritte Seite AC der Seite DF, die Winkel A und C den Winkeln D und F, und das ganze Dreyeck ABC dem ganzen Dreyecke DEF gleich seyn. Denn wird die Seite AB auf die ihr gleiche Seite DE gelegt, so wird sie mit dieser congruent seyn, und weil der Winkel B dem Winkel E gleich ist; so wird auch die Seite BC auf die ihr gleiche Seite EF fallen, daher der Punct C auf den Punct F. Also wird die Seite AC mit der Seite DF, der Winkel A mit dem Winkel D, der Winkel C mit dem Winkel F und das ganze Dreyeck ABC mit dem ganzen Dreyecke DEF congruent seyn.

Unter der Grundlinie (Basis) eines Dreyeckes kann jede Seite verstanden werden; die Höhe ist sodann die der Grundlinie Normale, welche aus der der Grundlinie entgegen gesetzten Spitze gezogen wird.

Die Gerade also, welche gleich große Geraden und Parallelen mit einander verbinden, sind mit einander parallel und gleich groß; denn ist (Fig. 25.) BC der AD gleich und parallel, und man zieht AC, so sind die Winkel BCA, DAC Wechselwinkel. Weil

nun

nun in den beyden Dreyecken BCA und DAC die Seiten BC und AC den Seiten AD und AC gleich, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel, auch gleich sind; so sind auch die übrigen Seiten gleich groß, und die Winkel DCA, CAB Wechselwinkel; deßwegen sind die Geraden AB, CD einander gleich und parallel.

Ist (Fig. 26.) das Dreyeck ABC gleichschenkelig, nähmlich die beyden Seiten AB, BC einander gleich; so müssen die Winkel A, C an der Grundlinie einander gleich seyn. Denn nimmt man an, das Dreyeck sey zweymahl gezeichnet, und BAC werde umgekehrt auf bac gelegt; so wird wegen Gleichheit der Seiten unter sich AB der Seite ab congruent seyn, und wegen der gleichen Winkel B und b wird BC auf der ihr gleichen Seite ab liegen, weil, da die Puncte A und C die Puncte c und a decken, eine Seite mit der andern congruent ist; deßwegen deckt der Winkel A den Winkel c und C den Winkel a. Diese Winkel sind also unter sich gleich, deßwegen auch der Winkel A mit dem Winkel a gleich ist.

Da das gleichseitige Dreyeck zugleich gleichschenkelig ist, so sind dessen Winkel unter sich gleich; deßhalb enthält jeder 60°.

Ist das rechtwinkelige Dreyeck auch zugleich gleichschenkelig, so wird jeder der spitzigen Winkel die Hälfte eines rechten Winkels ausmachen, d. i. 45° enthalten.

Ist (Fig. 27.) ABC der Durchmesser eines Kreises ADF, dessen Mittelpunct C, und wird in B als dem Mittelpuncte mit der Weite BC ein anderer dem ersten gleicher in D und F ihn schneidender Kreis gezeichnet; so sind die Geraden CD, DB unter sich und dem Halbmesser gleich.

Also wird das Dreyeck BCD gleichseitig seyn, und der Winkel DCB, so wie der Bogen DB nir 60° oder den 6ten Theil des ganzen Umfanges ADF

ent-

enthalten. Deßwegen wird, wenn man den Halbmesser aus A auf den Umfang aufträgt, ein regelmäßiges Sechseck, d. i. ein Vieleck mit 6 gleichen Seiten und 6 gleichen Winkeln, dem Kreise eingeschrieben.

Hieraus wird ebenfalls begreiflich, wie man durch Beschreibung zweyer Kreise auf einer gegebenen Geraden ein gleichseitiges Dreyeck zeichnen kann.

Diesem nach kann man ein Dreyeck zeichnen, wenn alle drey Seiten, oder auch nur zwey Seiten gegeben sind. Man erhält nähmlich im 1ten Falle dreyerley Halbmesser, im 2ten Falle (nähmlich bey Beschreibung des gleichschenkeligen Dreyeckes) zweyerley Halbmesser, wenn CD die 3te ungleiche Seite die Grundlinie ist. Die Summe zweyer Seiten muß aber alle Mahl größer als die dritte Seite seyn, weil sonst kein Durchschnittspunct erhalten werden kann.

§. XII.

2. Lehrsatz der Congruenz der Dreyecke. Gleichschenkelige Dreyecke. Kürzeste Art der Höhenmessung.

Wenn in zwey Dreyecken zwey Winkel und die dazwischen liegenden Seiten gleich groß sind, so sind auch die anderen Seiten, und der ganze Flächenraum derselben gleich groß.

Es seyen (Fig. 24.) die Winkel A und C den Winkeln D und F, und die Seite AC der Seite DF gleich; so werden auch die beyden Seiten AB und BC den beyden Seiten DE und EF, und der ganze Raum ABC dem ganzen Raume DEF gleich seyn. Denn wird die Seite AC auf die ihr gleiche Seite DF gelegt; so sind die Winkel A und C mit den Winkeln D und E congruent, und daher haben auch die Seiten AB, BC mit den Seiten DE und EF dieselbe Lage. Daß sie auch in der Länge übereinkommen, ist aus dem klar, daß, wenn

der

der Punct B der Seite AB nicht in den Punct B fiele, sondern entweder darüber oder darunter, so würde die Seite dann entweder innerhalb oder außerhalb der Seite EF fallen, also wäre der Winkel C größer oder kleiner als der Winkel F wider die Voraussetzung. Also fällt der Punct B auf den Punct E, und die Seiten des einen Dreyeckes sind mit den Seiten des andern congruent, der Winkel B mit dem Winkel E und das ganze Dreyeck ABC mit dem ganzen Dreyecke DEF.

Ist die Seite AC der Seite DF, der Winkel A dem Winkel D, und der Winkel B dem Winkel E gleich; so wird auch C dem Winkel F gleich seyn; deßwegen sind auch die übrigen Seiten und die ganzen Dreyecke einander gleich. So oft also in zwey Dreyecken zwey Winkel und eine Seite gleich groß sind, so sind die Dreyecke selbst einander gleich.

Wenn in dem Dreyecke ABC (Fig. 26.) die Winkel A, C an der Grundlinie gleich groß sind; so sind auch die in diesen entgegen gesetzten Seiten gleich; denn denkt man sich das Dreyeck zweymahl und ABC umgekehrt auf das Dreyeck abc gelegt, so ist wegen Gleichheit der Winkel der Winkel A mit dem Winkel C congruent, und weil AC der Seite ac gleich ist; so wird der Winkel c mit dem Winkel a congruent, und daher AB mit bc und CB mit ab. Daher AB gleich BC ist.

Wenn also in einem rechtwinkeligen Dreyecke einer der spitzigen Winkel die Hälfte eines rechten beträgt; so ist das Dreyeck selbst ein gleichschenkeliges Dreyeck.

Aus diesem läßt sich die kürzeste Methode ableiten, die Höhen der Gebäude, Bäume u. dgl. zu messen. (Fig. 28.) Aus irgend einer festen Materie (z. B. Holz) wird ein Dreyeck MCN, das in C einen rechten Winkel hat, und gleichschenkelig ist, verfertigt. Es wird in M so an das Auge gehalten, daß die andere Seite NC beständig vertical bleibt (was

mit

mit Hülfe eines in N befestigten Senkbleyes gemacht werden kann); dann wird so lange gegen den Thurm oder zurück gegangen, bis der längst der Seite MN gezogene Visirstrahl in den Gipfel T trifft. Der Endespunct des andern Visirstrahles M wird bemerkt. Die Höhe QT wird der Weite QM gleich seyn. Da die Linien NC und TQ parallel sind, und der Winkel TQC dem Winkel NCM gleichet, so ist TQM ein rechter Winkel. Weil nun der Winkel M die Hälfte eines rechten ist, so ist es auch der Winkel T, und das Dreyeck MQT ist gleichschenkelig, also die Seite TQ der Seite MQ gleich, und die ganze Höhe des Thurmes TR ist den beyden Geraden MQ, QR zusammen gleich, welche man messen kann.

Aus demselben Lehrsatze folgt auch, daß in jedem Parallelogramme die einander entgegen gesetzten Seiten und Winkel gleich sind, (Fig. 25.) und daß es von der Diagonale AC in zwey gleiche Theile getheilet wird. Denn in den Dreyecken ABC, ACD sind, wegen der gemeinschaftlichen Grundlinie AC, DCA und CAB, DAC und ACB Wechselwinkel; daher werden auch die übrigen Seiten und Winkel und die ganzen Dreyecke einander gleich seyn. Aus diesen Sätzen folgt, daß im gleichseitigen Dreyecke die Höhen einander gleich sind, daß das gleichschenkelige Dreyeck zweyerley, das ungleichseitige Dreyeck aber dreyerley Höhen hat.

§. XIII.

3. Satz der Congruenz der Dreyecke. Zwey Kreise können sich nur in zwey Puncten schneiden.

Wenn in zwey Dreyecken alle drey Seiten gleich groß sind, so sind auch die diesen Seiten entgegen gesetzten Winkel, und die Dreyecke selbst einander gleich. (Fig. 29. Tab. II.)

In dem Dreyecke ABC, DEF seyen die Seiten AB, BC, CA den Seiten DE, EF und FD gleich; so werden auch die Winkel A, B, C den Winkeln D, E, F gleich seyn. Denn wird die Seite DF auf die ihr gleiche Seite AC gelegt, so fällt der Scheitelpunct E in B. Gesetzt E fiele außer B in irgend einen andern Punct O, so folgete daraus, daß ein Theil des Winkels größer wäre, als der ganze Winkel. Denn weil vermöge der Voraussetzung AB der Seite AO, und BC der Seite OC gleich ist; so sind, wenn man BO zieht, die Dreyecke BAO, BCO gleichschenkelig, und deßhalb der Winkel ABO dem Winkel AOB gleich. Da dieser kleiner und nur ein Theil des Winkels COB ist; so muß auch ABO kleiner seyn, als derselbe Winkel BOC.

Weil aber auch das Dreyeck BCO gleichschenkelig seyn soll; so wird der Winkel COB dem Winkel CBO gleich seyn; also wäre der Winkel ABO kleiner als der Winkel OBC d. i. der Theil wäre größer als das Ganze, was nicht seyn kann. Es könnten daher auch die Seiten AB, BC, den Seiten AO, OC nicht gleich seyn, also fällt der Punct O in B, daher müssen die Dreyecke DEF, ABC congruent seyn.

Auf ähnliche Art läßt sich beweisen, daß der Punct O auch nicht innerhalb des Dreyeckes seyn kann.

Zwey Kreise (Fig. 30.) können sich also nur in zwey Puncten schneiden. Denn verbindet die Gerade AC die Mittelpuncte zweyer sich in B und H schneidender Kreise, und man zieht die beyden Geraden AB und BC; so folgt aus dem Vorherbewiesenen, daß man außer B keinen andern Punct finden kann, wo die zwey Geraden AG und GC den beyden Geraden AB und BC gleich wären, was doch seyn müßte, wenn der Punct G in jedes Kreises Umfang läge; daher würden sich die Kreise in diesem Puncte wieder schneiden.

Aus den 3 Lehrsätzen der Congruenz der Dreyecke folgt auch der Beweis von der im §. IV. gegebenen Methode, einen Winkel zu zeichnen, welcher so groß ist, als ein gegebener Winkel. In einerley Kreise nähmlich, oder

in Kreisen von gleich großen Halbmessern gehören zu gleich großen Bogen auch gleich große Sehnen, und umgekehrt; sind die Sehnen von gleicher Größe, so sind es auch die Bogen. (Fig. 2.). Um diese Wahrheit einzusehen, betrachte man die beyden Dreyecke FCK und HCL; in diesen sind die Seiten FC, KC und HC, LC als Halbmesser desselben Kreises gleich groß; eben so sind es die Winkel FCK, HCL als Vertical-Winkel; demnach ist die 3. Seite des einen der 3. Seite des andern Dreyeckes gleich, d. i. FK = HL.

Legt man die Sehne FK so auf die andere Sehne HL, daß der Punct F auf den Punct H, und der Punct K auf den Punct L fällt; so muß der Bogen FK den Bogen HL decken; denn es ist jeder Punct des erstern Bogens von C so weit entfernt, als jeder Punct des andern Bogens von diesem Puncte.

Wenn die Winkel zu gleichen Bögen eines Kreises gehörten; so würden sie einander gleich seyn. Denn da die Bögen sich decken, so müssen auch die geraden Linien, welche die Endpuncte der Bögen verbinden, sich decken, also ist FK = HL, mithin sind die Dreyecke FCK, HCL, einander congruent, also die Winkel bey C von gleicher Größe.

§. XIV.

Jeden geradlinigen Winkel halbiren. Von der Dreytheilung des Winkels. Halbirung gerader Linien. Aus einem Puncte auf eine gerade Linie eine Normale zu führen 1. und 2. Fall. Der Halbmesser der Sehne normal u. s. f. Theilung gerader Linien.

Soll ein geradliniger Winkel HCI (Fig. 32.) in zwey gleich große Theile getheilt werden; so wird aus seiner Spitze C als dem Mittelpuncte mit was immer für einer Zirkelweite ein Bogen EAL beschrieben, der den andern Schenkel in B schneidet. (Aus C werden gleiche Längen auf jeden Schenkel getragen)

sen). Dann werden wieder mit einer Zirkelweite aus A und B Bögen beschrieben, welche sich in K schneiden. Eine gerade Linie von diesen Puncten nach der Spitze C gezogen theilt den gegebenen Winkel HCI in zwey gleich große Theile.

Denn in den Dreyecken ACK, BCK sind vermöge der Construction die Seiten AC, AK den Seiten CB, BK gleich, und die Grundlinie CK in beyden gemeinschaftlich.

Also sind die den gleichen Seiten entgegen gesetzten Winkel einander gleich; daher ist der Winkel ACK dem Winkel KCI gleich. Spannet man (Fig. 31.) die Schnur oder Kette von 1 gegen 2, und nimmt dieselbe Länge von 1 gegen 3; so findet man den Punct m, wenn man die Schnur zusammen legt, d. i. $\frac{2,3}{2}$.

So theilt man auf dem Felde einen Winkel in 2 gleiche Theile. Die Auflösung der Aufgabe jeden Winkel in drey gleiche Theile durch Zirkel und Lineal zu theilen ist von den Mathematikern vergeblich gesucht worden. Ein Geometer, Nahmens Vieta, gab folgende mechanische Auflösung dieser Aufgabe.

Es sey (Fig. 33.) z. B. der Winkel HCI in drey gleiche Theile zu theilen.

Aus C als dem Mittelpuncte wird mit was immer für einem Halbmesser der Halbkreis ADB beschrieben, welcher den Schenkel CI in B, und die unbestimmt weit verlängerte Linie HC in A und D schneidet. Das Lineal BF wird so lange um den Punct B herum bewegt, bis es der Geraden AD in irgend einem Puncte F so begegnet, daß der zwischen diesem Puncte und der Kreislinie enthaltene Theil der Geraden CA gleich gefunden wird (was geometrisch nicht gemacht werden kann). Werden die Bögen AG, GK dem Bogen DE gleich gemacht, und die Geraden GC, KC gezogen; so ist der Winkel HCI in drey gleiche Theile getheilet. Denn wird die Gerade CE gezo-

gen; so ist diese dem Halbmesser CA gleich, welchem vermöge der Construction die Gerade EF gleich ist, also ist das Dreyeck CEF gleichschenkelig, deßwegen sind auch die Winkel ECF, EFC einander gleich. Weil nun der äußere Winkel CEB das Doppelte dieser beyden Winkel ist, da auch das Dreyeck ECE gleichschenkelig ist, so wird auch der Winkel CBE das Doppelte des Winkels F seyn.

Also wird der äußere Winkel BCH, der den zwey innern und entgegen gesetzten gleich ist, das Dreyfache des Winkels F oder ECD seyn, welcher diesem gleich ist, deßwegen ist er auch dreymahl so groß als der Winkel ACG oder GCK. Also ist KCB der dritte Theil des ganzen Winkels HCB, mithin ist dieser in drey gleiche Theile getheilt.

Wenn (Fig. 32.) die Puncte A und B mit einer Geraden AB, welche der Geraden CK in D begegnet, verbunden werden, so sind die Winkel ACD, BCD, welche zwischen gleichen Seiten AC, CB der Dreyecke ACD, BCD enthalten sind, einander gleich.

Also wird auch die Grundlinie AD der Linie DB gleich seyn, und deßwegen eine bestimmte Gerade AB in zwey gleiche Theile leicht getheilt werden können.

Denn es ist hinlänglich, wenn aus A und B mit einer und derselben Weite zwey sich in den Puncten C und K schneidende Bögen beschrieben werden, und diese durch eine Gerade CK verbunden, geben den verlangten Mittelpunct D.

Aus demselben zweyten Lehrsatze folgt auch, daß die Winkel CDA, CDB einander gleich sind, und deßwegen CD auf AB normal ist. Soll also aus einem Puncte C auf eine gerade Linie FG eine Senkrechte (Normale) gezeichnet werden; so wird aus C mit was immer für einer Weite CA ein Bogen AB beschrieben, und ist nach dem Vorigen der Durchschnittspunct K gefunden, so wird die Gerade CK

ge-

gezogen, welche der gegebenen Geraden in dem Puncte D senkrecht (normal) ist.

Soll (Fig. 32) aus einem in einer Geraden FG gegebenen Puncte D eine Senkrechte (Normale) errichtet werden; so werden die willkührlich großen, jedoch gleichen Theile DE, DB aus D in A und B aufgetragen. Aus A und D werden mit gleichen Weiten auf beyden Seiten der gegebenen Geraden die Durchschnittspuncte C oder K bestimmt; CK oder CD ist die verlangte Normale; denn in den Dreyecken CDB, CDA werden die Seiten und deßhalb auch die Winkel CDB, CDA gleich seyn.

Aus diesem folgt auch, daß in dem Kreise AEBL2 die Gerade CD, welche durch den Mittelpunct C geht, wenn sie die Sehne AB in zwey gleiche Theile theilet, mit ihr zwey rechte Winkel macht; und umgekehrt, wenn sie der Sehne normal ist, theilet sie diese in zwey gleiche Theile.

Theilet man (Fig. 34.) eine Seite AB eines Dreyeckes ABC in wie viel immer gleich große Theile, A1, 1.2, 2.3, 3B u. s. f. und zieht durch die Theilungspuncte 1, 2, 3, mit der anliegenden Seite BC gleichlaufende Linien 1m, 2n, 3o, so wird dadurch auch die dritte Seite AC in eben so viele gleich große Theile Am, mn, no, oc getheilet seyn.

Denn werden durch die Puncte m, n, o mit AB gleichlaufende md, nf, or gezogen; so entstehen gleich große Dreyecke Aim, mdn, nfo und orC; in diesen ist A1 so groß als 1m, 1m so groß als nf, nf so groß als or. Jede dieser Linien ist so groß als einer der gleichen Theile der Linie AB; die Seiten 1m, dn, fo, rC sind ebenfalls von gleicher Größe, daher auch die dritte Seite Am, mn, no, oC.

Soll daher (Fig. 35.) eine Linie AB in eine gewisse Anzahl gleicher Theile z. B. 5 getheilet werden;

so

so verbindet man mit dieser an ihrem Anfangspuncte A eine Gerade AC von willkührlicher Länge, trägt auf diese gleich große Theile A1, 1.2, u. s. f., verbindet den letzten 5 mit dem Endespuncte B und zieht BC. Die mit dieser Parallelen 5B, 4.o, 3n u. s. f. geben die verlangten 5 gleich großen Theile Bo, on u. s. f. Jeder der gleich großen Theile der Linie wird ein aliquoter Theil derselben genannt.

§. XV.

Von den verjüngten Maßstäben. Gemäße Linien.

Weil jedes Maß an sich willkührlich ist, wenn es nur mit der auszumessenden Größe von einerley Art ist; so kann man bey Figuren auf dem Papiere auch eine kleine gerade Linie für das Maß der auszumessenden Linie wählen. Dabey ist es gleich viel, was das Maß für einen Nahmen haben soll. Der Bequemlichkeit wegen gibt man einer so gewählten Linie den Nahmen eines im Großen üblichen Maßes, und theilt sie eben so ein, wie die im Großen gebräuchlichen Maßstäbe. Einer jeden geometrischen Zeichnung muß alsdann der verkleinerte; oder, wie man zu sagen pflegt, verjüngte Maßstab, (der gemeine oder der Transversal-Maßstab) beygefüget werden.

Eine Linie auf dem Papiere ist einer Linie auf dem Felde, am Gebäude, u. dgl. gemäß, wenn sie nach dem verjüngten Maßstabe so groß ist, als die Linie auf dem Felde, am Gebäude, u. dgl. nach dem im Großen üblichen Maße.

Die geradlinigen Maßstäbe theilt man gewöhnlich in zwey Classen, nähmlich in die gemeinen und

in

in die Transversal-Maßstäbe. Von diesen letztern kann erst in der 2. Abtheilung gehandelt werden.

Eigentlich gehörte das, was von Verfertigung der Maßstäbe gesagt wird, gänzlich zu den Proportional-Linien. Weil aber die Zeichnung der verjüngten Maßstäbe, besonders der gemeinen, eine vorzüglich nützliche Übung für die Anfänger ist; auch ein beträchtlicher Zeitaufwand nöthig wird, um in dem Zeichnen der Maßstäbe recht geübt zu werden: so ist dieser Gegenstand früher berührt worden.

Die Auflösung der Aufgabe, einen verjüngten (gemeinen) Maßstab zu zeichnen, wird in der Schule öfters an der Tafel vorgenommen, wo auch die dießfalls nöthigen Bemerkungen vorkommen. Die Zeichnung eines verjüngten Maßstabes wird allen Schülern ohne Ausnahme zu einer unerläßlichen Aufgabe der eigenen Übung gemacht.

§. XVI.

Durch 3 Puncte einen Kreisbogen führen. Bestimmung oder Übertragung der Puncte einer Figur in eine andere Figur. Mit einem kurzen Lineale eine längere Linie ziehen. Bestimmung eines 3. Punctes mit 2 sehr nahe an einander liegenden Puncten. Verlängerung einer geraden Linie. Aufnahme eines Dreyeckes, eines Vieleckes, einer Gasse. Unzugängliche Linien. Messung der Linien auf dem Felde.

Soll (Fig. 36. 37.) durch gegebene Puncte ABD ein Kreisbogen geführt werden, so verbindet man jeden dieser Puncte A mit dem nächsten B. Dadurch erhält man die Linien AB, BD, betrachtet diese als

die

die Sehnen, und errichtet in ihren Mittelpuncten die Normalen 1C, 2C; wo diese sich verlängert schneiden, ist der Mittelpunct C eines Kreises, in dessen Umfange die Puncte ABD liegen.

Auf ähnliche Art kann jeder Kreisbogen fortgesetzt, oder der Mittelpunct einer Kreisfläche gefunden werden. Den zu einem gegebenen Kreisbogen gehörigen Halbmesser nennt man den Krümmungshalbmesser. Eben so leicht kann man mit einem Kreisbogen ABC parallele Bögen zeichnen.

Sollten (Fig. 38. und 39.) in dem Vierecke abcd Puncte bestimmet werden, welche gegen die Seiten dieselbe Lage haben, wie die in dem Vierecke mo u l, gegebenen Puncte 1, 2, 3, 4 u. s. f. gegen die Seiten dieses Vierecks; so können diese Puncte als die Spitzen von Dreyecken betrachtet werden, deren Grundlinie bald mo, bald u, o ist, je nachdem die Durchschnitte, durch welche die Puncte sich geben, mehr oder weniger schief ausfallen.

Sollte dieses nicht durchaus angehen, so können in einer oder der andern Seite Hülfspuncte r, R zur genaueren Bestimmung der überzutragenden Puncte angenommen werden.

Wären (Fig. 40.) zwischen den Puncten A und B mittelst des Zirkel-Instrumentes und eines Lineales, welches kürzer ist, als die Weite AB, mehrere Puncte zu bestimmen, die in der Geraden AB liegen; so wird mit derselben Zirkelweite, die größer als die halbe Linie AB seyn muß, sowohl aus A als aus B ein Bogen beschrieben; dadurch erhält man die Puncte 1 und 2, von welchen aus mittels der Durchschnitte die Zwischenpuncte x, y, z, v u. s. w. leicht gefunden werden können.

Ebenfalls wenn (Fig. 41.) ein rechter Punct N bestimmet werden soll, der mit den sehr nahe an einander befindlichen Puncten CD in derselben Geraden liegt, kann man mit derselben Zirkelweite die Puncte 1 und 2 und

so-

sodann aus diesen den Punct N bestimmen. Weil der Halbmesser einen Bogen von 60° abschneidet, und jede gerade Linie, auch jeder Kreisbogen in zwey gleich große Theile getheilt werden kann; so läßt sich hieraus eine Methode ableiten, am Endespuncte A einer Geraden ab eine Senkrechte zu errichten. (Fig. 42.)

Denn wird mit einer gewissen Weite aus A ein Kreisbogen beschrieben, aus dem Puncte 3 der Halbmesser zweymahl aufgetragen; so erhält man die Puncte 1 und 2; theilet man nun den Bogen 1.2 in zwey gleich große Theile, so ist mA die verlangte Senkrechte oder Normale.

Soll (Fig. 43.) jenseits des Hindernisses H ein Punct r, o bestimmet werden, der mit den Puncten Ab in einer Geraden ao liegt; so wird zuerst aus b die Normale bn errichtet. Dann trägt man den Winkel Anb auf die andere Seite von bn, und sucht 1, 2, 3; so ist die Lage der Geraden nr bestimmt. Wird aus n auf no, An getragen, so erhält man den Punct o. Auf ähnliche Art kann man mehrere Puncte bestimmen, die mit r, b und A in derselben Geraden liegen.

Ist (Fig. 44.) abc ein Dreyeck auf dem Felde, welches aufgenommen werden soll, so werden entweder nur eine Seite und die beyden anliegenden Winkel, oder zwey Seiten, und der dazwischen enthaltene Winkel, oder alle 3 Seiten auf das Papier übertragen, um eine Figur zu erhalten, die der Figur auf dem Felde gemäß ist.

Weil alle geradlinige, regelmäßige und unregelmäßige Figuren sich durch Diagonal-Linien in Dreyecke zertheilen lassen: so ist man nach dieser Theilung im Stande jeden Platz aufzunehmen.

Soll (Fig. 45.) Der Grundriß einer Gasse abcdefgh verfertigt werden, so ist es hinlänglich, wenn beyläufig in ihrem Mittel eine aus mehreren Ge-

ra-

raden Linien bestehende Directions-Linie 1.2.3.4 ausgesteckt, und sodann die Abstände der vorzüglichsten Wendungspuncte b, c, d bestimmet werden.

Irgend eine Gerade ist entweder an ihrem Anfangs- und Endespuncte zugänglich, oder sie ist es nur in einem dieser Puncte, oder sie ist gänzlich unzugänglich.

Im ersten Falle wird (Fig. 46.) ein Punct n angenommen, 2n und 1n ausgesteckt, sodann beyde verlängert, so daß mx = 2n und ny = 1n wird.

Es wird xy die verlangte Weite seyn.

Ohne m2 und m1 zu verlängern kann 1.2 gefunden werden, wenn nebst der Länge von n1 und n2 auch der Winkel n aufgenommen wird.

Im zweyten Falle (Fig. 47.) muß wieder ein Punct n angenommen werden; von diesem wird nach 1 die Gerade 1n ausgesteckt; es kann hieraus leicht ein Dreyeck gezeichnet werden, dessen eine Seite der Linie 1n gemäß, und dessen Winkel a und b den Winkeln 1 und n gleich sind.

Hierdurch wird die Entfernung 1 2 gefunden.

Im dritten Falle (Fig. 48.) wird eine Gerade von willkührlicher Länge MO ausgesteckt, eine ihr gemäße Linie mo aufgetragen, und sodann die Winkel 1, 2, 3 und 4 aufgenommen, dadurch erhält man ein Viereck moab auf dem Papiere, das dem Vierecke MOAB auf dem Felde ähnlich ist.

Wenn (Fig. 49.) in einer Ebene auf dem Felde eine gerade Linie ab zu messen ist; so bedienet man sich sehr oft der Meßkette nebst 10 eisernen Nägeln. Die Meßkette ist von starkem Eisendrahte verfertiget, und in 10 Klafter und jede Klafter meistens in 6 oder 12 Gelenke jedes von 1′ oder 2 Schuh Länge

ge getheilet. Die Klaftern werden durch größere, die Gelenke durch kleinere Ringe zusammen gehängt.

Da nun einer den Anfang der Kette an den Punct a fest anhält, so legt ein anderer das Ende der Kette, indem er von a nach b gerichtet wird, in einem Puncte o der Geraden ab nieder, steckt in diesen Punct einen der 10 Nägel ein, und zieht sodann die Kette gegen b weiter, bis ihr Anfang an den Nagel c kommt, woran dieser Punct der Kette wieder fest gehalten wird, bis der zweyte Nagel d so wie der erste c in der Geraden ab eingesteckt ist. Eben so werden alle folgenden Nägel durch die vorher eingesteckten bestimmt.

Der Letzte zieht jeden Nagel aus, so bald der folgende eingesteckt ist, und so oft er 10 in die Hände bekommt, so merkt er 100° an, und gibt die Nägel wieder an den ersten Gehülfen ab.

Da die Meßkette ihres Gewichtes wegen zuweilen unbequem ist, auch dieselbe, wenn sie über irgend eine Vertiefung gezogen wird, sich niemahls ganz gerade ziehen läßt; so bedient man sich besser bey kleinen Vermessungen einer 5 oder 10° langen gehörig zubereiteten Schnur, von gleicher Eintheilung mit der Meßkette.

Nächst dieser ist zur Längenmessung das Klaftermaß nöthig. Zuweilen gebraucht man auch zwey 12′ lange, gehörig eingetheilte Stangen. Man legt die erste derselben wagerecht auf die Linie ab, von a gegen b, und hält sie so lange fest, bis die zweyte Stange an die erste angelegt ist, und so fort bis zum Ende der zu messenden Linie.

Steckt man vorläufig beynahe von 50 zu 50° oder von 10 zu 10° in der zumessenden Geraden Stäbe ein, und spannet von einem bis zu dem nächst

fol-

folgenden eine Schnur, so kann desto leichter längs dieser fortgemessen werden.

Ist keine große Schärfe erforderlich, so kann auch jede in einer Ebene liegende Linie durch das bloße Klaftermaß, nähmlich durch Umschlagung desselben, gemessen werden.

Weil unter dem Abstande zweyer Puncte nicht immer jene Linie verstanden wird, welche von dem einen zu dem andern ausgesteckt werden kann; so muß, wenn zwischen den gegebenen Puncten a und b sich irgend ein Hinderniß, etwa ein Hügel u. d. gl. vorfinden sollte, der horizontale Abstand dieser Puncte angegeben werden. Es ist nähmlich ab = 1 + 2 + 3 + ... + 13 u. s. w. wenn die Längen 1, 3, 3 . . . — 13, wagerecht sind. (Fig. 49.)

§. XVII.

Von dem Kreuz-Diopter, Kreuzmaße (Winkelkreuze). Fortsetzung des vorigen §es.

Werden (Fig. 54.) zwey mit Dioptern (Absehen), versehene Lineale rechtwinkelig auf einander befestiget, so gibt dieß ein sehr bequemes Werkzeug (Kreuz-Diopter, das Winkelkreuz, Kreuzmaß) in jedem Falle eine Normale zu errichten, Parallelen zu ziehen, unzugängliche Entfernungen zu messen und Gegenden aufzunehmen.

Soll (Fig. 55.) die krumme Linie 1, 2, 3, 4, 5, 6 aufgenommen werden, so ist es hinlänglich, wenn längs dieser die Geraden ab und bc ausgesteckt worden sind; denn es werden dann die Krümmungs- und Wendungspuncte alle Mahl durch die Normale a.b, c.d, nf, tu leicht bestimmt werden können, wenn man das Kreuzmaß so stellet, daß ein Visirstrahl ab

oder bc in der Standlinie ab, bc liegt. Die Senkrechten nennet man die Ordinaten, die Abstände au, ai, a g. ꝛc. die Abscissen.

Ist abcde ein Theil des Umfanges eines Feldes oder eine Straße (Fig. 56.) u. dgl. so wird man auch die stumpfen Winkel abc, bcd, cde erhalten, wenn das Kreuzmaß z. B. zuerst in b gestellt, und ein Diopter in die Ebene bc gebracht wird; dann muß die Normale b2 abgesteckt werden.

In einem willkührlichen Puncte 2 derselben wird das Kreuzmaß wieder aufgestellet, 2 1 ausgesteckt und gemessen; es kann sodann leicht ein Dreyeck gezeichnet werden, das dem Dreyecke b2 1 gemäß ist.

Auf dieselbe Art wird in allen Berührungspuncten c, d u. s. f. gearbeitet.

Um die Länge einer krummen Linie abcde anzugeben, wird eine gewisse Länge, auf dem Papiere mit dem Zirkel, auf dem Felde mit der Schnur, Meßkette, Latte genommen, und aus dem Anfangspuncte aufgetragen. Dadurch erhält man die Puncte 1, 2, 3 u. s. f. Je kleiner dieser messende Theil ist, desto mehr nähert man sich der Länge der krummen Linie.

Es wird nähmlich hierbey angenommen, daß die krumme Linie abcde aus den Geraden a1, 1, 2, 3, 4 u. s. f. zusammen gesetzt ist.

Ist ab eine Linie auf dem Felde (Fig. 57. Tab. III.) und man soll in einer gewissen Entfernung von derselben eine Parallele ziehen; so kann dieses mittelst des Kreuz-Diopters geschwind und sicher zu Stande gebracht werden.

Denn man darf nur in 2 beliebigen Puncten 1 und 2 der Geraden ab das Werkzeug so aufstellen, daß ein Visirstrahl in der Ebene ab liegt, dann die Normalen 1, 3 und 2, 4 ausstecken und aus 1

und 2 gleiche Längen auftragen; so werden dadurch die Puncte 3 und 4 erhalten, welche in einer mit ab Parallelen liegen.

Sollte man das Werkzeug in der gegebenen Linie nicht aufstellen können; so muß vorher mit dieser eine Parallele ausgesteckt werden. (Fig. 58.)

Soll (Fig. 59.) ein gewisser Winkel amo auf das Feld übertragen werden, so wird dieses mittelst des verjüngten Maßstabes sehr leicht bewerkstelliget, wenn auf dem Papiere von m gegen a eine gewisse Länge aufgetragen, in dem dadurch erhaltenen Puncte 1 die Normale 1,2 errichtet, und gemessen, endlich auf dem Felde ein Dreyecke AMO ausgesteckt wird, das dem Dreyecke amo auf dem Papiere gemäß ist. Umgekehrt wird vorgegangen, wenn ein Winkel aufgenommen wird.

Weil also mittelst des Kreuz-Diopters jeder Winkel von dem Papiere auf das Feld übertragen, umgekehrt, jeder Winkel von dem Felde auf das Papier gebracht, auf jeder zugänglichen Länge in jedem Puncte eine Normale errichtet, mit jeder Linie eine Parallele gezogen, und was immer für eine Krümmung aufgenommen werden kann; so kann man Gegenden aufnehmen, und Pläne von dem Papiere auf das Feld übertragen.

Sind a und b zwey Puncte (Fig. 60.), deren Entfernung von einander bestimmt werden soll, und man kann aus einem dritten Puncte c sowohl nach a als auch nach b hin Gerade abstecken und messen; so darf nur durch c die Gerade acn abgesteckt, in cn so lange fortgegangen werden, bis durch das andere Diopter der Punct b gesehen wird. Dann kann sehr leicht, wenn ax und bx gemessen worden sind, ein Drey-

eck

eck auf dem Papiere gezeichnet werden, das dem Dreyecke axb auf dem Felde gemäß ist.

Dieses ist das Verfahren eine Gerade aufzunehmen, wenn sie an dem Anfangs- und an dem Endespuncte zugänglich ist.

Wäre aber (Fig. 61.) zwischen b und c, oder zwischen a und b irgend ein Hinderniß, wäre nähmlich einer der Puncte a oder b ganz unzugänglich; so kann man sowohl ab als bc auf einmahl finden.

Denn wird durch b und c die Gerade bc2 abgesteckt, sodann in dieser der Punct 1 gesucht, und in 2 die Normale a2 ausgesteckt, welche die b2 in irgend einem Puncte 2 berühren wird; so kann ein Dreyeck gemacht werden, das dem Dreyecke a1,2 gemäß ist; dann wird in a die Normale ab gezeichnet, wodurch zugleich mit ab auch b1 und daher auch bc erhalten wird.

Dieses ist das Verfahren eine Gerade aufzunehmen, welche nur an ihrem Anfangspuncte zugänglich ist.

Der Punct b kann auch durch Rechnung gefunden werden.

Soll (Fig. 48. Tab. II.) die gänzlich unzugängliche Entfernung AB gemessen werden; so kann dieß nach dem Vorigen leicht geschehen.

Diese Aufgabe dienet auch um mit einer gänzlich unzugänglichen Linie eine Parallele zu ziehen, und von einem gegebenen Puncte auf eine unzugängliche Linie eine Normale abzustecken.

Soll endlich (Fig. 62. Tab. III.) eine Linie aufgenommen werden, deren Anfangs- und Endespunct zwar unzugänglich sind, doch ein Theil von ihr z. B. 1,2 gemessen werden kann; so wird in dem Puncte 2 die Normale 2n von unbestimmter Länge ausgesteckt,

und in derselben ein Punct o angenommen, dann wird bo unbestimmt weit verlängert, o2 von o gegen n in x getragen, und in diesem Puncte die Normale xy errichtet. Wo diese die oy berühret, ist der ersteren Endespunct. Es ist sodann xy = b2.

Auf ähnliche Art wird a1 bestimmt. Dann ist a1 + 1,2 + 2b = ab. Könnte man im Falle einer dieser 3 Aufgaben die Linie bc, dann a1 und b2, endlich 2,o wegen irgend eines Hindernisses nicht verlängern; so müßte im 1ten Falle der Winkel ban, im 2ten Falle 1ao und ba1, im 3ten Falle der Winkel bo2 aufgenommen, und die Puncte b, x und y, und b müßten auf dem Papiere durch Verlängerung der Schenkel gesucht werden.

Weil in dem Endespuncte einer Geraden auf dem Felde eine Normale errichtet werden kann, ohne die Linie selbst zu verlängern, so kann man diese Aufgaben auch ohne das Winkelkreuz auflösen. Eben so leicht die Aufgabe: die ganz unzugängliche Länge xy aufzunehmen, wenn man die 4 Linien, m, n, o und p messen kann. (Fig. 61.)

Soll von dem Puncte a (Fig. 63.) zu dem Puncte b, nach welchem vermöge des dazwischen befindlichen Hindernisses nicht gesehen werden kann, eine Gerade abgesteckt werden; so wird:

1. Von a aus eine Gerade an von willkührlicher Länge abgesteckt.
2. In irgend einem Puncte derselben n wird die Normale no errichtet.
3. Auf diese wird aus b die Normale b4 ausgesteckt.
4. Aus 4 wird auf diese die Länge an getragen; diese gibt den Punct x.
5. Ebenfalls muß auf an aus a die Länge bx getragen werden. Dieses gibt den Punct n.

6. Sodann wird die Gerade xn ausgesteckt. Sie ist mit ab parallel.

7. Die einander gleiche Normalen 11, 22, 55 geben endlich die Puncte der verlangten Geraden ab.

Auch kann (Fig. 64.) ohne Rechnung die Höhe eines Thurmes, Baumes u. dgl. mittelst zweyer Stäbe und der Schrot- oder Setzwage gefunden werden, wenn die Entfernung des Standpunctes von der zumessenden Höhe bekannt ist. Die Linien AD und DC müssen auch gemessen werden.

Wird an einem 4' oder 5' langen Stabe ab ein Lineal (oder eine Röhre) cd so befestigt, daß es sich um den Punct 1 herum drehen und in jeder Richtung fest stellen läßt; so kann man damit auf ziemlich ebenem Boden die Breite der Flüsse und Bäche, jede am Anfangs- und am Endespuncte unzugängliche, nicht sehr lange Linie, die Höhen der Gebäude, Bäume u. s. f. entweder gleich auf dem Felde oder mittelst der Zeichnung angeben u. s. f.

Verstattet es die Gelegenheit irgend einen aufzunehmenden, mit krummen Linien begränzten Platz mit geraden Linien (als Standlinien) einzuschließen; so läßt sich ein solcher Platz mittelst des Kreuz-Diopters sehr genau aufnehmen. (Fig. 65.)

Eben so kann das Kreuz-Diopter zur Aufnahme eines jeden Viereckes (Fig. 73.) z. B. zur Aufnahme der schiefwinkeligen Zimmer, verwendet werden. Wäre z. B. moiu ein Viereck, r ein Standpunct in demselben und rm, ro, rf, rh wären die Visirlinien; so werden diese gemessen und aufgezeichnet. Die Seite mo gibt sich von selbst unter der in der Figur gemachten Voraussetzung. Die Puncte o und f sind schon bekannt. Ist oi gemessen; so ist auch der Punct i bekannt. Weiß man die Länge von iu; so erhält man

auch mu, da die Puncte i und h schon vorhanden sind.

Auch in dem andern Falle, wenn nähmlich die Visirlinie ro oder rm nicht in den Punct o oder m treffen sollte, so wenig als rf in den Punct i, oder rh in den Punct u, ist die Aufnahme eines schiefwinkeligen Viereckes mittelst des Kreuz-Diopters nicht schwer, was jeder, der das bisher Vorgetragene wohl verstanden hat, leicht finden wird.

§. XVIII.

Von der Schrotwage. Vom Aufnehmen und Ausstecken der Winkel, und der Figuren. Vom Aufnehmen krummer Linien u. s. f.

Da durch ein an einen Faden gebundenes Gewicht eine Vertical-Linie bestimmt wird, jede Horizontale aber auf die Vertical-Linie normal ist; so gibt dieses die bequemste Methode eine Horizontale zu ziehen, oder zu untersuchen, ob irgend eine Linie horizontal ist, oder nicht. Das hierzu nöthige Werkzeug ist die Schrot- oder Setzwage.

Soll nun (Fig. 49. Tab. II.) der Horizontal-Abstand ab gefunden werden, so werden zuerst die Stäbe 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . . 15 so eingesetzt, daß man von einem bis zu dem nächst stehenden eine Latte (die Setzlatte), anlegen kann.

Diese wird dann zuerst an 1 9 gelegt, mittelst der Setzwage horizontal gerichtet, und der Abstand 2.0 bemerkt; dasselbe geschieht dann zwischen allen anderen Paar Stäben; werden endlich alle diese Horizontal-Abstände addirt, so erhält man dadurch die wahre Entfernung ab.

Auf ähnliche Art wird vorgegangen, wenn statt der Hügel Vertiefungen zwischen a und b vorfindig seyn sollten.

Da der Halbmesser einen Bogen von 60° abschneidet, so läßt sich hieraus eine Methode ableiten, jeden rechten Winkel in 3 gleich große Theile zu theilen und hiermit zu untersuchen, ob zwey Linien unter rechten Winkeln mit einander verbunden sind.

Soll man diese Untersuchung anstellen, so wird aus der Spitze des rechten Winkels zuerst ein Quadrant beschrieben, sodann gleich der Halbmesser so wohl aus dem Anfangs- als aus dem Endespuncte aufgetragen. Sind die dadurch entstandenen drey Bögen gleich groß, so ist der Winkel ein rechter Winkel.

Auch läßt sich leicht die Größe eines Kreisbogens oder Winkels beyläufig bestimmen, oder ein Winkel von gegebener Größe zeichnen.

Soll (Fig. 50. Tab. II.) die Größe des Bogens 1, 2, 3 bestimmt werden, so errichte man im Mittelpuncte der Sehne 1,3 die Normale 2,4; im Mittelpuncte der Sehne 1,2 die Normale ab.

Wird 1b gezogen, so ist 1.b.o ein rechter Winkel. Wird nun ausgemittelt, der wie vielte Theil des Quadranten 1.o der Bogen o.3 ist, so ist die Größe des ganzen Bogens 1, 2, 3 bekannt.

Weil der Abstand eines Punctes von einer geraden Linie die Normale von dem Puncte auf die gerade Linie ist; so gibt dieses ein leichtes Mittel bloß mit der Schnur und einigen Stäben jeden Winkel vom Papiere auf das Feld zu übertragen, und, wie schon bemerket wurde, umgekehrt, jeden Winkel von dem Felde auf das Papier zu bringen.

Weil im gleichschenkeligen Drepecke mit dessen Höhe die Grundlinie normal halbirt wird; so kann man auf jeder zugängigen Linie in irgend einem Puncte derselben eine Normale errichten. (Fig. 51. Tab. II.)

Soll z. B. auf die Gerade AB in dem Puncte a eine Normale errichtet werden, so wird zuerst von a gegen A und gegen B eine gleiche willkührliche Länge

z. B. 10′ in 1 und 2 aufgetragen. Dann werden auf der Kette oder Schnur wieder zwey gleiche willkührliche Längen 2.a, 1.a genommen, deren Enden in 1 und 2 angehalten werden müssen.

Ihr gemeinschaftlicher Anfangspunct a gibt den Punct der verlangten Normale an.

Auf ähnliche Art wird die Aufgabe aufgelöset, wenn von O aus auf AB eine Normale errichtet werden soll.

Hat man also was immer für einen spitzigen oder stumpfen Winkel auf das Feld zu übertragen, so darf man nur nach dem verjüngten Maßstabe in irgend einem Puncte eine Normale errichten, und auf dem Felde eine Linie bestimmen, die Einem beyder Schenkel des Winkels gemäß ist, dann nach dem vorigen in dem gefundenen Puncte die Normale errichten; so wird der andere Schenkel bestimmt und dadurch der gegebene Winkel erhalten.

Ist der Boden so beschaffen, daß man auf demselben einen Kreisbogen tracieren kann; so wird was immer für ein Winkel eben so auf dem Felde gezeichnet, wie auf dem Papiere, außer daß dort die Kette oder Schnur die Stelle des Zirkel-Instrumentes vertritt.

Da nun vermöge des Vorigen auf jeder zugänglichen Linie eine Normale errichtet werden kann; so kann auch auf jedem ziemlich ebenem Boden in jedem gegebenen Abstande eine Parallele gezogen werden.

Ebenfalls kann jedes Quadrat, Rechteck und Parallelogramm auf das Feld übertragen, auch jeder so gestaltete Platz aufgenommen werden.

Ein Winkel wird vom Felde auf das Papier gebracht, wenn man entweder von seiner Spitze gleiche Längen auf jeden seiner Schenkel aufträgt, die Entfer-

nung

nung der dadurch erhaltenen Puncte mißt, und ein Dreyeck zeichnet, welches diesem auf dem Felde befindlichen Dreyecke gemäß ist, oder, wenn man sich der zuvor beym Aufnehmen der Winkel gezeigten Methode bedient. (Fig. 52. Tab. II.)

Wäre aber zwischen den Schenkeln des aufzunehmenden Winkels irgend ein Hinderniß, so kann nach §. 5. vorgegangen werden.

Soll (Fig. 53. Tab. II.) was immer für eine krumme Linie abcde aufgenommen werden; so darf man nur längst dieser die Geraden 1.2, 2.3, 3.4 ausstecken, auf diesen die willkührlichen Puncte 1, 2, 3, 4 u. s. w. nehmen, in diesen die Normalen 1a, 2b u. s. f. errichten, und sodann eine Figur auf dem Papiere zeichnen, die der Figur auf dem Felde gemäß ist.

§. XIX.

Über die Fehler beym Messen. Resultate großer Messungen. Genaue Messungen von Stand- oder Grundlinien.

Was die Fehler betrifft, welche beym Messen der Linien vorkommen, ist hierbey Folgendes zu merken:

1. Ist der Boden sehr uneben, so kommt man am besten daraus, statt der Kette, die Meßstangen zu gebrauchen, welche mittels eigener Schämel und der Setzwage horizontal gelegt werden können.

Einige Feldmesser bedienen sich eines großen hölzernen Zirkels, dessen eiserne Spitzen auf 4 oder 6 Fuß von einander entfernet werden können. Mit einem solchen Zirkel wird längs einer ausgespannten Schnur oder Kette eben so fort gemessen, wie mit dem Handzirkel längs einer auf dem Papiere gezogenen Linie. Wäre also die Zirkelweite n', und es ist pmahl umgeschlagen worden; so ist die gemessene Länge = p.n'.

2. Es ist nothwendig, bey jedem Kettenzuge darauf zu sehen, daß kein Glied der Kette verwickelt, und die ganze Kette in der Richtung der zu messenden Linie, genau ausgestreckt sey.

3. Wäre eine große Genauigkeit erforderlich; so könnte man die Linie öfter messen, und die Summen der gefundenen Längen durch ihre Anzahl theilen. Z. B. das erste Mahl hat man n, das zweyte Mahl p, das dritte Mahl r° gefunden. Das arithmetische Mittel ist hier $= \frac{n+p+r^\circ}{3}$.

Z. B. Wenn n = 120° — 5
p = 121 — — und
r = 119 — 1 wäre

so würden . . . . . 361° —

als die Summe mit der Anzahl der Messungen d. i. mit 3 zu theilen seyn, um 120° — 2′ als das arithmetische Mittel, als wahre Länge zu erhalten.

4. Hätte man bey dem 1ten Kettenzuge (bey dem Anfange des 2ten) um die Größe t″ gefehlet; so beträgt der Fehler beym 2ten (zwischen dem 2ten und 3ten) 2t, beym 3ten 3t u. s. f. beym nten — n.t. Da nun dieser Fehler $= \pm$ nt seyn kann; so muß, wenn t und n gegeben sind, dieses Product entweder zur gemessenen Länge addirt, oder davon abgezogen werden. Z. B. Man hat eine Linie mit einer Kette von 10° gemessen. Die Kette wurde 36mahl gezogen. Man weiß, daß man beym 1ten Kettenzuge um + 4 Zoll gefehlt habe. Der ganze Fehler beträgt also $\frac{-36.4}{12}$

$= \frac{-36}{3} = -2^\circ$. Also wäre die wahre Länge

nur

nur 34°. Hätte man um — 4″ gefehlt; so wäre die wahre Länge = 36° + 2° = 38°. Man kann also auch mit einer nicht genauen Kette genau messen.

Auf ähnliche Art berechnet man den Fehler, welcher durch das Umschlagen der so genannten Meßruthen begangen wird.

Man hat als Resultat mehrerer großen Vermessungen gefunden, daß der absolute Fehler der Ketten-Messung auf ebenem Boden für ungefähr 400° bis 500° bey 24 bis 30 Zoll, auf sehr unebenem Boden aber fast 4 bis 5′ beträgt. Von den Fehlern bey dem Messen und Aufnehmen der Winkel kann hier noch nicht gehandelt werden.

Überhaupt kann man das Messen in genaues und ungenaues, besser der 1. Art und der 2. Art abtheilen. Zu dem Messen der 1. Art gehört jenes mit den Maßstäben, Ketten und Schnüren, und mit den Meßstangen oder Balken. Zu dem Messen der 2. Art gehört das Messen durch das Augenmaß, durch den Schall, durch die Uhren, und durch Schritte mittels des Abschreitens, der Schrittzähler und des Chronometers, des Wegmessers, und des Perambulators.

Dem Zwecke dieses Lehrbuches gemäß ist bereits von dem Messen mit dem Maßstabe, mit der Kette und Schnur das Nöthigste gesagt worden. Das Practische, die wirkliche Ausübung kommt im Sommer-Curse auf dem Felde selbst vor. Hier ist es nur noch nöthig die genaueste Methode des Messens, nähmlich jene mit den Meßstangen oder Balken etwas näher zu erklären.

Man läßt nach dem vorgeschriebenen Maße 4 oder mehrere vierseitige Stangen oder Balken verfertigen. Sie sind entweder von gutem, wohl ausgetrocknetem, mit Öhl eingelassenem Tannenholze, oder sie sind ganz von Eisen oder Messing. Die hölzernen erhalten am Anfange und am Ende (an den Köpfen) messingene Schuhe. Je

länger die hölzernen Balken gemacht werden, desto stärker müssen sie im Holze seyn, wenn man, wie es meistens der Fall ist, solche gebraucht. Über die Ausdehnung durch die Wärme muß nach dem Thermometer die Rechnung gemacht werden. Als am wenigsten durch die Wärme ausdehnbar hat man zu den Meßstangen Glasröhren vorgeschlagen.

Diese Meßbalken legt man in der zuvor abgesteckten geraden Linie, auf eigene Richtschämel oder Richtböcke, welche entweder mittels untergelegter Keile, oder durch Schrauben höher und tiefer gestellet werden können. Um aber den Balken die horizontale Lage zu geben, gebraucht man sich der Schrot- oder Setzwage, oder der so genannten Wasserwage mit der Luftblase.

Die Balken werden entweder alle mit derselben Farbe (Ölfarbe) angestrichen, oder jede mit einer andern. Durch das Anstreichen wird das Eindringen der Nässe mehr gehindert. Durch die Verschiedenheit der Farben wird dem Fehler leicht vorgebeugt, der entsteht, wenn man sich in der Anzahl der aufgelegten Balken iren sollte. Die folgende Stange wird an die vorhergehende so gelegt, daß die Endflächen (Kopfflächen) oder die Seitenflächen an einander liegen.

Im ersten Falle ist es gut, das Ende der einen halbkugelformig zu machen, weil dann eine schärfere Berührung Statt findet. Wenn die Seitenflächen an einander liegen, so muß die folgende so lange geschoben werden, bis zwey auf der Oberfläche der Stangen oder Balken nach der Quere gemachte Einschnitte auf einander treffen.

Wenn die 4. Stange angelegt ist; so wird die erste wieder hinweggenommen, so daß immer 3 Stangen liegen bleiben. Liegt eine höher als die andere, doch beyde wagerecht; so muß das Ende der vorhergehenden abgesenkelt (abgelothet) werden. Dasselbe geschieht auch, wenn Abends die Arbeit aufhört. Es wird am Ende der letzten Stange ein Senkbley herabgelassen, dessen Spitze unten am Boden einen Punct angibt, welcher vertical unter dem Endpuncte der bis dahin gemessenen wagerechten Linie liegt.

Auf diese Art, doch ohne die Richtschämel, zu messen, nähmlich die Stangen nur auf die Erde zu legen, dürfte schwerlich Genauigkeit geben.

Diese erste beschriebene Methode, mittels der Meßbalken oder Stangen zu messen, ist zwar sehr mühsam; allein sie gewährt die größte Genauigkeit, und wird deßhalb nur bey trigonometrischen Aufnahmen angewendet. Weil aber jener Theil der Geometrie, welcher die Trigonometrie genannt wird, in diesen Anfangsgründen keinen Platz finden kann, so kann auch von der Messung mit den erst erwähnten Meßbalken oder Stangen nichts Weiteres vorgetragen werden.

Über das Messen der Grund- und Standlinien:

a. Tob. Mayer, Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur pract. Geometrie. 4 Bände. 8. Erlangen 794. 2. Auflage.

b. Haußer, Oberstlieutn. v. Anfangsgründe der Mathematik. 2. Thl. Wien 1778. 8.

c. Freyh. v. Metzburg pract. Geometrie, welche den 3. Thl. jener Anfangsgründe ausmacht.

§. XX.

Lehrsatz von der Gleichheit der Parallelogramme und der Dreyecke.

Parallelogramme auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Gleichlaufenden sind von gleicher Größe. (Fig. 66. Tab. III.)

Über derselben Grundlinie AD, und zwischen denselben Parallelen AD, BF seyen die Parallelogramme ABCD, AEFD enthalten. Sie werden einander gleich seyn.

In den Dreyecken ABE, DCF sind die Seiten AE, DF und AB, DC von gleicher Größe. Ferners da EF und BC der AD gleich sind, sind sie unter sich gleich; addirt man daher den gemeinschaftlichen Abschnitt CE zu beyden; so ist die Seite BE der Seite CF gleich, und die ganzen Dreyecke sind einander gleich. Wird das beyden gemeinschaft-

schaftliche Dreyeck CLE hinweg genommen, so ist das Viereck BCLA dem Vierecke DLEF gleich, und addiert man zu diesen beyden das gemeinschaftliche Dreyeck ALD; so ist das Parallelogramm ABCD dem Parallelogramme AEFD gleich. Auf ähnliche Art wird der Beweis geführet, wenn E zwischen B und C liegen sollte. Zieht man AC, AF, so sind die Dreyecke ACD, AFD die Hälfte der Parallelogramme. Also sind auch alle Dreyecke einander gleich, wenn sie dieselbe Grundlinie haben, und zwischen denselben Gleichlaufenden enthalten sind.

Wenn Dreyecke und Parallelogramme auch nicht über derselben Grundlinie stehen, dennoch gleiche Grundlinien haben, und zwischen denselben Parallelen enthalten sind; so sind sie einander gleich.

Daher ist jedes Parallelogramm das Doppelte eines Dreyeckes, welches dieselbe oder eine gleiche Grundlinie hat, und zwischen denselben Parallelen enthalten ist.

§. XXI.

Folgerungen aus dem vorigen Lehrsatze. Inhalt der Flächen, der Rechtecke, der Dreyecke, der Vielecke. Anwendungen für die Theilung und die Verwandlung der Flächen. Zeichnung eines Rechteckes von gegebenem Inhalte. Inhalt durch Zeichnung und Ergänzung. Inhalte mittels einer Wage gefunden. Rechennetze.

Aus diesem Lehrsatze lassen sich viele nützliche Sätze ableiten. So z. B. wird gezeigt, daß keine Größe so klein seyn kann, daß nicht eine noch kleinere Größe angegeben werden könnte.

Da man nähmlich die Gerade BF, so weit man will, verlängern kann, so wird der Punct immer mehr und mehr vom Puncte B sich entfernen. Bleibt nun EF der Geraden BC oder AB gleich; so wird dennoch das wie immer verlängerte Parallelogramm AEFD dem Parallelogramme ABCD gleich seyn, und man wird in der Verlängerung keine Gränze finden.

Nimmt man diese Parallelogramme für die Oberflächen von Körpern, die z. B. Einen Zoll Dicke haben, so können auch diese Körper über alle Gränzen verlängert werden.

Ferners kann man was immer für eine ebene Fläche, die in mehrere Dreyecke getheilt ist, messen, (ihren Inhalt berechnen) sie quadriren, und die verschiedenen Flächenräume der Felder mit einander vergleichen. Da sich die Industrie der alten Mathematiker vorzüglich damit beschäftigte, so erhielt davon die Wissenschaft selbst ihren Ursprung und Nahmen.

Denn fürs erste wird (Fig. 67.) jedes Rechteck BD so oft einen Quadrat-Fuß, oder wie man zu sagen pflegt, so viele Quadrat-Schuhe enthalten, als man Einheiten erhält, wenn eine Seite durch die andere multipliciert wird. Enthielte nun die Seite AD vier Fuß, AB aber fünf; so wird man, nachdem man überall mit der anliegenden Seite Parallele geführet hat, vier Reihen von Quadrat-Schuhen erhalten, und in jeder dieser fünf Quadrat-Schuh. Damit nun sogleich die ganze Summe erhalten wird; so multiplicirt man 4 mit 5, und das Product 20 gibt den Inhalt der ganzen Fläche. Denn das Dreyeck AED auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallelen ist von dem Rechtecke die Hälfte, und wird die Senkrechte EF auf die verlängerte Grundlinie herabgelassen, so wird diese der Seite AB gleich seyn.

Deß-

Deßwegen muß, um den Inhalt eines Dreyeckes zu finden, die halbe Grundlinie mit der Höhe multiplicirt werden, oder die halbe Höhe mit der ganzen Grundlinie. Ist bey der Voraussetzung die halbe Grundlinie zwey Schuh, so erhält man den Inhalt des Dreyeckes 10 Quadrat Schuh.

Ebenfalls, wenn der Inhalt eines Vieleckes ABCDE gefunden werden soll (Fig. 68.), so wird dasselbe in Dreyecke getheilet, indem man die Geraden DB, DA von einem Winkel nach dem entgegen gesetzten zieht. Man berechnet sodann aus der Höhe und Grundlinie eines jeden Dreyeckes seinen Inhalt. (Die Summe aller ist der Inhalt des gegebenen Vieleckes.)

Es sey z. B. die Grundlinie BD = 30, die Höhe CF = 20. Multiplicirt man 30 mit 10 oder 15 mit 20, so erhält man 300 Quadrat-Schuh als den Inhalt des Dreyeckes BCD.

Wird dasselbe mit den andern Dreyecken gemacht; so erhält man in der Summe aller Dreyecke den Inhalt des gegebenen Vieleckes. Von der Berechnung durch Trapeze §. XXIII. Fig. 83 und 84.

Aus derselben Ursache findet man auch den Inhalt der Kreisfläche (Fig. 69.) Da man nähmlich jede Kreisfläche in so viele Ausschnitte getheilet sich vorstellen kann, als man will, deren sehr kleine Kreisbögen beynahe gar keine Krümmung haben werden; so wird die ganze Kreisfläche aus sehr vielen gleichschenkeligen Dreyecken zusammen gesetzt erscheinen, deren Grundlinien die erst erwähnten Kreisbögen, z. B. BD sind, und die Höhe eines jeden dem Halbmesser gleich gesetzt wird. Weil aber der Inhalt eines jeden dieser Dreyecke gefunden wird, wenn man den Halbmesser als die Höhe mit der halben Grundlinie d. i. mit dem halben Bogen BD multiplicirt; so wird auch der In-

halt einer jeden Kreisfläche gefunden, wenn man den Halbmesser mit dem halben Umfange, d. i. mit der halben Summe dieser sehr kleinen Kreisbögen, multiplicirt.

Um also eine Kreisfläche zu berechnen, muß man die Länge des Halbmessers, und die Länge des Umfanges wissen.

Soll (Fig. 70. I.) aus einem Dreyecke ein Rechteck gemacht werden, z. B. aus dem Dreyecke abc; so theilt man die Höhe desselben cn in zwey gleich große Theile, führet durch den Theilungspunct 1 eine mit der Grundlinie ab Parallele 2,3, und führet dann die Normalen a2 und b3. Das Rechteck ab3,2 ist so groß als das Dreyeck abc.

Diese Aufgabe, so wie die folgende sind vorzüglich wichtig.

Soll ein Dreyeck abc (Fig. 71.) in ein anderes verwandelt werden, dessen Grundlinie mo < (kleiner) ac (Fig. II.) ist, und der Winkel w soll unverändert bleiben; so wird

1. mo aus a auf ac getragen, oder aus c an dieselbe zur Grundlinie angenommene Seite.
2. Aus dem dadurch erhaltenen Puncte o wird nach der Spitze b die Gerade bo gezogen, und die Seite ab unbestimmt weit verlängert.
3. Aus c wird mit bo eine Parallele cf geführet. Diese gibt den Punct f.
4. Dann zieht man fo. Das Dreyeck fca ist das verlangte.

Denn sind die Geraden bo und cf mit einander gleichlaufend; so ist das Dreyeck obf so groß als das Dreyeck obc; also ist abo + boc = abo + obf d. i. abc = afo, und der Winkel w ist unverändert geblieben.

Ist mo > (größer) ac; z. B. = ma, so wird (Fig. II.)

1. ac verlängert, und aus a die neue Grundlinie mo aufgetragen.
2. Dann zieht man die Gerade bo, und mit dieser durch den Punct c eine Parallele cf. Endlich wird
3. die Gerade fo gezogen. Das Dreyeck afo ist das verlangte Dreyeck.

Diese Aufgabe hat viele Anwendungen. Eine derselben ist folgende:

Von einer Figur lfedb eine gegebene Fläche A hinwegzunehmen. (Fig. 72.)

1. Man zieht eine Diagonale be, und untersucht, ob das Dreyeck bde = M größer oder kleiner als die Fläche A ist.
2. In jedem Falle verwandle man die Fläche A in ein Dreyeck D, welches einen Winkel = w hat.
3. Ist nun M < D; so trage man db aus 1 nach 2, und de aus 1 nach 3, und ziehe 4,5.
4. Dann wird die zweyte Diagonale bf gezogen.

Den Rest R verwandelt man in ein Dreyeck R', das einen Winkel = h hat, und dessen eine Seite = be seyn muß.

Die Figur lfqb wird der Rest seyn.

Ist M > D z. B. = A, so wird dem Dreyecke D die Linie db zur Grundlinie gegeben. Der Winkel w muß unverändert bleiben. Daraus findet man bu und den verlangten Rest lfub.

Um die Richtigkeit des Verfahrens (Fig. 71. II.) deutlich einzusehen, ist Folgendes zu bedenken:

1. Ist fbc = fco.
2. Ist fenc beyden Dreyecken gemeinschaftlich.
3. Ist daher fbc — fnc = fco — fnc nähmlich fbn = nco.

4. Also ist afnc + cno = afnc + fnb d. i. das Dreyeck afo ist dem Dreyecke abc gleich.

Soll (Fig. 70. II.) aus dem Parallelogramme abcd ein Rechteck gemacht werden, so ist dasselbe d1,2c, denn das Dreyeck a1d ist dem Dreyecke c2b gleich.

Ist abcd ein Viereck (Fig. 73.) und man soll dieses in ein Rechteck verwandeln, so zieht man eine Diagonale bd, auf diese die beyden Normalen a1 und c2; das Rechteck 3, 4, 5, 6 wird dem gegebenen Vierecke gleich seyn.

Auf dieselbe Art wird bey jedem anderen Vierecke abcd verfahren.

Soll (Fig. 74.) einem Rechtecke abcd eine andere Länge oder Grundlinie z. B. no gegeben werden; so wird mit dieser aus d der Durchschnitt x gesucht; die Normale aus dem Puncte c auf die Linie dx oder ihre Verlängerung ist die neue Höhe oder Breite.

Im Gegentheile kann jedem Rechtecke 1, 2, 3, 4 eine andere Breite oder Höhe gegeben werden, z. B. ab; denn wird mit dieser aus der Spitze 4 der Bogen n beschrieben, und an diesen die Tangente 3y gezogen, so ist diese die neue Grundlinie oder Höhe.

Da nun vermöge dessen jedem Rechtecke eine andere Grundlinie oder Höhe gegeben werden kann; so kann man auch ohne Beyziehung von Rechnung jedes Rechteck von einem andern abziehen oder dazu addiren, so daß die Differenz oder die Summe wieder ein Rechteck ist.

Beyspiele über diesen wichtigen Gegenstand sollen in den Vorlesungen vorkommen.

Diese Art der Verwandlung, d. i. Veränderung der Form, ohne die Größe zu ändern, hat über dieß noch den großen Vortheil, daß sie in den meisten

Fäl-

Fällen innerhalb des Raumes selbst vorgenommen werden kann.

Vermöge dieser Zusätze ist man nun im Stande (Fig. 75.) was immer für ein Vieleck abcdefghi in ein Rechteck zu verwandeln; denn wird dasselbe durch Diagonal-Linien ac — ad — ae — af — if — fh u. s. f. in Dreyecke zertheilet, jedes derselben in ein Rechteck verwandelt, werden diese Rechtecke sodann addirt, so erhält man ein dem Vielecke gleiches Rechteck.

Soll ein Rechteck von gegebenem Inhalte z. B. 36 oder 48 Klaftern, Schuhen oder Zollen gezeichnet werden, so theilet man diese Zahlen in Factoren 4,9 oder 6,8, davon einer die Grundlinie, der andere die Höhe abgibt.

Sollte der Inhalt eine Primzahl, z. B. 13, 17 und dgl. seyn; so zeichnet man ein Rechteck von 1.13, 1.17 u. s. f., gibt dann demselben die gegebene oder beliebige Höhe nach der (Fig. 74.) gezeigten Methode.

Weil nun vermöge des Vorigen der Inhalt eines jeden Rechteckes durch Zeichnung gefunden werden kann; so kann auch der Inhalt eines jeden Vieleckes durch Zeichnung angegeben werden.

Ebenfalls kann (Fig. 76.) der Inhalt eines Vieleckes abcde von außen durch Ergänzung gefunden werden. Denn wird die Gerade 1, 2, 3 ausgestecket oder gezeichnet, und die darauf Senkrechten b1, c2, d3 u. s. f. werden bestimmt; so erhält man ein Rechteck 1, 3, 4, 5. Zieht man von diesem die Summe der Ergänzungs-Dreyecke a1b, 2ae, 2e3, e3d, cd5 und b4c ab, so ist der Rest der Inhalt des gegebenen Vieleckes.

Diese Aufgabe kann durch Zeichnung und Rechnung zugleich, oder durch Zeichnung allein aufgelöset werden.

Auf

Auf dem Felde selbst wird das Verfahren nach §. XVII. leicht seyn, und viele Vortheile gewähren.

Um die Inhalte der aufgenommenen Gründe anzugeben wird die Theilung in Dreyecke gewöhnlich gebraucht.

Die Grundlinien und Höhen derselben werden nach dem verjüngten Maßstabe gemessen. Um den Plan zu schonen bedient man sich zuweilen verjüngter Maßstäbe, welche auf dünne Glasplatten, oder auf durchsichtiges Horn gezeichnet werden, wo dann das Messen auf dem Plane fast so wie mit dem Klaftermaße im Großen vorgenommen wird.

Mittelst einer richtigen Wage die Inhalte anzugeben hat der berühmte Marinoni in seinem Werke de ichnographia angegeben. Das Verfahren ist folgendes: Aus wohl gereinigtem Bleye werden sehr dünne Platten gegossen. Um diese aber noch dünner zu erhalten, kommen sie in ein eigenes Streckwerk, dergleichen man in den Münzen, auch selbst bey manchen Handwerkern und Fabrikanten sehen kann. Der Hauptheil dieses Streckwerkes sind zwey gegen einander laufende wagerechte metallene Walzen, zwischen welchen die Platten gestreckt werden. Eine solche Bleyplatte wird mit dem zu berechnenden Plane congruent ausgeschnitten. Legt man nun auf die eine Wagschale diese Bleyplatte, und in die andere so viele kleine Bleyplättchen, deren jedes z. B. eine Quadrat-Klafter oder auch ein Joch (1600 Quadrat-Klafter) vorstellet, bis das Gleichgewicht erfolgt; so gibt die Anzahl dieser Bleyplättchen den Flächeninhalt des Planes, in der Voraussetzung, daß gleich große Theile der Bleyplatte gleiches Gewicht haben. Wäre z. B. bekannt, daß Ein Bleyplättchen, welches 1 Joch vorstellet, etwa $\frac{1}{2}$ Quentchen wiege; so kann man ganz leicht mittels der Gewichte den Inhalt eines Planes erfahren.

Statt des Bleyes Papier zu nehmen, dürfte wohl schwerlich zu empfehlen seyn.

Brauchbarer ist das bereits von Hrn. Hogreve angegebene Rechennetz, welches aus einem Rahmen von gu-

ten trocknen Holze, oder von Messing befestigt. In die gegenüber stehenden Leisten dieses Rahmens sind feine Seidenfäden befestigt, welche sich unter rechten Winkeln kreuzen, und nach einem dem Gebrauche entsprechenden Maßstabe von einander entfernt sind, so daß die durch die Fäden begränzten kleinen Rechtecke entweder Quadrat-Meilen oder Joche, oder Quadrat-Klaftern vorstellen können.

Auf dem Rahmen selbst können jene Zahlen angebracht seyn, welche gewisse Inhalte anzeigen, wo sodann durch Auflegen dieses Netzes der Inhalt eines Planes ziemlich genau angegeben werden kann. Von der Verfertigung und dem Gebrauche eines solchen Netzes wird in den Vorlesungen weitläufiger gehandelt.

Über das Rechennetz. S. Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde. Von A. Böhm. Frankf. 1808. gr. 8. Seite 304. und folg.

§. XXII.

Über den Umfang und den Inhalt der Figuren. Die Theilung der Figuren. Zusätze für die Berechnung der Inhalte.

Sehr wichtig ist es einem Raume, dessen Inhalt gegeben ist, den kleinsten Umfang zu geben.

Bey Umzäunungen, Einfriedungen u. dgl. ist dieß von großem Nutzen. Gesetzt man hätte einen vierseitigen rechtwinkeligen Platz; seine Länge sey $= 180^{\circ}$; seine Breite 20°.

Der Inhalt dieses Platzes ist nach dem vorerwiesenen Lehrsatze $= 180^{\circ} . 20^{\circ} = 3600$ Quadrat-Klafter.

Der Umfang dieses Platzes ist $= 180 + 180 + 20 + 20 = 180 . 2 + 20 . 2 = (180 + 20)^2 = 200^2 = 400^{\circ}$. Gesetzt man wollte diesen Platz mit einem Zaune umgeben. Die Klafter koste z. B. 4 fl.; so kostet diese Umzäunung $400^{\circ} . 4$ fl. $= 100$ fl.

Hät-

Hätte aber dieser Raum etwa 120° Länge und 30° Breite; so wäre bey demselben Inhalte 3600. Quadratklafter = 120°. 30°, sein Umfang = (120 + 30)2 = 150 . 2 = 300°. Also schon um 100° weniger als zuvor. Die Umzäunung würde also statt 1600 fl. nur 1200 fl. kosten.

Wäre die Länge des Platzes = 90° die Breite 40°, so wäre der Umfang = (90+40)2 = 130 2 =260; also um 140° weniger, als im ersten Falle. Daher würde die Umzäunung nur 260.4 = 1040 fl. kosten.

Wenn endlich, statt eines Rechteckes, ein Quadrat von gleichem Inhalte 3600□° gegeben wäre; so würde der Umfang = 60 . 4 = 240° seyn. Kleiner also, als in den vorhergehenden Fällen.

Je mehr sich also eine vierseitige rechtwinkelige Fläche dem Quadrate nähert, desto kleiner wird bey demselben Inhalte der Umfang, am kleinsten wenn der Unterschied der Seiten = 0 ist. Je größer der Unterschied zwischen der Länge und Breite eines Rechteckes ist; desto größer wird bey demselben Inhalte der Umfang.

Aus der Betrachtung der 66. Fig. erhellet, daß bey demselben Inhalte der Umfang desto größer wird, je mehr die Winkel eines Viereckes von dem rechten Winkel abweichen.

Vierseitige rechtwinkelige Flächen, als Feldungen, Weingärten, u. dgl. begränzen sich gegenseitig am vortheilhaftesten, was bey dreyseitigen, fünf- und mehrseitigen Flächen, und bey Kreisflächen nicht Statt findet.

Sowohl durch Rechnung als auch durch Zeichnung ist es leicht einem gegebenen Rechtecke einen andern Umfang zu geben. Allein diese Veränderung des Umfanges ist bey schon bestehenden Flächen, Wies-

gründen, Gärten, Feldern u. s. f. entweder mit beträchtlichen Schwierigkeiten verknüpft, oder ganz unmöglich; bey der Anlegung der Gärten, Baumschulen u. dgl. können aber die vorangeführten Bemerkungen vielen Nutzen gewähren.

Die spitzigen Winkel verursachen in der Cultur des Grundes selbst, manche Hindernisse. Noch weniger geben Kreisflächen und dreyseitige Figuren vortheilhafte Abgränzungen.

Über diesen Gegenstand wäre noch sehr Vieles zu betrachten, was aber ohne Beyziehung der Lehre von den Verhältnissen und Proportional-Linien nicht deutlich seyn würde.

Eben so lassen sich aus dem §. XX. bewiesenen Lehrsatze Regeln für die Theilung der Flächen ableiten. Z. B. Man soll (Fig. 77.) das Rechteck abcd so in 3 gleich große Theile theilen, daß die Theilungslinien mit einer Seite ab parallel laufen. Theilt man die anliegende Seite ac oder bc in 3 gleich große Theile, und führt durch die Theilpuncte 1, 2 mit ab die Parallelen 1.3, 2.4; so sind die Rechtecke I. II. III. die verlangten Theile.

Soll das Rechteck abcd so in 3 gleiche Theile getheilt werden, daß die Theilungs-Linien in dem außerhalb gelegenen Puncte N zusammen kommen; so theilt man wieder eine der Seiten ad oder bc in 3 gleich große Theile, und führt durch die Theilpuncte 1 und 2 die mit der anliegenden Seite ab Gleichlaufenden 1.3 und 2.4. Durch die Mittelpuncte derselben o und n werden die Geraden Nx und Ny ausgesteckt oder gezogen. Die Vierecke axxb, xsyx und xdcy sind die verlangten Theile. Denn es ist das Dreyeck ogx = dem Dreyecke oxr, und das Dreyeck 4ns ist so groß als das Dreyeck ny2. — Dieses gilt, bis die Theilungslinien xN durch den Punct 4 geht. Kommt aber der Durchschnittspunct r zwischen 4 und d; so reicht die erst gezeigte Methode nicht mehr hin.

Sollte

Sollte (Fig. 78.) ein Rechteck abcd so in z. B. 3 gleich große Theile getheilt werden, daß die Theilungslinien mit einer außerhalb gelegenen Linie 1.2 parallel laufen; so wird eine der Seiten z. B. ab in 3 gleich große Theile getheilt, und durch die Theilungspuncte 1 und 2 mit der anliegenden Seite ac Parallele 1.3, 2.4 geführt, und durch die Mittelpuncte dieser Linien, nähmlich durch o und n, führt man die Parallelen vy, sr, welche die verlangten Theilungslinien sind.

Wenn der Punct y zwischen die Puncte a und e kommt, so reicht die erst gezeigte Methode nicht hin.

Soll endlich (Fig. 79.) ein Rechteck abcd so in z. B. 3 gleiche Theile getheilt werden, daß die Theilungslinien in einem in der Seite ad gegebenen Puncte N zusammen kommen, so wird eine der Seiten ad oder bc in 3 gleiche Theile getheilt, und durch die Theilpuncte 1 und 2 werden die mit der anliegenden Seite ab oder dc Parallelen 3.1 und 4.2 abgesteckt oder gezeichnet, und derselben Mittelpuncte n und o bestimmt. Die Linie Noy ist eine der Theilungslinien, und das Viereck Ndcy der dritte Theil des Rechteckes abcd. Denn es ist das Dreyeck 4oN = dem Dreyecke 2oy.

Wird nun nach dem Vorigen entweder durch Zeichnung oder Rechnung das Rechteck ab.1.3 in ein Dreyeck verwandelt, dessen Grundlinie aN ist; so gibt die Höhe desselben ax den Punct x, und Nx ist die 2. Theilungslinie, das Dreyeck Nxa ist der andere der verlangten Theile, wodurch sich der 2. Theil Nxby von selbst ergibt.

Eine für manche Fälle der Theilung oder Verwandlung brauchbare Aufgabe ist diese: (Fig. 80).

Man soll ein Dreyeck abc in ein anderes verwandeln, dessen Höhe 1.0 ist. Verwandelt man das Dreyeck abc in ein rechtwinkeliges cra, und trägt den Unterschied der Höhen bo aus r gegen c, und eine willkührliche Länge = x aus a gegen f; so findet man die Größe dieses Stückes x der verlängerten Grundlinie, wenn man die ganze gegebene Grundli-

linie mit dem Unterschiede der beyden Höhen multiplicirt, und das Product durch die neue Höhe theilt. Z. B. Es sey die Höhe des gegebenen Dreyeckes abc = b1 = 17°. Die neue Höhe = 14°, die Grundlinie ac sey = 26°. Es ist demnach das Stück

$$fa = x = \frac{26.(17-14)}{14} = \frac{26.3}{14} = \frac{13.3}{7} = 5\frac{4}{7}.$$

Also ist die neue Grundlinie = 26° + $5\frac{4}{7}$° = $31\frac{4}{7}$°.

Denn es ist wieder $31\frac{4}{7}.14 = 26.17 = 442$°.

Durch Zeichnung geschieht die Verwandlung nach der vorgezeigten Methode der Verwandlung eines Rechteckes, oder nach der in der 2. Abtheilung bey den Proportional-Linien erklärten Art.

Soll (Fig. 81.) die Figur ABCDE in n z. B. in 3 gleich große Theile getheilet werden; so werden zuerst die Diagonalen AD, AC gezogen, oder ausgesteckt, und so dann die Senkrechten Eh, Dg, Bf bestimmt. Aus diesen Linien gibt sich der Inhalt der ganzen gegebenen Figur. Man theilt ihn nun in n, hier in 3 gleiche Theile, und das dadurch erhaltene wieder in 2 gleiche Theile. Dann wird der Inhalt des Dreyeckes AED von dem 1ten, dem 3ten Theile abgezogen. Der Rest ist ein Dreyeck, dessen Grundlinie AD ist, welches mit dem Dreyecke AED den 1. Theil ausmacht.

Wird der Rest $\frac{I}{n}$ AED durch $\frac{AD}{2}$ getheilt; so erhält man die Höhe des Dreyeckes AiD, und dadurch den Punct i, aus dem die Theilungslinie iD gezogen wird. Das Viereck iDEA ist der 1te der verlangten Theile.

Theilt man ferners die Hälfte des nten, des 3ten Theiles, durch $\frac{Di}{2}$; so erhält man die Höhe eines Dreyeckes DiK, dessen Inhalt $= \frac{ABCDE}{6}$ ist. Zieht man in der Entfernung der gefundenen Höhe eine mit Di Parallele; so erhält man den Punct K. Die Hälfte des dritten Theiles durch $\frac{DK}{2}$ getheilet, gibt die Höhe des Dreyeckes KID, welche $= \frac{ABCDE}{6}$ ist. Zieht man in der gefundenen Höhe zu DK eine Parallele, so erhält man den Punct E. KI ist die 2te Theilungslinie. Demnach ist IDEA der 1te, IDiK der 2te, und CIKB der 3te Theil.

Wäre ADE $> \frac{ABCDE}{3}$; so müßte man diesen 3ten Theil von ADE abziehen, und den Rest mit $\frac{AD}{2}$ theilen, um die Höhe eines Dreyeckes zu finden, welche von ADE abgezogen den 3ten Theil der ganzen Figur gibt.

Auf ähnliche Art wird verfahren, wenn n $= 4, 6, 6$ u. s. f. gegeben wäre.

Daß der nte, der 3te Theil, halbirt wird, geschieht darum, damit man für die verlangten Theile Vierecke erhält.

Andere Aufgaben von Theilung der Figuren sind aus dem bisher gesagten leicht abzuleiten. Z. B. Von einem dreyeckigen Felde eine gegebene Fläche so hinweg zu nehmen, daß der Rest ein Dreyeck ist, oder daß der Rest eine vierseitige Figur bildet. Ein

Tra-

Trapez in 2 gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinie, durch einen außerhalb der Figur befindlichen Punct geht. Ferners ein Trapezoid in zwey gleich große Theile so zu theilen, daß die Theilungslinie mit der Diagonal-Linie nicht parallel läuft, u. dgl. m.

Anfänger können über die Auflösungen dieser Aufgaben nachdenken, und erhalten dadurch Gelegenheit die bisher erklärten Sätze anzuwenden.

Eine Figur wird ausgemessen, wenn man untersucht, wie oft eine für die Einheit angenommene Fläche in der Figur enthalten sey, nähmlich wie viel Mahl sich die Fläche in der auszumessenden herum legen lasse. Die Zahl, welche dieses ausdruckt, bestimmt den Inhalt oder, wie man zu sagen pflegt, den Flächeninhalt (§. XXI.) der gegebenen Figur.

Diese messenden Flächen sind: Quadrat-Meilen, Quadrat-Klaftern, Quadrat-Schuhe, Quadrat-Zolle, Quadrat-Linien ꝛc., Quadrate, deren Seiten Meilen, Klaftern (°) Schuhe (′) Zolle (″) Linien (‴) ꝛc. sind.

Aus dem Vorigen ist bereits bekannt, wie man den Inhalt der Dreyecke und der Parallelogramme findet: hier kommt noch Folgendes zu bemerken vor.

Den Inhalt eines Viereckes, in dem nur zwey Seiten mit einander gleichlaufend sind, findet man, wenn man die Summe der zwey mit einander Gleichlaufenden mit ihrem halben Abstande multipliciert, oder wenn man die halbe Summe mit dem ganzen Abstande, oder die Summe der Parallelen mit dem Abstande multipliciert, und das Product halbirt. Um diese Wahrheit einzusehen verlängere man die kürzere Parallele über ihren Anfangspunct hinaus, und auch über ihrem Endespunct, wenn es nöthig seyn sollte.

Auf

Auf diese Verlängerungen werden aus dem Anfangs- und dem Endespuncte Normalen geführt, welche die Höhen der beyden Dreyecke vorstellen, in welche das Viereck durch die Diagonale getheilt ist.

Es sey z. B. diese Senkrechte = 10, die größere Gleichlaufende = 17, die kleinere = 15; so ist der Inhalt des kleinern Dreyeckes $= \frac{15.10}{2}$; und der des größern $= \frac{17.10}{2}$. Die Summe dieser beyden Inhalte $\frac{15.10}{2} + \frac{17.10}{2} = (15 + 17)\frac{10}{2}$ $= 32.5 = 160^{\square}$ ist der verlangte Inhalt des gegebenen Viereckes.

Daselbe erhält man, wenn man die Diagonale dieses Viereckes mit der halben Summe der beyden Normalen multiplicirt, welche von den der Diagonale entgegen stehenden Ecken auf die Diagonale gefället werden. (Fig. 82. 83.)

Hierüber kommt in dem folgenden §. das Weitere vor.

Aus den 3 Seiten eines Dreyeckes dessen Inhalt zu finden ist in manchen Fällen eine wichtige Sache. Die Regel hierzu ist folgende:

Man zieht von der halben Summe der 3 Seiten jede Seite ab. Die 3 gefundenen Differenzen multiplicirt man sowohl unter einander, als auch mit der halben Summe der drey Seiten. Aus dem Producte zieht man die Quadrat-Wurzel. Z. B. Wenn eine Seite = 150°, die andere = 140°, und die 3. = 130° wäre; so würde der Inhalt des Dreyeckes

=

$$= \sqrt{\left(\frac{150+140+130}{2} - 150\right)\left(\frac{150+140+130}{2} - 140\right)\left(\frac{150+140+130}{2} - 130\right)} = \sqrt{\left(\frac{150+140+130}{2}\right)}$$ seyn. Man findet den Inhalt = 8400□.

Wären d. S. 120, 80 und 64; so ist d. Inh. = $2366\frac{1}{4}$

" " 700,600 " 500; " " = 147000

" " 36, 64 " 81; " " = 1114

" " 86, 64 " 50; " " = 1584

u. s. f.

Der Beweis dieser Regel kann nur mittels der Buchstaben-Rechenkunst durch die Lehre von den Gleichungen gegeben, deßhalb hier nicht geführet werden.

Wenn (Fig. 84.) zwey Rechtecke oder Parallelogramme RN. MN ein drittes RO durchschneiden, so ist der Durchschnitt eine vierseitige Figur fdic, oder fdie, deren Breite oder Höhe fd oder ie unverändert bleibt, da sie den Längen von RO normal seyn muß. Doch die Grundlinien fi oder dc, dann fi oder dc werden um so größer, je stumpfer der Durchschnittswinkel Ndo genommen wird. Ist dieser Winkel ein rechter, so ist die Grundlinie fi oder dc am kleinsten. Sie wird desto größer, je schiefer das eine Rechteck NM gegen das andere RO ist. Also wird auch der Inhalt der Durchschnittsfläche fied desto größer, je mehr sich die Winkel f, i, c, d von dem rechten Winkel entfernen. Setzt man statt der Parallelogramme RN und MN gleich breite Striche mit der Feder, dem Bleystifte, der Kreide u. dgl., so ist einleuchtend, daß die bey dem Schraffieren an-

ge-

gewandten Striche, desto mehr decken werden, je schiefer sie sich schneiden.

§. XXIII.

Das so genannte Toisiren der Flächen. 1. und 2. Art der Multiplication. Beyspiele. Fortsetzung der Berechnung einiger Figuren, welche gleich auf dem Felde vorgenommen werden kann.

Wenn eine der Abmessungen, nähmlich die Grundlinie oder die Höhe, oder auch alle beyde, in Klaftern, Schuhen, Zollen u. s. f. gegeben sind; so muß man diese Abmessungen, um sie mit einer und derselben Einheit zu messen, auf die kleinste Benennung, z. B. auf Zolle bringen. Dann multipliciert man diese beyden Abmessungen mit einander, um den Flächeninhalt in Quadrat-Schuhen, Quadrat-Zollen, Quadrat-Linien u. s. f. zu bekommen. Das Product bringt man wieder auf die nächst höhere Benennung. Wenn man es durch 12.12 = 144 theilt, so erhält man aus Quadrat-Linien Quadrat-Zolle, aus Quadrat-Zollen Quadrat-Schuhe. Um aber die Quadrat-Schuhe auf Quadrat-Klafter zu bringen, theilt man sie mit 6.6 = 36, da ein Quadrat, dessen Seite 1° = 6′ beträgt, d. i. eine Quadrat-Klafter, 36 Quadrat-Schuh enthält. Z. B.

Es sey ein Rechteck zu berechnen. Die Grundlinie desselben sey = 3°—3′—4″, die Höhe = 2°—3′—0″; so wird jede dieser Abmessungen auf die kleinste Benennung, Zolle, gebracht. Es ist 3°—5′—4″ = 3.6′ + 5′ + 4″ = 23′ + 4″ = 23.12″ + 4″ = 276″ + 4″ = 280″.

Eben

Eben so ist: $2^{\circ}-3'-0'' = 2.6'+3'+0'' = 15'+0'' = 15.12''+0'' = 180''$. Nun hat man $280''180'' = 50400$ Quadrat-Zoll. Theilt man diese mit 144, so bekommt man 350 Quadrat-Schuh zum Quotienten. Wird diese Zahl endlich mit 36 getheilt; so ist der Quotient 9, und es bleiben 26 zum Reste.

Der verlangte Inhalt ist also $9^{\square\circ}-26^{\square'}-0^{\square''}$, das ist, neun Quadrat-Klafter, sechs und zwanzig Quadrat-Schuh und keine Quadrat-Zoll u. s. f.

Eben so wird gerechnet, wenn in einer oder in beyden Abmessungen Schuhe oder Zolle fehlen sollten. Z. B. Man soll den Inhalt eines Dreyeckes berechnen. Die Höhe des Dreyeckes hat $2^{\circ}-0'-5''$. Die Grundlinie hält $1^{\circ}-2'-0''-7'''$.

Es ist $2^{\circ}-0'-5'' = 149''$, und $1^{\circ}-2'-0''-7''' = 1159'''$. Es müssen also die $149''$ in Linien aufgelöset werden; also ist der verlangte Inhalt $= 149.12.1159^{\square'''}$, welche nach der erst gezeigten Art auf die nächst höhern Benennungen, Quadrat-Zolle, Quadrat-Schuhe, Quadrat-Klaftern gebracht werden müssen, um den verlangten Inhalt $2^{\square\circ}-27^{\square'}-134^{\square''}-132^{\square'''}$ zu bekommen.

Um die meistens langen Rechnungen zu vermeiden theilt man die Quadrat-Klaftern in 6 gleich große Rechtecke, jedes 6′ lang und 1′ breit, welche Klafter-Schuhe, geklafterte Schuhe oder Riemen-Schuhe heißen. Jeden derselben theilt man wieder in 12 gleich große Rechtecke, deren jedes 6′ lang, und 1″ breit ist, sie heißen Klafter-Zolle, oder geklafterte Zolle, auch Riemen-Zolle. Diese werden eben so wieder in Klafter-Linien getheilt, u. s. f.

Dem-

Demnach ist 1 Klafter′ $= \frac{1}{6}$ □″ $= 6$ □′

1 Klafter″ $= \frac{1}{12}$ Klafter′ $= 72$ □‴

1 Klafter‴ $= \frac{1}{12}$ Klafter″ $= 72.12$ □^{IV}

Es findet demnach dieselbe Eintheilung wie bey dem Current-Maße Statt. Sollen z. B.

15° — 4′ — 5″ . . . A

mit 4° — 2′ — 6″ . . . B

multiplicirt werden, so multiplicirt man alle in A stehenden Zahlen mit den in B befindlichen Klaftern, man erhält nähmlich 62 Quadrat-Klafter, 5 geklafterte Schuhe und 8 Klafter-Zolle.

62° — 5′ — 8″

5 — 1 — 5 — 8

1 — 1 — 10 — 5

69° — 3′ — 0″ — 1‴.

Weil aber 2′ $= \frac{1}{3}$ ° sind, so theilet man alle in A stehenden Zolle durch den Nenner 3; man erhält 5 Quadrat-Klafter, 1 Klafter-Schuh $5\frac{2}{3}$ Klafter-Zoll. Weil 6″ von 2′ der 4te Theil sind, so darf man nur, um das Product für 6″ zu erhalten, das zuvor erhaltene Product 5° — 1′ — 5″ — 8‴ durch den Nenner 4 theilen; man erhält 1° — 1′ — 10″ — 5‴ zum Producte. Die Summe 69° — 3′ — 0″ — 1‴ ist der verlangte Inhalt.

Sollen z. B. 12° — 4′ — 8″

mit 0 — 5′ — 7 multiplicirt werden,

so zerlegt man 5′ in aliquote Theile der Klafter in 3′ und 2′. Es sind 3′ $= \frac{1}{2}$ °. Ferner sind 2′ $= \frac{1}{3}$ °. Man erhält durch die Division mit dem

Nenn

Nenner 2, 6° — 2′ — 4″; durch die Division mit dem Nenner 3 erhält man 4° — 1′ — 6″ — 8‴. Für 7″ = 6″ + 1″ = $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{6}$ von $\frac{1}{4}$ erhält man

1—0—4—8	6°—2′—4″
und	4—1—6—8
0—1—0—9—4	1—0—4—8
	0—1—0—9—4

die Summe 11°—5′—4″—1‴—4⁗ ist der verlangte Inhalt.

Ließe sich die Anzahl der Zolle nicht bequem in aliquote Theile der Klafter oder der Schuhe auflösen; so müßte man zuvor das Product für 1° suchen z. B.

	3°—0′— 5″	
	2 —0— 3	
1″—$\frac{1}{6}$	0—0—10	
3″—$\frac{1}{4}$	0—3— 0 —10	Product für 1″
	0—0— 9 — 2 —6	
	6°—1′— 7″— 2‴—6⁗	Summe.

Sollten endlich weder in der einen, noch in der andern Zolle und Klafter vorhanden seyn, so kann die Rechnung auf ähnliche Art, in manchen Fällen aber leichter auf die gewöhnliche Weise mittelst der Auflösungen in die kleinsten Theile verrichtet werden. Z. B. (9″—7‴) × (5″—8‴)

9″+7‴=9.12+7‴=115‴ | 115.68‴=54□″—11□‴
5 +8 =5.12+8 = 68 | ——
144

Aus der Eintheilung des Riemenmaßes folgt, wie man jede gegebene Zahl von Klafter-Schuhen, Klafter-Zollen, Klafter-Linien auf Quadrat-Maß bringen kann. Z. B. 7°□—5′—7″—9‴ sind im

Qua-

Quadrat-Maß $7^{\square\circ} - 56^{\square\prime} - \frac{1}{2}^{\square\prime} - 9.6^{\square\prime\prime}$

$= 7^{\square} - 33\frac{1}{2} - 54^{\circ}$ u. s. f.

Aus den Anfangsgründen der Buchstaben-Rechenkunst läßt sich eine sehr bequeme Methode ableiten, Klaftern, Schuhe, Zolle ꝛc. mit Klaftern, Schuhen, Zollen ꝛc. zu multiplicieren. Z. B.

3°— 2′— 3″ mit
2 — 5 — 4

6 — 4 — 6 Product mit den 2°
15 —20—30 Verdoppeltes Prod. d. 5′ in d.″ u.′
12—16—24 = 4 = = =

6 —19—38—46—24

9 — 4 — 6— 0 —0. Also $9^{\square\circ}$—4Kl.′ —6Kl.″.

Soll der Inhalt des Viereckes abcd (Fig. 82.) gleich auf dem Felde gefunden werden, so muß

1. Die Diagonale ac abgesteckt und gemessen werden.
2. Dann sucht man in dieser die Puncte 1 und 2 (§. XVII.)
3. Werden d1 und b2 gemessen, so kann hierdurch der Inhalt der Dreyecke abc und adc berechnet werden. Beyde Summen geben den Inhalt des Viereckes abcd

$= (1d + 2b)\frac{ac}{2} = (10 + 12)\frac{36}{2} = 22.18$

$= 396.$

Man findet nähmlich bey solchen Vierecken, wie abcd, den Inhalt, wenn man die Summe der beyden Höhen 1d, 2b mit der halben Diagonale ac multiplicirt.

Wäre (Fig. 83.) der Inhalt eines Platzes, wie abcd, zu berechnen, so kann dieß leicht gemacht werden, entweder, wenn man, wie schon bemerket wurde,

die

die Summe der Parallelen ad, bc mit demselben Abstande an, oder diesen ganzen Abstand mit der halben Summe der Parallelen multiplicirt, oder wenn man nach der erst zuvor gezeigten Methode die Berechnung anstellet.

Der Inhalt eines regelmäßigen Vieleckes wird gefunden, wenn man das Product aus der Senkrechten von dem Mittelpuncte auf eine Seite mit der halben Anzahl der Seiten multiplicirt.

Ist (Fig. 84.) ab von 2 zu 2 Klaftern eingetheilt, und man errichtet die Normalen a1, 22, 33 ꝛc. (die Ordinaten), so darf man nur zur Summe der ersten und letzten Ordinate die doppelte Summe aller dazwischen befindlichen Ordinaten addiren. Diese neue Summe ist der verlangte Inhalt der Figur, welche von der Geraden ab der 1. und der letzten Ordinate, und der krummen Linie 1, 2, 3 .... begränzet ist.

Die Beweise dieser Auflösungen sind sehr leicht mit Beyziehung der ersten Gründe der Rechenkunst abzuleiten. Fleißigen Anfängern, welche Sinn für Mathematik haben, kann dieß zur Übung dienen.

§. XXIV.

Der pythagoräische Lehrsatz. Folgerungen und Anwendungen.

In jedem rechtwinkeligen Dreyeck ist das Quadrat der dem rechten Winkel entgegen gesetzten Seite (der Hypothenuse) so groß, als die Summe der Quadrate der beyden andern Seiten (der Katheten) (Fig. 85. Tab. IV.)

Zieht man die Normale OF auf DR, so wird das Quadrat ARDG in zwey Rechtecke getheilet, nähmlich DEFG und ERAF. Kann man nun beweisen, daß das Rechteck DEFG dem Quadrate DHIO, und das Rechteck FABR dem Quadrate ORLK gleich ist, so ist auch bewie-

sen, daß das Quadrat ARDG so groß ist, als die Summe aus den Quadraten ORLK und ODHI.

Die Dreyecke HOD und HDR sind einander gleich; denn sie haben gleiche Grundlinien HD, und sind zwischen denselben Gleichlaufenden enthalten, zwischen HD und RI. Dasselbe gilt von den Dreyecken DOG, DEG, weil DG als Grundlinie zu beyden gehöret, und DG mit OF parallel ist.

Es ist aber das Dreyeck HRD so groß als das Dreyeck DOG; denn weil HIOD und DRAG Quadrate sind, so ist HD = OD und DG = DR. Daher haben die zwey Dreyecke HDR und GDO zwey Seiten gemein. Weil aber der Winkel 1 + 2 dem Winkel 3 + 2 gleich ist; so ist in diesen Dreyecken auch der von den gemeinschaftlichen Seiten eingeschlossene Winkel gleich groß, daher sind diese Dreyecke einander gleich.

Weil aber zwey Größen einander gleich sind, wenn sie einer dritten Größe gleich sind; so wird auch das Dreyeck HDO = dem Dreyecke DEG seyn. Nähmlich das halbe Quadrat HIOD ist dem halben Rechtecke DEFG gleich; deßwegen ist auch das ganze Rechteck DEFG dem ganzen Quadrate HIOD gleich.

Da auf ähnliche Art bewiesen werden kann, daß das Rechteck ERAF dem Quadrate OKLR gleich ist; so ist hiermit auch bewiesen, daß das Quadrat der größten Seite DR so groß ist, als die Summe der Quadrate der beyden andern Seiten.

Sind also die Quadrate zweyer Seiten zusammen genommen so groß, als das Quadrat der 3ten Seite; so muß der dieser Seite entgegen gesetzte Winkel ein rechter Winkel seyn. Denn sind (Fig. 86.) in dem Dreyecke ACB die Quadrate AC, CB zusammen dem Quadrate der Seite AB gleich; so errichte man aus dem Puncte B auf CB die Normale CD der Seite CA gleich; zieht man nun BD, so ist das Quadrat davon so groß als das Quadrat der Seiten BC, CD oder BC, CA, also auch vermöge der Voraussetzung dem Quadrate von AB gleich.

Also ist AB der BD gleich, die Dreyecke ACB, BCD sind gleich groß, und der Winkel ACB ist vermöge der Construction dem Winkel BCD gleich, der ein rechter Winkel ist.

Durch diesen Lehrsatz, dessen Erfinder der griechische Philosoph Pythagoras gewesen ist, kann aus zwey gegebenen Seiten eines rechtwinkeligen Dreyeckes die dritte Seite gefunden werden.

Ist z. B. Eine der Seiten = 3 Fuß, die andere gleich 4 Fuß, so enthält das Quadrat der ersten 9 Quadrat-Fuß, das der zweyten 16 Quadrat-Fuß, die Summe ist 25□ als das Quadrat der dem rechten Winkel entgegen gesetzten Seite, die Wurzel daraus, 5 Schuh, ist die Länge der Seite selbst. Ist im Gegentheil die Hypothenuse gegeben, und Eine der andern Seiten z. B. 3′; so ist die andere Seite die Wurzel aus dem Unterschiede der Quadrate dieser beyden Seiten $= \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$.

Sind also in einem rechtwinkeligen Dreyecke zwey Seiten, daher auch ihre Quadrate gegeben, so erhält man immer das Quadrat der dritten Seite.

Doch die Länge der Seiten des Quadrates kann durch Rechnung nicht immer genau, sondern nur durch Annäherung gefunden werden. So ist die Quadrat-Wurzel von 1 die 1 selbst, und $\sqrt{4}$ ist 2; hingegen kann aus 2 keine richtige Wurzel gezogen werden, weil man weder eine Ganze, noch eine gebrochene Zahl finden wird, die mit sich selbst multiplicirt die Zahl 2 hervorbringt. Die Rechenkunst lehret, daß $\sqrt{2} = 1'41421 \ldots$ u. s. f. ist.

Setzt man nähmlich die Seiten eines Quadrates = 1, (oder jede der Katheten eines rechtwinkeligen und gleichschenkeligen Dreyeckes), so ist die Diagonale (die Hypothenuse des Dreyeckes) $= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Man erhält für die Wurzel ein Ganzes, vier zehnte Theile, einen hunderten Theil, vier tausende Theile, zwey zehntausende Theile u. s. f.; doch sind zur Erhaltung der ganzen Wurzel mehr als zwey, und weniger als drey tausend Theile der Einheit erforderlich. Man kann sich der Quadrat-Wurzel von 2 nur nähern, sie niemahls vollkommen durch Rechnung finden. Dieses ist bey vielen andern Zahlen

len der Fall, wo 2, oder eine andere Zahl, welche keine vollkommene Quadratwurzel hat, ein Factor ist. Z. B. $\sqrt{8} = \sqrt{2.4} = 2\sqrt{2} : \sqrt{5} : \sqrt{160} = \sqrt{16.10}$ $= 4\sqrt{2.5} = 4.1'4.12\sqrt{5}$ u. dgl. m.

Solche Wurzelgrößen nennt man Irrational-Zahlen, und Zahlen die sich durch ganze Einheiten oder Theile derselben ausdrücken lassen, heissen Rational-Zahlen. Ferner sagen die Geometer, daß die Seite des Quadrates und seine Diagonale incommensurable Größen seyn, d. i. Größen, für deren Bestimmung es keine gemeinschaftliche Einheit gibt. Im Gegentheile nennet man die Großen commensurabel.

Der Nutzen des Pythagoräischen Lehrsatzes besteht vorzüglich in dem, daß die Summe oder der Unterschied der Quadrate (auch aller ähnlichen Figuren, wie aus dem Folgenden erhellet) angegeben, und daß ein Quadrat gezeichnet werden kann, das 2 . . . Mahl größer ist, als ein gegebenes Quadrat. Aus den einfachen und dem 2fachen Quadrate findet man die Seite des 3—5—6—7—8—10—11— u. s. f. fachen Quadrates u. m. dgl.

Soll man untersuchen, ob irgend ein Winkel, welchen z. B. zwey Planken, Mauern, Gräben u. dgl. mit einander machen, ein rechter Winkel ist, so darf man nur die Längen 3, 4, 5 (Schuhe — Klafter — Ruthen) nach einander auf eine Schnur tragen, den Anfangs- und Endespunct vereinigen, um ein rechtwinkeliges Dreyeck zu bilden, womit sodann der gegebene Winkel untersucht werden kann.

Trägt man aus der Spitze des rechten Winkels auf jeden der Schenkel eine gewisse Länge z. B 10', und es wird sodann die Sehne (Hypothenuse) auch gemessen; so läßt sich durch eine ganz leichte Berechnung zeigen, daß der gegebene Winkel ein stumpfer, oder ein spitziger, oder ein rechter Winkel sey.

Wäre die Hypothenuse z. B. 15° gefunden worden, so ist $2.100 < 15°$, also der Winkel kein rechter Winkel. Wäre sie z. B. $13\frac{1}{2}°$ lang gefunden worden; so ist $2.100 > (13° - 2°)^2$, also der Winkel kein rechter Winkel u. dgl. m.

Bey der Aufnahme mit dem (Kreuz-Diopter) Kreuzmaße oder Winkelkreuze ergeben sich manche Anwendungen des Pythagoräischen Lehrsatzes. Z.B. Wenn (Fig. 44.) das Dreyeck bac aufgenommen werden soll, und man hat in der Seite bc als Stand- oder Grundlinie den Punct n gefunden, (§. XVII.) die Längen bn, nc und die Höhe na gemessen; so findet man hieraus jede der andern Seiten, nähmlich ba und ca. Denn gesetzt es wäre $bn = 20°$, $nc = 32°$ und $na = 30°$; so ist $ab = \sqrt{400 + 900} = \sqrt{1300} = 36° - 4\frac{4}{5}'$ beynahe. Und $ac = \sqrt{1024 + 900} = \sqrt{1924} = 43' - 5\frac{1}{2}'$ beynahe.

Daher kann man bloß aus der Diagonale ac, den Abschnitten derselben, und den beyden Höhen h und y (Fig. 82.) den Inhalt, und den Umfang von jeder vierseitigen Figur ganz leicht angeben.

Dasselbe gilt für 5, 6, 7 . . . und mehrseitige Plätze, wie A, B, C, D, E (Fig. 68.)

Beym Rechtecke sind die erst erwähnten Höhen einander gleich, daher wird die Rechnung kürzer. Wäre z. B. die Diagonale eines Rechteckes $= 45°$, und eine der Senkrechten aus dem Winkelpuncte auf die Diagonale $= 20°$; so ist der Inhalt des Rechteckes $= 45°.20° = 900^{\square°}$ u. s. f. Ist die Diagonale des Quadrates $= 10$; so ist der Inhalt des Quadrates $= 10.\frac{1}{2}° = 50$.

Ist der schiefe Abstand eines auf der Anhöhe befindlichen Punctes von einem in der Ebene befindli-

chen

chen Puncte, und der Vertical-Abstand des ersten von dem andern bekannt, so berechnet man daraus leicht den Horizontal-Abstand dieser Puncte, und umgekehrt, den schiefen Abstand. Denn diese drey Abstände bilden zusammen ein rechtwinkeliges Dreyeck, aus dessen zwey Seiten immer die 3te gefunden werden kann.

Weitere Anwendungen des Pythagoräischen Lehrsatzes können erst in dem folgenden §. vorkommen.

§. XXV.

In jedem Dreyecke steht der größern Seite ein größerer Winkel entgegen. Folgerungen und Anwendungen daraus. Unmöglichkeit einer Geraden zwischen der Tangente und dem Kreisbogen. Berührungswinkel. Die Tangente mehreren Kreisen gemeinschaftlich.

In jedem Dreyecke ist der größeren Seite ein größerer Winkel entgegen gesetzt (Fig. 87.)

Ist die Seite AB des Dreyeckes ABC größer als die Seite AC; so wird auch der Winkel ACB größer als der Winkel ABC seyn.

Wird von der größten Seite die Seite AC weggenommen, und CD gezogen; so ist das Dreyeck CAD gleichschenkelig; deßhalb der Winkel ADC = dem Winkel ACD, aber der Winkel CBA ist kleiner als der äußere Winkel CDA des Dreyeckes DBC, also ist er auch kleiner als der Winkel ACD um so viel mehr kleiner, als der Winkel ACB.

Daher ist in jedem Dreyecke dem größeren Winkel auch eine größere Seite entgegen gesetzt. (Fig. 88.) Es sey der Winkel ACB größer als der Winkel ABC; die Seite AB wird der Seite AC nicht gleich seyn, denn das Dreyeck wäre dann gleichschenkelig. Doch ist die Seite AB nicht kleiner als die Seite AC, denn der Winkel ABC

wäre

wäre dann größer als der Winkel ACB, es bleibt also nur übrig, daß AB > AC ist.

Haben zwey Dreyecke ABC, ABD zwey Seiten AB, BC und AB, BD gleich groß, die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel hingegen nicht gleich groß; so wird die Grundlinie AD, welche dem größern Winkel entgegen steht, größer seyn, als die dem kleineren Winkel entgegen gesetzte Seite AC. Denn wird die Seite AB des einen Dreyeckes auf die ihr gleiche Seite des andern Dreyeckes gelegt; so sind diese Seiten mit einander congruent, aber BD fällt außer BC, weil der Winkel ABD größer als der Winkel ABC ist. Wird aus B als dem Mittelpuncte mit BD ein Kreisbogen beschrieben, der durch C geht, weil BD = BC ist, und man zieht CD; so wird CBD ein gleichschenkeliges Dreyeck seyn. Im Dreyecke ACD aber ist der Winkel ACD größer als der Winkel BCD, also auch größer als der Winkel CDB, mithin wird er auch größer seyn als der Winkel CDA, deßhalb auch die Seite AD, welche dem größeren Winkel entgegen gesetzt ist, größer seyn muß, als die Seite AC, welche dem kleineren Winkel entgegen steht.

Haben zwey Dreyecke zwey Seiten gleich groß, die 3te Seite des einen (die Grundlinie) ist aber größer als die 3te Seite (die Grundlinie) des andern; so wird auch der der ersten entgegen gesetzte Winkel größer seyn als der der Grundlinie des zweyten entgegen stehende. Denn nimmt man diese Winkel als gleich groß an, so müßten auch die Grundlinien einander gleich seyn, wider die Voraussetzung, nimmt man den der kleineren Grundlinie entgegen stehenden Winkel als den größern an; so müßte dieser vermöge des Vorigen der größern Grundlinie entgegen stehen.

Aus allen Geraden (Fig. 89.), welche von einem Puncte C aus auf was immer für eine Gerade KL gezogen werden können, ist die Senkrechte CB die kürzeste; denn wird was immer für eine Gerade CA ge-

zogen; so werden in dem rechtwinkeligen Dreyecke CBA die Winkel C und A zusammen genommen einem rechten Winkel gleich seyn, also ist der Winkel A kleiner als der Winkel ABC; daher die Seite AC größer als die Seite CB; auch wird das Quadrat der Seite AC den beyden Quadraten der Seiten BC und BA zusammen gleich seyn.

Sollte also aus irgend einem Puncte C, z. B. von einem Gebäude u. dgl. ein Weg nach der Heerstraße KL gemacht werden, so würden die dießfälligen Baukosten immer größer gefunden werden, je mehr sich der Winkel ACB dem rechten Winkel nähert. Beschreibt man aus C, als dem Mittelpuncte, mit CB einen Kreisbogen; so schneidet dieser die Gerade CA in irgend einem Puncte G, so daß CG = CB ist. Also fällt jeder Punct A der Geraden AL außer die Kreislinie, welche daher von dieser Geraden AL in dem einzigen Puncte B berühret wird, da sie dem Durchmesser BC senkrecht ist. Jede Gerade auf dem Durch- oder Halbmesser in seinem Endespuncte Normale ist eine Tangente des Kreises.

Hieraus folgt, wie man an jedem gegebenen Puncte der Kreislinie eine Tangente ziehen, jedem Kreise ein Quadrat umschreiben, den Berührungspunct finden kann u. dgl. m.

Wird unter was immer für einen Winkel ABE die Sehne BF gezogen; so wird dieser Winkel dem Winkel BCA gleich; in dem Dreyecke RBC sind die zwey Winkel EBC und BCE zusammen genommen dem rechten Winkel ABC gleich, also wird auch der dritte CEB ein rechter seyn, und CE ist kleiner als die Gerade CB oder CG. (Wenn nähmlich BG = GF ist). Deßhalb liegt der Punct E in dem Kreise. Hieraus folgt, daß zwischen der Tangente AB und dem Kreisbogen keine Gerade BEF gezogen werden kann, und daß der Winkel, den die Tangente mit dem Kreisbogen macht, kleiner ist, als jeder geradlinige Winkel.

Man

Man nennet diesen Winkel den **Berührungswinkel.**

Haben (Fig. 90.) zwey Kreise dieselbe Tangente; so geht die Gerade auf den Berührungspunct der Tangente normal durch die Mittelpuncte der beyden Kreise, vermöge des Vorigen. Zieht man CG und DG, die verlängert den Kreis IOB in O schneiden, und in N die Tangente AB; so wird in dem Dreyecke GCD die Seite DG kleiner seyn, als die andern beyden GC, CD zusammen. Weil aber die Halbmesser CG, CB einander gleich sind; so wird die Gerade DG < als DB oder DO seyn, welche so wie OB ein Halbmesser des Kreises IOB ist. Also wird jeder Punct G des Kreises FGB innerhalb des Kreises IOB liegen, und deßwegen werden jene Kreise in dem Puncte B sich berühren, wo sie nähmlich die Gerade HA berühren.

§. XXVI.

Winkel im Mittelpuncte und am Umfange. Ziehung der Tangente. Die Winkel eines dem Kreise eingeschriebenen Viereckes. Winkel der Sehnen. Kreisbögen der parallelen Sehnen. Winkel, den die Sehne mit der Tangente bildet.

Der Winkel am Mittelpuncte eines Kreises ist noch einmahl so groß, als der Winkel am Umfange, wenn beyde denselben Bogen enthalten. (Fig. 91.)

Derselbe Bogen AB sey zwischen den Schenkeln des Winkels ACB am Mittelpuncte, und des Winkels ADB am Umfange enthalten; der erste dieser Winkel wird das Doppelte des zweyten seyn.

Geht ein Schenkel DA durch den Mittelpunct, so ist das Dreyeck BCD gleichschenkelig, dessen Winkel CDB, CBD gleich groß BCA ein äußerer Winkel, also $\frac{BCA}{2}$ = ADB.

Fällt

Fällt der Mittelpunct C innerhalb des Winkels (Fig. 92.) oder außerhalb desselben, (Fig. 93.) und man zieht den Durchmesser DCE; so wird, wie zuvor, der äußere Winkel ACE das Doppelte des entgegen gesetzten ADE seyn; auch der Winkel ECB ist das Doppelte des Winkels CDB; deßhalb der Winkel ACB als die Summe der erst genannten Winkel im 1ten Falle, als der Unterschied derselben im zweyten Falle zu betrachten ist. Es ist nähmlich

$$\frac{ACE \pm ECB}{2} = ADB.$$

Vermöge dessen ist (Fig. 94.) der Winkel im Halbkreise ADB ein rechter Winkel, der Winkel EDB im kleinern Segmente, welcher den größeren Bogen EFB enthält, ist stumpf, und der Winkel FDB im größern Segmente ist spitzig.

Soll (Fig. 95.) aus einem gegebenen Puncte A eine Gerade geführet werden, welche die Kreislinie in einem Puncte berührt; so wird, nachdem AC gezogen ist, diese in B in zwey gleich große Theile getheilet, und aus diesem Mittelpuncte mit BA ein Kreis gezeichnet, welcher den ersten in D und E schneidet, dann werden die Geraden AC, AE gezogen, welche Tangenten sind.

Verbindet man die Puncte ECD mittels gerader Linien, so wird sowohl der Winkel ADC als der Winkel AEC ein rechter Winkel seyn, da jeder im Halbkreise ist.

Daher sind (Fig. 96.) die entgegen gesetzten Winkel eines jeden dem Kreise eingeschriebenen Viereckes ABCD zusammen zwey rechten Winkeln gleich. Umgekehrt ist jedes Viereck in demselben Kreise, wenn zwey einander entgegen stehende Winkel desselben zweyen rechten gleich sind. Es kann also unter dieser Voraussetzung durch 4 Puncte ein Kreis geführet werden.

Das Maß eines Winkels ABC (Fig. 97.), welchen zwey sich in dem Kreise schneidende Sehnen bilden, ist die halbe Summe der zwischen den Schenkeln enthaltenen Bögen.

Das Maß eines Winkels AFC aber, welchen die verlängerten Sehnen AE, CG außer dem Kreise bilden, ist der halbe Unterschied, der von ihnen enthaltenen Bögen. Nähmlich im 1ten Falle ist $\frac{AC+DE}{2}$; im 2ten Falle $\frac{AE-EG}{2}$, das Maß des Winkels.

Denn zieht man fürs erste BC; so ist der äußere Winkel ABC den beyden innern entgegen gesetzten BEC, BCE zusammen gleich, deren einer den halben Bogen DE, der andere den halben Bogen AC zum Maße hat; die Summe dieser Winkel oder der Winkel ABC hat daher die halbe Summe der Bögen AC und DE zum Maße.

Fürs zweyte, da der äußere Winkel AEC den innern entgegen gesetzten ECF, EFC zusammen gleich ist, wird auch der Winkel AEG, weniger den Winkel ECG, dem Winkel F gleich seyn, aber das Maß des Winkels AEC ist der halbe Bogen AC, und des Winkels ECG der halbe Bogen EG. Also das Maß des Winkels F der halbe Bogen AC, weniger den halben Bogen EG, d. i. $\frac{AC}{2} - \frac{EG}{2} = \frac{AC-EG}{2}$.

Sind (Fig. 98.) die Sehnen AB, CD mit einander gleichlaufend, und man zieht CB; so sind die Winkel DCB, CBA Wechselwinkel, daher die Bögen AC, DB einander gleich, da ihre Hälften gleiche Winkel messen. Es sind also die Bögen, welche zwischen gleichlaufenden Sehnen enthalten sind, von gleicher Größe.

Die Winkel (Fig. 99.) ABE, ABF, welche die Sehne BA mit der Tangente EF machen, werden durch die halben Bögen BA, BDA gemessen. Denn da der Durchmesser DB der Tangente normal ist, und AD gezogen wird, so ist der Winkel DAB im Halbkreise ein rechter Winkel, daher die andern beyden Winkel desselben Dreyeckes ADB zusammen einem rechten Winkel gleich. Wird nun der gemeinschaftliche Winkel ABD weggenommen; so ist der als Rest gebliebene Winkel ADB dem Winkel EBA gleich; denn es ist EBA + ABD = 90°; also ist das Maß des Winkels EBA ebenfalls der halbe Bogen AB, welcher auch das Maß des Winkels ABD ist.

Man findet ferners, daß das Maß des Winkels ABE der halbe Bogen ADB ist.

§. XXVII.

Anwendungen dieser Sätze und der vorhergehenden. Senkrechte oder Normale am Endespuncte einer geraden Linie auf dem Papiere sowohl, als auf dem Felde. Die Normalen in einem Vielecke. Bestimmung von Puncten der Kreislinien ohne den Mittelpunct. Zeichnung eines rechtwinkeligen Dreyeckes. Prüfung des sogenannten Winkelmaßes. Mit einer unzugänglichen Linie eine Gleichlaufende ausstecken. Zeichnung eines Kreisabschnittes, der einen gegebenen Winkel enthält u. s. f. Zeichnung einiger Gewölbe. Bögen.

Soll (Fig. 100. und 101.) an dem Endespuncte der Geraden ab eine dieser Normale gezogen werden, ohne die angegebene Gerade zu verlängern; so wird aus irgend einem Puncte C ein Kreisbogen 3.a.1 beschrieben, welcher durch den Endespunct a gehen muß. Zieht man den Durchmesser 1.C.x, und so

dann

dann die Sehne ax; so ist der Winkel xab im Halbkreise ein rechter Winkel, daher xa der Linie ab in a normal.

Auf ähnliche Art wird an jedem Puncte des Umkreises eine Tangente gezogen.

Auf dem Felde kann das Tracieren des Kreisbogens ganz vermieden werden. Man darf nur mittels der Schnur oder Kette mit der Weite ca aus c den Durchschnittspunct 1 suchen, dann die Schnur oder Kette so ausspannen, daß 1c=ac ist; so wird dadurch der Punct x erhalten.

Dieses Verfahren gibt in vielen Fällen, besonders in der §. XXI gezeigten Verwandlung der Rechtecke, sehr viele Bequemlichkeit. Z. B. (Fig. 102). Um die Höhen der Dreyecke anzugeben wird aus dem Mittel z. B. der Seite 1.2 mit ihrer Hälfte der Durchschnitt x gesucht, x1 ist eine der Höhen. Eben so werden die andern Höhen gefunden.

Wäre (Fig. 103.) in H irgend ein Hinderniß, um welches ein Kreis beschrieben werden soll, so daß man den Mittelpunct desselben nicht haben kann; so kann dieses leicht mittels zweyer unter einem rechten Winkel an einander befestigten Latten, und zweyer in dem Anfangspuncte 1, und dem Endespuncte 2 eingeschlagener Pfähle bewerkstelliget werden. Denn liegen die Schenkel des Winkelhakens immer genau an den Puncten 1 und 2, so liegt die Spitze desselben im Halbkreise, nähmlich die Puncte x, y, z, v u. s. f.

Ebenfalls läßt sich sehr leicht aus der Hypothenuse und einer Kathete, aus der Diagonale und einer Seite des Rechteckes, oder aus der Diagonale des Quadrates jede dieser Figuren zeichnen. (Fig. 104.) Denn beschreibt man mit der halben Diagonale mb aus

m, als dem Mittelpuncte, einen Halbkreis, und trägt die gegebene Breite des Rechteckes aus a z. B. auf den Halbkreis, so erhält man den Punct x; xb ist die andere Seite des Rechteckes.

Mittels dieses Satzes kann man jeden Winkelhaken (Winkelmaß) prüfen.

Soll (Fig. 105.) mit einer unzugänglichen Linie AB eine Parallele durch den gegebenen Punct C geführt werden; so wird zuerst ein Punct D bestimmet, so daß der Winkel ADB dem Winkel ACB gleich ist. Durch C wird dann eine Gerade CE geführt, welche mit CB einen Winkel macht, der dem Winkel ADC gleich ist. Diese Gerade ist die verlangte Parallele.

Wäre also eine Linie auszustecken, die mit AB rechte Winkel macht; so ist dieß jede auf CE normale Linie.

Soll (Fig. 6.) auf ab ein Kreisabschnitt gemacht werden, der einen dem Winkel C gleichen Winkel enthält; so wird zuerst ein Winkel bad gemacht, welcher so groß ist, als der gegebene Winkel c, und es wird die Normale ag gezogen. Aus dem Mittelpuncte h der Linie ab wird die Normale hF, aus F der Bogen agb beschrieben und bg gezogen. Der im Segmente agb enthaltene Winkel g wird dem gegebenen Winkel C gleich seyn.

Aus diesen Sätzen folgen viele Auflösungen gemeinnütziger Aufgaben, welche in manchen Fällen vortheilhaft angewendet werden können. Z. B. (Fig. 101.)

Der spitzige Winkel mnq soll mittels des Kreuz-Diopters aufgenommen werden. Man kann aber von keinem Puncte der Linie nq nach irgend einem Puncte der Linie nm hinüber messen. Eben so wenig kann

man

man von einem Puncte der Linie nm nach irgend einem Puncte der Linie nq hinüber messen, weil zwischen diesen Linien irgend ein Hinderniß V sich befindet.

1. In einem schicklich gewählten Puncte 2 des Schenkels nq, oder 1 des Schenkels nm wird das Kreuz-Diopter aufgestellet, so daß eine Visirlinie in der Vertical-Ebene nq oder im andern Falle in der Vertical-Ebene nm liegt.
2. Der andere Diopter wird einen Punct x oder y geben, den man genau anmerken läßt.
3. Dann wird n2 und nx, oder n1 und ny gemessen.
4. Auf dem Papiere zieht man eine Gerade NX oder NY, welche den auf dem Felde gemessenen gleichnahmigen Linien gemäß seyn müssen. Aus dem Mittelpuncte O dieser Linie NX oder NY wird ein Halbkreis beschrieben, und aus dem Anfangspuncte N eine Linie NII als Sehne eingetragen, welche der Linie n2 oder n1 gemäß seyn muß. Dadurch erhält man den Punct II und den verlangten Winkel XNII = xn2.

Die Auflösung kann in den meisten Fällen vortheilhaft auf die Aufnahme der Dreyecke angewendet werden.

Aus §. XXIV. folgt $x2 = \sqrt{nx^2 - n2^2}$ und $yi = \sqrt{ny^2 - ni^2}$. Es kann also durch diese leichte Rechnung die Aufnahme der Winkel geprüft werden.

Ein Halbkreis wird in den technischen Künsten gewöhnlich ein voller Bogen genannt. Ein Gewölbe ist nach dem vollen Bogen gebauet, wenn die halbe Weite des Gewölbes der Bogenhöhe gleich ist.

Die-

Diese aber ist die Senkrechte aus dem Mittel der Bogenweite bis an die krumme Linie an dem Bogen.

Ist die halbe Weite größer als die Höhe, so nennet man den Bogen einen gedrückten Bogen. Ist die Höhe größer als die halbe Weite, so nennet man den Bogen einen überhobenen Bogen.

Ein steigender Bogen ist der, dessen Anfangspunct höher oder tiefer ist, als der Endespunct.

Gothische Bögen sind jene, welche aus sich kreuzenden Zirkelbögen bestehen, wie Fig. A, B und C. (Fig. 107.)

Damit die Last der Gewölbe, so viel möglich, senkrecht auf die Widerlagen (jene Orte, wo die Krümmung sich anfängt) wirke, müssen diese Tangenten der Gewölbe-Bögen machen, wie ABC von dem Bogen BD. (Fig. 108.) Eben so sollen auch die gedrückten Bögen, welche aus mehreren Kreisbögen bestehen, bey ihrem Zusammenstoßungspuncte einerley Tangente haben. So ist EF die gemeinschaftliche Tangente der beyden Kreisbögen DB und DG; daher sind ihre Mittelpuncte O und M auf der nähmlichen Geraden DM, weil die Halbmesser der Tangente senkrecht sind. Dadurch wird verhindert, daß die Bögen weder unter sich, noch mit den Widerlagen einen Bruch machen, was bey dem Gewölben durchaus vermieden werden muß.

Ist nur (Fig. 109.) die Weite AB gegeben, so macht man aus den Puncten 1 und 2, die Bögen AD und BE, und sucht den Durchschnitt C mit derselben Weite. Aus diesem Puncte C wird mit dem Durchmesser CD, als Halbmesser, der Bogen DE beschrieben. ADEB ist der verlangte gedrückte Bogen.

Ist aber auch (Fig. 110.) die Bogenhöhe CD gegeben; so wird DB gezogen, und aus B der Bogen CE beschrieben; dann beschreibt man aus C mit CD den Bogen DF. Die Weite EF wird aus B nach H und aus A nach G getragen; aus diesen Puncten G und H werden die beyden Bögen AI und BK jeder von 60° gezogen. Die Linie IGL oder KHL gibt den Punct L des dritten Bogens IDK.

Ist AB die Weite, und CD die Höhe (Fig. 111.), so macht man aus C den Bogen AE, theilet DE in 3 gleiche Theile, und trägt einen solchen Theil von D nach F, beschreibt mit FC aus A und B die Bögen GH und IK, aus G und I aber die Bögen HA und BK, macht endlich mit HK aus K und H, den Durchschnitt O, so ist dieß der Mittelpunct des Bogens HDK.

Kein gedrückter Bogen macht eine schöne Figur, wenn die Bogenhöhe kleiner als der vierte Theil der Bogenweite ist, weil in diesem Falle die Bogenstücke zu sehr in ihren Krümmungen von einander verschieden sind.

Werden solche Bögen (Korbbögen) auch unterhalb der Bogenweite AB fortgeführet; so erhält man so genannte gedrückte Kreise, die man gewöhnlich Ovale nennt. Derley krumme Linien werden auch mittels eigener Werkzeuge beschrieben, welche man Ellipsen- oder Oval-Zirkel heißt. Von diesen Instrumenten wird in den Vorlesungen gehandelt.

Nach den zuvor gezeigten Auflösungen kann man auch ganz leicht die überhobenen Bögen zeichnen.

Als eine Anwendung der vorerklärten Sätze folgt hier die Zeichnung eines steigenden Bogens. Hierbey sind zwey Linien zu bemerken, nähmlich die Scheitellinie und die Steigungslinie.

Die Scheitel-Linie ist jene, nach welcher die Stufen einer Stiege angelegt werden. Die Steigungslinie ist jene, welche von einem Widerlager zu dem andern gezogen wird. Diese beyden Linien sind schiefe Linien.

Soll ein steigender Bogen gezeichnet werden (Fig. 112.), dessen Widerlager A und B sind; so wird zuerst die Horizontale AD gezogen, der Abstand BC aus C nach D getragen und in der Mitte M von AD die Verticale MO errichtet. Dann wird aus B auf die Senkrechte OM die Wagerechte BN gezeichnet. Dadurch erhält man den Punct N als Mittelpunct für den Bogen BO. Aus M wird endlich der Bogen OA beschrieben. Der zusammen gesetzte Bogen BOA ist der verlangte steigende Bogen.

Die Zeichnung anderer Bögen, welche in der Baukunst und in der Mechanik gebraucht, aber nur in der höhern Geometrie deutlich erklärt werden können, darf hier nicht Platz finden.

Das Einzeichnen geometrischer Figuren in ein gegebenes Rechteck, wobey es auf eine ordentliche Austheilung der Nebenräume ankommt, dann das Zeichnen der Rechtecke und anderer ebenen Flächen bey gegebenen Abmessungen u. m. dgl. wird der fleißige Anfänger, welcher das bisher Erklärte wohl verstanden hat, leicht bewerkstelligen, und daher in dem Zeichnen der Elementar-Täfelchen viele Fortschritte machen.

Die Beschreibung der regelmäßigen Vielecke z. B. des 5, 7, 9, 11... eckes hat man in diese Anfangsgründe, als einen bey den vorgeschriebenen Zeichnungsarten nur selten vorkommenden Gegenstand, nicht aufgenommen.

Die Beschreibung der regelmässigen Vielecke wird in den ältern Lehrbüchern der Geometrie weitläufig ab-

gehandelt. S. v. Pürkenstein math. Wissenschaften. Augsburg 1731. 4to.

Von den Proportional-Linien.

§. XXVIII.

Die nöthigsten Sätze von den Verhältnissen und Proportionen, als Einleitung.

Wenn man sucht, um wie viel, oder wie vielmahl eine Größe, größer oder kleiner als die andere ist, so betrachtet man diese Größen in ihrem Verhältniß. Im 1. Falle betrachtet man den Unterschied der beyden Größen, im 2. Falle den Quotienten, welcher durch die Theilung der einen Verhältnißgröße mit der andern erzielt wird. Im 1. Falle hat man ein arithmetisches, im 2. ein geometrisches Verhältniß. Die verglichenen Größen sind die Glieder des Verhältnisses.

So ist z. B. 7—4 ein arithmetisches, und

48 : 7 ein geometrisches Verhältniß

(Enthältniß.)

Der Unterschied der beyden Verhältnißgrößen, im obigen Beyspiele, heißt der Rahme, die Differenz; der Quotient $\frac{48}{7} = 6\frac{6}{7}$ heißt der Exponent des geometrischen Verhältnisses. Gewöhnlich versteht man das geometrische Verhältniß, wenn von Verhältnissen gesprochen wird.

Zwey Größen mit einander unmittelbar verglichen geben ein einfaches, wenn sie mittelbar verglichen werden, ein zusammen gesetztes Verhältniß.

Pro-

Proportion ist die Gleichheit zweyer Verhältnisse. Nachdem die beyden Verhältnisse arithmetische oder geometrische Verhältnisse sind, gibt es arithmetische und geometrische Proportionen. Eine Proportion hat 4 Glieder. Eine stete, stetige, ist jene, in der das 2. Glied des 1. Verhältnisses dem 1. des 2. Verhältnisses gleich ist, wo also ein Glied zweymahl vorkommt.

Diese Größe, welche in derselben Proportion zweymahl vorkommt, heißt die mittlere Proportionale. So z. B. ist in der Proportion 4 : 17 = 12 : 51, die Größe 4 das erste, 17 das zweyte, 12 das dritte und 51 das vierte Glied. In der Proportion 6 : 8 = 8 : 10⅔ ist die Größe 8 die mittlere Proportionale.

Es werden immer geometrische Verhältnisse und Proportionen verstanden, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich erinnert wird.

Da die geometrischen Proportionen im Folgenden vorzüglich angewendet werden; so wird hier nur von dieser Art Proportionen gehandelt.

Wenn A das 2. Glied, B das 4. Glied, und m den Exponenten vorstellet; so stellet mA : A = mB : B jede geometrische Proportion vor. Multiplicirt man die beyden innern Glieder A und mB mit einander; so erhält man AmB. Multiplicirt man die beyden äußern Glieder mit einander; so erhält man dasselbe Product mAB. Dieses ist der Hauptlehrsatz der Proportionen, nähmlich: in jeder Proportion ist das Product der mittlern Glieder so groß, als das Product der äußern Glieder.

Daher ist in einer stetigen Proportion das Product der äußern Glieder dem Quadrate des mittleren oder inneren Gliedes gleich.

Wenn das Product zweyer Factoren dem Producte zweyer andern Factoren gleich ist; so lassen sich diese 4 Factoren in eine Proportion so bringen, daß die Factoren des einen Productes die äußern, die Factoren des andern Productes die inneren Glieder abgeben.

Die beyden Aufgaben: Zu 3 Zahlen die 4. Proportional-Zahl zu finden, und zwischen 2 Zahlen eine mittlere Proportional-Zahl zu finden, können vermöge des vorangeführten Lehrsatzes in jedem Falle leicht aufgelöset werden. Z. B. Man soll zu den drey Zahlen 5, 9 und 13 die 4. Proportional-Zahl finden. Es ist $5 : 9 = 13 : x$, daher ist $9.13 = 5.x$ woraus $x = \frac{9.13}{5} = 23\frac{2}{5}$ folgt. Denn es ist $5 : 9 = 13 : 23\frac{2}{5}$, weil $13.9 = 5.23\frac{2}{5}$ ist.

Ist die zu berechnende Größe ein äußeres Glied; so theilt man das Product der innern oder mittlern Glieder durch das bekannte äußere Glied; ist aber die zu findende Größe ein inneres oder mittleres Glied; so theilt man das Product der äußern Glieder durch das bekannte mittlere oder innere Glied.

Wäre fürs zweyte eine stetige Proportion z. B. $4 : x = x : 9$ gegeben, und man sollte daraus die mittlere Proportionale x finden; so ist $x.x = 4.9$, woraus nach den Regeln der Arithmetik $x = \sqrt{4.9} = \sqrt{36} = 6$ folgt.

Man findet daher die mittlere Proportionale, wenn man aus dem Producte der beyden gegebenen Proportional-Größen, hier 4 und 9, die Quadrat-Wurzel zieht.

Aus einer Proportion $a : b = f : g$ lassen sich mehrere andere ableiten. Denn man kann

Er-

Erstens, die mittlern Glieder verwechseln a : f = b : g es wird dennoch das Product der äußern ag dem Producte der innern bf gleich bleiben.

Zweytens, die vorhergehenden und die folgenden Glieder addiren: a+b : b+g = a : b. Auch a+b : f+g = a : f. Denn in jedem Falle ist wieder das Product der äußern Glieder (a+f)b dem Producte der innern Glieder (b+g)a gleich u. s. f.

Drittens, können diese Glieder von einander abgezogen werden. Nähmlich: a—f : b—g = a : b, auch a—b : f—g = a : f. Auch hier ist wieder das Product der äußern Glieder (a—f)b dem Producte der innern (b—g)a gleich u. s. f.

Viertens, aus 2tens und 3tens folgt auch, daß a+f : b+g = a—f : b—g ist. Auch, daß a+b : f—g = a—b : f—g ist.

Denn setzt man in allen diesen Proportionen statt der Glieder b und g, am und fm, wo durch m der Exponent ausgedruckt wird; so erhält man wieder das Product der äußern dem Producte der innern Glieder gleich.

Wenn in zwey geometrischen Proportionen die Glieder der einen mit den Gliedern der andern nach der Ordnung multiplicirt werden; so sind auch die 4 Producte in geometrischer Proportion.

Wenn a : b = c : d
und f : g = h : k ist; so ist auch

af : bg = ch : dk.

Denn es ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ und $\frac{g}{f} = \frac{k}{h}$ [vermöge der Erklärung der Verhältnisse. Multiplicirt man nun der Ordnung nach diese Brüche mit einander; so er-

erhält man $\frac{b}{a} \cdot \frac{g}{f} = \frac{d}{c} \cdot \frac{k}{h}$, woraus die obige Proportion af : bg = ch : dk folgt.

Anwendungen dieser Sätze auf die so genannte Regel de tri, die Gesellschaftsrechnung u. s. f. gehören in die practische Rechenkunst.

Um die Verhältnisse der geraden Linien unter einander zu finden bedient man sich des Maßstabes. Enthält z. B. eine gerade Linie 5′ die andere 9′; so verhält sich die erste zur zweyten = 5 : 9. Wäre die erste 3′ — 2″ und die zweyte 4′ lang; so verhielte sich die erste zur zweyten = $3\frac{1}{2}$: 4′ oder = 38 : 48 d. i. = 19 : 24.

Theilt man eine der gegebenen Linien als Maßstab in eine gewisse Anzahl gleich großer Theile, d. i. in aliquote Theile; so findet man dadurch die verlangten Verhältnisse.

Man theilt ferner den zur Auffindung der Verhältnisse gebrauchten aliquoten Theil in noch kleinere unter einander gleiche Theile; es lassen sich sodann die Verhältnisse fast immer in ganzen Zahlen angeben. Die Baukunst und Maschinenlehre geben hiervon Beyspiele.

§. XXIX.

Ähnliche Figuren. Hauptlehrsatz der ähnlichen Dreyecke. Zusätze.

Ähnlich nennet man überhaupt zwey Sachen, die sich nur in ihrer Größe, nicht aber der Form nach von einander unterscheiden. Z. B. Zwey oder mehrere Kugeln, Würfel u. dgl. Ebene Figuren sind einander ähnlich, wenn sie gleichwinkelig sind, d. i.

wenn

wenn die Winkel der einen den Winkeln der andern, in einerley Ordnung genommen, gleich, und die Seiten, welche einerley Winkel einschließen, auch in einerley Ordnung genommen, einander proportional sind.

Das Zeichen der Ähnlichkeit ist ∽. Bequem ist es, zwey ähnliche Figuren mit denselben großen und kleinen Buchstaben zu bezeichnen, so daß zu den gleichen Winkeln einerley Buchstaben gehören. Sonst werden ähnliche Figuren nach der Ordnung ihrer gleichen Winkel benennet.

Gleich und ähnlich sind alle Figuren, welche einander congruent sind. Wenn zwey Figuren, z. B. zwey Fünfecke, einer 3. Figur, einem gewissen Fünfecke, ähnlich sind; so sind diese Figuren einander selbst ähnlich. Gleichnahmige Seiten sind die, welche den gleichen Winkeln gegen über liegen. Man nennt sie auch ähnlich liegende Seiten.

Dreyecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien, und Dreyecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

Denn wird (Fig. 114.) ein Dreyeck dek gezeichnet, dessen Grundlinie dk noch einmahl so groß ist, als die Grundlinie ac eines andern Dreyeckes abc, und diese beyden Dreyecke haben dieselbe Höhe; so kann man vermöge § XX. den Winkel d dem Winkel a gleich machen. Dadurch entsteht ein Dreyeck dik, das so groß ist, als das Dreyeck dek. Dieses aber besteht aus zwey Dreyecken, nähmlich aus dem Dreyecke di2 und dem Dreyecke 2ik. Diese sind von gleicher Größe, denn sie haben dieselbe Höhe oi, und gleiche Grundlinien d2, 2k, vermöge der Construction. Es ist aber das Dreyeck di2 dem Dreyecke abc gleich, das erste ist die Hälfte des Dreyeckes dek, also ist, da die Höhen gleich groß sind, abc : dek = ac : 2ac = ac : dk.

Wäre z. B. die Grundlinie eines Dreyeckes $= 10''$ und die Höhe desselben $= 7''$, die Grundlinie eines andern Dreyeckes $= 13''$ und die Höhe desselben wieder $= 7''$; so ist der Inhalt des ersten $= \frac{7.10^{\square''}}{2}$, der Inhalt des andern Dreyeckes ist $= \frac{7\,13^{\square''}}{2}$. Es ist aber $\frac{7.10}{2} : \frac{7.13}{2} = 7.10 : 7.13 = 10 : 13$. D. i. Diese Dreyecke verhalten sich gegen einander wie ihre Grundlinien. Eben so findet man, daß, wenn die Grundlinien gleich wären, die Dreyecke sich gegen einander wie ihre Höhen verhalten würden.

Vermöge §. XX. folgt, daß sich die Inhalte der Dreyecke und Parallelogramme gegen einander wie die Producte aus den Grundlinien in die Höhen verhalten. Theilt man die Grundlinien in lauter unter einander gleiche Theile, deren Anzahl sehr groß genommen werden kann; so verhält sich das 1te Dreyeck zum 2ten, wie die Summe der Dreyecke des 1ten zur Summe der Dreyecke des 2ten. Statt dieser Summen aber kann man die Summen der Theile der Grundlinien setzen, d. i. die Grundlinien selbst.

Um durch Zeichnung zu beweisen, daß sich Dreyecke von gleicher Höhe wie ihre Grundlinien, und von gleichen Grundlinien wie ihre Höhen gegen einander verhalten, verwandle man die gegebenen Dreyecke in rechtwinkelige Dreyecke, und nehme sodann die Grundlinien als Höhen und die Höhen als Grundlinien.

Dieser Satz, so wie die nachfolgenden, sind für die Ausübung der Geometrie unentbehrlich.

In ähnlichen Dreyecken sind die gleichnahmigen Seiten proportional. (Fig. 113.)

Sind die Dreyecke ABC, FGH einander ähnlich, und die Seiten AB, BC mit den Seiten FG, GH gleichnahmig; so ist AB : FG = BC : GH.

Denn wird GF aus B auf die Seite BA getragen, und GH aus B auf die Seite BC; so wird, wenn man ED zieht, diese mit AC parallel seyn. Vermöge der Voraussetzung ist der Winkel F dem Winkel A gleich, und der Winkel H dem Winkel C, deßhalb aber ist auch der Winkel G dem Winkel B gleich, also auch das Dreyeck FGH dem Dreyecke EBD gleich.

Zieht man die Diagonalen AD und CE, so ist das Dreyeck EDA dem Dreyecke EDC gleich; denn diese Dreyecke haben dieselbe Grundlinie ED, und sind zwischen denselben Gleichlaufenden ED und AC enthalten, daher haben sie auch gleiche Höhe. Es haben aber auch die Dreyecke EBD und EDA dieselbe Höhe; eben so die Dreyecke EBD und EDC. Es gelten also folgende Proportionen:

I. . . . EBD : EDA = BE : EA und

II. . . . EBD : EDC = BD : DC. Hieraus folgt

BE : EA = BD : DC,

weil die beyden ersten Verhältnisse EBD : EDA und EBD : EDC einander gleich sind.

Wenn daher mit einer Seite z. B. mit AC eines Dreyeckes ABC eine gleichlaufende Linie ED geführet wird, so theilt diese die andern beyden Seiten BA und BC in proportionale Abschnitte BE, EA, ED, DC.

Aus dem Vorhergehenden §. ist bekannt, daß sich in jeder Proportion die Summe aus dem ersten und dem zweyten Gliede zu dem ersten oder dem zweyten Gliede eben so verhält, wie die Summe aus dem dritten und dem vierten Gliede zu dem dritten oder dem vierten Gliede. Also ist:

BE + EA : BE = BD + DC : BD nähmlich es ist BA : GF = BG : GH; d. i.

die

die gleichnahmigen Seiten der ähnlichen Dreyecke sind proportional.

Ähnliche Dreyecke verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten.

Denn es ist DEB : CEB = BD : BC
und CEB : CAB = BE : BA
= BD : BC

vermöge des vorigen Satzes;
daher erhält man durch
Zusammensetzung DEB : CAB = BD.BD : BC.BC = BD² : BC².

Wenn in den Dreyecken FGH und ABC die Winkel B und G von gleicher Größe sind, und die diese Winkel einschließenden Seiten FG, GH sind den Seiten BA, BC proportional, so sind die Dreyecke FGH und ABC einander ähnlich.

Denn nimmt man BE = GF, und zieht ED gleichlaufend mit AC; so werden die Dreyecke BED, BAC einander ähnlich seyn, weil sie die Winkel gleich haben, deßwegen ist . . . . . AB : CB = EB : DB
Vermöge der Voraussetzung aber ist AB : CB = FG : HG

Also auch . . . . . EB : DB = FG : GH
Oder EB : FG = DB : HG. Weil aber EB = FG ist; so ist auch DB = HG. Da aber auch der Winkel B dem Winkel G gleich ist; so sind die Dreyecke EBD und FGH einander gleich. Die Dreyecke EBD und ABC haben gleiche Winkel, daher sind auch die beyden Dreyecke FGH und ABC einander ähnlich.

Hieraus folgt auch, daß wenn die drey Seiten des einen Dreyeckes den drey Seiten des andern Dreyeckes proportional sind, die Dreyecke selbst einander ähnlich sind. Ist nähmlich FG : AB = GH : CB und FG : FH = AB : AC; so haben diese zwey Dreyecke auch die Winkel gleich.

Denn wird EB = FG gemacht, und die Parallele ED gezogen; so ist EB : BD = AB : BC = FG : GH

noch

nach dem Vorigen. Oder ER : FG = BD : GH, nähmlich ein Verhältniß der Gleichheit. Eben so wird gezeigt, daß FH = ED ist. Weil nun die Dreyecke FGH und EBD die drey Seiten gleich groß haben; so sind sie einander congruent; und weil ED mit AC parallel ist; so haben die Dreyecke EBD und ABC und also auch die Dreyecke FGH und ABC gleiche Winkel.

Weil in dem vorbewiesenen Satze die Proportion AB : BE = CB : BD Statt findet, so folgt daraus durch Theilung AE : BE = CD : BD, und hieraus, daß die Gerade BD (Fig. 115.), welche den Winkel B eines Dreyeckes ABC halbirt, die diesem Winkel entgegen gesetzte Seite AC im Verhältnisse der andern beyden Seiten AB und BC theilet. Denn wird AB verlängert, so daß BE = BC ist, und EC wird gezogen; so wird der äußere Winkel ABC = E + C seyn. Theilt die Linie BD den Winkel ABC in zwey gleich große Theile, so wird sie, weil das Dreyeck BEC gleichschenkelig, und BE = BC, daher der Winkel E dem Winkel C gleich ist, parallel mit EC seyn, deßwegen ist:

AD : DC = AB : BE d. i. AD : DC = AB : BC.

Ebenfalls wenn (Fig. 116.) zwey gerade Linien AB, NR wieviel immer unter einander gleichlaufende Linien EC, FI, OV durchschneiden; so sind die Abschnitte proportional, nähmlich EF : CI = FO : IV.

Denn wird aus dem Puncte C eine mit AB Parallele LS gezogen; so ist LC : LS = CI : IV. Weil aber Parallele zwischen Parallelen einander gleich sind; so ist

EF : FO = CI : IV.

Eben so leicht läßt sich das Umgekehrte des vorigen Satzes beweisen, nähmlich (Fig. 115.):

wenn AD : DC = AB : BC ist; so theilt die Gerade BD den Winkel B in zwey gleich große Theile.

Wenn zu 3 gegebenen Geraden die 4. Proportionale gesucht werden soll; so zeichnet man (Fig. 117.)

einen

einen beliebigen Winkel CAB, aus dessen Spitze A auf jeden Schenkel die ersten der gegebenen Linien getragen werden, nähmlich auf AC aus A die Linie a, auf AC aus A die Linie b, und aus dem Endespuncte der ersten die Linie c. Wird der Endespunct der ersten mit dem Endespuncte der 2. durch eine Gerade verbunden, und mit dieser durch den Endespunct der 3. eine Parallele gezogen; so ist die Linie x die verlangte 4. Proportionale, denn es ist a : b = c : x.

Soll eine Gerade AC nach einem gegebenen Verhältnisse getheilet werden (Fig. 118.); so wird aus A unter was immer für einen Winkel eine Gerade gezogen, aus der Spitze A wird die 1. der gegebenen Verhältnißgrößen ab; dann aus dem Endespuncte derselben die 2. Verhältnißgröße bc aufgetragen; endlich verbindet man den Punct c mit dem Puncte c, und zieht mit dieser Linie eine Parallele b1. Dann ist ab : bc = A1 : 1C.

§. XXX.

Winkelmessen. Winkelmesser.

Die Erklärung der Aufnahme kann erst in der folgenden Abtheilung gründlich vorgetragen werden. Für einige Anwendungen der zuvor aufgeführten Sätze gilt folgende Erklärung.

Eine gewisse Fläche, z. B. ein 3, 4, 5 . . . eck aufnehmen, heißt eine Figur zeichnen, welche dieser gegebenen Fläche proportional ist. Hierzu ist es nöthig den auf dem Felde gegebenen Linien gemäße Linien, und die Winkel in der Zeichnung (Plane, Char-

Charte dem Risse) den Winkeln auf dem Felde gleich zu haben. Die gemäßen Linien erhält man durch wirkliches Abmessen, und durch Auftragen nach dem verjüngten Maßstabe. Das Aufnehmen der Winkel geschieht, wenn es nicht nach den in der 1. Abtheilung gegebenen Regeln bewerkstelligt wird, oder wenn nicht der Meßtisch gebraucht werden soll, am öftesten mittels der so genannten Winkelmesser. Ganze Kreise, Halbkreise, Viertelkreise (Quadranten) werden hierzu am meisten gebraucht.

Die Construction des Quadranten (Fig. 119.) ist nicht besonders schwer. Auf einer aus irgend einer festen Materie, am besten aus Metall geformten Platte wird ein rechter Winkel ABC gezeichnet, und aus seiner Spitze B als dem Mittelpuncte mit einer gewissen Weite als Halbmesser der Quadrant ADEC beschrieben. Sodann beschreibt man mit etwas kleinern Halbmessern 2 andere Quadranten. Aus den Puncten A und C als dem Anfangs- und Endespuncte werden die Puncte D und E gefunden, da der Halbmesser die Sehne der Bögen CE, ED und DA gibt; jeder dieser Bögen hat $\frac{90}{3} = 30^{G}$ Theilt man jeden derselben in 3 gleich große Theile; so hat man den ganzen Quadranten in 9 gleich große Theile also von 10 zu 10^{G} eingetheilt. Theilt man ferners jeden dieser Bögen wieder in 2 gleiche Theile; so ist der ganze Quadrant in 18 gleich große Theile getheilt. Also von 5 zu 5 Graden. Wird endlich jeder dieser Bögen in 5 gleich große Theile getheilt, so hat man die Eintheilung von Grad zu Grad.

Um diese mühvolle, viel Zeit fordernde Arbeit nicht bey Verfertigung eines jeden Winkelmessers gänz-

lich

lich vornehmen zu müssen, hat man metallene, mit den nöthigen Eintheilungen schon versehene Ringe von 3' bis 6' Durchmesser, welche zur Theilung des Randes an den Winkelmeß-Instrumenten gute Dienste leisten, indem man den Mittelpunct des einzutheilenden Quadranten, Halbkreises u. dgl. in den Mittelpunct des erst erwähnten Ringes bringt, erstern auf der Ebene, worauf der Theilring liegt (auf dem Theiltische) befestigt, und die Theilstriche mittels eines Lineales mit einem Grabstichel dem Rande einschneidet.

Je größer der Halbmesser eines Winkelmeß-Instrumentes genommen wird, desto größer fallen die Grade auf dem Rande aus; daher sind die kleinern Winkelmesser von 3 bis 6 Zoll Halbmesser nie zu empfehlen.

Des leichtern Transportes willen gebraucht man lieber Quadranten, als Halbkreise oder ganze Kreise von demselben Halbmesser, obwohl diese die Theilung eines aufzunehmenden stumpfen Winkels in zwey spitzige, oder in einen rechten und in einen spitzigen nicht erfordern, wie es beym Quadranten oft der Fall ist.

Das Aufnehmen der Winkel mittels der erst erwähnten Werkzeuge, das Centriren derselben u. s. f. gehört in jenen Theil der reinen Mathematik, welcher die Trigonometrie heißt, und aus 3 gegebenen Stücken eines Dreyeckes, worunter immer eine Seite seyn muß, die andern Stücke durch Rechnung finden lehrt. Obschon dieser wichtige Theil der Geometrie für das Feldmessen, für die Wissenschaften der Mechanik, der Optik, und der Astronomie, und daher für die ganze technische Mathematik unentbehrlich ist; so ist es doch unmöglich zu dem Vortrage der Trigonometrie an den Normal- und Hauptschulen die erforderliche Zeit zu finden, ohne diese andern Elementar-Gegenständen zu entziehen.

Die

Die Größe der Winkel ohne Meß-Instrumente anzugeben S. Hegenberg Anweisung ohne Winkelmaß-Instrument ꝛc. Berlin 1818. 8. mit Kupf. Seite 31 u. folg. Und C. Ph. C. Stein's Grundlehren der Geometrie. Verb. u. verm. von J. Hoffmann. Frankf. 1820.

§. XXXI.

Transversal-Eintheilungen. Maßstäbe. Einige Anwendungen der ähnlichen Dreyecke.

Ein Transversal-Maßstab kann auf folgende Art verfertigt werden. (Fig. 120.) Unter einem rechten Winkel B zieht man zwey Gerade AB, BD. Ist die Länge BD zur Länge des Maßstabes hinreichend, so theilt man sie in eine gewisse Anzahl gleich großer Theile z. B. in 10 oder in 5, in 6, u. s. f. Wäre aber die Länge jenes aliquoten Theiles BO schon gegeben, welcher die kleinern Theile z. B. die Schuhe oder Zolle enthalten muß; so trägt man diesen so oft auf die Länge BD als es nöthig ist. Dadurch erhält man Puncte a, b, c, d u. s. f., durch welche die Normalen al, bk, cl u. s. f. geführet werden müssen. Nun theilt man den ersten Theil links d. i. BO in seine aliquoten Theile. Wäre z. B. dieser Theil eine Klafter; so würde man ihn in 6 gleich große Theile theilen; jeder derselben würde 1 Schuh bedeuten. Wenn dieser Theil BO einen Schuh bedeuten sollte, und man theilte ihn in 12 gleich große Theile, so würde jeder derselben 1 Zoll bedeuten u. s. f. Diese Umstände bestimmen die Anzahl der Querlinien IV, IIX, IIIV, u. s. f., welche mit der Linie BD parallel und in gleichen Abständen von einander gezogen werden müssen. Ihre Anzahl

wird

wird aus der Anzahl der aliquoten Theile von BO entnommen. Hat man nun den ersten Theil AF der Grundlinie AC in eben so viele und eben so große Theile getheilt, als den Theil BO, so zieht man die Transversalen MN, QS u. s. f. Die Anzahl derselben ist so groß als die Anzahl der Theilpuncte des ersten Theiles BO. Ein so gezeichneter Maßstab ist ein Transversal-Maßstab.

Man hat hier (Fig. 120.) einen zehntheiligen Maßstab gezeichnet, da die gewöhnlichen Transversal-Maßstäbe von Klaftern, Schuhen und Zollen ohne dieß von jedem Schüler auch an der Schultafel gezeichnet werden müssen. Ist der Maßstab einmahl aufgezeichnet, so wird er beschrieben, d. i. mit den gehörigen Ziffern versehen. In der Figur enthält der Theil BO 10 Theilpuncte, wovon der erste rechts O mit 0, der zweyte mit 20, der dritte mit 40 u. s. f. endlich der letzte B mit 200 bezeichnet ist, wenn BO 200 gelten soll. Sollte aber diese Länge etwa nur 100 enthalten; so würde der erste Theilpunct rechts mit 0, der zweyte mit 10, der dritte mit 20 u. s. f. und der letzte B mit 100 bezeichnet. Sollte BO nur 10 Theile enthalten, so würde der erste Theilpunct mit 0, der zweyte mit 1, der dritte mit 2 u. s. f. der letzte mit 10 bezeichnet werden u. s. f. Endlich werden die andern Theilpuncte a, b, c, d u. s. f. mit den gehörigen Zahlen, welche die Menge der Theile anzeigen, die zwischen a und b, zwischen b und c u. s. f. enthalten sind, versehen.

Wie mittels solcher Maßstäbe (Scalen) die mit dem Zirkel-Instrumente gefaßten Längen abgemessen, oder eine gegebene Länge auf dem Maßstabe gefaßt wer-

werden kann, wird nur durch mündliche Erklärung recht deutlich, daher sowohl im theoretischen als im practischen Zeichnungsunterrichte weitläufig erörtert.

Transversal-Maßstäbe, Transversal-Eintheilungen wurden ehedem auf den Rändern der Winkelmesser angebracht; denn sind ab, bc, cd (Fig. 121.) ganze Grade, a1, b2, c3, d4 Theile des Halbmessers und die Bögen concentrisch; so kann man leicht durch Transversalen r4, co, u3 Theile der Grade, das sind Minuten, angeben. Z. B. 30', 25', 15', 10', 5' u. s. f.

Gegenwärtig sind diese Eintheilungen der Winkelmesser durch den so genannten Nonius oder Vernier fast ganz verdrängt worden. Man gebraucht die übrigens auf einer unrichtigen Voraussetzung gegründete Transversal-Eintheilung der Kreisbögen dermahl bey jenen Winkelmessern, wo die Grade des Winkels nicht durch ein bewegliches Lineal, sondern durch den Faden eines Senkbleyes angegeben werden, wie in der Markscheidekunst, dann bey der Richtung der Haubitzen und Mörser u. s. f.

Die weitere Ausführung dieses äußerst wichtigen Gegenstandes (von den Transversal-Theilungen) muß den practischen Übungen aufbehalten bleiben, welche darin bestehen, daß die Schüler sowohl in der Classe auf der Tafel, als auch zu Hause verschiedene Transversal-Maßstäbe mit aller möglichen Genauigkeit verfertigen: eine Übung, welche zum gründlichen Unterrichte im Zeichnen unentbehrlich ist.

Soll der Abstand zweyer Puncte A und B (Fig. 122. und 123.) d. i. die Länge AB, welche durch irgend ein Hinderniß unzugänglich ist, gemessen werden, so wird was immer für ein Punct c angenommen, dessen Abstand von B gemessen werden kann;

dann werden mit Hülfe des Quadranten und der Visir-Strahlen (Gesichtslinien) AC, BC die Winkel B und C gemessen, auf einem recht ebenen Papiere eine Linie gezogen, welche der Linie BC, der Stand- oder Grundlinie, gemäß ist, nähmlich bc; in den beyden Puncten b und d zeichnet man 2 Winkel, welche den gemessenen Winkeln B und D gleich seyn müssen, so daß ihre einen Schenkel in der Linie bd liegen, ihre andern verlängerten Schenkel sich in einem Puncte a treffen. Ist richtig aufgenommen und gezeichnet worden; so ist das Dreyeck abc ∽ dem Dreyecke ABC, woraus bc : ba = BC : BA und bc : ca = BC : CA folgt. Könnte man also diese Längen BA, CA messen, so könnte man die Richtigkeit der Aufnahme bac dadurch prüfen.

Das Auftragen der Winkel bey der geometrischen Aufnahme mit Winkelmessern geschieht meistens durch eigene Hülfswerkzeuge, die den Winkelmessern ähnlich sind (Transporteur-Rapporteur). Da die Halbmesser dieser kleinen Halbkreise kaum einige Zolle betragen, so ist von ihnen wenig Genauigkeit zu erwarten. Wahrscheinlich hat dieß Gelegenheit gegeben, auf eine Methode zu sinnen, aus einer Seite und 2 Winkeln, oder aus 2 Seiten und den von ihnen gebildeten Winkeln, oder aus 3 Seiten die übrigen Stücke eines Dreyeckes durch Rechnung zu finden.

Es gibt Winkelmesser, die von ihrem Stative abgenommen, so wie die erst erwähnten Auftrage-Werkzeuge als Transporteurs dienen.

Mittels des öfter erwähnten sehr brauchbaren Werkzeuges, des Kreuz-Diopters, würde man den Punct A so bestimmen. Zuerst müßte die Länge BD und B2 gemessen werden. Der Punct D wäre dann nach der in der 1. Abtheilung gezeigten Methode durch

Ver-

Versuche zu finden. Wäre dann noch das Stück B1 gemessen worden; so hätte man:

$B2 : 2.1 = BD : DA$; hieraus folgt $DA = \frac{2.1 \times BD}{B2}$.

Wäre z. B. $B2 = 10°$, $2.1 = 16\frac{1}{2}$, und $BD = 38°$; so wäre $DA = \frac{16\frac{1}{2} \times 38}{10} = 62° - 4\frac{1}{2}'$.

Wäre nun auch das Stück DC der Grundlinie bekannt; so hätte man entweder durch Rechnung oder Zeichnung das ganze Dreyeck BAC.

Nähmlich durch Rechnung wäre $AB = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{DA}^2}$

und . . . . . $AC = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{DA}^2}$

Durch Zeichnung dürfte man nur die der Länge BC gemäße Linie bc ziehen, in dieser die Puncte d und 2 bestimmen, die Normalen 1.2 und dr errichten. Daraus ergibt sich die ganze Figur, wenn der Durchschnitt a gefunden ist.

Für mehrere Vermessungen wäre es sehr bequem ein für alle Mahl dieselbe Länge, etwa 10° für B2, anzunehmen.

Soll die Höhe eines Berges AD, nähmlich die Verticale AD, gewessen werden, (Fig. 132.) so nimmt man in der Ebene zwey Standpuncte B und C an, deren Abstand BC gemessen werden muß. Aus den vorhergehenden Aufgaben kann man die Winkel B und C des Dreyeckes BCA aufnehmen. Man findet sodann durch Zeichnung leicht und ziemlich genau den Punct A; ziemlich genau, weil fast in den meisten Fällen der Durchschnitt der Seiten BA und CA sehr schief seyn wird.

Sollte (Fig. 124.) der Abstand des Fensters d von dem Puncte b, nähmlich ab, gefunden werden, ohne weder die Höhe a0, noch die Weite 0b messen zu können; so wird aus dem Winkel r und n, und der Seite rn die Länge 0n, mithin auch 0b durch Zeichnung gefunden, und der Winkel a3i gemessen. Nun aber ist n2 : 1.2 = n0 : a0. Es ist aber a0 = ai + 10. Wird also ein rechtwinkeliges Dreyeck gezeichnet, dessen eine Kathete der Länge 0b, die andere der Länge 0a gemäß ist; so gibt die Hypothenuse die Entfernung ab im verjüngten Maßstabe.

Sollte (Fig. 125.) die Höhe des Thurmes 1.2 gemessen werden, ohne an den Thurm selbst kommen zu können; so wird aus der Seite ab und dem Winkel a und b das Dreyeck ab3, mithin auch die Gerade 3.4 bekannt. Aus dem Puncte 4 wird nach der vorigen Aufgabe die ganze Höhe 1.3 gemessen, sodann die Höhe 2.3. Endlich ist 1.3 — 2.3 = 1.2 die verlangte Höhe. Stünde 1.2 weit zurück, so daß der Vorsprung m beträchtlich wäre; so müßte wieder zuerst die Höhe 0R, dann die Höhe 2.3 gemessen werden. Hier wird vorausgesetzt, daß mp beynahe horizontal sey. Wäre dieses nicht; so müßte in m ein mit p horizontaler Punct vorher bestimmt werden.

Ist (Fig. 126.) AB ein Schacht, z. B. 16° tief, und es soll ein Punct x gefunden werden, von welchem aus ein horizontaler Stollen nach B getrieben werden kann; so würde zuerst von A nach x die Gerade Al abgesteckt und gemessen werden. Dann würde ml gesucht werden müssen. Es ist Am = $\sqrt{\overline{Al}^2 - \overline{ml}^2}$, wo der spitzige Winkel lAm bekannt

kannt seyn muß. Endlich hat man Am : Al = AB : Ax. Auf die Verlängerung von Al wird die gefundene Länge Ix getragen. Dadurch bestimmt man den Punct x.

Auch kann diese Aufgabe mechanisch geometrisch aufgelöset werden, da man von A abwärts fortmißt, bis man den Endespunct einer Länge = Bx gefunden hat.

Wenn (Fig. 127.) AB eine Höhe wäre, welche man aus den Fenstern eines gegenüber stehenden Hauses messen sollte, so wird zuerst die Verticale 1.2 gemessen. Sind die beyden Winkel o und n gezeichnet; so kann ein Dreyeck construirt werden, welches dem Dreyecke x.1.2 ähnlich ist.

Weil der Winkel p = 90° — n = 1.2.u — x.p.u ist; so sind von dem Dreyecke x.2.u die Seite x.2 und die 3 Winkel bekannt, daher kann xu durch Zeichnung leicht gefunden werden, uz durch wirkliche Messung, oder sie ist = 2.3; dadurch erhält man die ganze Höhe xz.

Sollte (Fig. 128.) irgend eine Höhe AB mit Hülfe des Schattens BC gemessen werden, so würde in irgend einem Puncte n der Geraden 1C ein Stab vertical eingesteckt werden müssen, und an diesem wäre der Endespunct 2 des Schattens zu bemerken.

Ist 1c, cn und n2 gemessen; so ist nc : n2 = 1C : 1A, woraus die verlangte Höhe berechnet wird.

Wäre (Fig. 129.) mittels eines Spiegels eine Höhe DE zu messen; so würde man so weit von dem wagerecht gelegten Spiegel zurück, oder gegen denselben gehen, bis man das Bild des Endpunctes E darin erblickte. Weil nun (wie die Catoptrik lehrt) der

Ein-

Einfallswinkel 1 dem Abprallungswinkel 2 gleich ist; so sind die Dreyecke ABC, ADE einander ähnlich, wenn c das Auge des Beobachters bedeutet, und CB der Vertical-Abstand des Auges ist. Man hätte alsdann AB : BC = AD : DE; hieraus läßt sich DE d. i. die verlangte Höhe finden.

Auch ließe sich statt des Spiegels die Oberfläche eines stille stehenden Wassers als eine natürliche Horizontal-Ebene gebrauchen.

Soll endlich eine Höhe mittels eines in einer Vertical-Ebene beweglichen Diopters 1.2 gefunden werden (Fig. 130.); so wird in irgend einem Puncte N das Stativ aufgestellet, und mit dem Diopter 1.2 nach dem Endespuncte a der Höhe ab visirt. Ohne die Stellung des Diopters zu verändern wird durch Rückvisiren der Punct O gesucht. Dann ist ON : Ob = N3 : ab, woraus ab folgt. Das Stativ kann ein gerader Stab, der Diopter ein um eine Stellschraube bewegliches Lineal, oder eine Röhre seyn. Auf dieselbe Art bedient man sich vortheilhaft des Kreuzmaßes um Höhen zu messen.

Hierher gehört ein ganz nützliches Werkzeug, der Höhenmesser. An einem in kleinere, gleich große Theile eingetheilten wagerechten Lineale läßt sich ein anderes verticales Lineal mittels einer Hülse und einer Stellschraube hin und herschieben. Auch dieses Lineal ist eben so wie das andere, etwa von Linie zu Linie eingetheilt. Nach der Richtung der Hypothenuse gleichsam, wenn die erst erwähnten Lineale als die Katheten eines rechtwinkeligen Dreyeckes genommen werden, ist ein drittes Lineal, das Visir-Lineal, angebracht, welches ebenfalls mit dem wagerechten Lineale (dem Distanz-Lineale) mittels eines Gewindes verbunden ist. Gesetzt nun, man wäre von einer gewis-

sen

en zu messenden Höhe, z. B. einem Baume, 68′ entfernt, so rückt man das verticale Lineal (das Höhenlineal) so weit zurück, daß es 68 Linien oder Theilchen von dem dem Auge nächsten Puncte, dem Anfangspuncte, entfernt ist, und visirt dann mittels des Visirlineales nach dem Endespuncte der Höhe. Gesetzt das schiefe Lineal schnitte auf dem verticalen Lineale 54 Linien oder Theilchen ab; so ist die Höhe 54 Schuhe. Daß dieses Werkzeug von beträchtlicher Größe seyn soll, wenn man Genauigkeit davon erwarten will, versteht sich von selbst.

Über dieses Werkzeug, und die Dendrometer (Baummesser) S. die neuern Lehrbücher der Forst-Geometrie. Hofr. Mayers Pract. Geometrie u. m. Unter den ältern Büchern S. Dan. Schwenter's Geometrie. Nürnberg. 1667. 4.

Die Messung großer Höhen, der Berge, geschieht am besten mittels eigens hierzu verfertigter Barometer. Das Verfahren selbst gehört in die Trigonometrie.

Bey der Messung der Höhen müssen die Visir-Strahlen mit der Standlinie und der Höhe in derselben verticalen Ebene seyn. Denkt man sich diese Linien in einer horizontalen Ebene; so läßt sich eine Aufgabe leicht und sicher auflösen, ohne kostbare Werkzeuge, von welchen in diesem Werkchen nur wenig gesagt werden darf, dazu zu gebrauchen. Z. B. Es sey (Fig. 131.) ABCD ein Grundstück, dem man sich nur bis auf eine gewisse Gränze xy nähern kann. Man soll diese Fläche aufnehmen, auf deren Eckpuncte alle man hinsehen kann.

Zuerst würde man sich die Gerade EF, die Grund- oder Standlinie, abstecken, und in ihr die Puncte G,

H,

H, I, F bestimmen. Ist 1.2 der Linie EF normal, und E1 eine bestimmte Länge z. B. 10°; so mißt man die Längen 1.3, 1.4, 1.5 und 1.2. Eben so die Längen EG, EH, EI und EF.

Hätte man nun die Längen GA, HB, IC und FD; so hätte man auch die ganze Figur ABCD. Doch diese Längen lassen sich leicht sowohl durch Rechnung als Zeichnung finden. In diesem Beyspiele hätte man:

1tens für den Punct A 10° : 1.2 = EG : AG
2tens für den Punct B 10° : 1.3 = EH : HB
3tens für den Punct C 10° : 1.5 = EI : IC
4tens für den Punct D 10° : 1.4 = EF : FD.

Daraus läßt sich dann durch Zeichnung die ganze Figur ABCD leicht darstellen

Von dieser brauchbaren Methode lassen sich in der Ausübung viele Anwendungen machen.

Hätte man mit einem Winkelmaß-Instrumente auch die Winkel AEF, BEF, DEF und CEF gemessen; so brauchte man gar nichts zu rechnen, sondern nur zu zeichnen.

Distanz nennet man den Abstand des Standpunctes von einem aufzunehmenden Puncte. Soll (Fig. 132.) die Distanz A'B' gemessen werden; so zieht man auf dem Papiere eine Linie, welche der Linie A'O' gemäß ist. Ist nun auch der spitzige Winkel A'O'B' bekannt (der rechte O'A'B' ist es ohne dieß); so kann man ein dem Dreyecke O'A'B' ähnliches Dreyeck zeichnen, wodurch A'B' im verjüngten Maße erhalten wird. Je größer A'B' im Vergleiche mit A'O' ist; desto unsicherer fällt der Punct B'. Dieselbe Bemerkung gilt auch für alle Aufnahmen, wo der erst erwähnte Umstand eintritt.

Es gibt eigene Werkzeuge, Distanzmesser, Distanz-Tubi, deren Theorie aber Kenntnisse der angewandten Mathematik voraussetzet, daher hier nicht Platz haben kann.

Kleinere Aufnahmen werden geometrisch ohne alle Werkzeuge, d. i. mit der Schnur oder Kette, mit den Stäben, mit dem Klaftermaße, der Setzwage, dem Winkelkreuze und dem Winkelmesser gemacht. Größere Aufnahmen bewerkstelligt man, wenn sie geometrisch sind, durch den Meßtisch, wenn sie trigonometrisch sind, mittels der Winkelmaß-Instrumente, des Quadranten, des Halb- oder ganzen Kreises, oder mit dem Theodolite, dem Borda-schen Kreise u. dgl.

Betrachtet man die verschiedenen aufzunehmenden Puncte als die Spitzen verschiedener Dreyecke; so braucht es weiter nichts, als eine schickliche Standlinie, um aus di- r als Grundlinie der erst erwähnten Dreyecke, und aus 2 an dieser Grundlinie befindlichen Winkeln die Dreyecke zu zeichnen, somit die aufzunehmenden Punc'e auf dem Papiere zu bestimmen. Die Anzahl der zu messenden Winkel ist noch einmahl so groß, als die Anzahl der aufzunehmenden Puncte, ausgenommen den Fall, daß mehrere dieser Puncte mit dem Anfangs- oder dem Endespuncte der Standlinie (Basis) in derselben Geraden liegen. In diesem Falle hätte man leichtere Arbeit. (Fig. 133.) Sollten einige Durchschnitte unter sehr spitzigen Winkeln geschehen, wie z. B. in den Puncten 11, 19, 20; so müßten, wenn man durch eine andere Lage der Standlinie diesem Umstande nicht vorkommen könnte, und die Gegend es erlaubete, durch einige unter rechten Winkeln in AB gesetzte Hülfslinien AC die Puncte 11, 19, 20 genauer bestimmt werden, oder man betrachtet eine der Seiten der aufgenommenen Dreyecke

als

als Hülfs-Standlinie, oder man verlängert die Standlinie um Hülfs-Standpuncte zu bekommen u. dgl. m.

Das Zeichnen selbst geschieht am besten gleich auf dem Felde. Sollte dieses nicht geschehen können; so wird ein Entwurf (Brouillon) gemacht, in welchem die Größe der Standlinie, und die Größen der Winkel angemerkt seyn müssen. Nach diesem Entwurfe wird dann zu Hause der Plan ins Reine gezeichnet.

Beym Messen der horizontalen Winkel muß der Rand des Winkelmaß-Instrumentes immer genau wagerecht seyn. Ein Diopter oder ein Fernrohr, das unbeweglich ist, wird nach dem Endespuncte der Standlinie gerichtet, und bleibt in dieser Lage, bis die Messung zu Ende ist; der andere Diopter oder das Fernrohr, welches beweglich ist, wird nach den aufzunehmenden Puncten gerichtet. Der Mittelpunct der Bewegung am Winkelmesser muß genau über den Anfangspunct der Standlinie, der 1. Station, dann aber, wenn in dieser die Arbeit geendet ist, in der 2. Station ebenfalls wieder über den Endespunct der Standlinie gesetzt werden, was mittels eines Senkbleyes ohne Schwierigkeit geschehen kann. Sollte das Senkbley vielleicht wegen einer heftigeren Bewegung der Luft nicht so bald in die verticale Lage kommen; so läßt man es in einem mit Wasser oder Öhl gefüllten, oben offenem Gefäße spielen, wo es des dichteren flüssigen Mittels wegen bald zur Ruhe kommt.

Vermöge des Vorigen kann jeder Quadrant in 3 gleich große Theile getheilt werden. Theilt man jeden dieser Theile wieder in 2, jeder dieser Hälften wieder in zwey gleiche Theile u. s. f., so kann man jeden Quadranten ohne große Mühe in 96 gleiche Theile theilen. Es ließe sich mit einem so getheilten Winkelmesser

eben

eben so gut jeder Winkel messen, und mit Beziehung einer Reductions-Tabelle in Graden der 90 Theilung angeben.

§. XXXII.

Lehrsatz der proportionalen Abschnitte zweyer Sehnen.

Wenn zwey Sehnen, entweder in oder außer dem Kreise sich schneiden; so ist das Product aus den Abschnitten der einen so groß, als das Product aus den Abschnitten der andern (Fig. 134. und 135.)

Es ist nähmlich AB . CB = DB . BE.

Denn zieht man AD und CE; so haben im 1. Falle die zwey Dreyecke, ADB, ECB den Winkel ADB = EBC als Scheitelwinkel gemein, und da die andern zwey Winkel DAC und CED denselben Bogen DC enthalten, so sind sie auch einander gleich. Also ist das Dreyeck ADB dem Dreyecke EBC ähnlich, mithin: BA : BD = BE : BC, woraus BA . BC = BD . BE folgt.

Im 2. Falle hat das dem Kreise eingeschriebene Viereck die entgegen gesetzten Winkel zusammen so groß als zwey rechte. Es ist nähmlich ACE + ADE = 180°, und ACE + BCE = 180°, als Nebenwinkel; daher ist vermöge des Grundsatzes der Mathematik (1. Abtheilung) der Winkel ADE = dem Winkel BCE; weil aber der Winkel B beyden Dreyecken gemeinschaftlich ist; so haben diese alle Winkel gleich; daher sind die Dreyecke einander ähnlich, es ist wieder BA : BD = BE : BC, mithin ist BA . BC = BD . BE.

Wäre AC der Durchmesser eines Kreises, (Fig. 136.) und die Sehne DE dem Durchmesser normal, deßhalb in B halbirt; so wäre $AB \cdot AC = BD \cdot BD = \overline{BD}^2$, da BD = BE ist. Es ist also AB : BD = BD : CB d. i. die halbe dem Durchmesser normale Sehne ist die mittlere Proportional-

Linie

Linie zwischen den beyden Theilen, in welche sie den Durchmesser theilt.

Soll also zwischen zwey Linien AB und BC eine mittlere Proportionale gesucht werden; so wird aus der Mitte der Summe AC dieser Linien mit der Hälfte derselben ein Bogen beschrieben, welcher die in dem Puncte B errichtete Normale in D schneidet; DB ist die mittlere Proportionale.

Wird der Halbmesser FD gezogen; so ist wegen des rechten Winkels in B, $\overline{FB}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{FD}^2 = \overline{FC}^2$. Weil aber $\overline{DB}^2 = AB \cdot BC$ ist; so ist durch Substitution $\overline{FC}^2 = AB \cdot BC + \overline{FB}^2$: nähmlich wenn die Gerade AC in F halbirt wird; so ist das Quadrat der Hälfte so groß, als die Summe aus dem Rechtecke der ungleichen Abschnitte AB, BC, und dem Quadrate des mittlern Theils. Ist AC z. B. $= 10$, $FB = 3$; so ist $FC = 5$, $AB = 8$ und $BC = 2$. Also ist $\overline{FC}^2 = 25 = AB \cdot BC + \overline{FB}^2 = 8 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 16 + 9 = 25$.

Zieht man ferners AD und DC, so wird der Winkel (im Halbkreise) ADC ein rechter Winkel seyn, deßhalb ist $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$ aber wegen des rechten Winkels in B ist $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = AB + AB \cdot BC$, da wie schon gesagt, $\overline{DB}^2 = AB \cdot BC$ ist.

Ferners ist $\overline{DC}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BC}^2 = AB \cdot BC + \overline{BC}^2$. Also ist auch $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2 \cdot AB \cdot AC$ (durch Substitution): nähmlich, wo immer die Gerade AC, hier in B, geschnitten wird; so ist das Quadrat der ganzen Linie AC so groß als die Summe der Quadrate der beyden Abschnitte, und das doppelte Product aus diesen.

Wäre z. B. $AC = 30$, $AB = 20$; so ist $BC = 10$ und $30 \cdot 30 = 20 \cdot 20 + 10 \cdot 10 + 2 \cdot 20 \cdot 10 = 400 + 100 + 2 \cdot 200 = 400 + 100 + 400 = 900$, und das ist $30 \cdot 30 = 900$.

Da $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + AB.BC$ ist, so wird auch, wenn man daraus eine Proportion macht, AB : AD = AD : AB + BC seyn. Aber AB + BC = AC, also ist AB : AD = AD : AC; nähmlich die Sehne AD ist die mittlere Proportionale zwischen dem ganzen Durchmesser und dem Abschnitte AB.

Das Quadrat dieser Sehne ist so groß als das Rechteck aus dem Durchmesser AC und dem Abschnitte AB.

Wäre AB = 100, und AC = 160; so wäre AD = $\sqrt{16000} = \sqrt{16.100.10} = 4.10\sqrt{10} = 40.3{,}16 = 126{,}4$.

Wird die Figur 135 in die Figur 137 verändert, so daß BD durch den Mittelpunct F geht, und BCA nähert sich dem Umkreise so, daß da AC außerhalb kommt, BC zur Tangente wird; so ist $\overline{BC}^2 = BE.BD$. Zieht man FC der Tangente normal; so ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke FCB, $\overline{FB}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{CB}^2$ d. i. $= \overline{FC}^2 + BE.BD$.

Wenn die Gerade DE halbirt, und in ihrer Verlängerung ein bestimmter Theil EB angenommen wird; so ist das Quadrat der Hälfte dieser Linie sammt der Verlängerung so groß, als die Summe aus dem Quadrate ihrer Hälfte und dem Rechtecke der ganzen Linie und der Verlängerung. Z. B. wenn FG = 20', BE = 18' und BD = 58' wären, so würde $\overline{FB}^2 = 20.20 + 18.58 = 400 + 1044 = 1444$ seyn. Demnach wäre FB = $\sqrt{1444} = 38 = 20 + 18$.

Werden also von einem Puncte aus zwey Tangenten an den Kreis gezogen, so sind diese gleich groß.

Aus diesen letzten Zusätzen läßt sich ableiten, wie weit man von einer gegebenen Höhe nach der Fläche des Meeres, oder des ebenen Landes sehen könnte, in der Voraussetzung, daß die Erde eine Kugelform hat. Doch ist es vorher nöthig aus dem Umfange der Erde ihren Durchmesser zu bestimmen. Hierzu aber wird erfordert das Verhältniß der Kreislinie zu ihrem Durchmesser zu wissen, woraus ferners auch die Quadratur der Kreisfläche folgt, obgleich jenes Verhältniß und daher diese Quadratur nie vollkommen genau gefunden werden können. Um dieses Verhältniß zu fin-

finden bediente sich Archimedes der um- und der eingeschriebenen Vielecke.

Man setze (Fig. 138.), der Halbmesser AC sey in viele gleiche große Theile getheilt, z. B. in 1,000,000 der Tangente AD begegne in einem Puncte die Gerade CD, welche den rechten Winkel ECA so wie den Quadranten EA halbirt. Es wird wegen des halb rechten Winkels ACD und des rechten Winkels in A das Dreyeck DAC gleichschenkelig seyn; also ist DA = CA. Weil aber CA $= 1{,}000.000^2$ ist; so ist DA ^{2} + CA ^{2} = 2.000.000.000.000. Die Quadrat-Wurzel davon DC ist größer als 1,414212 .. und kleiner als 1,414213.

Theilt man den Winkel DCA durch CH auch in zwey gleich große Theile, und die Linie CH begegnet der Tangente in H; so ist DC : CA = DH : HA vermöge §. XXIX. Durch Zusammensetzung bekommt man: DC + CA : CA = DH + HA : HA.

Hieraus . . . , $241421\frac{3}{5}$: 1000000 = 1000000 : HA. Man findet HA größer als 414213 und kleiner als 414214. Hieraus kann man HC berechnen. Theilt man den Winkel HCA wieder in zwey gleich große Theile; so wird hieraus ein neuer Theil der Tangente AD gefunden, und bey Fortsetzung der Rechnung mehrere dieser Theile.

Wäre die Sehne IL mit der Tangente HAM parallel, und der Halbmesser CA ihr normal, und in K halbirt; so ist CH : HA = CI : IK. Hieraus läßt sich IK berechnen. Das Doppelte davon ist IL. Zieht man CLM, welche der Tangente in M begegnet; so wird HM das Doppelte der Linie AH seyn.

Es sey der Kreis APT (Fig. 139.) zuerst in 4, dann in 8, 16, 32, 64 u. s. f. gleiche Theile getheilt. Werden nun durch die Theilpuncte die Sehnen und Tangenten gezogen; so entstehen 2 regelmäßige Vielecke; das eine ist dem Kreise ein-, das andere dem Kreise umgeschrieben, beyde aber bestehen aus einander gleichen Dreyecken HCM, HCD und ICL, ICE. Weil man nun den Werthen von HM und IL sehr nahe kommen kann, auch die Zahl der Seiten gegeben ist, so kann man hieraus ihre Summe berechnen, d. i. den Umfang des eingeschriebenen Vieleckes, das kleiner als die Kreislinie ist. Ebenfalls kann der Um-

fang

fang des größern, dem Kreise umgeschriebenen Vieleckes berechnet werden, so daß der Unterschied beyder sehr klein wird, da man den Halbmesser in wie viel immer gleiche Theile getheilt setzen kann. Die Länge der Kreislinie fällt zwischen die Längen der Umfänge der beyden Vielecke. Die Gränzen nähern sich einander immer mehr, je mehrere Seiten der Vielecke angenommen werden. Denn da wegen Ähnlichkeit der Dreyecke HCA, ICK, CA : CK = AH : KI ist, so wird durch Theilung AC : AK = AH — KI; in demselben Verhältnisse ist der ganze Umfang des umgeschriebenen zu dem Unterschiede des Umfanges von dem eingeschriebenen Vielecke, so, daß, wenn man die Zahl der Seiten vermehrt, IK dadurch vermindert wird, und so viel mehr AK; daher wird die Differenz beyder Vielecke immer kleiner, und die Gränzen beyder nähern sich gegenseitig. Zwischen diesen fällt die Länge der Kreislinie.

Aus diesem läßt sich zeigen, daß der Inhalt des Kreises ein Product aus dem Halbmesser in den halben Umfang ist. Denn die Fläche des Dreyeckes HCM ist das Product aus dem Halbmesser AC und der halben Grundlinie HM; deßhalb hat man die ganze Fläche des Vieleckes, wenn man den Halbmesser mit dem halben Umfange multiplicirt.

Es ist nähmlich der Inhalt des umgeschriebenen Vieleckes größer als der Inhalt der Kreisfläche, doch so, daß der Unterschied zwischen dem Vielecke und dem Kreise kleiner ist, als der Unterschied zwischen dem eingeschriebenen Vielecke und dem Kreise. Es kann aber die Anzahl der Seiten des Vieleckes immerfort vermehrt werden, so daß der Umfang des eingeschriebenen Vieleckes von der Kreislinie, und der Inhalt dieses Vieleckes von der Kreisfläche um weniger als jede gegebene Größe unterschieden ist. Daher ist auch das Product aus dem halben Umfange in den Halbmesser der Kreislinie von dem wahren Inhalte der Kreisfläche um weniger als jede gegebene Größe unterschieden.

So hat Archimedes gefunden, daß der Durchmesser sich zum Umkreise verhalte = 7 : 22, so daß der Unterschied zwischen diesem und dem wahren Verhältnisse nur sehr klein ist. Dieses Verhältniß ist in spätern Zeiten von andern Mathematikern noch genauer bestimmt worden, unter welchen die Bemühungen des Ludolph von Ceulen merkwürdig sind, welcher das Verhältniß sehr genau, und zum Gebrauche bequem ausdruckte. Auch Leibniz und Metius gaben sich große Mühe. Das Verhältniß, welches Metius gefunden hat, wird durch die drey ersten ungeraden Ziffern paarweise genommen ausgedruckt 113 : 355.

Ist der Durchmesser = 1; so ist der Umfang =

a b
3,14159 26535 89793 23846 26433 83279
c
50288 41971 69399 37510 58209 74944
d
59230 78164 06286 20899 86280 34825
e
34211 70679 82148 08651 32823 06647
f
09334 46095 50582 23172 53594 08128
4803 . . . . .

Bis a hat diese Reihe berechnet Fr. Vieta.
Bis b . . . . . Ad. Romanus.
Bis c . . . . . Lud. v. Ceulen.
Bis d . . . . . N. Sharp.
Bis e . . . . . N. Machin.
Bis f . . . . . N. Lagny.

Hierüber S. Hofr. Kästner Anfangsgründe der Mathematik 1. Thl. 5. Auflage S. 330.

Soll nun aus dem gegebenen Durchmesser = D; der Umfang = U berechnet werden; so setze man

7 : 22 = D : U oder
100 : 314 = D : U oder
113 : 355 = D : U., woraus U gefunden wird. Meistens nehmen die Mathematiker das sehr bequeme Verhältniß 100 : 314 d. i. 1 : 3,14 . . . zur Berechnung der Kreislinie, welche desto genauer gefunden wird, je mehrere Ziffern der voran geführten Zahlenreihe genommen werden. Wäre z. B. die Erde eine Kugel, ihr größter Umkreis = 5400 Meilen; so ist ihr Durchmesser $= \frac{5400 \cdot 100}{314{,}159} = 1718{,}84$ Meilen; also ihr Halbmesser = 859,42 Meilen, wofür meistens 860 Meilen genommen werden.

Aus der vor angeführten Zahlenreihe 3'141159. findet man durch die Division mit 360 die Länge eines Bogens von 1 Grad in Theilen des Halbmessers, hieraus die Länge eines Bogens von 1 Minute u. s. f.

Den Anfangs- und den Endespunct des Durchmessers der Erdkugel, um den sich diese herumdreht (der Erd-Achse), nennet man Pole. Eine Kreislinie durch diese Pole nennet man den Meridian oder Mittagskreis. Man hat in verschiedenen Ländern Messungen der Grade des Meridianes angestellet, und Folgendes gefunden:

Den Quadranten d. Meridian =	5.272.554	W. Klafter.
1 Grad desselben =	58583,93	
$\frac{1}{15}$ desselben, d. i. 1 geogr. M. =	3905,595	
1 Meridian Minute =	976,399	
1 Meridian Secunde =	16,273	
den Durchmesser der Erdkugel =	6.713.223.	

Wäre nun HI (Fig. 138. und 139.) die Höhe eines Berges z. B. von 1000°, und man sucht die Weite HA, d. i. die Weite, auf welche man noch sehen kann; so kann HS = 6,713223 + 1000 — 2 = 6.714223, also ist AH = HI.HS = 1000.6714223, mithin HA = $\sqrt{6714223000}$ = 81940° beynahe.

Setzt man die Entfernung des Auges vom Boden = 5', so findet man, daß ein an dem Ufer eines Sinus oder des Meeres stehender Mensch bey 2800'.5 = 14.000' weit sehen könne. Stünden in einer Ebene oder am Ufer der See 2 Menschen etwa 6000 geometrische Schritte, zu 5' gerechnet, von einander entfernt; so würde keiner den andern mehr sehen können. Wäre z. B. die Höhe des Kahlenberges nächst Wien, von dem Wasserspiegel der Donau bis zum Fenster des auf dem Berge befindlichen Thurmes gerechnet, = 135'; so würde man von diesem aus nach der Ebene hin auf eine Weite von fast 7½ österreichische Postmeilen, jede 4000° gerechnet, sehen können.

Ist der Durchmesser eines Kreises bekannt; so findet man leicht die Länge eines Bogens von diesem Kreise; denn es ist $360^G : u = n^G : x$, wo n die Anzahl Grade des gegebenen Bogens, x die gesuchte Länge desselben, und u die Länge der Kreislinie in Theilen des Durchmessers bedeutet.

§. XXXIII.

Einige Anwendungen der mittleren Proportionale auf verschiedene nützliche Auflösungen.

Ist abc ein Rechteck (Fig. 140.), und man soll dasselbe in ein Quadrat verwandeln; so ist die Seite

des

des Quadrates die mittlere Proportionale zwischen der Grundlinie und der Höhe des Rechteckes. Denn ist die Seite des Quadrates = x; so ist vermöge des Bedingnisses $x.x = x^2 = dc.cb$, also ist $dc : x = x : cb$, und die Länge cx ist die verlangte Seite des Quadrates.

Soll man aus einem Quadrate mehrere andere Quadrate machen, die entweder von gleicher Größe oder in gewissen Verhältnissen gegen einander seyn sollen, so theilt man das gegebene Quadrat zuerst in Rechtecke, die einander entweder gleich oder proportional sind, und verwandelt dann diese in Quadrate.

Wäre (Fig. 141.) was immer für ein Vieleck abcdef in ein Quadrat zu verwandeln, so würde man es in Dreyecke theilen, diese in Rechtecke verwandeln, aus diesen Rechtecken ein einziges machen (1. Abth. §. XXI.) und endlich dieses in ein Quadrat verwandeln.

Man kann demnach mit Beyziehung des Pythagoräischen Lehrsatzes ein Quadrat zeichnen, das mehreren Vielecken zusammen gleich ist.

Befestigt man 2 Lineale an einander unter einem rechten Winkel, so daß sich die Spitze des Winkels an einem Stabe befindet, und in einer Vertical-Ebene gedreht werden kann; so gibt dieß ein Mittel irgend eine Weite ad zu finden. (Fig. 149.) Denn es ist $a1 : ab = ab : ad$ woraus $ad = \frac{ab.ab}{ai} = \frac{\overline{ab}^2}{ai}$ folgt. Der Punct 1 wird durch Visiren längst dem Lineale bn bestimmt.

Ferner kann leicht ein Quadrat gezeichnet werden, das 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 u. s. f. Mahl größer ist, als ein gegebenes Quadrat. Die Seite des doppelten

Quadrates ist die Diagonale des einfachen Quadrates selbst. (§. XXIV.) Ist z. B. die Seite eines Quadrates = 5, und man soll ein Quadrat zeichnen, das 3 Mahl so groß ist, als das gegebene Quadrat 25; so verwandelt man ein Rechteck, dessen Länge = 15 und dessen Breite = 5 ist, in ein Quadrat. Es ist nähmlich diese Seite = $\sqrt{25.3} = \sqrt{75} - 5\sqrt{3}$. Man multiplicirt nähmlich die Seite des gegebenen Quadrates mit der Quadrat-Wurzel aus der Vergrößerungszahl.

Jede Figur wird in ein Quadrat verwandelt, wenn man aus ihrem Inhalte die Quadrat-Wurzel zieht. Demnach ist es leicht das Verhältniß zu finden, welches der Umfang einer gegebenen Fläche zu dem Umfange eines ihr gleichen Quadrates hat. (§. XXI.)

Soll ein Rechteck gezeichnet werden (Fig. 143.), welches 2, 3, 5 . . . u. s. f. Mahl größer als ein gegebenes Rechteck abcd, und diesem proportional ist, dessen Seiten dasselbe Verhältniß gegen einander haben, wie die Seiten des gegebenen Rechteckes; so wird zwischen der einfachen und doppelten Länge ab und bS die mittlere Proportionale bg gesucht. Diese ist die Länge des verlangten Rechteckes, welche aus a gegen S getragen wird. Die Senkrechte ro bestimmt den Punct i der verlängerten Diagonale ac, sohin das ganze Rechteck.

Liegen die Diagonalen zweyer oder mehrerer Rechtecke in derselben Geraden, während ihre Höhen so wie ihre Grundlinien in einander fallen; so sind diese Rechtecke einander proportional.

Soll also (Fig. 144. und 145.) irgend eine Fläche A einem Rechtecke abcd proportional gemacht werden; so kommt es darauf an, den Punct r der Dia-

go-

gonale zu finden. Zuerst wird ein der gegebenen Fläche gleiches Quadrat gezeichnet, dann zwischen der Grundlinie und Höhe des gegebenen Rechteckes ad, ab die mittlere Proportionale gesucht, endlich ein gleichschenkeliges Dreyeck gezeichnet, dessen Grundlinie der Diagonale des Rechteckes abcd, jeder der gleichen Schenkel aber der zuvor gefundenen mittlern Proportionale gleich ist. Aus der Spitze z dieses Dreyeckes wird die Seite des Quadrates A auf jeden Schenkel getragen. Jene Linie die beyde Endespuncte m und n mit einander verbindet, gibt die neue Diagonale mn des verlangten Rechteckes d1.2 3.

Mittels eines gleichschenkeligen Dreyeckes (Fig. 145.) (des Proportionirungs-Dreyeckes, sonst Proportional-Winkel genannt) dzb läßt sich jede Figur, jede Zeichnung nach einem gegebenen oder angenommenen Verhältnisse vergrößern oder verkleinern, ohne Beyziehung des Maßstabes.

Z. B. Es soll (Fig. 146.) auf die Linie ae eine Figur gezeichnet werden, welche der Figur ABCDE proportional ist. Zeichnet man über ae als Grundlinie ein gleichschenkeliges Dreyeck aze, dessen jeder Schenkel der Grundlinie AE der gegebenen Figur gleich ist, und trägt dann alle zu vergrößernden oder zu verkleinernden Längen AB, EB, AC, EC u. s. f. aus der Spitze z auf beyde Schenkel za, ze; so geben die Parallelen 1.2, 3.4 u. s. f. die gleichnahmigen Proportionalen ab, cb, ac, ec u. s. f.

Bey Verkleinerung einer gegebenen Figur ist es leicht, nach den vorhergehenden Sätzen, die Gränze anzugeben, unter welcher die Zeichnung möglich ist.

Auch bedient man sich des sogenannten Proportional-Zirkels um Zeichnungen oder Körper proportio-

nal

nal vergrößern, oder zu verkleinern, Winkel sowohl auf dem Papiere als auf dem Felde zu messen u. dgl. mehr. Von diesem ehemahls sehr beliebten Werkzeuge soll in den Vorlesungen gehandelt werden.

S. Mich. Scheffelts Unterricht v. Proportional-Zirkel. Ulm. 1708. (Mehrere Auflagen.)

Die so eben erwähnte Art der Vergrößerung oder Verkleinerung einer Zeichnung hat sehr wesentliche Vortheile, besonders wenn es darum zu thun ist mehrere Puncte der Copie, z. B. einer krummen Linie, der Flüsse, Wege u. dgl. in Karten zu bestimmen, um sodann das Übrige mit freyer Hand einzuzeichnen.

Das Copiren der Situations-Pläne und Karten geschieht auf mehrerley Arten. Entweder bestimmt man die nöthigsten Puncte der Copie, da man diese Puncte mittels einer feinen, immer senkrecht (dem Papiere normal) gehaltenen Nadel (der Piquir-Nadel) durchsticht, so, daß sie auf dem zur Nachzeichnung bestimmten, dem Originale untergelegten Papiere erscheinen; oder bey Vergrößerung oder Verkleinerung, wenn man das Original in gleich große Quadrate oder Rechtecke theilt, ebenfalls den zum Nachzeichnen bestimmten Raum in Quadrate oder Rechtecke theilt, welche den Quadraten oder Rechtecken des Originales proportional sind, und sodann mittels freyer Hand den Plan auszeichnet.

Auf diese Art copirt man auch andere Zeichnungen, z. B. historische, Blumen, Landschaften, Ornamenten-Zeichnungen.

Geschwindigkeit im Nachzeichnen der Pläne und Karten läßt sich auch mittels der Copier-Scheibe, dem Copier-Glase, durch transparentes Papier, erzielen.

Eigene Werkzeuge zum Vergrößern oder Verkleinern der freyen Handzeichnungen sind die so genann-

ten

ten Pantographen. Von deren näherer Erklärung wird in den Vorlesungen gehandelt.

Practische Übungen im Copiren werden in den zum Zeichnen bestimmten Lehrstunden vorgenommen.

§. XXXIV.

Auflösungen einiger Aufgaben, als Folgerungen der vorhergehenden Sätze.

Beym Zeichnen können in manchen Fällen folgende Auflösungen brauchbarer Aufgaben gute Dienste leisten. Die Beweise derselben lassen sich aus den vorhergehenden Sätzen von Ähnlichkeit der Dreyecke leicht ableiten.

Wäre AB eine Linie (Fig. 147.), die nach gewissen Verhältnissen getheilt ist, und man soll eine oder mehrere gegebene Linien 1.2, 3.4 nach demselben Verhältnisse theilen; so beschreibt man mit BA auf ihr als Grundlinie, oder auf einer ihr gleichen Linie ein gleichseitiges Dreyeck AnB, und trägt aus der Spitze n die gegebenen einzutheilenden Linien auf die beyden Seiten nA und nB, verbindet dann die dadurch erhaltenen Puncte f, g, r, o mit Geraden fg, ro, welche den gegebenen Linien 1.2, 3.4 gleich seyn werden. Zieht man dann die Theilungslinien na, nb u. s. f., so theilen diese die erst erwähnten Linien in die verlangten proportionalen Theile a b, c d, rf, fg, gh u. s. f.

Schneiden sich (Fig. 148.) die Geraden 1.3, und 2.4 unter einem sehr spitzigen Winkel, und man soll ihren eigentlichen Durchschnittspunct x angeben; so wählt man sich einige Puncte a, b, c und zieht

durch

durch diese die mit einander Parallelen ad, be, cf u. s. f. Trägt man nun auf ad die Weite a5 etwa 4mahl, die Weite b6 aus 6 auf bd auch 4mahl, die Weite c7 auf cf aus 7 auch 4mahl u. s. f.; so erhält man die Puncte m, n, o. Eine Gerade durch diese Puncte gibt den Durchschnitt x.

Nimmt man das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise = 7 : 22, zieht eine Gerade AB von 40 bis 50 gleich großen Theilen, (Fig. 149.) und errichtet in 22 die Senkrechte CD; so stellet diese den Durchmesser, und AB den Umkreis vor. Soll nun der Durchmesser eines Kreises gefunden werden, der z. B. 40 Theile enthält, eines Rades u. s. f., wo die Länge eines solchen Theiles die Weite oder Entfernung eines Kammes oder Zahnes von dem andern, von Mittel zu Mittel gerechnet, etwa $3\frac{3}{4}''$ betragen könnte; so werden die $3\frac{3}{4}''$ 7mahl auf die senkrechte Linie CD getragen, und durch die Puncte A und 7 die Gerade A7 gezogen; diese wird die Senkrechte BF bey 40, oder bey der Hälfte 20 in den Puncten E und F antreffen. Die erste ist der Durchmesser, die zweyte der Halbmesser eines Kreises, worauf sich 40 Theile, jeder zu $3\frac{3}{4}''$ auftragen lassen u. s. f.

Durch Rechnung: Es ist $3\frac{3}{4}'' \cdot 40 = 150''$. Nun ist 22 : 7 = 150 : D, wenn D den Durchmesser bedeutet. Dieser ist $= \frac{7 \cdot 150}{22} = \frac{1050}{22} = 47\frac{8}{11}''$. So hoch müßte das Rad gemacht werden.

Wäre die Höhe eines Rades zu messen, über dessen Mittelpunct nicht gemessen werden kann. (Bey den meisten Rädern der Maschinen z. B. den Mühlrädern

dern ist dieß der Fall); so mißt man mittels einer Schnur den Umfang des Rades, und berechnet oder zeichnet aus diesem den Durchmesser oder die Höhe. Z. B. Wie groß ist der Durchmesser eines Rades, dessen Umfang 66′ beträgt?

$$\text{Er ist} = \frac{56.100}{314} = 17' - 10''.$$

Je kleiner der Durch- oder Halbmesser eines Kreises ist, desto kleiner ist der Umfang, mithin auch jeder Theil desselben. Hieraus läßt sich die Länge eines Grades der Winkelmesser in Theilen des Halbmessers berechnen. Z. B. Jemand läßt sich einen Winkelmesser verfertigen. Der Bequemlichkeit des Transportes wegen soll der Halbmesser nur $2\frac{1}{2}$ Zoll betragen. Wie groß wird 1^G des Randes? Dieser ist $= \frac{314.60}{100.360} = \frac{3,14}{6} = 0,52$ ‴ . . . etwas größer als $\frac{1}{2}$ ‴.

Soll aus dem Inhalte einer Kreisfläche der Durchmesser gefunden werden; so multiplicirt man den gegebenen Inhalt entweder mit 400 oder mit 14, theilt das dadurch enthaltene Product mit 314 oder mit 11, und zieht aus dem Quotienten die Quadrat-Wurzel. Diese ist der verlangte Durchmesser. Z. B. Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises dessen Inhalt $= 78\frac{1}{2}\square$ ist? Er ist $= \sqrt{\frac{78\frac{1}{2} \cdot 400}{314}} = \sqrt{100} = 10.$

Oder er ist $= \sqrt{\frac{70\frac{1}{2} \cdot 14}{11}} = \sqrt{99\frac{10}{11}}$

$= 10$ beynahe. Demnach ist in diesem Beyspiele der Inhalt $78\frac{1}{2}$ nicht mit dem Verhältnisse 7 : 22 oder 113 : 355, sondern mit dem Verhältnisse 100 : 314 berechnet worden.

Wäre demnach ein Rechteck oder ein Quadrat in eine Kreisfläche zu verwandeln; so könnte man eine Gerade ziehen, die 14mahl so lang seyn muß, als die Länge des gegebenen Rechteckes. Zwischen dem 11ten Theile dieser Länge und der Breite des gegebenen Rechteckes sucht man die mittlere Proportionale. Diese ist der Durchmesser des verlangten Kreises.

Aus der Ähnlichkeit der Dreyecke folgt, wie man den Punct M, sodann die Berührungspuncte s und u finden kann. (Fig. 150.) Es ist nähmlich $CM = \frac{h \cdot E}{H - h}$. Hier bedeutet h. den Halbmesser des kleinen Kreises, H jenen des großen, und E die Entfernung Cc der beyden Mittelpuncte. Hat man einmahl den Punct M; so findet man aus diesem leicht die Berührungspuncte. §. XXVII.

Wenn (Fig. 151). mit derselben Weite des Zirkels, nähmlich mit 1.2, ein gleichseitiges Dreyeck 1.2.n, auf der Verlängerung der Seite 1.2 wieder dasselbe Dreyeck 2.3.o u. s. f. die Dreyecke 3.4.p, 4.5.q beschrieben werden; so ist $2a = \frac{2n}{2}$, $2b = \frac{2n}{3}$ u. s. f. Man kann also mit derselben Zirkelweite, die der gegebenen Linie gleich ist, diese in wie viel immer gleich große Theile theilen.

Kleine Theile der Linien anzugeben dient eine gewisse sehr sinnreiche Einrichtung nach ihren Erfin-

dern

dern Nonius oder Vernier genannt. Ein mit einer Eintheilung versehenes Lineal läßt sich längst einem andern eingetheilten Lineale hinschieben (Fig. 121.) z. B. Um Zehntheile der Linien des Maßstabes anzugeben theilt man entweder 9 Linien des Maßstabes in 10 Theile, oder auch 11 Linien in 10 Theile. A und B, die Theilstriche der Vernier-Platte, sind von denen des Maßstabes nach der Reihe um $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ u. s. f., entfernt.

Diese Vorrichtung bringt man oft bey geradlinigen Eintheilungen, öfter noch bey den bereits erwähnten Winkelmaß-Instrumenten an.

Ist z. B. der Rand von 10 zu 10 Minuten, also jeder Grad in 6 gleich große Theile getheilt; so nimmt man 59 solcher Theile, trägt sie auf die nach dem Rande bewegliche Platte (die Vernier-Platte) und theilt diesen Bogen in 60 Theile. Demnach ist 1 Theil des Verniers $= \frac{59}{60}$ des Randes, d. i. eines Theiles desselben, also ist jeder Theil um $\frac{1}{60}$ von einem Theile des Randes kleiner als einer dieser Theile der Rand-Theilung, mithin, da dieser 10 Minuten beträgt, ist ein Theil des Vernier um $\frac{1}{60}$ von 10 Minuten d. i. um 10 Secunden kleiner als ein Theil des Randes. Aus dem Zusammentreffen eines Theilstriches des Randes mit einem Theilstriche des Nonius oder Verniers läßt sich der gemessene Winkel bis auf 10 Secunden bestimmen, von einem geübten Auge bis auf 5 Secunden schätzen.

Wären an einem Winkelmesser 7 Grade des Randes in 6 gleiche Theile getheilt; so erhält jeder $\frac{7.60}{6} = 70$ Minuten. Daher ist $70' - 60' = 10$ Minuten. Ein solcher Winkelmesser gäbe die Winkel

von

von 10 zu 10 Minuten. Träfe der erste Theilstrich, welcher in der Visier-Ebene liegt, mit einem Theilstriche des Randes z. B. mit 10° zusammen; so kommt kein Theilstrich des Nonius außer dem letzten mit den Theilstrichen des Randes überein, sondern der Theilstrich 10 des Nonius wird von dem Theilstriche 9 des Randes um 10, der Theilstrich 20 um 20' u. s. f. entfernt seyn u. s. f.

Ist an einem Wagen eine Maschine angebracht, welche die Anzahl der Umdrehungen eines der Räder angibt; so kann man bey dem bekannten Durchmesser des Wagenrades die Länge des Weges, den man befahren hat, leicht berechnen. Z. B. Wäre die Anzahl der Umdrehungen = n z. B. 350, 1280 u. dgl., und der Durchmesser des Rades = D; so ist die Länge des Weges $= \frac{314.D.n}{100} = 3'14.D.n.$ Hierauf gründen sich die Odometer und Perambulatoren der Feldmeßkunst.

Mittels des Verhältnisses 7:22 oder 100:314 oder 113:355 ist es leicht das Verhältniß des dem Kreise eingeschriebenen Quadrates zu dem umgeschriebenen Quadrate zu finden u. s. f.

Die Erörterung dieser sechs Aufgaben wird in den Vorlesungen zur mehreren Übung der Anfänger vorgenommen werden.

Äußerst wichtig ist die Lehre von der Proportional-Linie für die Theilung der Felder, Plätze u. s. f. Z. B. Man soll (Fig. 151.) das Trapez abcd in 4 gleich große Theile theilen, so daß die Theilungslinien mit keiner Seite parallel sind. Verstattet es die Gelegenheit; so sucht man den Berührungspunct n, theilt dc in die 4 gleich großen Theile, und steckt die Linie

1n, 2n, 3n u. s. f. aus. Die Trapeze I, II, III, IV sind die verlangten Theile. Sollte man aber wegen Hindernisse den Punct n nicht haben können; so theilt man nebst dc auch ab in eben so viele gleich große Theile a4, 4.5, 5.6 u. s. f. und bestimmt die Linien 1.4, 2.5, 3.6 u. s. f. um die verlangten Theile zu erhalten.

Ist ferners abcd ein Rechteck (Fig. 152., das z. B. einen Gartengrund vorstellet, welchen 2 Gärtner für 3600 fl. gekauft haben. Der erste hat 2200 fl., der zweyte 1400 fl. bezahlet. Das Rechteck soll den Einlagen proportional getheilt werden. Es ist 3600 = 2200+1400 fl. Es soll aber seyn: Rechteck I: Rechteck II = 2200 : 1400. Denn diese Rechtecke haben dieselbe Höhe 1.2. Theilt man die ganze Grundlinie dc in 18 gleich große Theile, gibt dann der Grundlinie d2, 11 dieser gleich großen Theile, so kommen auf die Grundlinie 2c des Rechteckes II, 7 dieser Theile, demnach verhält sich das erste Rechteck zu dem zweyten = 11 : 7 = 2200: 1400 u. s. f. Auf ähnliche Art verfährt man mit 3, 4 und mehreren Theilen.

Sollte ein Rechteck abcd so in 2 proportionale Theile getheilt werden, daß die Theilungslinie durch einen in einer Seite gegebenen Punct n gehen muß; so theilt man dasselbe nach der bereits gezeigten Art in zwey gleich große Theile adin und bcin. Ist nun das Dreyeck ind so groß, daß es zu bcin genommen die verlangten Theile gibt; so ist nd die Theillinie. Wäre das Dreyeck ind zu klein; so kann alle Mahl ein Theil dno gefunden werden, von der Beschaffenheit, daß bcin + ind + dno die verlangte Größe hat; no ist dann die Theillinie. Wäre hingegen ind zu groß; so kann ein Dreyeck inp gefunden werden von

einer solchen Größe, daß beim + inp der verlangte Theil ist. Auf ähnliche Art theilt man ein Vieleck ABE (Fig. 153.) u. s. f. Bey diesen Theilungen kann man auch die vorangeführte Methode des J. Marinoni vortheilhaft anwenden. §. XXI.

Soll endlich ein Dreyeck ABC (Fig. 153. und 154.), so in zwey gleich große Theile I und II getheilt werden, daß die Theillinie 1.2 mit einer Seite, z. B. der Grundlinie AC parallel läuft; so ist vermöge §. XXIX. . . . $I : I + II = \overline{1.2}^2 : \overline{AC}^2$.

Also ist $1.2 = \sqrt{\frac{I \cdot \overline{AC}^2}{I + II}}$. Nun kommt es darauf an, in einem Dreyecke eine gegebene Linie mit einer Seite parallel zu ziehen, was bereits gezeigt worden ist. §. X.

Wenn diese Aufgabe durch Zeichnung aufgelöset werden soll; so beschreibt man aus dem Mittel m einer Seite AC mit der Hälfte dieser AC den Halbkreis A1.2.1, und errichtet die in m der AC Normale 3m, dann wird aus C auf CA die Länge C3 getragen. Diese gibt den Punct x, wodurch die verlangte Parallele ausgesteckt oder gezogen wird.

Eben so kann man unter der zuvor angeführten Bedingung ein Dreyeck in 3, 4 u. s. f. gleich große Theile theilen.

Nach §. XXI. und dem Folgenden kann man ein Dreyeck von gegebenem Inhalte zeichnen, dessen Ein Winkel gegeben ist. Mittels dieser wichtigen Aufgabe kann man jede geradlinige Fläche, in wie viel immer gleich große Theile theilen.

Als eine fernere Anwendung des Satzes, daß Dreyecke von gleicher Grundlinie sich gegen einander wie ihre Höhen, und von gleicher Höhe wie ihre Grundlinien verhalten, dient folgende sehr nützliche Aufgabe.

Zwey Bauern kauften (Fig. 142.) ein vierseitiges Feld abcd um 100 Thaler, welches durch die Diagonale bd in zwey Theile, nähmlich in einen sehr wohl gedüngten Acker abda und in eine ungedüngte magere Wiese bdcb getheilt war. Jeder von diesen Käufern erlegte 50 Thaler. Nun soll die leichteste Art dieses Feld unter der Bedingung zu theilen angegeben werden, daß jeder von den Bauern eben so viel gutes und schlechtes Erdreich zusammen bekomme, als der andere? — Theilt man die Diagonale bd in zwey gleiche Theile in o, und steckt die Geraden oc und oa aus; so ist geschehen, was man verlangte. Es erhält nähmlich ein Käufer das Viereck aocba, welches aus aboa guten, und aus bcob schlechtem Erdreiche besteht, und der andere bekommt das Viereck aocda, welches aus adoa guten, und aus dcod schlechtem Grunde zusammen gesetzt ist. Da das Dreyeck aboa dem Dreyecke adoa gleich ist, weil beyde Dreyecke in eine Spitze a zusammenlaufen, und auf derselben Geraden bd stehen, sich also gegen einander wie ihre Grundlinien verhalten, welche einander gleich sind; so bekommt der erste Käufer offenbar so viel guten Grund als der andere. Da aus der nähmlichen Ursache das Dreyeck bcob dem Dreyecke dcod gleich ist; so erhält der erste auch eben so viel vom schlechten Erdreiche als der andere.

Wäre das unter obiger Bedingung zu theilende Viereck, dessen Diagonale bd den fruchtbaren Theil abda von der magern Wiese bdcb scheidet, ein Quadrat (N. 1) oder ein Rechteck (N. 2) oder ein Rhombus

bus (N. 3) oder ein Rhomboides (N. 4); so würde der Bedingung der Aufgabe lediglich durch Aussteckung der andern Diagonale ac vollkommen Genüge geleistet. Der eine Käufer bekäme sodann das Dreyeck acba, welches aus aoba gutem und acbo schlechtem Erdreiche besteht, und der andere erhielte das Dreyeck acda, welches aus aoda guten und aus ocdo schlechtem Grunde zusammen gesetzt ist. Daß durch diese Eintheilung jedem Käufer eben so viel gutes als schlechtes Erdreich zufalle, kann eben so, wie es oben geschehen ist, bewiesen werden.

Verlangt man, daß ein Trapez a'b'c'd'a, dessen Diagonale b'd' den guten Theil von dem schlechten scheidet, durch eine einzige Gerade fde, unter obiger Bedingung getheilt werden soll, so müßte man um die Puncte e, o' und f der Geraden fo'e zu finden die Geraden d'e, d'o' und d'f bestimmen. Dazu sind nebst den Abmessungen auch noch besondere weitläufige Kunstgriffe des analytisch-trigonometrischen Calculs erforderlich, welche in dieser Anleitung nicht Platz greifen können. Indessen wird die obige sehr leichte Auflösung, welche weder Zeichnung noch Rechnung erfordert, dem gemeinen Practiker ohne Zweifel willkommen seyn.

Über die Theilung der Felder S. A. Böhm's Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde. Frankf. am M. 1807. Gr. 8.

§. XXXV.

Lehrsatz von der Ähnlichkeit der Figuren. Einige Anwendungen.

Alle ähnliche, geradlinige Figuren können in gleich viele ähnliche Dreyecke getheilt werden. (Fig. 155.)

Es seyen die Figuren ABCDE, abcde einander ähnlich. Zieht man die Linie BE, CE, be, ce, so werden auch die Dreyecke ABE, abe, BEC, bec u. s. f. ähnliche Dreyecke seyn.

Denn in den Dreyecken EAB, eab sind die Winkel A, a gleich groß, vermöge der Voraussetzung. Es sind also die Seiten proportional, daher ist AE : ae = AB : ab. Demnach sind die Dreyecke ABE, abe einander ähnlich, und deßhalb sind die Winkel ABE, abe gleich groß. Da ferner die Winkel ABC, abc einander gleich sind, so werden es auch die Winkel EBC, ebc seyn.

Die Seiten an den gleich großen Winkeln ABE, abe sind proportional d. i. BE : be = AB : ab = BC : bc wegen der Ähnlichkeit der Figuren; also sind wieder die an den gleichen Winkeln der Dreyecke BCE, bce liegenden Seiten einander proportional, daher die Dreyecke selbst einander ähnlich. Eben so wird man ferners finden, daß alle übrigen Dreyecke einander ähnlich sind, und daß ähnliche Figuren in gleich viele ähnliche Dreyecke getheilt werden können.

Eben so wird gezeigt, daß jene geradlinigen Figuren einander ähnlich sind, welche gleich viele ähnliche Dreyecke in derselben Anzahl enthalten. D. i. welche gleiche Winkel, und die um diese liegenden Seiten proportional haben.

Nimmt man (Fig. 163.) innerhalb der einen Figur einen beliebigen Punct n, und in der andern einen ähnlich liegenden N, und zieht von diesem Puncte Gerade nach den Eckpuncten der Figuren; so erhält man auch lauter ähnliche Dreyecke. Denn die Dreyecke nfe, NFE sind einander ähnlich, und es ist ef : EF = fn : FN vermöge des Vorigen. Nun ist auch der Winkel efg = EFG, also nfg = NFG und ef : fg = EF : FG = fn : FN. Also ist das Dreyeck ngf ∽ dem Dreyecke NGF. Hieraus findet man, wie zuvor, daß nhg, NHG ähnliche Dreyecke sind u. s. f. Eben so auch für die übrigen Dreyecke, weil immer aus der Ähnlichkeit des einen Paares, auf Ähnlichkeit des andern Paares geschlossen wird.

Wird die eine Figur ABCDEFGH so auf die andere abedefgh gelegt, daß der Punct N auf den Punct n kommt, und zwey Seiten FN, EN auf zwey gleichnahmige Seiten fn, en der andern Figur fallen; so werden auch die andern Seiten NA, NB u. s. f. der ersten auf die gleichnahmigen Seiten na, nb u. s. f. der andern fallen, und die Gränzen der ersten werden mit den Gränzen der zweyten parallel seyn.

Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich gegen einander, wie jedes Paar ähnlich liegender Seiten der einen zu jedem Paare ähnlich liegender Seiten der andern. Die Flächenräume ähnlicher Figuren verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate der gleichnahmigen Seiten. Es ist nähmlich abcdefgh : ABCDEFGH $=$ ab + bc : AB + BC $=$ gf + fe : GF + FE u. s. f. Und die Fläche abbdefgh : Fläche ABCDEFGH $= \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{gh}^2 : \overline{GH}^2$ u. s. f. (§. XXIX.)

Dieß gilt auch für alle regelmäßigen Vielecke, daher auch für Kreisflächen. Ist also der Halbmesser der einen Kreisfläche noch einmahl so groß, als der Halbmesser der andern Kreisfläche; so wird der Umfang der ersten auch noch einmahl so groß als der Umfang der andern, der Flächenraum der ersten aber viermahl so groß als der Flächenraum der andern seyn. Wäre z. B. die eine Seite eines Rechteckes $=$ 10, die andere $=$ 17, und man nähme zu einem andern, dem ersten Rechtecke proportionalen Rechtecke die eine Seite $=$ 30, die andere 51; so verhielte sich das erste Rechteck zum zweyten $=$ 100 : 900 $=$ 1 : 9. Das zweyte wäre nähmlich 9 Mahl so groß als das erste.

Wäre die 2. Seite des 2. Rechteckes unbekannt; so fände man diese nach der Proportion 170 : x.30 $=$ 1 : 9, woraus x $=$ 17.3 $=$ 51 folgt u. s. f.

Aus

Aus diesen Sätzen, und dem Pythagoräischen Lehrsatze läßt sich eine Figur zeichnen, welche mehreren gegebenen Figuren ähnlich, und der Summe derselben gleich ist. Z. B. (Fig. 156.) Man soll die Seite eines regelmäßigen Fünfeckes finden, welches den beyden Fünfecken A und B zusammen gleich ist. Setzt man die Seiten s und S der gegebenen Vielecke rechtwinkelig an einander, und zieht 1.2, so ist diese die Seite eines regelmäßigen 5eckes, das so groß ist, als die beyden 5ecke A und B zusammen.

Eben so findet man die Seite eines Vieleckes, welches dem Unterschiede zweyer gegebenen Vielecke gleich ist. Auf diese Art läßt sich ein Vieleck zeichnen, welches so groß ist, als mehrere ähnliche Vielecke zusammen. Daher wird leicht die Seite einer Figur gefunden, welche 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 u. s. w. Mahl größer, als eine gegebene Figur und dieser ähnlich ist. Dasselbe gilt auch von Kreisflächen.

Demnach ist es leicht zu sehen, ob man eine gegebene Figur abcde (Fig. 157.) richtig vergrößert oder verkleinert, eine Gegend richtig aufgenommen habe, u. s. f.

Das Aufnehmen der Gegenden gründet sich fast gänzlich auf die Lehre der ähnlichen Figuren und den Lagen der Ebenen; daher sollte sie dieser nachfolgen. Um aber manchen Sätzen so gleich eine Anwendung zu geben, hat man manche Aufgaben der Feldmeßkunst früher vorgenommen.

Eine der wichtigsten Anwendungen der ähnlichen Figuren ist die Aufnahme mit dem Meßtische, wozu freylich auch noch andere Lehren, z. B. von den Lagen und Stellungen der Ebene erforderlich wären. Da es sich aber hier nur darum handelt, die für das bürgerliche Leben nöthig-

sten Sätze mit ihren vorzüglichsten Anwendungen auf die Auflösung gemeinnütziger Aufgaben in gedrängter Kürze aufzustellen; so enthält der folgende §. das Unentbehrlichste von der Aufnahme mit dem Meßtische angewendet auf solche Fälle, welche dem künftigen Ökonomen oder Landwirthschafts-Beamten, Gutsbesitzer u. s. f. gewiß eher und häufiger vorkommen, als große Aufnahmen, und ihn geeignet machen, weitläufigere und ausführlichere Werke über die Feldmeßkunst mit Nutzen zu gebrauchen.

Von der Aufnahme mit der Bousole, dem Spiegel-Lineale, dem catoptrischen Zirkel u. s. f. ist in diesen Anfangsgründen deßhalb nichts angeführt worden, weil einer Seits diese Werkzeuge nicht jene Genauigkeit wie der Meßtisch gewähren, anderer Seits die Theorie derselben mehrere Vorkenntnisse der angewandten Mathematik erfordert, was hier nicht vorausgesetzt werden kann. Auch ist die Aufnahme mit kostbarern Werkzeugen ohne dieß kein Gegenstand einer Bürgerschule; deßhalb werden auch die Schüler der k. k. Normal- und Hauptschulen vorzüglich im Aufnehmen und Ausstecken der Figuren ohne Instrumente d. i. mit bloßen Stäben, Schnüren und der Kette, auf dem Felde geübt werden, wo die vorhergehenden Sätze, besonders aber die §. XX. gezeigte Methode, aus den drey Seiten eines Dreyeckes seinen Inhalt zu finden, sehr viele und sehr wichtige Anwendungen geben.

Die geometrische Aufnahme der Gebäude d. i. die Verfertigung der Grundrisse, Aufrisse und Durchschnitte hat zwar manche Schwierigkeiten, kann aber doch in allen Fällen ordentlich zu Stande gebracht werden, wenn man das in diesen kurzen Anfangsgründen Vorgetragene gut verstanden hat, im Architectur-Zeichnen geübt ist, und einige Kenntnisse der Baukunst besitzet.

§. XXXVI.

Das Nöthigste von der Aufnahme mit dem Meßtische. Über die Verfertigung kleinerer Pläne. Schriften über die Aufnahme mit dem Meßtische.

Der Meßtisch (die Mensel, das Prätorianische Tischchen), (der Winkelzeichner) ist ein vierseitiges Brett von

von beliebiger Größe, etwa 1′ Breite und 1½′ Länge, von guten trocknen Lindenholze, aus mehreren Stücken zusammen gesetzt, und mit zwey so genannten Hirnleisten versehen. Dieses Brett wird auf ein dreyfüßiges Stativ so gelegt, daß es genau horizontal gerichtet, fest gestellt, und vom Stative abgenommen werden kann. Das Brett wird mit Papier überzogen, das zuvor etwas angefeuchtet, so dann mit Kleister am Rande angeklebt, oder mittels eines festen Rahmens am Brette befestigt wird.

Manche Meßtische haben die Einrichtung, daß das Brett wagerecht hin und hergeschoben werden kann, um nicht das Stativ verrücken zu müssen, wenn ein Punct auf dem Tische über einen Punct auf dem Felde gebracht werden soll.

Auch hat man sehr kleine Bretter, etwa von 6, 8 bis 10″ Breite, und 10 bis 12″ Länge. Das dazu gehörige Stativ ist ein mit einer eisernen Spitze versehener starker Stab. Dieses Werkzeug dient zu einer geschwinden beyläufigen Aufnahme einer kleinern Gegend, wenn die Hauptpuncte derselben schon genau aufgenommen worden sind.

Das Dioptер-Lineal, die Alhidadenregel, gehört zum Meßtische. Es besteht aus einem starken, am Anfange und am Ende mit Dioptern versehenen, messingenen Lineale, dessen Länge mit der Länge der Diagonale des Tischblattes überein kommen soll. Die Dioptern können entweder mittels eigener Gewinde auf das Lineal der Bequemlichkeit wegen niedergelegt werden, oder besser, sie sind auf dem Lineale fest angeschraubt. Eine verticale ebene Fläche durch die Diopter heißt eine Diopter-Ebene. Entweder trifft diese auf die Schneide des Lineales, längs der man die Linie zieht; oder sie trifft in die Mittellinie des Lineales. In jedem Falle erhält man dieselben Winkel, wegen Gleichheit der Wechselwinkel. Im 2. Falle ist das Lineal fester auf dem Papiere; doch muß bey jedem Winkel auf die halbe oder ganze Breite des Lineales gesehen werden. Die Dioptern haben mehrerley Einrichtungen, welche alle hier zu beschreiben viel zu weitläufig seyn würde.

de. Statt der Dioptern gebraucht man vortheilhaft ein in einer Vertical-Ebene über dem Lineale angebrachtes Fernrohr, womit sehr sicher nach höher und tiefer liegenden Gegenständen visirt werden kann; doch ist zu nicht sehr großen Aufnahmen mehrerer Ursachen wegen das gewöhnliche Dioptern-Lineal vorzuziehen.

Der Meßtisch ist, so wie die Zollmannische Scheibe, ein Winkelzeichner, wenn man das Dioptern-Lineal um einen festen Punct herumdreht, und Winkel zeichnet, deren Spitzen in diesem Puncte liegen.

Die geometrische Zeichnung einer Gegend sogleich vom Felde auf das Papier zu bringen ist der Hauptzweck, den man mit dem Meßtische erreicht, und in dieser Hinsicht ist er das beste aller Werkzeuge der Feldmeßkunst.

Zu kleinern Vermessungen, welche nicht über ½ Quadrat-Meile betragen, ist der Meßtisch sehr zu empfehlen. Zu größern Messungen gebraucht man die Winkelmesser, deren Gebrauch mit der Trigonometrie verbunden werden muß.

Noch gehören zum Meßtische mehrere Absteckstäbe, die Kette, Klaftermaß, Zirkel, Bleystifte, mehrere feine Nähnadeln, deren Köpfe mit Siegelwachs überzogen sind, eine kleine Wasserwage mit der Luftblase, und die so genannte Meßgabel mit dem Senkbleye, um einen Punct auf dem Tische über einen Punct auf dem Felde zu bringen, oder umgekehrt.

Der Meßtisch nach den neuern Verbesserungen sammt allem Zugehör wird in den Vorlesungen vorgezeigt und erklärt.

Der Erfinder des Meßtisches, war J. Praetorius, ehemahliger Professor der Mathematik zu Altorf. Er starb um's Jahr 1616. In neuern Zeiten wurden die Meßtische, so wie fast alle Werkzeuge der Feldmeßkunst, sehr verbessert. Hofrath Mayer, Kapitain Hogreve, Mechanicus Brander u. m. haben darum ihre Verdienste.

Wenn

Wenn von allen aufzunehmenden Puncten 1, 2, 3 u. s. f. einer Gegend (Fig. 158.) verticale Linien aufwärts gezogen würden, welche Linien (sind die aufzunehmenden Puncte nicht sehr weit von einander entfernt) unter sich gleichlaufend seyn werden, und man ließe dann eine horizontale Ebene alle diese Linien durchschneiden; so erhielte man eine gewisse Anzahl von Durchschnittspuncten, welche mit horizontalen Geraden verbunden eine Figur m geben, die nach dem verjüngten Maßstabe gezeichnet der Plan, oder die Karte der aufgenommenen Gegend heißt. Die Figur m nennt man ihre Projection. Demnach ist, eine Gegend aufnehmen, oder ihre Projection im verjüngten Maßstabe darstellen, eins und dasselbe.

Die vorerwähnte Horizontal-Ebene kann man die Projections-Ebene heißen; die ebene Fläche, worauf man zeichnet, die Ebene des Meßtisches, liegt in jener Projections-Ebene. Wäre (Fig. 163.) die Ebene abcdefg die Projection, in dieser ein Punct n, über welchen der Meßtisch gestellet ist; so kann auf dem Blatte desselben immer eine Figur N gezeichnet werden, welche der Projection der aufzunehmenden Gegend ähnlich seyn wird, (§. XXXV.) vorausgesetzt, daß von dem Puncte n, dem Standpuncte, der Station, nach allen aufzunehmenden Puncten, a, b, c, d, u. s. f. visirt und gemessen werden kann.

Läge der Punct n in einem Eckpuncte der Figur der Projection, (Fig. 159.) so gilt dasselbe. Ebenfalls wenn der Standpunct n außer der Figur läge. (§. XXXV.) Wahrscheinlich haben diese und ähnliche Betrachtungen auf die Erfindung des Meßtisches geleitet.

Soll ein auf dem Meßtische schon vorhandener Punct über einen auf der Erde gegebenen Punct gebracht werden; so stellet man erst den Meßtisch nach dem Augenmaße, hält sodann den Faden mit dem Senkbleye unten an das Tischblatt, so daß darüber der gegebene Punct sich befindet, und sieht, ob das Senkbley den auf der Erde gegebenen Punct trifft. Ist dieses noch nicht; so muß entweder der ganze Tisch, oder das Blatt allein gerückt und gedreht werden, bis die beyden Puncte in derselben Verticalen liegen.

Zu

Zu diesem Zwecke bedient man sich der vorerwähnten Meßgabel. Bey mehrerer Übung geschieht dieses Stellen nur nach dem Auge.

Wenn 2 Puncte auf dem Tische in der erwähnten dioptrischen Ebene liegen, und diese befindet sich in einer Vertical-Ebene zweyer auf dem Felde gegebener Puncte; so liegen alle diese vier Puncte in einer Vertical-Ebene, vorausgesetzt, daß das Tischblatt wagerecht gerichtet ist. Dieses geschieht entweder mit einer Bullard-Kugel oder mit der sogenannten Setz- oder Wasserwage, einer 3 bis 5 Zoll langen, mit Weingeist gefüllten Glasröhre, welche sich in einem eigenen Gehäuse befindet. Tritt die in der Röhre spielende Luftblase an ihre mittlere Stelle; so ist die Achse der Röhre horizontal, mithin auch das Meßtischblatt, wenn dieses mit der erst erwähnten Achse parallel ist.

Weil nun jede nach der Schneide des Dioptern-Lineales gezogene Linie in der Dioptern-Ebene liegen muß; so kann man jede Gerade auf dem Tische über jede Gerade auf dem Felde, von der 2 Puncte gegeben sind, bringen. Und im Gegentheile kann man auf dem Tische eine Linie ziehen, die mit einer auf dem Felde gegebenen in derselben Ebene liegt.

Die Linien selbst werden mit einem etwas harten, schaufelförmig gespitzten, feinem Bleystifte gezogen, oder auch bloß mit der Zirkelspitze dem Papiere eingeritzt.

Zur Aufnahme überhaupt, besonders mit dem Meßtische, gebraucht man fast immer Transversal-Maßstäbe, deren Größe sich nach der Größe der aufzunehmenden Gegend richtet. Meistens wird dem Geometer angegeben, wie viele Klafter auf 1 Zoll des landesüblichen Maßes gehen sollen.

Die Standlinie oder Grundlinie ist entweder eine eigens abgesteckte, möglichst wagerechte, mit aller Sorgfalt gemessene Gerade, oder eine Seite der aufzunehmenden Figur. Vom Anfangs- und Endespuncte der Standlinie muß man nach allen aufzunehmenden sehen können.

Soll eine gänzlich zugängliche Gerade aufgenommen werden; so wird der Tisch über deren Anfangs- oder Endespunct aufgestellet, auf dem Tische ein Punct gewählt, der mit einem der erst genannten Puncte genau vertical ist. In diesen so gewählten Punct wird eine der vorerwähnten Nadeln, der Piquir- oder Anschlagnadeln, dem Tischblatte normal eingesteckt. An diese Nadel schiebt man das Visir- oder Diopter-Lineal, und visirt nach dem andern Puncte der gegebenen Linie, welcher entweder mit einem Stabe, einer langen verticalen Stange, oder durch einen Baum, die Kante einer Mauer u. dgl. bezeichnet ist. Wird endlich die Visir-Linie gezogen, aus ihrem Anfangspuncte, dem Standpuncte, eine Länge aufgetragen, welche der auf dem Felde gemessenen gemäß ist: so hat man die gegebene Linie ihrer Länge und Lage nach aufgenommen.

Eben so verfährt man, wenn ein Winkel aufgenommen werden soll, in dessen Spitze man den Standpunct nehmen kann, womit das Messen der beyden Schenkel erspart wird. Mißt man aber diese, und verbindet ihre Endespuncte mit einer Geraden; so hat man ein Dreyeck, aus Einem Winkel und den beyden Seiten, die ihn einschließen, aufgenommen. Daher ist es leicht, eine nur am Anfangs- und am Endespuncte zugängliche Gerade ab aus einem Standpuncte n aufzunehmen. (Fig. 160.)

Ist abcdef ein Platz (Fig. 159.), in den man nicht kommen kann, z. B. ein bebautes Feld, ein Weingarten u. s. f.; so wird der Meßtisch über einen Punct a des Umfanges gebracht, nach b visirt, und eine Linie gezogen, welche der Seite ab gemäß ist. Dann wird der Meßtisch nach b gebracht, und dort so gestellet, daß der Punct b auf dem Tische über den Punct b auf dem Felde kommt. Durch Rückvisiren muß ba auf dem Tische über ba auf dem Felde gebracht, und sodann bc aufgenommen werden. Dadurch wird ein Dreyeck abc erhalten, welches dem Dreyecke abc auf dem Felde ähnlich ist. In den übrigen Puncten def u. s. f. wird auf dieselbe Art fortgearbeitet.

Schließt sich am Ende der Aufnahme die ganze Figur; so ist richtig, im Gegentheil unrichtig gearbeitet worden. Dem Aufnehmen muß eine beyläufige Schätzung der längsten

sten Linie be oder bd, etwa durch Abschreiten, 5 Schritte auf 2 Klafter gerechnet, vorhergehen, damit ein solcher Maßstab zuverläßig gewählt werde, daß keiner der aufzunehmenden Puncte z. B. b, vielleicht außer das Tischblatt falle. Sollte dieses einen zu kleinen Maßstab nöthig machen; so müßte die Aufnahme auf mehrere Blätter, zugleich mit mehreren Meßtischen durch mehrere Feldmesser, oder mit einem einzigen Meßtische nach und nach vorgenommen werden.

Dieses ist das Verfahren eine Figur aufzunehmen, wenn man jede Seite des Umfanges messen, und die Winkel, welche diese Seiten des Umfanges mit einander bilden, aufnehmen kann.

Demnach kommt hierbey die Zeichnung eines Dreyeckes aus einem Winkel, und den beyden ihn einschließenden Seiten so vielmahl vor, als die Figur Ecken hat, weniger eines.

Bey dieser Methode der Aufnahme ist die größtmögliche Genauigkeit ein unerläßliches Bedingniß. Der kaum bemerkbare Fehler im 1. Standpuncte wird in jeder andern Station noch größer, und verursacht fast immer, daß die Figur am Ende der Aufnahme nicht schließen kann.

Wäre (Fig. 161.) von einer gegebenen oder angenommenen Geraden AB der Punct x zu bestimmen; so wird in der 1. Station A der Winkel xAB, dann die Gerade AB, endlich die Winkel B aufgenommen. Man erhält demnach aus einer Seite AB, den beyden Winkeln A und B an dieser das ganze Dreyeck AxB, demnach auch den verlangten Punct x.

Je mehr sich die Winkel A und B den rechten Winkeln nähern; desto spitziger wird der Winkel AxB, desto schiefer also der Durchschnitt x auf dem Tische, also desto unsicherer die Bestimmung des Punctes x. Dieselbe Bemerkung gilt, wenn die Winkel A und B sehr spitzig wären. Am besten ist es, wenn diese Winkel zwischen 40° bis 60° Grade fallen.

Kann man aus jedem Endpuncte einer aufzunehmen-

den

den Fläche nach jedem andern Endpuncte derselben sehen; so kann man nach dem Vorigen mit der größten Genauigkeit jede Fläche aufnehmen, indem die Zeichnung eines Dreyeckes aus einer Seite und den beyden anliegenden Winkeln so oft vorgenommen wird, als es sich schicklich thun läßt, ohne zu schiefe Durchschnitte zu bekommen.

So könnte (Fig. 157.) das Vieleck ABCDE aus der Seite AB als Standlinie, und den Winkeln ABE, BAD, BAC, dann ABC, ABD und ABE aufgenommen werden.

Fiele etwa doch ein Punct x (Fig. 161.) außer das Tischblatt; so kann man entweder durch Zeichnung oder durch Rechnung dennoch den wahren Abstand dieses Punctes von der Linie AB angeben. Z. B. Man hätte nur die Theile Bn und Ao auf dem Tische; zieht man mit der erstern Bn durch einen Punct o eine Parallele; so ist das Dreyeck Aop ∽ dem Dreyecke AxB: also ist, Ap : AB = Ao : Ax, woraus Ax entweder durch Rechnung oder Zeichnung gefunden werden kann. (§. XXIX.) Daher kann man leicht solche Längen wie Ax finden, wenn man einen aliquoten Theil der Grundlinie AB für den Theil Ap annimmt.

Gänzlich unzugängliche Linien AB (Fig. 48.) werden demnach leicht aufgenommen, wenn man eine Standlinie MO annimmt, und sodann die Aufnahme eines Dreyeckes aus einer Seite MO und den zwey daran liegenden Winkeln AMO, BMO und BOM, AOM zwey Mahl vornimmt.

Gäbe es in der aufzunehmenden Figur z. B. abcdefgh (Fig. 163.) einen Standpunct n, von welchem aus nach allen aufzunehmenden Eckpuncten abc u. s. f. visirt und gemessen werden kann; so läßt sich aus einem solchen Puncte leicht und sicher jeder Platz aufnehmen. Müßte man, mehrerer Hindernisse wegen, noch einen Standpunct annehmen, so erhielte man dann eine Standlinie AB (Fig. 133.), von der aus die gegebenen Puncte 1, 2, 3 . . . leicht aufgenommen werden können, da sich die Zeichnung eines Dreyeckes aus einer Seite und den beyden daran liegenden Winkeln immer wiederhohlt.

Um

Um krumme Linien z. B. die Ufer eines Flusses u. dgl. aufzunehmen (Fig. 162.), werden nach der Richtung der krummen Linie die zusammen hängenden Standlinien 1.2, 2.3 u. s. f. ausgesteckt und aufgenommen, da die Längen 1.2, 2.3, 3.4 und die Winkel 1.2.3, 2.3.4 u. s. w. aufgenommen werden. Dann werden gleiche Abstände, etwa von 10 zu 10, oder 100 zu 100°, nachdem es die Richtigkeit der Aufnahme fordert, von 1 gegen 2, von 2 gegen 3, von 3 gegen 4 u. s. f. getragen, und die dadurch erhaltenen Puncte durch kleine, bis auf die Länge von 6 oder 10 Zoll in die Erde geschlagene Pflöcke bezeichnet, welche um Verwirrung zu vermeiden mit Nummern versehen seyn können. Nun wird der Meßtisch über a aufgestellet. Während dem geht ein Gehülfe nach I, und steckt dort einen Stab ein, nach welchem von a aus visirt wird. Der Meßtisch wird dann nach b gebracht, und gleichfalls nach I visirt, und die Visir-Linien werden gezogen. Dadurch erhält man den Durchschnitt I. Der Gehülfe geht dann nach II, und dieser Punct wird wie der vorige aufgenommen. So werden alle Krümmungspuncte bestimmt, durch welche sodann mit freyer Hand die krumme Linie geführt wird. Ist auf dem jenseitigen Ufer auch ein Gehülfe; so können beyde Ufer zugleich aufgenommen werden.

In diesen, so wie in manchen Fällen, ist es sehr bequem, wenn der Zeichen- oder Absteckstab des ersten Gehülfen von dem Absteckstabe des zweyten Gehülfen sich entweder durch Farbe oder Größe oder ein Fähnchen, oder sonst ein Zeichen, das in die Ferne sichtbar ist, unterscheidet.

Bey der Auflösung dieser Aufgaben ist es sehr gut, ehe ein Punct anvisirt wird, der Stellung des Tisches nachzusehen, ob solche nicht etwa während der Arbeit verrückt wurde. Manche Meßtische und Winkelmesser haben deßhalb auch eigene Versicherungs-Diopter, welche gleich Anfangs nach einem fixen Puncte gerichtet werden, und diese Richtung während der ganzen Arbeit beybehalten müssen.

Sollte die Stand- oder Grundlinie nicht so gewählt werden können, daß es nicht einige schiefe Durchschnitte gäbe; so kann man sich des bereits im Vorigen erwähnten Vortheils bedienen, von einem der bereits aus A und B

bestimmten Puncte z. B. C oder D sich wieder an die Puncte A und B zu visiren, und ist man von der Richtigkeit der Arbeit überzeugt, in der Aufnahme weiter fortfahren. Dieser Vortheil, der auch (Fig. 157.) schon angewendet wurde, das Rückwärts-Einschneiden, gewährt sehr viele Genauigkeit, und ist daher vorzüglich zu gebrauchen. Erlaubt es die Gegend, so kann man in der Standlinie einige Versicherungs- oder Prüfungspuncte annehmen, und von diesen aus sich nochmahls an die aufzunehmenden Puncte 1, 2, 3 u. s. f. einvisiren, oder man errichtet in einem Puncte der Standlinie AB eine dieser Normale, und nimmt in dieser letztern die vorerwähnten Versicherungs-Puncte. Man kann demnach durch Vor- und Rückwärts-Einschneiden die nöthigen Puncte auf dem Tischblatte fast alle Mahl angeben.

Meistens pflegt man gleich auf dem ersten Standpuncte die Magnet-Nadel auf das Tischblatt zu setzen, und mittels einer Bley- oder Tuschlinie an der einen oder auch an zwey einander entgegen stehenden Seiten des Gehäuses derselben ihre Richtung zu bemerken, damit man hierdurch die Lage der aufgenommenen Figur rücksichtlich der Mittagslinie eines Ortes erkennen könne: vorausgesetzt, daß die Abweichung der Magnet-Nadel, von Nord gegen West (etwa 15°) bekannt sey.

Durch diese Richtung der Magnet-Nadel ist man im Stande in jedem andern Standpuncte den Meßtisch, wenn man keine andern Hülfsmittel hat, zu orientiren, d. i. ihn so zu stellen, daß alle in den vorigen Standpuncten gezogenen Visir-Linien mit ihren gleichnahmigen auf dem Felde gleichlaufend sind. Wenn man nähmlich das Tischblatt zuerst horizontal, dann die Magnet-Nadel an ihre schon bemerkte Stelle setzt, dann das Tischblatt so lange herumdreht, bis die Nadel eingespielt hat.

Außer diesem wird die Magnet-Nadel vorzüglich gebraucht, wenn man aus Mangel der freyen Aussicht die aufzunehmenden Puncte nicht auf die vorgezeigte Art mittels der Durchschnitte bestimmen kann.

Das bisher vorgetragene enthält das Wichtigste der Aufnahme mit dem Meßtische. Hätte man aber eine grö-

ßere

ßere Gegend von mehreren hundert Klafter Länge und Breite aufzunehmen; so muß der Aufnahme eine Vorbereitung vorgehen. Bey dieser ist auf Folgendes Rücksicht zu nehmen:

1. Man besichtigt die ganze Gegend, und macht sich nach den Regeln der Situations-Zeichnung davon einen Entwurf, der, erlaubt es die Zeit, mit Tusche ausgezeichnet seyn kann.
2. Hierbey bestimmt man sogleich, ob eine oder vielleicht mehrere Standlinien nöthig sind, und wo diese ausgesteckt werden müssen.
3. Ob man mit einem Blatte (Papier) ausreicht, oder mehrere derselben nöthig hat, und wo auf das 1. Blatt die erstern Puncte hinfallen werden. Auch nach welcher Ordnung die Blätter, wenn deren mehrere nöthig sind, an einander gereihet (angestoßen) werden müssen.
4. Man sieht nach, ob die Gegend mit einer hinlänglichen Anzahl von Fixpuncten versehen ist, oder ob man mehrere errichten muß. (Hohe Stangen, an deren obersten Puncte Stroh oder sonst etwas in der Ferne sichtbares befestigt seyn müß.)
5. Aus der durch das Recognosciren entworfenen Übersicht, oder beym Recognosciren selbst, wird man leicht abnehmen können, in wieweit man von einem Standpuncte aus Puncte bestimmen kann ohne in zu schiefe Durchschnitte zu kommen, oder Puncte zu bekommen, welche das Rückwärts-Einschneiden nicht mehr zulassen.
6. Die kürzesten Wege und Verbindungslinien werden sogleich bekannt, ebenfalls die höchsten zur Übersicht des Ganzen geeigneten Puncte.

Sind diese Dinge alle gehörig berücksichtigt worden, so fängt man mit der Aufnahme an. Eine geschickte Verbindung der vorhergehenden Auflösungen und eine richtige Anwendung der theoretischen Sätze wird dabey das Meiste nützen. Meistens fängt die Aufnahme mit dem so genannten geometrischen Trianguliren an: nähmlich eine gewisse Anzahl an einander hängender Dreyecke, welche die ganze Aufnahme enthalten, heißt das Netz, Triangel-Netz. Die dadurch erhaltenen Dreyecke werden dann mit dem Meßtische ausgefüllet. Wichtigere Puncte der

Auf-

Aufnahme schneidet man 2, 3 und mehrere Mahle ab, um die größte Genauigkeit zu erhalten.

Das Zeichnen, einstweilen nur mit Tusche, geschieht gleich auf dem Felde von einem dem Feldmesser zugegebenen Zeichner oder Figuranten, bey kleinern Aufnahmen von dem Feldmesser selbst. Sind mehrere hinlänglich geübte Gehülfen dem Feldmesser zugetheilt; so können diese zu mancherley Arbeiten, zum Aufnehmen der krummen Linien u. dgl. einstweilen verwendet werden.

Das Messen der Stand- oder Grundlinie geschieht meist mit der Kette, besser nach der schon erörterten Methode mit dem Meßbalken, wobey alle nur immer mögliche Genauigkeit beobachtet werden muß. Das Messen der übrigen beynahe horizontalen Linien geschieht mit der Kette, oder mit der Doppelklafter und der Setzwage, wenn diese Linien beträchtlich schief seyn sollten.

Braucht man zu einer Aufnahme mehrere Tischblätter; so müssen diese (die Sectionen) nach vollendeter Aufnahme so an einander gereihet werden, daß sie zusammen ein Ganzes bilden. Dieses Ganze ist denn der verlangte Plan, welcher meistens der bequemern Übersicht wegen ins Kleinere und zugleich ins Reine gezeichnet wird.

Um dieses Aneinanderstoßen genau zu machen sind folgende Regeln zu beobachten:

1. Man macht alle Einfassungsrahmen der Sectionen, (Blätter der Aufnahme), alle Rechtecke von gleicher Größe und so genau als möglich, von der Größe nähmlich, daß ein mehrere Zoll breiter Raum ringsherum frey bleiben kann.
2. Auf diesen Rand der einen Section werden verschiedene zu der 2. Section gehörige Puncte getragen. Dieselben Puncte müssen sich auf der nächst folgenden Section gleichfalls befinden. Diese Puncte gehörig auf einander gelegt geben die beyden Sectionen in ihrer wahren Lage gegen einander.

Es gibt noch mehrere Methoden des Aneinanderstoßens der Sectionen. Die übelste ist jene, wo das Zusammenstoßen nach den Umfängen aufgenommener Gegenstände, der Weingärten, Wiesen, Gebäude u. s. f. bewerkstelliget wird.

Eine

Eine auf dem Tischblatte gezeichnete Figur auszustecken braucht man umgekehrt wie bey der Aufnahme zu verfahren. Man steckt nähmlich in den Richtungen der auf dem Tische befindlichen Linien die gleichnahmigen auf dem Felde ab, macht diese jenen gemäß. Das Ausstecken der Winkel geschieht so wie das Aufnehmen derselben.

Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes, nähmlich der Aufnahme mit dem Meßtische, wäre für gegenwärtigen Zweck viel zu weitläufig.

Man führt deßhalb hier die Titel einiger der brauchbarsten ältern und neuern Bücher an, welche die Feldmeßkunst überhaupt so vollständig enthalten, daß man sich damit in den meisten Fällen zu helfen wissen wird, wenn man das bereits Vorgetragene deutlich verstanden hat, und im Zeichnen geübt ist.

a. Daniel Schwenter's Geometria practica. Vermehrt v. A. Böckler. Nürnberg 1667. 4.
b. Bernh. Canzler. Vom Feldmessen. Vermehrt vom Prof. Trew. Nürnberg 1751. 8.
c. J. Zollmann Anleitung zur Geodäsie. Halle 1744. Fol.
d. L. Wilkens Anleitung zu Landesvermessungen. Leipzig 1765.
e. Fr. Meinert. Anfangsgründe der Feldmeßkunst. Halle 1794. 8.
f. J. Hogreve Unterricht zur topograph. Aufnahme. Hanover 1806.
g. A. Böhm Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde. Frankfurth a. M. 1807.
h. Unterricht zum Aufnehmen mit dem Meßtische. Vom Freyherrn von Unterberger k.k. F. M. L. (Wien bey Wappler und Böck) 1807.
i. W. v. Schlieben. Der selbstlehrende Feldmesser. Leipzig 1811.
k. K. Hegenberg Anweisung ohne Winkelmeß-Instrumente u. s. f. Berlin 1818. 8. m. K.
l. Anleitung zum Situations-Zeichnen. Von J. Landerer, Professor an der k. k. Ingenieurs-Akademie. Wien 1815. 4. u. m. dgl.

An-

Außer diesen gemeinnützigen Anwendungen der Proportional-Linien wird noch ihr Gebrauch bey der Construction der Zeichnungen ausführlich in den zum practischen Zeichnen bestimmten Lehrstunden gewiesen, wozu eigene Vorzeichnungen vorhanden sind.

§. XXXVII.

Erklärung des Nivellirens. Von den gemeinsten Nivellir-Instrumenten. Einige Anwendung des Nivellirens. Bücher, welche weitere Ausführungen enthalten.

Nivelliren oder Abwägen heißt die Unterschiede der Höhen zweyer oder mehrerer Puncte einer Linie oder einer Gegend mittels horizontaler Visir-Strahlen durch die Ausmessung bestimmen.

Ist die Entfernung der abzuwägenden Puncte von einander beträchtlich, z. B. 100, 200 Klafter und darüber; so wird die Krümmung der Erde auf die Messung des Höhen-Unterschiedes der erst erwähnten Puncte einen Einfluß haben (Fig. 164.) Es sey M der Mittelpunct der Erdkugel, und DCB ein Stück eines größten Kreises derselben, d. i. eines Kreises, welcher durch den Mittelpunct der Erdkugel geht, A die Spitze eines entfernten Berges, der um die Länge AB von der Oberfläche CB absteht. Diese Linie AB muß eine Verticale, eine Verlängerung des Halbmessers der Erde seyn, daher geht sie verlängert durch den Mittelpunct M der Erde. Ist nun C ein Standpunct, so ist CM ein Halbmesser der Erde, und denkt man sich durch C eine Horizontal-Ebene CO; so wird diese auf CM senkrecht seyn. Der Winkel ACO sey der Höhenwinkel des Punctes A über der durch den Punct C gelegten

Horizontal-Ebene; die Normale AO auf diese Ebene wird die Höhe des Punctes A über dem Horizonte des Standpunctes C seyn. CO ist dann der Horizontal-Abstand des Punctes A von dem Puncte C. Nach den vorhin gezeigten Methoden kann man nur die Höhe AO, d. i. den Abstand des Punctes A über den Horizont des Punctes C, nicht aber die wahre Höhe dieses Punctes über der Erd-Oberfläche CB oder die Vertical-Höhe AB bestimmen.

Nähme man daher die geometrisch oder trigonometrisch gefundene Höhe AO statt der wahren Höhe AB; so würde man einen Fehler machen, der um so größer wird, je weiter der Punct A von dem Puncte C entfernt ist, je mehr also die Krümmung des Bogens CB beträgt. Der wahre Horizont des Punctes C ist der mit dem Halbmesser MC beschriebene Bogen CB. Der scheinbare Horizont hingegen ist die Tangente CO, nach welchem der in C befindliche Beobachter nach dem Gegenstande A visirt. Je größer demnach der Bogen CB wird, desto größer wird auch der scheinbare Horizont CA, und die Differenz Bn zeigt an, wie viel der um den Bogen BC von C entfernte Punct B unter der horizontalen, durch C geführten Linie liegt; deßhalb nennet man Bn das Gefälle. Dieses finden lehrt jener Theil der Feldmeßkunst, welcher von dem Nivelliren handelt, welches ebenfalls wieder in das gemeine oder geometrische, und in das höhere oder trigonometrische abgetheilt wird. Vermöge des Zweckes dieser Anfangsgründe kann nur von dem erstern hier die Rede seyn, wobey nur die einfacheren Nivellir-Instrumente oder Wasserwagen gebraucht werden.

Man nennt nähmlich jene Instrumente so, durch welche man einen Visir-Strahl in den scheinbaren Ho-

ri-

rizont bringt. Das einfachste ist das bereits erklärte, welches die Schrotwage heißt, und aus einem nach dem gleichschenkeligen Dreyecke geschnittenen Brette besteht, von dessen Spitze ein Senkbley herabhängt, welches den rechten Winkel angibt, so oft es entweder auf den Mittelpunct der untersten Seite trifft, oder mit dem andern Schenkel gleichlaufend ist. In jedem Falle gibt die Richtung der untern Seite, der Grundlinie, die Richtung der Horizontal-Linie an. (Fig. 168.) Mit diesem Werkzeuge, zweyer geraden Latten, und dann der Setzlatte 1.2 kann sehr leicht und sicher der Höhen-Unterschied zweyer, etwa 1 oder 2 Klafter von einander entfernter Puncte A und B angegeben werden. Wäre diese Weite größer, als die Länge der Setzlatte; so müßte das Verfahren wiederhohlt werden. Arbeitet man nicht längs einer Mauer oder einer andern Vertical-Ebene fort; so muß diese vorher ausgesteckt werden. Auch das bereits schon öfter empfohlene Kreuz-Diopter kann als Abwäg-Instrument recht wohl gebraucht werden.

Zu etwas größern Abwägungen, oder um geschwinder fertig zu werden, gebraucht man vortheilhaft die eigentliche Wasserwage. Sie besteht aus einem 2 bis 4 Schuhe langen Rohr von Messingbleche, welches am Anfange und am Ende etwas aufwärts gebogen ist. An diesen Orten sind gläserne Röhren 4 bis 6 Zoll lang und so dick wie das Rohr (die Communications-Röhre) aufgekittet, so daß alles zusammen nur eine Röhre vorstellet. Wenn man nun diese mit Wasser füllet; so kommen die beyden Oberflächen desselben in den vorerwähnten Glas-Röhren in derselben Höhe zum Vorscheine. Vermöge hydrostatischer Grundsätze visirt man nun über diese Oberflächen hin, so ist auch der Visir-Strahl eine scheinbare Horizontal-Linie.

Dieses Instrument hat die vorzügliche Bequemlichkeit, daß es beym Gebrauche keiner Berichtigung bedarf. Doch kann man, selbst bey einem guten Auge nicht weit, etwa nur auf 20 bis 30 Klafter visiren. Auch werden die Oberflächen der beyden Wassersäulen, über welche visirt werden muß, oft von stärker bewegter Luft beunruhigt, die Strahlenbrechung an den Gläsern, und an den Wasserflächen ist auch sehr groß. Anderer Seits ist aber das Werkzeug nicht kostspielig, und kann bald von einem Spängler oder Kupferschmiede verfertigt werden.

Hierüber S. des königl. preuß. geheim. O. Baurathes D. Gilli Pract Anleitung zum Nivelliren. 4. Berlin 1798.

Wenn es nicht um besondere Genauigkeit zu thun ist, oder die abzuwägenden Linien nicht von besonderer Länge sind, leistet diese Art Nivellir-Instrument gute Dienste. Das dazu gehörige Stativ hat meistens 3 Füße, wie jenes des Kreuz-Diopters und des Meßtisches. Sonst behilft man sich mit der schon erwähnten Setzwage, bey der man die Einrichtung anbringt, daß das Senkbley in einer dem Holze eingeschnittenen, mit einem Glasdeckel geschloßenen Vertiefung spielen kann, wodurch es vom Winde weniger beunruhigt wird.

Zu der erst erwähnten Wasserwage, so wie auch zu jeder der folgenden, gehören auch noch zwey Nivellir-Latten. Jede ist entweder $1\frac{1}{2}$, besser 2 Klafter lang, und nach ihrer ganzen Länge in Schuhe, Zolle und Linien eingetheilt. An jeder läßt sich ein vierseitiges Brettchen, das Zielbrett, auf- und abwärts schieben, und in jeder Stelle mittels einer eigenen Schraube, der Stellschraube, fest stellen. Das Brettchen ist durch zwey mit den Seiten desselben gleichlaufende Linien in 4 Zuwei-

len

len nur in 2) gleich große Theile getheilt, deren zwey roth oder schwarz, die andern zwey aber weiß angestrichen sind. Die Abmessungen des Zielbrettes sollen an beyden Nivellir-Latten einerley seyn.

Diese Latten, so wie die hier vorkommenden Abwägungs-Werkzeuge, werden in den Vorlesungen vorgezeigt, und weitläufiger erklärt, wodurch deutlichere Begriffe, als durch die besten Abbildungen, beygebracht werden können.

Außer der vorbeschriebenen eigentlichen Wasserwage hat man noch folgende zwey Gattungen derselben.

An einem starken eisernen Lineale von 2 bis 3 Schuh Länge befinden sich zwey Dioptern, welche nicht so hoch als jene am Diopter-Lineale des Meßtisches, und mit Kreuzfäden versehen sind. In der Mitte der untern Fläche dieses Lineales befindet sich ein anderes kürzeres von Messing, welches mit einem Gewinde versehen ist. Neben diesen ist eine verticale, fein geschnittene Schraube, die Erhöhungs- oder Elevations-Schraube, angebracht.

Auf der obern Fläche dieses Lineales befindet sich die 6 bis 10 Zoll lange, mit Weingeist gefüllte, mit einer Luftblase versehene und am Ende zugeschmolzene Glas-Röhre, die zum Theil in einem eigenen Gehäuse von Messing so angebracht ist, daß sie mittels einer kleinen Schraube, der Rectifications-Schraube, gehörig gestellt werden kann. Das Ganze hat eine eigene Hülfe, welche auf den Zapfen eines 3füßigen Statives paßt.

Ist die Achse der Röhre mit dem Visir-Strahle parallel, und ist sie dabey horizontal, wenn nähmlich die Luftblase in der Mitte zu stehen kommt; so ist der Visir-Strahl auch horizontal.

Um nicht so viele Standpuncte nöthig zu haben, nimmt man längere Visir-Linien, weßhalb statt des Diopter-Lineals ein Fernrohr angebracht wird, das ein Ocular- und ein Objectiv-Glas enthält, in deren gemeinschaft-

lichem Brennpuncte sich ein feines Fadenkreuz, oder ein auf einem dünnen Glasplättchen gezeichnetes Kreuz befinden muß.

Es gibt noch zusammen gesetztere Nivellir-Instrumente, die zu beschreiben hier überflüssig ist. Diese erst beschriebenen Nivellir-Instrumente müssen immer, ehe man damit zu arbeiten anfängt, rectificirt oder berichtigt werden, nähmlich der Visir-Strahl muß in jedem Standpuncte horizontal gemacht werden können.

Dieses geschieht bey der Nivelle mit den Dioptern auf folgende Art.

In einer Entfernung von 30 bis 40 Klafter läßt man eine Nivellir-Latte AB aufstellen (Fig. 165. a), bringt durch die Elevations-Schraube die Luftblase an ihre mittlere Stelle, und läßt die Höhe des Visir-Strahles A1 anmerken. Nun wendet man die Nivelle so um, daß das Diopter gegen die Latte gekehrt ist, bringt dann die Luftblase wieder an ihre mittlere Stelle, und läßt wieder die Höhe des Visir-Strahles A2 bemerken. Sind diese beyden Höhen einander gleich; so war die Nivelle schon berichtigt. Ist das Gegentheil; so weichen die beyden Visir-Strahlen nach entgegen gesetzten Richtungen in derselben Vertical-Ebene b? gleich viel ab.

Daher theilt man den Unterschied 1.2 auf der Latte in zwey gleich große Theile, richtet den Visir-Strahl nach p, und bringt bey dieser Richtung des Dioptern-Lineales die Luftblase mittels der Rectifications-Schraube an ihre mittlere Stelle; so ist das Instrument berichtigt.

Bey der Nivelle mit dem Fern-Rohre geschieht die Rectification auf zweyerley Art. Die einfachere ist diese. Man steckt eine gerade und horizontale Linie PR etwa von 400° ab, (Fig. 165. b), und bestimmt ihre Mitte Q, dann die Mitte S ihrer Hälfte QR. In q und r läßt man die zwey Nivellir-Latten aufstellen, und über S die Nivelle. Von dem diesem Puncte verticalen Puncte C visirt man nach a und nach b, nachdem man jedes Mahl die Luftblase mittels der Elevations-Schraube an die mittlern Stellen gebracht hat. Demnach sind a und b in demselben Horizonte. Dann wird die Nivelle über P gebracht, und von dem mit diesem Puncte verticalen Puncte D nach dem vorbemerkten Puncte b visirt ohne die Stellung der Luftblase

zu

zu berücksichtigen. Bey dieser Richtung läßt man den Punct m bemerken, welchen der Visir-Strahl anzeigt.

Dann überträgt man am von dem Puncte m bis n auf die entgegen gesetzte Seite; so liegen auch die beyden Puncte D und n in derselnen Horizontalen, weil wegen Gleichheit der Wechselwinkel mDn, mba die Linien Db und ab einander parallel sind. Denn die Dreyecke Dmn und bam haben die Seiten am und mn, mb und mD gleich groß, und die Winkel Dmn und bma sind einander gleich, daher sind auch die Winkel mDn und mba einander gleich. Richtet man nun das Fernrohr auf den Punct n, wenn für die Länge PQ die Erhöhung des scheinbaren Horizontes nicht bemerkt werden darf; so ist dadurch der Visir-Strahl in den scheinbaren Horizont gebracht. Endlich wird bey dieser letzten Richtung des Fernrohrs die Luftblase mittels der Rectificir-Schraube an ihre mittlere Stelle gebracht; so ist die Nivelle berichtigt.

Wäre für PQ = 200^{e} die Erhöhung des scheinbaren Horizontes (= 5‴) zu berücksichtigen; so überträgt man diese Erhöhung von dem Puncte n aufwärts, und richtet das Fernrohr auf diesen so gefundenen Punct, und bringt dann mittels der Rectificir-Schraube die Luftblase an ihre mittlere Stelle; so ist das Instrument berichtigt. Der Visir-Strahl wird immer auf den Zielpunct gerichtet, und die Erhöhung des untern Randes des Zielbrettes an jeder Latte bemerkt, wenn das Zielbrett an beyden Latten dieselben Abmessungen hat.

Auf ebenem Boden kann man auch nach dieser Berichtigungs-Methode verfahren. Man stellet nähmlich eine Nivellir-Latte, und 400 bis 500 Schritte davon die Nivelle auf. Ist sie nun in der Lage, daß die Luftblase einspielt; so läßt man auf der Latte die Höhe des Visir-Strahles bemerken. Zieht man von dieser Höhe die Höhe des Instrumentes ab; so hat man den Höhen-Unterschied von dem Standpuncte der Nivelle und dem Standpuncte der Latte. Dann wird diese in den Standpunct der Nivelle, und die Nivelle in den Standpunct der Latte gebracht, und dieselbe Operation wird wiederhohlt. Sind die Höhen-Unterschiede gleich; so war die Nivelle berichtigt: sind sie einander nicht gleich; so trägt man die halbe Summe der zwey so ge-

gefundenen Höhen-Unterschiede auf die Latte, richtet den Visir-Strahl auf den dadurch bestimmten Punct, und bringt dann die Luftblase mittels der Rectificir-Schraube an ihre mittere Stelle. Dadurch ist das Instrument berichtigt, wovon man sich durch das Stellen auf dem andern Puncte überzeugen kann.

Soll das Gefälle der Linie AB (Fig. 169.) gefunden werden; so wird in A die Nivelle, und in B die Nivellir-Latte mit ihrem Zielbrette aufgestellet. Hat die Luftblase eingespielt; so wird durch Visiren und Verschieben des Zielbrettes m die Horizontale mo gefunden. Auch muß do gemessen werden. Dann ist mB—od das Gefälle.

Bey größern Entfernungen, wo der Boden bald steigt, bald fällt, müssen so viele Stationen (Standpuncte) angenommen werden, daß die Visir-Strahlen nicht allzu lange werden, und das vorgezeigte Verfahren wird wiederhohlt. Hierbey ist es sehr bequem, wenn man die Standpuncte A, B, C . . . zwischen den abzuwägenden Puncten 1, 2, 3 u. s. f. annimmt. (Fig. 170.)

In diesem Falle, um Standpuncte zu ersparen, nimmt man (Fig. 166.) den Ptandpunct P zwischen den abzuwägenden Puncten A und C. Sind nun die Linien AD, PO und CE Verticale, DE der scheinbare Horizont, AC ein Bogen des großten Kreises der Erde, und BC die zu messende Hohe; so ist diese = AD — BE. (Fig. 167.) Denn denkt man sich (Fig. 166. durch O den wahren Horizont FOG, durch B den wahren Horizont BH, durch A den wahren Horizont AC; so ist FD = GE, weil die Puncte P in der Mitte zwischen den Verticalen AD und BE angenommen, und in gleichen Entfernungen die Erhöhungen des scheinbaren Horizontes gleich groß sind. Wegen der concentrischen Kreisbogen als der wahren Horizonte sind die Theile HF, BG, HA, BC, AF, CG einander gleich, also ist auch AF + FD = CG + GE oder AD = CE; weil aber CE — BE = CB ist; so ist auch AD — BE = CB. Daher bekommt man den Höhen-Unterschied zweyer Puncte, wenn die Nivelle in der Mitte dieser Puncte aufgestellet wird, und man zieht von dem gemessenen Abstande AD den andern gemessenen Abstand BE ab, welche Abstände durch die in A und B befindlichen Gehülfen auf den schon erwähnten Ni-

vel-

vellir-Latten bemerkt werden. Die Gehülfen haben diese Latten möglich senkrecht zu halten, das Zielbrett nach den ihnen vom Standpuncte aus gegebenen Zeichen nur nach und nach um etwas weniges zu senken oder zu heben. Wäre der Boden mit Gras bewachsen, oder mit kleinen Steinen (Schotter) bedeckt; so müßten die Nivellir-Latten nicht gerade zu auf den Boden gesetzt werden. Man setzt sie auf ganz in die Erde getriebene kleine Pflöcke, welche meistens mit Nummern oder Buchstaben bezeichnet sind.

Da BE kleiner als AD ist; so liegt der Punct B um CB höher als der Punct A, welcher Rest AD — BE mit dem ihm vorgesetzten Zeichen +, im entgegen gesetzten Falle mit dem ihm vorgesetzten Zeichen — bezeichnet wird.

Wäre P nicht in der Mitte; so müßte man für PM und PC, oder ON und OE die Erhöhung des scheinbaren Horizontes QN und GE besonders bestimmen, weil dießfalls diese zwey Längen einander nicht gleich seyn können. Hat man sie nun berechnet; so wird der Unterschied MN—QN und BE—GE angemerkt, wodurch man die verbesserten Höhen MQ und BG erhält. Der Rest MQ—BG=BC=RM gibt den Höhen-Unterschied der Puncte M und B. Es ist demnach nothwendig für die gemessenen Weiten ON und OE die Erhöhungen des scheinbaren Horizontes zu bestimmen. Dieses lehrt die Folgende Tabelle.

Entfernung.	Erhöhung des scheinbaren Horizontes.	Entfernung.	Erhöhung des scheinbaren Horizontes.	Entfernung.	Erhöhung des scheinbaren Horizontes.	Entfernung.	Erhöhung des scheinbaren Horizontes.
0	‴	0	‴	0	‴	0	‴
50	0,3	240	7,4	430	23,8	620	49,5
60	0,5	250	8,0	440	24,9	630	51,1
70	0,6	260	8,7	450	26,1	640	52,7
80	0,8	270	9,4	460	27,2	650	54,4
90	1,0	280	10,1	470	28,4	660	56,1
100	1,3	290	10,8	480	29,7	670	57,8
110	1,6	300	11,6	490	30,9	680	59,5
120	1,9	310	12,4	500	32,2	690	61,3
130	2,2	320	13,2	510	33,5	700	63,1
140	2,5	330	14,0	520	34,8	710	64,9
150	2,9	340	14,9	530	36,2	720	66,7
160	3,3	350	15,8	540	37,5	730	68,6
170	3,7	360	16,7	550	38,9	740	70,5
180	4,2	370	17,6	560	40,4	750	72,4
190	4,6	380	18,6	570	41,8	760	74,3
200	5,1	390	19,6	580	43,3	770	76,3
210	5,7	400	20,6	590	44,8	780	78,3
220	6,2	410	21,6	600	46,3	790	80,3
230	6,8	430	22,7	610	47,9	800	82,4

Zur Berechnung des scheinbaren Horizontes in jedem Falle setzt man: Das Quadrat von 200 Klaftern verhält sich zu dem Quadrate der in Klaftern gegebenen Entfernung, wie 5 Linien zur gesuchten Erhöhung in Linien. Z. B. man wollte die scheinbare Erhöhung des Horizontes für die Weite von 225° berechnen; so ist der Ansatz

$200^2 : 225^2 = 5''' : x'''$ d. i. $40000 : 50625 = 5 : x$

woraus $x = \frac{50625 \cdot 5}{40000} = \frac{50625}{8000} = 6,\ 4'''$ beynahe folgt.

Die

Die Verfertigung der erst angeführten Tabelle und die Herleitung dieser Regel folgt größten Theils aus §. XXXII. und dem Vorigen (Fig. 164.)

Soll der Höhenunterschied zweyer Puncte A und B, (Fig. 170.) die so weit von einander entfernt sind, daß man aus einem einzigen Zwischenpuncte nicht nach jedem visiren kann, gefunden werden; so bemerkt man mittels mehrerer Pflöcke verschiedene Zwischenpuncte A, B, C, D u. s. f. Die Nivellir-Latten kommen nach A und C, die Nivelle nach Nro. 1. beyläufig in die Mitte. Dann bringt man den Visir-Strahl in den scheinbaren Horizont gegen F und gegen G. Jeder Gehülfe bemerkt die Visir-Höhe an seiner Latte. Dann geht der in C gewesene Gehülfe mit seiner Latte nach D, und der von A nach C, die Nivelle kommt nach Nro. 2. Hier bemerkt ebenfalls jeder Gehülfe die Visir-Höhe auf seiner Latte. Dasselbe gilt für den Standpunct in Nro. 3. Endlich addirt jeder Gehülfe seine Visir-Höhen. Die kleinere Summe wird von der größern abgezogen; der Rest ist der verlangte Höhen-Unterschied der Puncte A und B.

Wäre die Summe der Visir-Höhen des vorhergehenden Gehülfen kleiner, als die Summe des folgenden, so läge B um den gefundenen Unterschied höher als A.

Denn die Summe der ersten Visir-Höhen in den Puncten A, C, D ist AF + CH + DK, die Summe der zweyten CG + DI + BL; nun aber ist AF — CG = Cc, CH — DI = Dd und DK — BL = — Dm. (Da DK < BL ist; so setzt man dem Reste Dm das Zeichen — vor.) Also ist auch AF + CH + DK — (CG + DI + BL) = Cc + Dd — Dm = dQ + dD — dm = DQ — Dm = Qm = bB = Ap, wenn Ab die Horizontale des Punctes A, und Bp die Horizontale des Punctes B, also mit der ersten gleichlaufend ist.

Es ist nicht unumgänglich nothwendig, daß immer in derselben Vertical-Ebene, so wie beym Ausstecken der Linien gearbeitet werde. Man bekommt den verlangten Höhen-Unterschied der Puncte A und B, wenn man wegen Hindernisse, die zwischen A und B liegen, die Standpuncte nicht in der durch A und B gehenden Vertical-Ebene nehmen kann.

Soll auch noch der ganze Durchschnitt der abgewogenen Strecke dargestellet, d. i. ein Niveau oder ein Nivellirungs-Plan verfertigt werden; so ist eine eigene Tabelle dazu nöthig. Das Verfahren ist folgendes. (Fig. 170. b). Zwischen den gegebenen Puncten A und B wird eine Gerade (verticale Ebene) abgesteckt.

Die in derselben befindlichen, der Höhe nach besonders von einander verschiedenen Puncte werden durch eingeschlagene kleine, mit Nummern oder Buchstaben bezeichnete Pflöcke bemerkt. Dann werden nach den vorigen Aufgaben alle Puncte abgewogen, und die auf der einen Latte X erhaltenen Höhen in die 1. Colonne geschrieben, die von der Latte Y kommen in die 2. Colonne. In die 3. Colonne schreibt man die Summe der Höhen, wie sie auf der Latte X nach einander folgen, eben so in die 4. Colonne jene für die Latte Y. Jede Summe der Latte Y zieht man von der gegenüber stehenden Summe der Latte X ab. Ist nun eine Summe bey X größer als eine Summe bey Y; so erhält man einen Rest, dem entweder kein Zeichen oder das Zeichen + vorgesetzt wird. Im Gegentheil ist die Summe bey Y größer als die bey X; so wird dem Reste das Zeichen — vorgesetzt. Die mit + bezeichneten Reste schreibt man in die 5., die mit — bezeichneten Reste in die 6. Colonne. Die Horizontal-Abstände zweyer Puncte kommen in die 7. Colonne.

Visir-Höhen.		Summen.		Reste.		Horizontal-Abstände.
Latte X	Latte Y	Latte X	Latte Y	+	−	
Af = 10′ − 6′	Ce = 5′ − 4″	Af = 10′ − 6′	Ce = 5′ − 4″	Cg = 5′ − 2″		Ag = 24′ − 6″
Cd = 2′ − 0″	Ih = 8′ − 6″	+ cd = 12′ − 6″	+ Ih = 13′ − 10″	— — —	IK = 1′ − 4″	gK = 18′ − 4″
Il = 6′ − 4″	Mn = 5′ − 6″	+ Il = 18′ − 10″	+ Mn = 19′ − 4″	— — —	Mr = 0′ − 6″	Kr = 20′ − 10″
Mo = 8′ − 8″	Bp = 4′ − 10″	+ Mo = 27′ − 6″	+ Bp = 24′ − 2″	Bb = 3′ − 4″		rb = 36′ − 8″
						Ab = 100′ − 4″
u. s. f.	u. s. f.					

Aus einer solchen Tabelle wird der Nivellirungs-Plan leicht gezeichnet. In dem jetzt angeführten Beyspiele würde man eine Gerade = Ab = 100′ — 4″ ziehen. Diese ist die Summe der Horizontal-Abstände. Auf dieser Linie bemerkt man die Abstände Ag, gk, kr; der letzte rb = 36′ — 8″ gibt sich von selbst. In den dadurch erhaltenen Puncten g, k, r, so wie am Anfangspuncte A, und am Endespuncte b werden Senkrechte von unbestimmter Länge errichtet, wovon auch einige unterwärts verlängert werden. Auf diese Senkrechten werden die erhaltenen Reste getragen, nähmlich der mit + bezeichnete Rest Cg von g bis C; der mit — bezeichnete Rest IK von K bis I abwärts; eben so Mr von r bis M, endlich Bb von b bis B aufwärts, wo also durch + die oberhalb der Horizontal-Linie, durch die unterhalb derselben liegenden Puncte angezeigt werden.

Zieht man also durch die Puncte A, C, I, M, B . . . u. s. f. eine Linie; so erhält man den Durchschnitt der abgewogenen Erd-Oberfläche. Hiervon macht man sich schon während des Nivellirens selbst einen Entwurf aus freyer Hand, in welchem, wenn es die Gegend erfordert, auch die rückwärts befindlichen Gegenstände, Bäume, Häuser u. d. gl. bemerkt seyn sollen.

Wollte man die Horizontal-Abstände und die Höhen oder Tiefen von einerley Maßstabe nehmen; so würden in den meisten Fällen, z. B. bey Straßen-Bau-Anträgen u. dgl. m. die Niveau-Risse etwas unbequem ausfallen, und ihrer großen Länge wegen keine gute Übersicht gewähren. Z. B. Sollte in dem vorigen Beyspiele 1 Linie für 1 Zoll gelten; so würde der in (Fig. 170. b) angezeigte Plan 1° — 28″ — 4‴ lang werden, daher keine bequeme Übersicht gewähren. Man nimmt daher gern zweyerley Maßstäbe, einen für die Höhen und Tiefen, einen für die Distanzen. Dieses gibt zuweilen dem Niveau-Plane ein sonderbares, gleichsam verzerrtes Ansehen. Gewöhnlich sind die vorerwähnten Dimensionen, Tiefen, Höhen und Horizontal-Längen schon cotirt, ihnen ihre Längen beygesetzt. Dadurch wird das Messen erspart, und der Plan mehr geschont.

Das

Daß bey der erst angeführten Auflösung auch statt der Nivelle die (Fig. 168.) erklärte Setzwage gebraucht werden kann, ist für sich klar.

Sollten die Horizontal-Abstände beträchtliche Längen haben; so wird auch auf die Erhöhung des scheinbaren Horizontes Rücksicht genommen.

Die Anwendungen des Nivellirens sind äußerst wichtig, bey der Anlegung neuer Straßen, bey der Reparatur schon bestehender, bey der Regulierung der Flüsse, bey der Anlegung verschiedener Wasser-Bauwerke, als Dämme, Schleußen u. d. gl. Bey dem Bau hydraulischer Maschinen, Mühlen, Springbrunnen u. d. gl., bey den Röhrenleitungen überhaupt, bey dem Bau längerer Mauern auf unebenem Boden, endlich wenn gewisse Vertiefungen, Gräben ausgefüllet, oder gewisse Anschüttungen gemacht werden sollen u. s. f. ist ein verläßliches Abwägen eine unentbehrliche Sache.

Die Anführung der dießfalls nöthigen Beyspiele wäre für den gegenwärtigen Zweck zu weitläufig. Theils in den Vorlesungen, wenn es die Zeit erlaubt, theils auf dem Felde wird dieser Gegenstand näher betrachtet werden; deßhalb nur Folgendes noch zu merken ist.

Es sey z. B. ein Punct A gegeben (Fig. 167.) Man verlangt in einer Verticalen, z. B. über B, einen mit A gleich hohen Punct. Bey Anschüttungen und Abgrabungen kann diese Aufgabe sehr oft vorkommen. Ihre Auflösung ist nicht schwer. Denn sind in A und B Gehülfen mit Nivellir-Latten, und in der Mitte C die Nivelle; so erhält man leicht den horizontalen Visir-Strahl DE. Dann mißt man die Abstände AD und BE, welche in den Nivellir-Latten ohne dieß erscheinen. Hieraus erhält man $Aa = aD - AD = BE - AD = bE$. Wollte man nun in der Verticalen BM einen Punct m, der um eine gewisse Länge etwa tiefer als der Punct A läge; so sucht man zuerst den Punct b, welcher mit dem gegebenen Puncte A gleich hoch ist, und überträgt dann auf die Latte AM von b nach m oder n die gegebene Länge; so hat man einen Punct m oder n bestimmt, der um eben diese Länge tiefer liegt, als der gegebene Punct A. Auf ähnliche Art ist vorzugehen, wenn

der

der zu bestimmende Punct über dem Horizonte des Punctes A stehen sollte.

Das Verfahren wäre nur etwas zusammen gesetzter, wenn es sich ereignen sollte, daß der Visir-Strahl unter den Punct A treffen sollte. Entweder durch mehrere Standpuncte, oder durch Beyziehung der Setzwage und Latte könnte auch dießfalls das Verlangte leicht bewerkstelligt werden.

Diese Aufgabe ist von sehr großem Nutzen. Denn soll einer Linie ein gewisses Gefälle oder eine gewisse Steigung gegeben werden; so ist dieses alle Mahl sehr leicht, wenn zuerst ein horizontaler Visir-Strahl vorhanden ist, und man weiß, wie groß das Gefälle für 1°, oder wie bey Wasserleitungen für gewisse Längen, z. B. für 100, seyn soll. In diesen Fällen ist meistens die Länge und die Lage der Geraden schon gegeben, in welcher die Operation vorgenommen werden muß.

Eine andere Anwendung des Nivellirens, ist diese.

Es sey z. B. der Inhalt (Cubic-Inhalt) eines Erdkörpers zu berechnen, mit welchem man eine Grube auszufüllen hat. Man nimmt einige Puncte A, B, C, D u. s. w. derselben an (Fig. 171.), und erhält dadurch ein unregelmäßiges Vieleck ABCDE... welches, wenn es nicht groß ist, nach den bereits erklärten einfachen Methoden ohne Instrumente, ist es aber größer, mit dem Meßtische aufgenommen werden muß. Dann theilt man die ganze Fläche in Dreyecke ein, nähmlich Agb, Bgc, Cgh, ChD u. s. f., bestimmt durch Nivelliren die Tiefen der Puncte, und berechnet den Inhalt eines jeden der erst genannten Dreyecke. Aus Gründen, welche erst in der folgenden Abtheilung, in der Stereometrie, aus einander gesetzt werden können, findet man die Cubic-Inhalte dreyseitiger, am Ende schief abgeschnittener Körper, in welche man sich den ganzen Raum der Grube getheilt denkt. Es werden dieser Körper, dieser Prismen, so viele seyn, als man Dreyecke erhalten hat; daher kann man sich auch dem wahren Inhalte der Grube sehr nähern. Die meisten dieser Prismen werden dreyerley Höhen haben; daher wird man eine mittlere Provortional-Höhe zu berechnen haben, welche mit der Grundfläche multiplicirt

den Körper-Inhalt eines Prisma gibt. Die Summe dieser Inhalte ist der Inhalt der Grube, zu dem noch ein gewisser Theil, etwa der 3. oder 4., addirt werden muß um die Menge der nöthigen Erde zu erhalten, da diese durch das nach und nach erfolgende Zusammenrücken ihrer Theilchen, durch das Setzen, später einen kleinern Raum als den berechneten füllen, also oberwärts eine Leere lassen würde.

Anweisungen zum Nivelliren.

a. Sturm Abhandlung vom Nivelliren. Augsb. 1715.

c. Picard Traité du nivellement. Paris. 8. (mehrere Auflagen).

c. Dasselbe Deutsch mit Zusätzen von Lambert. Berlin 1770. 8.

d. Müller vom Nivelliren. Leipzig. 1805. 8.

II. Abtheilung.

Die Stereometrie.

Anfangsgründe der körperlichen Geometrie (der Stereometrie).

§. I.

Einleitung. Von Linien und Ebenen. Grundsätze.

Unter einem geometrischen Körper versteht man überhaupt einen nach der Länge, Breite, und Tiefe (Höhe, Dicke) ausgedehnten, an allen Seiten begränzten Raum (Körperfiguren). Die eckigen Körper werden von ebenen, die runden gänzlich oder zum Theil von gekrümmten Flächen begränzt.

Man nennt Räume leer, in welchen nichts Körperliches ist, und das Körperliche, was den Raum füllt, ist das, was man Masse oder Materie heißt. Die Masse wird immer einen Raum einnehmen, ist aber mit diesem nicht zu verwechseln, und kein Gegenstand geometrischer Untersuchungen, weil diese bloß Räume, nicht aber Massen, Materien, Gewichte, Dehnbarkeit u. s. f. betreffen, welche Eigenschaften der Körper in die Naturlehre gehören.

Die Grundsätze der Stereometrie sind:

1. Eine gerade Linie liegt entweder ganz in einer Ebene, oder sie ist derselben parallel, in welchem Fal-

Falle alle Normalen zwischen der Linie und der Ebene, alle Abstände, gleich groß sind; oder die gerade Linie nähert sich der Ebene auf einer Seite, und entfernet sich von der anderen Seite. Werden in diesem Falle entweder die Linie oder die Ebene verlängert; so haben sie einen Berührungspunct.

Liegen also zwey Puncte einer Geraden in einer Ebene, so liegt die ganze Gerade in derselben Ebene.

Kein Theil dieser Geraden kann also außer der Ebene liegen, während ein anderer Theil in der Ebene liegt.

Der Durchschnitt zweyer Ebenen ist eine gerade Linie; denn wenn man zwey Puncte des Durchschnittes mit einer Geraden verbindet, so muß diese in jeder Ebene liegen.

2. Durch wie viel immer in derselben Richtung liegende Puncte, durch jede Gerade, können so viele Ebenen geführet werden, als man will.

3. Durch zwey, entweder mit einander parallele oder zusammenlaufende Gerade, durch 3 nicht in derselben Richtung liegende Puncte, durch die 3 Seiten eines geradlinigen Dreyeckes kann eine, und zwar eine einzige Ebene gelegt werden.

4. Entweder sind zwey Ebenen mit einander parallel, immer in gleichem Abstande von einander, oder sie sind es nicht. Im letzteren Falle berühren oder durchschneiden sie sich verlängert in einer Geraden.

Werden also zwey oder mehrere mit einander parallele Ebenen mit einer Ebene geschnitten; so sind die Durschnitts-Linien unter sich parallel.

Weil parallele Ebenen sich nie treffen; so werden sich auch ihre Durchschnitte nicht treffen.

Zwey Gerade GI, KM werden von parallelen Ebenen AB, CD, EF in demselben Verhältnisse in H, L geschnitten. (Fig. 1.)

Denn wird aus dem Puncte K eine Parallele KO gezogen mit GI, welche die Ebene CD, EF in N und O schneidet; so sind die Durchschnitte GK, HN und IO unter einander parallel; so wie auch NL und OM als die Durchschnitte der Fläche OKM. In den Parallelogramme KGNH, HNOI werden die Seiten KN, NO den Seiten GH, HI gleich seyn. Weil LN mit MO parallel ist; so ist KL : LM = KN : NO = GH : HI.

§. II.

Die gemeinnützigsten Sätze von den Lagen der Ebenen u. s. f.

Eine Gerade ist einer Ebene senkrecht, ihr normal, wenn sie auf allen durch den Berührungspunct der Ebene gezogenen, in dieser liegenden Geraden senkrecht ist. (Mit ihnen rechte Winkel macht.)

Zwey oder mehrere Gerade können also nicht zugleich auf einer Ebene in demselben Puncte ihr normal seyn, außer nach entgegen gesetzter Richtung, da sie dann nur eine Gerade ausmachen.

Denn wird durch die beyden der Ebene senkrecht seyn sollenden Geraden eine Ebene gelegt; so wird diese der ersteren Ebene in einer Geraden begegnen, und es müßte der spitzige oder stumpfe Winkel, welcher die eine der als senkrecht angenommenen Geraden mit dem Durchschnitte macht, so groß als der rechte Winkel seyn. (Fig. 2.)

Sind zwey Ebenen einer Geraden normal, so sind sie auch unter sich parallel, und ist eine Gerade einer Ebene normal; so ist sie auch allen dieser Ebene parallelen Ebenen normal. (Fig. 3.)

Trifft

Trifft die Gerade AB die zwey Ebenen 1,2 und 3,4 in den Puncten A und B, und man zieht eine andere Gerade CBD in einer der beyden Ebenen; so kann man durch diese eine Ebene CDEF führen, welche die erstere Ebene in der Geraden EAF berühret. Ist AB beyden parallelen Ebenen normal; so sind BAF und ABC rechte Winkel, also AE mit BD parallel. Daher läuft keine Gerade der zweyten Ebene mit der erstern Ebene zusammen, mithin treffen sich nie die Ebenen selbst. Sind die Ebenen mit einander parallel, und AB der ersten normal; so wird BD der AE parallel seyn, daher wird AB, welche mit AE rechte Winkel macht, auch mit BD rechte Winkel machen, deßhalb ist sie auch allen Geraden der anderen Ebene normal, welche durch B gehen, daher ist sie auch dieser Ebene selbst normal.

§. III.

Fortsetzung der im vorigen §. enthaltenen Sätze.

Wenn (Fig. 4.) eine Gerade AC im Durchschnitte zweyer anderen Geraden BD, EF, welche in einer Ebene liegen, diesen normal ist; so wird sie auch allen andern durch diesen Punct gezogenen Geraden, und der Ebene selbst normal seyn.

Zieht man durch den Punct C eine Gerade GCH, die in G und H jene Linien berühret, welche die Geraden BD, EF verbinden, so daß CD = CB, CF = CE ist, so entstehen vierzehn Dreyecke, welche paarweise gleich groß sind. Nähmlich: BCE = DCF, BCA = DCA, ECA = FCA, BAE = DAF, BCG = DCH, ABG = ADH, und ACG = ACH. Nun sind ACG und ACH gleiche Winkel, und AC der GH senkrecht; mithin ist sie auch senkrecht der ganzen Ebene.

Wenn (Fig. 5.) aus irgend einem Puncte C einer Geraden AC mehrere z. B. drey, auf sie Normale CB, CD, CE

CE gezogen sind; so sind diese Linien in derselben Ebene.

Denn würde eine Ebene EH durch die beyden Geraden CE, CD gelegt; so würde die dritte Linie CB in derselben Ebene liegen. Führete man die Ebene GC durch die Puncte A, C, B, welche die erste Ebene in der Geraden CF antreffen könnte, so wäre die Gerade AC den beyden Geraden CD, CE und auch CF normal; daher der Winkel ACF = ACB, nähmlich ein Theil wäre so groß als das Ganze.

Bewegt sich (Fig. 6.) die auf MN Normale CA so herum, daß MN unbeweglich ist; so entsteht dadurch eine auf MN normale Ebene.

Denn werden in dieser Ebene zwey Gerade aus C und noch eine dritte gezogen; so wird diese in derselben Ebene mit jener liegen, da alle drey zusammen mit der Geraden MCN rechte Winkel machen.

Durch jeden gegebenen Punct kann eine Ebene unter einem rechten Winkel auf eine gegebene Gerade MN geführet werden. (Fig. 6.)

Es sey der gegebene Punct C in derselben Geraden. Führt man durch diese die beyden Ebenen MQ, MN und in diesen zwey Normale auf MN, nähmlich CA, CB; so wird die durch ACB geführte Ebene nach dem Vorigen auf MN normal seyn, welche mit AC, BC rechte Winkel macht.

Wäre der gegebene Punct A außer der Geraden MN, so zieht man AC auf sie unter einem rechten Winkel, da in jeder andern Ebene MQ, die durch MN und nicht durch A geht, auch die Gerade CB auf MN normal seyn wird. ABC ist die verlangte Ebene.

Ist (Fig. 7.) Eine von zweyen mit einander parallelen Geraden AB, CD einer Ebene normal; so

ist

ist es auch die andere, und sind zwey Gerade einer Ebene normal, so sind sie mit einander parallel.

Denn wird in der durch AB und CD geführten Ebene, welche in AC die gegebene trifft, CB nach einem angenommenen Puncte B in der ersten gezogen; so ist in dieser die Gerade CE auf CA normal, und AB gleich. Werden die Geraden AE, BE gezogen; so sind die Seiten oder Grundlinien CB, AE der Dreyecke CAB, ECA gleich groß, vermöge der Voraussetzung. In den Dreyecken ECB, EAB ist der Winkel BCE dem rechten Winkel BAE gleich. Da ACE auch ein rechter Winkel, also EC normal auf CA ist; so wird CE auch normal auf CD seyn. Deßhalb ist auch CD auf CA normal; es muß auch CE der ganzen Ebene ACEF normal seyn.

Wären beyde senkrecht, und man führet durch sie die Ebene BACD; so werden die beyden inneren Winkel BAC, ACD zusammen zweyen rechten gleich, AB mit CD parallel seyn.

Gerade FO, GQ, welche derselben Linie MN parallel sind, sind mitsammen parallel, auch wenn sie nicht in derselben Ebene liegen. (Fig. 6.)

Denn wird durch was immer für einen Punct C der Geraden MN eine auf sie normale Ebene ACB geführet, so werden FO und QG dieser Ebene normal deßhalb mitsammen parallel seyn.

Wären (Fig. 8.) zwey Gerade CD, CB zweyen anderen Geraden, AE, AI, welche in einer anderen Ebene liegen, parallel; so sind die Winkel DCB, EAI, welche sie mitsammen machen, gleich groß.

Denn wird CD = AE, CB = AI gemacht, und CA, DE, BI gezogen; so liegen CB, AI in derselben Ebene. Da sie gleich groß sind; so sind auch CA, BI gleich groß und mit einander parallel. Dasselbe gilt von DE, CA. Daher werden auch DB und EI gleich und gleichlaufend seyn; deßhalb sind auch die Winkel C und A der Dreyecke DCB, EAI gleich groß.

Wenn

Wenn zwey Ebenen IACB, EACD, welche sich in AC berühren, von zweyen mit einander parallelen Ebenen DCB, EAI geschnitten werden; so sind die Winkel DCB, EAI der Durchschnitte gleich groß.

Denn die Durchschnitte CD, AE und CB, AI mit den parallelen Ebenen sind unter sich parallel.

Aus einem gegebenen Puncte außer, oder innerhalb einer Ebene kann nur eine einzige Normale auf die Ebene geführet werden. (Fig. 9.)

Ist A der Punct außer der Ebene, und man zieht eine Gerade MN in der Ebene; so wird aus A die Gerade AB gezogen; da BC auf MN in der Ebene normal ist, auf welche aus A die der Ebene Normale AC geführt wird. Denn MN ist der Ebene AIBC normal. Wird die mit MN Parallele DCE gezogen, so ist diese derselben Ebene normal, daher auch auf AC. Da AC auf BC normal ist, vermöge der Construction, so ist sie der ganzen Ebene MNED normal.

Ist B in der Ebene, so wird ein Punct A außer derselben angenommen, und die Normale AC gezogen. Dann wird in der Ebene BCAI aus B die mit CA Parallele gezogen, welche der Ebene normal seyn wird.

Wären die beyden Geraden AB, AC derselben Ebene normal, und zwar aus demselben Puncte A außer der Ebene; so würde das Dreyeck ABC zwey rechte Winkel haben. Man kann also nur eine Normale von einem Puncte auf eine Ebene führen. Daß auch nur eine Normale aus einem gegebenen Puncte in der Ebene errichtet werden kann, ist aus dem Vorhergehenden klar.

Durch einen gegebenen Punct, oder durch eine gerade einer Ebene Parallele kann eine dieser Ebene parallele Ebene geführet werden.

Ist der Punct C gegeben (Fig. 8.) und aus diesem die Normale CA auf die gegebene Ebene gezogen; so zieht man AE, AI und CB, CD diesen parallel; die Ebene DCB wird der gegebenen Ebene parallel seyn.

Denn

Denn CA ist den Geraden AE, AI normal, deßhalb auch den Geraden CB, CD, und der Ebene DCB, welche der Ebene EAI parallel ist.

Ist eine der Ebene parallele Linie gegeben, und es wird in ihr ein Punct C angenommen, so wird durch diesen eine mit der gegebenen Ebene parallele Ebene geführt, und in dieser wird die parallele Linie liegen. Wäre sie nicht in der parallelen Ebene, so würde sie sich der gegebenen Ebene nähern, oder davon entfernen.

Sind (Fig. 6.) zwey Gerade CA, CB, welche in einem Puncte C zusammen kommen, zweyen anderen DE, DH, die sich in D berühren, parallel; und alle vier liegen nicht in derselben Ebene; so ist die durch die ersten geführte Ebene der durch die zweyten geführten Ebene parallel.

Aus C werde die der Ebene EI Normale CN gezogen, aus dem Berührungspuncte N die mit den in der gegebenen Ebene liegenden Geraden DE, DH Parallelen NO, NQ, welche auch mit CA, CB parallel sind, CNQ, CNO werden rechte Winkel seyn, deßhalb auch NCB, NAC; daher ist auch die Ebene ABC auf CN normal. Da diese Gerade auf der Ebene ONQ normal ist, so ist die Ebene ACB der Ebene EI parallel.

§. IV.

Von den Neigungswinkeln der Ebenen. Fortsetzung der in dem vorigen §. enthaltenen Sätze.

Der Winkel, welchen zwey sich in einer Geraden berührende Ebenen bilden, d. i. die Neigung einer Ebene gegen eine andere, ist der Winkel, den die zwey geraden Linien mit einander machen, welche in den Ebenen auf die Berührungslinie unter rechten Winkeln

keln gezogen sind. Ist dieser Neigungswinkel ein rechter Winkel; so sagt man, eine Ebene sey der andern senkrecht, oder normal.

Werden (Fig. 8.) in zwey Ebenen CI, AD aus was immer für einem Puncte C des Durchschnittes CA zwey auf diesen Normale CB, CD geführet; so ist der Winkel DCB das Maß der Neigung der beyden Ebenen.

Es ist nähmlich (nach dem Vorigen) die Ebene BCD, auf CA normal, welche es auf CB, CD ist, die in einer Ebene liegen.

Auf jede Gerade, was immer für einer Ebene, kann eine Ebene geführet werden, welche mit der ersten einen gegebenen Winkel macht.

Liegt CA in der Ebene DCAE, und man zieht in dieser eine Gerade CD auf CA normal; so wird die in der auf CA normalen Ebene gezogene Gerade CB den gegebenen Winkel DCB bilden, und BCAI wird die verlangte Ebene seyn.

Eine Ebene macht mit einer anderen Ebene, die sie berührt, zwey Winkel, welche zusammen zweyen rechten gleich sind (180° enthalten); und schneiden sich zwey Ebenen, so sind die an dem Durchschnitte entgegen gesetzten Winkel (die Scheitel- oder Vertical-Winkel) einander gleich.

Eine auf den Durchschnitt zweyer Ebenen senkrechte Ebene bestimmt daher den Scheitelwinkel. Schneidet eine Ebene zwey mit einander parallele Ebenen, so gilt von den dadurch entstandenen Winkeln dasselbe, was von den Wechselwinkeln der Linien gesagt wurde.

Eine Ebene, welche durch eine einer zweyten Ebene normale Gerade geführet wird, ist dieser Ebene normal. (Fig. 9.)

Ist AC normal auf die Ebene EDMN, welche von der Ebene ACBI in BC geschnitten wird, und man zieht DE normal auf BC, welche mit AC rechte Winkel macht; so wird, dem Vorigen gemäß, die Ebene ACD darauf normal seyn, und der Winkel ACD ist das Maß der Neigung der Ebenen BD, CI. Da dieser ein rechter Winkel ist, so ist auch eine Ebene der andern normal.

Berühren zwey Ebenen einander unter rechten Winkeln, so wird jede Gerade, die einer dieser Ebenen normal ist, und die Durchschnittslinie berühret, in der andern Ebene liegen, die auf diesen Durchschnitt Normale in der ersten Ebene liegende Gerade ist der zweyten Ebene normal, und wenn aus irgend einem Punkte der ersten auf die zweyte eine Normale errichtet wird; so liegt diese ganz in der zweyten, und fällt in den Durchschnitt der Berührungslinie.

Es sey BC der gemeinschaftliche Durchschnitt, und werden die Ebenen mit einer auf ihren Durchschnitt normalen Ebene geschnitten, die Durchschnitte seyen CA, CD; so wird CA auf CD normal, und der Neigungswinkel ACD ein rechter Winkel seyn. Weil CA der Ebene DN normal ist, so muß jede in dem Durchschnitte C der Ebene DN Normale mit CA zusammen fallen, die in der Ebene BA liegt.

Da ferners CA der Ebene DN und dem Durchschnitte BC normal ist, so liegt sie in der Ebene BA. Jede Gerade in dieser Ebene, dem Durchschnitte normal, aus irgend einem Puncte A gezogen, fällt mit CA zusammen, ist also der Ebene ND normal.

Endlich wird eine Gerade aus irgend einem Puncte A der Ebene BA, welche auf der Ebene DN normal ist, vermöge des Vorigen mit AC zusammen fallen, daher in der Ebene BA liegen.

Der Durchschnitt zweyer auf eine dritte Ebene normalen Ebene ist dieser Ebenen normal; denn die aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte auf die dritte Ebene Normale wird in jeder der beyden an-

deren Ebenen seyn, daher mit dem Durchschnitte dieser zusammen fallen.

Durch jeden Punct, oder durch jede Gerade einer Ebene normale können so viele der ersten Ebene normale Ebenen geführet werden, als man will.

Denn man kann durch jeden gegebenen Punct eine Gerade AC führen, einer Ebene normal, in der aus dem Puncte C unendlich viele Gerade CB gezogen werden können, und alle Ebenen ACBI werden durch den gegebenen Punct und die Gerade AC gehen, sie werden der gegebenen Ebene normal seyn.

Durch zwey, nicht in einer Geraden, welche der Ebene normal ist, liegende Puncte, oder durch eine der Ebene nicht normale Gerade kann man immer eine, jedoch nur eine einzige, der ersten Ebene normale Ebene führen.

Es seyen die gegebenen Puncte A und I oder die Gerade AI. Aus irgend einem ihrer Puncte A kann eine Gerade AC der gegebenen Ebene normal gezogen werden, und eine durch sie geführte Ebene ACBI wird der gegebenen Ebene normal seyn.

Weil aber die Gerade AC in jeder Ebene liegen kann, welche der gegebenen Ebene normal ist, und durch A geht, durch die Puncte C, A, I aber nur eine einzige Ebene gehen kann, so kann auch nur eine einzige der ersten Ebene normale Ebene durch die Puncte A und I, oder durch die Gerade AI geführet werden.

Diese sind die wichtigsten Sätze von den Lagen der Linien und Ebenen. Eine weitere Ausführung dieser Lehren findet man in verschiedenen älteren und neueren weitläufigern Lehrbüchern der Geometrie. Man würde diese Sätze hier nicht aufgenommen haben, wenn sie nicht so vielen Nutzen im Feldmessen, in der Lehre vom Schatten und Lichte, in der Perspective und in der Verfertigung verschiedener Modelle hätten.

§. V.

§. V.

Von den Körperwinkeln. Einige Anwendungen der vorhergehenden Sätze.

Ein körperlicher Winkel, Körperwinkel, ist ein Winkel, den mehr als zwey gerade Linien machen, welche alle in einem Puncte zusammen kommen, und davon zwey und zwey in einer andern Ebene liegen. So z. B. bildet jede Ecke eines Zimmers, an einem Würfel, die Spitze an manchem Werkzeuge, an Nägeln u. d. gl. körperliche Winkel. Körperliche Winkel bestehen demnach aus mehr als zwey ebenen Winkeln, welche in einem Puncte zusammen kommen, der die Spitze genennet wird.

Werden aus allen Ecken was immer für eines geradlinigen Vieleckes (auch von verschiedenen Puncten der Kreislinie, wenn diese als ein Vieleck von sehr vielen Seiten betrachtet wird) gerade Linien nach einem außer der Ebene des Vieleckes befindlichen Puncte A gezogen, so entsteht in diesem ein Körperwinkel von so vielen ebenen Winkeln gebildet, als das Vieleck Seiten hat. (Fig. 4. und 10.)

Bey einem von 3 Flächenwinkeln gemachten körperlichen Winkel A sind immer zwey seiner ebenen Winkel größer als der dritte. (Fig. 10.) Es ist BAD + BAC > DAC.

Denn wäre z. B. DAC der größte; so sey in seiner Ebene EAC = BAC, und man mache AE = AB; so ist auch CE = CB. Da nun BD + BC > CD ist, nähmlich zwey Seiten eines Dreyeckes zusammen größer als die 3. Seite sind; so ist auch, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, nähmlich CE und CB, BD > DE. Aber in den Dreyecken DAB und DAE sind die Seiten BA und EA gleich gemacht und DA ist gemeinschaftlich, mithin da BD > DE ist; so ist auch der Winkel BAD > als der Win-

Winkel DAE, daher wenn Gleiches zu Gleichem addirt wird, so ist BAD + BAC > DAC.

Die ebenen Winkel, welche einen Körperwinkel, eine Ecke bilden, sind zusammen kleiner als vier Rechte; denn schneidet man den Körperwinkel durch die Ebene BDC, so entstehen in B, D und C auch Körperwinkel. Nach dem vorigen sind nun bey B die Winkel ABC + CBD > CBD
bey D die Winkel ADB + ADC > BDC
bey C die Winkel ACD + ACB > DCB
Es ist aber CBD + BDC + DCB = 2R = 180°, daher ist ABC + ADB + ACD + ABD + ADC + ACB > 180°.

Die ersteren 6 Winkel aber machen mit den Winkeln, welche den Körperwinkel A bilden, 6 rechte Winkel aus. Denn die 3 Winkel eines Dreyeckes sind zusammen = 2.R = 180°.

Wenn also die 6 Winkel von 6R abgezogen werden, so bleibt für die Winkel, welche die Ecke A bilden, weniger als 4R übrig.

Wäre die Ecke A durch mehr als 3, etwa durch 4 oder mehrere ebene Winkel gebildet; so würde der Beweis fast eben so geführt.

Die vorzügliche Anwendung der Körperwinkel haben die mit regelmäßigen und gleich großen Ebenen begränzten Figuren, welche regelmäßige Polyedern oder regelmäßige Körper genannt werden. Es können ihrer nicht mehr als 5 seyn, wie aus dem Vorigen abgeleitet werden kann. Jeder körperliche Winkel besteht aus ebenen Winkeln, welche zusammen kleiner als 4 rechte sind. Weniger als 3 Ebenen können keinen Körperwinkel bilden. Denn der Winkel im gleichseitigen Dreyecke hat 60°, der des Quadrates 90°, der des Seckes 180°, des Seckes 120°, die der übrigen Vielecke sind größer. Ferners enthalten die 3 Winkel des Seckes schon 360°; also können sie keinen Körperwinkel bilden, noch weniger die Winkel der übrigen Vielecke von mehreren Seiten.

Drey Winkel des 5eckes enthalten 324°, vier derselben 432°; drey des Quadrates 270°, vier 360°. Daher kann man nur aus 3 dieser Flächenwinkel einen Körperwinkel machen, aus vier nicht. 6 Winkel des gleichseitigen Dreyeckes enthalten 360°, daher kann aus ihnen kein Körperwinkel entstehen, wohl aber aus 5, 4, oder 3. Darum sind 5erley Arten der Körperwinkel möglich, nähmlich jene schon angeführten aus 3 Winkeln des 5eckes, aus 3 Winkeln des Quadrates, aus 3, 4 oder 5 Winkeln des gleichseitigen Dreyeckes.

Weiter bewiesen die alten Geometer und Euclides im 13, Buche, daß die Oberflächen der regelmäßigen Vielecke bestehen:

1tens. Aus 12 regelmäßigen, gleich großen Fünfecken d. i. der Dodekaeder.

2tens. Aus 4 gleichseitigen Dreyecken, wo immer drey mitsammen einen Körperwinkel machen. D. i. der Tetraeder.

3tens. Aus 8 derselben, deren vier den Körperwinkel bilden. D. i. der Octaeder.

4tens. Aus 20, deren fünf den Körperwinkel machen. D. i. der Icosaeder,

5tens. Aus 6 gleich großen Quadraten. D. i. der Würfel, Kubus.

Jedem dieser Körper kann eine Kugel eingeschrieben werden, so daß sie die Flächen des Körpers berührt. Oder es kann jedem eine Kugel eingeschrieben werden, so daß die Ecken des Körpers in der Kugelfläche liegen, u. m. dgl.

Um sich recht deutlich vorzustellen, wie eine Gerade AC allen durch den Berührungspunct C geführten Geraden, welche in derselben Ebene liegen (Fig. 4.) normal seyn kann, zeichnet man auf einem etwas

stei-

steifen Papier FGDE ein Rechteck (Fig. 11.), das durch die Gerade AB halbirt wird, welche den Seiten ED, FG normal seyn muß. Nach dieser Linie wird das Papier zusammen gebogen, und auf eine Ebene X gesetzt. Es ist klar, daß bey was immer für einem Beugungs- oder Brechungswinkel des Rechteckes FGDE, d. i. bey jeder Neigung der beyden Theile FBAE und GBAD die Linien AD, AE in der Ebene X liegen werden, ohne daß die Linie AB sich gegen einen Punct der Ebene mehr neige, als gegen was immer für einen andern Punct derselben Ebene, daß also der Winkel BAD = BAE immer ein rechter bleibt; demnach ist AB allen Geraden normal, welche durch den Punct A gehen und in der Ebene X liegen, also ist sie der Ebene X selbst normal.

Vermöge dessen ist man im Stande aus jedem gegebenen Puncte einer Ebene eine dieser Normale zu errichten; von jedem gegebenen Puncte auf eine gegebene Ebene eine dieser Normale zu lassen, (wozu man sich oft der Schnur bedient). Endlich kann man durch einen gegebenen Punct eine Gerade, oder eine Ebene führen, parallel mit einer gegebenen Ebene; denn im ersten Falle braucht man zwey, im zweyten Falle aber drey Puncte zu bestimmen, welche gleich weit von der gegebenen Ebene entfernt seyn müssen. (Fig. 11. und 12.)

Sind zwey Ebenen mit einander nicht parallel, so kann man leicht ihren Neigungswinkel zeichnen. (Fig. 13.) Denn ist die Gerade AB der gemeinschaftliche Durchschnitt, oder die gemeinschaftliche Berührungslinie der beyden Ebenen, und liegen EA und AD in derselben der Ebene X normalen Ebene; so ist der Winkel DEA der verlangte Neigungswinkel.

Soll

Soll eine Ebene FBAE mit einer andern Ebene einen gewissen Winkel = EAD machen; so zeichnet man ein Dreyeck HAE, welches in A den gegebenen Winkel EAD enthält. Werden zwey solche dreyseitige Ebenen HAE, GBF der gegebenen Ebene normal angebracht, so daß beyde mit einander gleichlaufend sind; so kann man durch die Seiten AE und BF eine Ebene legen, welche mit der Ebene X den verlangten oder gegebenen Winkel macht.

Eben so leicht ist es eine Gerade an irgend einen Punct einer Ebene so zu setzen, daß sie mit einer durch diesen Punct gezogenen Geraden einen gegebenen Winkel mache, wozu wieder eine Ebene HAE gebraucht wird;

oder eine gegebene Ebene in die Verlängerung einer andern Ebene zu bringen, wozu meistens mechanische Werkzeuge, entweder ein Lineal, eine Latte oder die Abwägungs- und Nivellir-Instrumente, erforderlich sind u. s. f.

Eben so kann z. B. aus irgend einem Puncte n in der Ebene OMRS (Fig. 14.) eine Gerade geführt werden, welche mit der in der Ebene abcd gegebenen Geraden 1.2 parallel läuft; denn sind die beyden Ebenen abcd, OMRS mit einander gleichlaufend, und man verlängert die gegebene Gerade 1.2, so können in der Ebene OMRS alle Mahl mittels des Senkbleyes, oder nach der vorgezeigten Art zwey Puncte bestimmt werden, welche die Gerade, die Berührungslinie, der durch xy gelegten Ebene mit der Ebene DMRS ist. Eine mit dieser durch n geführte Parallele ist die verlangte Gleichlaufende.

Ebenfalls kann, z. B. auf einer Seiten-Ebene eines Brettes, Steines ꝛc., dessen gegenüber stehende

Ebenen mitsammen gleichlaufend sind, ein Punct bestimmt werden, der einem in der gegenüber stehenden Ebene gegebenen Puncte correspondirt.

Z. B. Es kann (Fig. 15.) auf der Fläche einer Wand ein Punct I bestimmet werden, der dem gegebenen Puncte i correspondirt. Hierbey sind ab.1a, und bI horizontal, mithin auch 1I; überdieß 1a = Ib u. s. f. Es kann demnach z. B. jeder Punct eines Fensters u. dgl. von außen angegeben werden, welches in einer Wand des einen Zimmers u. dgl. gemacht werden soll.

Wären mehrere, jedoch mit einander gleichlaufende Ebenen gegeben, so kann man durch dasselbe öfter wiederhohlte Verfahren die verlangten Puncte bestimmen.

So ließen sich auf einem wagerecht geebneten Platze eine oder mehrere Linien ausstecken, parallel mit einer oder mehreren Linien, welche in der Ebene einer in dem darneben stehenden Hause befindlichen horizontalen Tafel gezeichnet sind, u. dgl.

Auch kann man mittels zweyer Winkelhaken, oder zweyer gleich langen Schnüre aus jedem Puncte einer schiefen Ebene eine dieser normale Linie errichten.

Soll (Fig. 16.) der Winkel 1, 2, 3 gezeichnet werden, welchen die schiefe Ebene des Dammes A mit der Ebene orm macht; so wird die auf mo Rechtwinkelige 1.2 bestimmt, und aus dem Puncte 2 die Gerade 2.3 unter einem rechten Winkel auf om errichtet. Der Winkel 1.2.3 ist der verlangte Winkel. So läßt sich aus diesem Winkel und der obern Breite ab das Profil eines Dammes, einer Terraß Mauer, u. dgl. zeichnen.

Sind 1.2, 1.3 (Fig. 17.) zwey um das Gewinde 1, bewegliche Lineale; so kann man mit einem solchen

chen Werkzeuge (dem Schrägmaße) jeden Winkel abnehmen, welchen zwey Ebenen mit einander machen.

Die Böschungswinkel werden bey den in der Landes-Cultur und der Baukunst vorkommenden Erdanschüttungen durch ausgesteckte Latten ad in Entfernungen von 5 zu 5, oder von 6 zu 6 Klafter angezeigt, wornach entweder abgegraben oder angeschüttet wird.

Ist abc ein Theil des Querschnittes einer Erdanschüttung; n, 2, 3 eine Schrotwage, die in n den rechten Winkel hat; 2n unter rechten Winkeln auf ac, und 20 die Richtungs-Linie des Senkbleyes; so ist, wenn 20 verlängert wird, das Dreyeck cod ähnlich dem Dreyecke cab, die Winkel f und a sind gleich groß, aber der Winkel f ist dem Winkel h gleich, in n so wie in d und b sind rechte Winkel, also ist der Winkel 1 dem Winkel c gleich. Ist daher in 2 ein gehörig getheilter Gradbogen, und die Senkrechte 2n gezogen; so kann der Winkel c sogleich angegeben werden.

Ist cb bekannt; so können die verschiedenen aus den ähnlichen Dreyecken abc, no2 berechneten Werthe für no z. B. 6″, 4″, 2″ u. s. f. von n gegen 3 aufgezeichnet, sohin der Böschungsmesser verfertigt werden.

§. VI.

Von den Prismen und Pyramiden.

Unter der Grundfläche (Basis) eines Körpers versteht man jene Fläche, auf welcher der Körper steht. In den meisten Fällen der Zeichnung wird diese Fläche als horizontal angenommen. Bey den regelmäßigen Körpern kann jede Seitenfläche als die Grundfläche betrachtet werden.

Die Seiten der Grundfläche sind die Geraden, welche sie umgeben. Die geraden Linien aber, welche die Ecken der Grundfläche mit den Ecken der diesen entgegen gesetzten Fläche oder mit der Spitze verbinden, nennt man Kanten oder Eckseiten. Bey manchen Körpern sind die Seiten der Grundfläche und die Kanten dieselben Geraden.

Ein Prisma ist ein Körper, der zur Grundfläche eine mit geraden Linien begränzte Ebene hat, aus deren Ecken gerade mit einander Parallele nach den Ecken der der Grundfläche entgegen gesetzten Ebene gezogen sind, welche Linien die Seiten der übrigen den Körper einschließenden Ebenen ausmachen. (Tab. VII. Fig. 18. 19.)

Sind alle diese Ebenen Parallelogramme, und die Grundfläche sammt der entgegen gesetzten Ebene Rechtecke oder Parallelogramme, so nennt man das Prisma ein Parallelipipedon. Sind alle diese sechs Ebenen Quadrate, so heißt der Körper ein Würfel (Kubus). Kommen die aus den Ecken der Grundfläche gezogenen Geraden in einem Puncte zusammen, so ist der Körper eine Pyramide (Spitzsäule). Der erst erwähnte Punct heißt ihre Spitze. Eine Gerade aus diesem Puncte an den Mittelpunct der Grundfläche gezogen heißt die Achse der Pyramide. Eine gerade Linie von der Spitze auf die Grundfläche oder auf die Verlängerung derselben normal gezogen wird die Höhe der Pyramide genannt.

Fig. 18. stellet ein 5seitiges, senkrechtes, Fig. 19. A ein 4seitiges, schiefes, Fig. 19. B ein 3seitiges, senkrechtes Prisma und Fig. 20. eine senkrechte Pyramide vor. Die Ebenen ABCDE, abc, 1.7.5.3 und ABCDE sind die Grundflächen, die Ebenen ABKF, BCIK u. s. f. dann abkf, acif, 1.3.4.2, 3,5,6,4 u. s. f.

u. s. f. endlich die Ebenen AEF, BCF, EDF u. s. f. sind die Seiten-Ebenen der Prismen und der Pyramide; die Spitze derselben ist der Punct F. Die Eckseiten der Prismen sind die Geraden AF, BK, CI u. s. f. in der 18. Fig.; dann die Kanten af, bk, ci 1.2, 7.8 u. s. f. in der 19. Fig.; endlich die Geraden AF. EF u. s. f. in der 20. Fig.

Ist F1 der Grundfläche normal, und sind die Linien 1A, 1B, 1C einander gleich u. s. f.; so liegen die Puncte A, B, C u. s. f. im Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunct 1 ist. Dann sind die Dreyecke F1A, F1B, F1C u. s. f. einander gleich; daher ist FA = FB = FC u. s. f. In diesem Falle nennt man die Pyramide gleichseitig.

Doch damit ist nicht gesagt, daß die Seiten AB, BC, CD u. s. f. einander gleich seyn, und daß daher die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck seyn soll. Wäre dieß wirklich, aber F1 träfe nicht in den Mittelpunct; so wäre die Pyramide ungleichseitig. Wären die Seiten AB, BC, CD u. s. f. einander nicht gleich, doch im Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunct in 1, aber F1 nicht in 1, sondern in einem andern Puncte der Grundfläche normal; so würde die Pyramide nicht gleichseitig seyn.

Es kann also die gleichseitige Pyramide mit Dreyecken eingeschlossen seyn, deren Grundlinien einander nicht gleich sind, obschon die von der Spitze F ausgehenden Schenkel dieser Dreyecke einander gleich sind.

Ist aber F1 der Grundfläche am Mittelpuncte 1 normal, und die Seiten der Grundfläche sind einander gleich; so ist diese ein regelmäßiges Polygon, und die Pyramide ist gleichseitig.

Diese Sätze sind für die Anwendungen auf das Zeichnen sehr wichtig.

Jeder mit der Grundfläche des Prisma parallele Schnitt ist der Grundfläche gleich und ähnlich, in der Pyramide hingegen ähnlich allein, und zwar im Verhältniß der Entfernung von der Spitze der Pyramide.

So ist (Fig. 18) der Querschnitt LPONM der Grundfläche ABCDE gleich, denn es ist jede Seite z. B. NO mit der in derselben Seiten-Ebene z. B. HICD liegenden Seite DC der Grundfläche parallel, da sie Durchschnitte gleicher Ebenen mit parallelen Ebenen sind, und die Winkel LPO, PON den Winkeln ABC, BCD gleich sind. (§. II. und III.)

Ferners sind die Seiten-Ebenen LABP, PBCO Parallelogramme, und deßhalb LP = AB, BC = PO u. s. f. also die ganze Figur LPONM der Grundfläche ABCDE gleich.

In der Pyramide aber (Fig. 20.) sind die Dreyecke LFP, AFB u. s. f. einander ähnlich; also ist LP : AB = FL : FA = FP : FB u. s. f. Bey allen Seiten PO, ON u. s. f. bleibt dasselbe Verhältniß FP : FB, FO : FC u. s. f.; es ist nähmlich immer = FP : FB = FL : FA; deßhalb ist der Querschnitt LPONM ähnlich der Basis ABCDE und das Verhältniß der Seiten ist dasselbe, wie das Verhältniß der Abstände von der Grundfläche.

Ist (Fig. 18.) die Durchschnittsebene parallel mit der Grundfläche durch den Punct F der Geraden AF; so fällt L in F, und es werden die übrigen Puncte B,C,D,E in K,I,H,G kommen, da alle Seiten BP, CO ꝛc. = AL und alle Seiten BK, CI ꝛc. = AF sind. Es wird also die Figur FKIHG = ABCDE dieser parallel, und die Außenflächen ABKF, BCIK ꝛc. werden Parallelogramme seyn.

Wäre die der Grundfläche entgegen gesetzte Ebene nicht mit ihr parallel, so sind auch die Seiten-Ebenen des Prisma nicht immer Parallelogramme (Fig. 19. A.); denn es ist dann nicht 1.2 = 3.4 = 5.6 = 7,8 u. s. f. Doch kann der Fall eintreten, daß zwey und zwey dieser Linien gleich groß sind, z. B. 1.2 = 7,8, 4,3 = 6.5 u. s. f. Solche Prismen werden durch Schnitte 4xm6, die der Grundfläche parallel sind, in andere Prismen getheilt.

Die Achse des Prisma ist eine Gerade, die von dem Mittelpuncte der Grundfläche zu dem Mittelpuncte der dieser entgegen stehenden Fläche gezogen wird.

Die Oberfläche eines Prisma, dessen gleich große Seiten-Ebenen mit der Grundfläche rechte Winkel machen (eines senkrechten oder normalen Prisma) ist, ohne die Grundfläche und die dieser entgegen gesetzte parallele Fläche zu rechnen, das Product aus dem Umfange (Perimeter) der Grundfläche in die Höhe des Prisma. Die Oberfläche einer solchen Pyramide, deren gleich große Seiten-Ebenen mit der Grundfläche gleich große Winkel machen (einer senkrechten oder normalen Pyramide) wird gefunden, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der halben, aus der Spitze der Pyramide auf die Seite der Grundfläche gezogenen Normalen multiplicirt. Dieses kann leicht nach §. XXII. d. Geom. abgeleitet werden.

Die Oberfläche einer mit der Grundfläche parallel geschnittenen Pyramide (einer gestümmelten Pyramide) wird gefunden, wenn man die halbe Summe aus dem Umfange der Grundfläche, und dem Umfange der dieser parallelen Ebene mit der Normalen multiplicirt, welche zwischen den mit einander parallelen Seiten dieser Ebenen gezogen ist. Ebenfalls aus §. XXII. d. Geom. u. d. folgenden §en. Die Oberfläche einer schief

ab-

abgeschnittenen Pyramide wird gefunden, wenn jede Seiten-Ebene berechnet, und diese summirt werden.

Alle Prismen, und alle Pyramiden sind dem körperlichen Raume nach gleich groß, wenn sie auf Grundflächen von gleichem Inhalte stehen, und zwischen denselben gleichlaufenden Ebenen enthalten sind.

Denn werden die Prismen oder Pyramiden mit wie viel immer den Grundflächen parallelen Ebenen geschnitten (Fig. 18. 19. 20. 21.), so werden die so entstandenen Durchschnitte LPONM, QRSTV des einen Prisma, oder der einen Pyramide so groß seyn, als die correspondirenden Durchschnitte lpo, qrs des andern Prisma oder der andern Pyramide. Denn im Prisma werden alle der Grundfläche gleich, in der Pyramide dieser ähnlich seyn, und die einzelnen correspondirenden Seiten LP, lp sind gegen die gleichnahmigen Seiten AB, ab in demselben Verhältnisse, nähmlich = FL : FA, fl : fa, welche Verhältnisse, dieselben bleiben, da die Puncte F, f sich in den der Grundfläche und den Durchschnitten parallelen Ebenen befinden. (Tab. VII. Fig. 1.)

§. VII.

Von der Gleichheit der Pyramiden. Fortsetzung.

Zur Erläuterung des Vorhergehenden kann Folgendes dienen. (Fig. 22.)

Ist ABCD eine z. B. dreyseitige Pyramide, deren Grundfläche ABC, und mit dieser EFG ein paralleler Durchschnitt ist; so ist das Dreyeck ABC ähnlich dem Dreyecke EFG.

Dadurch entstehen zugleich drey andere Dreyecke, nähmlich DEG, DGF und DEF, welche den Seiten-Ebenen ähnlich sind, GF ist mit CB in demselben Verhältnisse wie DG mit DC und EG mit AC. Es ist AC : EG = DC : DG, also auch GF : CB = EG : AC.

Wä-

Wären diese Ebenen nicht Dreyecke, sondern andere geradlinige Figuren; so dürfte man nur die Vergleichung durch die Dreyecke der übrigen Seiten-Ebenen führen, und man würde immer für jedes einen Winkel einschließende Seitenpaar der Durchschnitte und der Grundfläche dasselbe Verhältniß finden.

Ist die Linie DH der Seite AB normal, so ist sie es auch der Seite EF, wenn die Ebene ACB mit der Ebene EGF parallel ist. Wird CH gezogen, so ist das Dreyeck DCH der Grundfläche ACB, daher auch der Querschnitt-Ebene EGF normal. Die Höhe der Pyramide d. i. D2 muß der Grundebene normal seyn, daher wird sie in dem Durchschnitte DCH liegen, welcher der Grundebene normal ist. Es sind also DGI und DC2, dann D1I und D2H ähnliche Dreyecke, also ist D1 : D2 = DI : DH; dann ist DI : DH = IF : HB) = EF : AB. Es ist aber $D1^2 : DH^2$ = EI : HA) = EGF : ACB d. i. $D1^2 : D2^2$.

Die Seiten der Durchschnitte haben also zu den Seiten der Grundfläche dasselbe Verhältniß der Entfernung der Durchschnitte von der Spitze zur Höhe der ganzen Pyramide.

Daher verhalten sich die Durchschnitte zur Grundfläche wie die Quadrate ihrer Entfernung von der Spitze zu den Quadraten der Höhe der Pyramiden.

Wäre z. B. D1 : D2 = 4 : 7, so wäre auch

EFG : ABC = 16 : 49.

Ist also die Grundfläche bekannt; so wird sich die Weite der Pyramiden für jede gegebene Entfernung leicht finden lassen. In diesem Beyspiele wäre sie $\frac{16}{49}$ der Grundfläche.

Bey jeder Pyramide, deren Grundfläche und Höhe man kennt, läßt sich vermöge dieser die Größe der, der Grundfläche parallelen, Querschnitte berechnen, wenn der Abstand derselben von der Spitze oder von der Grundfläche gegeben ist.

Da hier bloß von der Größe die Rede ist; so kommt die Figur der Grundfläche noch nicht in Betrachtung.

Wären die Grundflächen nicht gleich groß, sondern Vielfache von einander; so könnte man die größere in so viele Theile zerlegen, daß jeder Theil der kleinern Grundfläche gleich seyn würde, und durch die Theilungslinien und die Spitze der Pyramide könnte man Ebenen legen. Dadurch würde die größere Pyramide in eben so viele gleich große Pyramiden getheilt werden, als die Grundfläche Theile enthält. Jede dieser kleineren Pyramiden würde der gegebenen kleinen Pyramide gleich seyn, und die ganze größere Pyramide wäre um eben so vielmahl größer als die kleinere, als von ihrer Grundfläche die Grundfläche der kleinern an Größe übertroffen wird.

Der Beweis des Lehrsatzes: Pyramiden von gleichen Höhen, und über gleichen Grundflächen sind gleich groß, wird beynahe von allen Geometern nur mit Beyziehung der unendlich kleinen Größen d. i. solcher Größen, die kleiner als jede gegebene Größe sind, ausgeführt.

Hierüber S. des Freyherrn von Vega Vorlesungen über die Mathematik. 2. Bd. der 4. Auflage. §. 516. u. 517. wo erwiesen wird, daß der Kubik-Inhalt einer dreyseitigen Pyramide dem 3. Theile des Productes aus der Grundfläche in die Höhe der Pyramide gleich ist.

Den Beweis ohne Beyziehung analytischer Rechnung geben: Hr. G. Vieth in seinen Anfangsgründen der Mathematik. 1. Theil. Leipzig 1805. §. 272. S. 229. u. folg. — Hr. Lorenz im Grundrisse der reinen Mathematik. 1. Theil. Helmstädt 1804. §. 330. Seite 252. u. folg. Er ist folgender:

Pyramiden ABCD, EFGH von gleichen Höhen, über gleichen Grundflächen BCD, FGH sind einander gleich. (Fig. 23.)

1. Vergleicht man das Pyramidenstück MN zwischen den mit der Grundfläche parallelen Schnitten M und N, mit einem Prisma von gleicher Höhe, welches M oder N

zur

zur Grundfläche hat: so ist offenbar das Pyramidenstück kleiner, als das erste, und gröser als das zweyte Prisma, auch von beyden weniger unterschieden als sie selbst, oder ihre Grundflächen M, N von einander unterschieden sind. Nun kann man den Unterschied zwischen M und N, je näher man sie an einander bringt, ohne Ende immer kleiner und kleiner machen, bis er zuletzt verschwindet; da dann gewiß das Prisma der kleinsten Höhe auf M oder N dem Pyramidenstücke derselben Höhe gleich ist.

II. Macht man durch beyde Pyramiden Durchschnitte in gleichen Höhen, wie M, P oder N, Q; so sind diese einander gleich, weil die Grundflächen einander gleich sind. Hierdurch kann man beyde in eine gleiche Anzahl Pyramidenstücke theilen. Wäre nun ein jedes Paar solcher Pyramidenstücke gleich; so müßten auch die Pyramiden, die daraus zusammen gesetzt sind, gleich seyn.

Um ersteres zu beweisen nehme man ein zusammen gehöriges Paar solcher Pyramidenstücke MN, PQ von beliebig kleiner Höhe, so kann man sich nach Obigem statt ihrer ein Paar dreyeckige Prismen von gleicher Höhe denken, deren Grundflächen die gleichen Schnitte M, P oder N, Q sind. Da nun diese Prismen gleich groß sind; so sind auch obgedachte Pyramidenstücke gleich groß, daher auch ihre Summen, nähmlich die ganzen Pyramiden.

§. VIII.

Von Pyramiden und Prismen. Von den Oberflächen der Körper.

Ein dreyseitiges Prisma läßt sich in drey gleich große Pyramiden theilen. (Fig. 24.)

Denn schneidet man das dreyseitige Prisma ACBEFD durch die Ebenen BCD und CED; so entstehen die Pyramiden ACBD, DFEC und DEBC. Die erste und die zweyte haben gleiche und ähnliche Grundflächen ACB und DFE und ihre Spitzen sind von diesen gleich weit entfernt. Dasselbe gilt von der zweyten und der dritten, da CFE und CEB

gleich

gleich große Dreyecke sind, so wie ADB und DBE als die Grundflächen der ersten und der dritten Pyramide. Daher sind diese drey Pyramiden einander gleich.

Wenn also eine Pyramide und ein Prisma dasselbe Dreyeck zur Grundfläche und dieselbe Höhe haben, so ist die Pyramide ihrem körperlichen Raume nach der dritte Theil von dem körperlichen Raume, welchen das Prisma einnimmt.

Hätte man eine vielseitige Pyramide; so würde man diese in lauter dreyseitige Pyramiden von gleicher Höhe zertheilen. Es müßte deßhalb die Grundfläche durch Diagonalen aus einem Puncte in Dreyecke getheilet werden. Durch diese Diagonalen und die Spitze der Pyramide müssen dann die Theilungs-Ebenen kommen, welche die gegebene Pyramide in so viele dreyseitige Pyramiden theilen, so viele Dreyecke die Grundfläche enthält.

Der körperliche Raum dieser Pyramide ist ebenfalls dem dritten Theile eines Prisma gleich, das dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe hat, wie die Pyramide.

Theilet man (Fig. 25.) die Seiten AD, DC und die Höhe DF in wie viel immer gleiche Theilchen, und werden dann auch durch die Theilpuncte den Seiten desselben Parallelepipedum parallele Ebenen geführt; so hat man so viele Schichten vom Körper, als Theilchen in DF sind, und in jeder dieser Schichten so viele Reihen der körperlichen Theilchen, als Linear-Theilchen in AD sind, und so viele gleich große und kubische Körper als Linear-Theilchen in DC sind. Wird DC mit AD multiplicirt, so hat man die Zahl der körperlichen Theilchen jeder einzelnen Schichte, was dasselbe ist, als die Anzahl der oberflächlichen Theile der Basis BD, wenn DF=DC ist. Diese Anzahl multiplicirt durch die Zahl der Linear-Theile der Höhe DF

gibt

gibt die Zahl aller Körpertheile, welche das Parallelepipedum enthält.

Daher ist auch das gegebene Prisma das 3fache der gegebenen Pyramiden, das Product aus den Grundflächen in die Höhe, demnach die Pyramide der 3te Theil dieses Productes.

Z. B. Wenn die Seite DC der Grundfläche 2', AD 4' enthält, so wird die Fläche ABCD 2.4 = 8 Quadrat' haben. Wenn aber die Höhe DE 3' hätte; so hätte man 3 Schichten von Kubik-Schuhen, eine über die andere, deren jede acht enthält; daher das ganze Prisma 3.8 d. i. 24 Kubik' enthalten wird.

Prismen und Pyramiden verhalten sich gegen einander wie die Producte aus den Grundflächen in die Höhen: sind die Grundflächen gleich groß, wie die Höhen; wenn die Höhen gleich sind, wie die Grundflächen; sind jene Körper gleich, so sind die Höhen verkehrt wie die Grundflächen; wären die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional, so sind sie gleich Wären die Grundflächen ähnlich, und die Höhen den homologen (ähnlich liegenden) Seiten der Grundflächen proportional, so sind sie im dreyfachen (kubischen) Verhältnisse dieser Seiten oder der Höhen.

Alles dieses folgt aus der Lehre von den Proportionalen. Auch das Letzte davon, und aus dem Satze, daß ähnliche Flächen im (quadratischen) Verhältnisse der gleichnahmigen Seiten sind, weil aber die Verhältnisse der Seiten beytreten, so werden hier kubische Verhältnisse dieser Seiten erhalten. Die Oberflächen ähnlicher Körper sind im quadratischen Verhältnisse der homologen Seiten.

Denn ähnliche Körper sind, die man in ähnliche Pyramiden auflösen kann, deren Grundflächen im quadratischen Verhältnisse der Seiten sind, wo dann das

ein-

einfache Verhältniß der Seiten hinzu kommt, da sie mit den Höhen multiplicirt werden.

Ein Zylinder (senkrechter) ist ein Körper, mit einer Fläche begränzt, welche entsteht, wenn sich ein Rechteck um eine als unbeweglich angenommene Seite desselben (als um eine Achse) herumbewegt; die anderen drey Seiten beschreiben 2 Kreisflächen und ein gebogenes Rechteck, welche zusammen die Oberfläche des Körpers ausmachen. Ein Kegel (senkrechter) aber entsteht durch die Bewegung eines rechtwinkeligen Dreyeckes um eine seiner als unbeweglich angenommenen Katheten; die andere Kathete beschreibt die Grundfläche des Kegels, die Hypothenuse seine Oberfläche. (Gebogene Fläche.)

Ist die Grundfläche mit irgend einer anderen krummen Linie begränzt, so wird der Körper ein Cylindroid oder Conoid genannt.

Fig. 24. 1 stellet einen Cylinder, Fig. 26. einen Kegel vor. Die Grundfläche desselben ist der Kreis AaE, die Achse FC, die Seite des Cylinders BA oder ED, am Kegel FA oder FE, die Spitze F.

Würden die Grundflächen eines Prisma oder einer Pyramide mit einer sehr großen Menge von Seiten vermehrt, welche an Größe daher immer abnehmen müßten; so verwandelte sich die Grundfläche in eine Kreisfläche, das Prisma in einen Cylinder, und die Pyramide in einen Kegel. Aus dem senkrechten Prisma wird dann ein senkrechter Cylinder, d. i. ein Cylinder, dessen Achse seiner Grundfläche normal ist. Aus der Pyramide wird dann ein senkrechter Kegel, d. i. ein Kegel, dessen Höhe (Achse) die Normale aus seiner Spitze auf den Mittelpunct seiner Grundfläche ist. Trifft sie aber in einen andern Punct der Grundfläche

oder in die Verlängerung derselben; so ist der Kegel schief.

Man betrachtet Cylinder als Prismen von sehr vielen Seitenflächen, Kegel als Pyramiden von einer sehr großen Menge Seiten-Ebenen.

Die Oberfläche des Cylinders wird gefunden, wenn man die Kreislinie d. i. den Umfang der Grundfläche mit der Länge (Höhe) des Cylinders multiplicirt, und zu diesem Producte die beyden Kreisflächen des Cylinders addirt. Die Oberfläche des Kegels findet man, wenn man ein Dreyeck berechnet, dessen Grundlinie der Umfang der Grundfläche, und dessen Höhe die Seite des Kegels ist.

Man stellet sich auch vor, daß die krumme Fläche des senkrechten Kegels in gerader Linie von der Spitze zum Umfange der Grundfläche, oder in einer durch die Achse gehenden Ebene durchschnitten, dann abgewickelt, und in eine Ebene gelegt werde, so hat man einen Kreisausschnitt. Der Halbmesser desselben wäre die Seite des Kegels, der Bogen so groß als der Umfang der Grundfläche. Umgekehrt würde dieser Ausschnitt der krummen Fläche des Kegels congruent seyn.

Aus diesem kann man Netze für den Cylinder und für den Kegel zeichnen.

Die Berechnung der Oberfläche einer senkrechten gestümmelten Pyramide oder eines solchen Kegels ist demnach leicht, wenn die Durchschnittsebene mit der Grundebene parallel ist. Die Seitenfläche einer solchen Pyramide enthält so viele Trapeze von gleicher Höhe, als die Grundfläche Seiten hat. (Fig. 20. u. 21.)

Der Inhalt eines Trapezes wird aber gefunden, wenn man die halbe Summe der Parallelen mit ihrem Abstande multiplicirt, (Geom. §. XXII.) Daher findet

man

man den Inhalt der Seitenfläche einer Pyramide, wenn man die halbe Summe aus dem untern und dem obern Umfange mit der Seite der gestümmelten Pyramide multiplicirt. Eben so findet man die Oberfläche eines gestümmelten Kegels; sie ist nähmlich das Product aus der Seite in die halbe Summe der beyden Kreise, d. i. in den Umfang eines durch die Mitte der Seite des Kegels geführten Kreises. Wie die Oberfläche des schief abgeschnittenen Kegels berechnet wird, lehret die höhere Geometrie.

§. IX.

Von der Kugel. Verhältnisse ähnlicher Körper.

Eine Kugel, Sphäre, ist ein Körper so von einer einzigen krummen Fläche begränzt, daß alle Puncte dieser von einem in dem Körper bestehenden Puncte, dem Mittelpuncte, gleich weit entfernt sind. Die Kugel entsteht, wenn sich eine halbe Kreisfläche um ihren unbeweglichen Durchmesser, als um eine Achse, dreht. Der Halbkreis, der volle Bogen, beschreibt dann eine gebogene Fläche, die Kugelfläche, die Oberfläche derselben. Der Durchmesser (Achse) der Kugel ist jede Gerade, welche durch den Mittelpunct der Kugel geht, und beyderseits von der Kugelfläche begränzt ist. Ihre Endespuncte sind die Pole. Ihre Hälften sind die Halbmesser der Kugel. Der größte Kreis ist jener Durchschnitt, der durch den Mittelpunct geführt ist. Ein Theil der Kugel durch eine Ebene von der ganzen Kugel abgeschnitten heißt Kugel-Abschnitt, Kugel-Segment. Er entsteht durch die Umdrehung des halben Kreis-Abschnittes um seine Höhe. Ein Kugel-Ausschnitt besteht aus einem Kugel-Abschnit-

schnitte und einem senkrechten Kegel, dessen Spitze im Mittelpuncte der Kugel liegt. Er entsteht, wenn sich ein Kreis-Ausschnitt um seinen Halbmesser dreht.

Eine Zone, Kugelband, ist die krumme Fläche eines Körpers, der durch zwey mit einander parallele Ebenen aus einer Kugel geschnitten ist. Dieser entsteht, wenn ein Viereck, dessen Umfang zwey einander Parallele, ein Kreisbogen, und eine den Parallelen Normale sind, sich um diese letzte herumdreht. (Fig. 28). Alle Halbmesser und alle Durchmesser derselben Kugel sind gleich groß.

Alle Geraden CF, CI, CH (Fig. 27.) von dem unbewegten Mittelpuncte C des die Kugel beschreibenden Halbkreises, zu was immer für einem Puncte der Oberfläche geführt, sind so groß als die unbewegliche Gerade CA oder CB. Ebenfalls sind die Winkel HCE, ICE, FCE u. s. f. einander gleich. Ist nun CE immer dieselbe; so sind die Dreyecke FCE, ICE, HCE u. s. f. einander gleich u. dgl. m.

Wird eine Kugel mit einer Ebene geschnitten; so ist der Schnitt eine Kreisfläche. Die größte Kreisfläche entsteht, wenn der Schnitt durch den Mittelpunct der Kugel geht, in welchem Falle der größte Kreis einen und denselben Mittelpunct mit dem Durchmesser der Kugel, und mit der Kugel selbst hat. Größer oder kleiner wird der Schnitt, je mehr er sich dem Mittelpuncte der Kugel nähert, oder sich davon entfernt, so wie die Sehnen des Kreises, welche Durchmesser der Kugelschnitte sind.

Es sey der Schnitt FIH. Der Durchmesser ACB sey seiner Ebene in E normal. Fällt der Punct E mit dem Mittelpuncte C zusammen; so werden alle Geraden EI, EF u. s. f. Halbmesser der Kugel, und diese Geraden liegen dann in derselben Ebene. Fällt der Punct E außerhalb, so sind in den Dreyecken CEI, CEF die Winkel E

rechte Winkel. Auch haben diese Dreyecke die Winkel an C, so wie die Seite CE gemein; demnach sind auch ihre andern Seiten einander gleich. Es ist nähmlich CI = CF = CH u. s. f.; ebenfalls ist EF = EI = EH u. s. f. Daher ist C die Spitze eines senkrechten Kegels, die Puncte H, I, F u. s. f. sind Puncte des Umfanges seiner Grundfläche; also ist dieser ein Kreis, dessen Mittelpunct E ist. Im 1. Falle würde E mit C zusammenfallen; daher wäre der Mittelpunct der Kugel, der des Durchmessers und der Mittelpunct des größten Kreises derselbe Punct.

Je mehr sich der Punct E dem Puncte C, (dem Mittelpuncte der Kugel) nähert, desto größer wird der Halbmesser EF, als Seite des Dreyeckes CEF, dessen größte Seite CF, als Halbmesser der Kugel unveränderlich ist. Kommt daher E nach C; so wird EF = CF, ein Halbmesser eines Kreises, der durch den Mittelpunct der Kugel geht, ein Halbmesser eines größten Kreises.

Hieraus kann man leicht schließen, daß die Kugelschnitte, welche von dem Mittelpuncte derselben Kugel gleich weit entfernt sind, einander gleich seyn müssen. Diese Schnitte werden desto kleiner, je weiter sie vom Mittelpuncte der Kugel entfernt sind. Gleich weit vom Mittelpuncte derselben Kugel entfernte Schnitte sind einander gleich. Die Schnitte durch den Mittelpunct, die größten Kreise, theilen einander sowohl ihrer Fläche, als auch ihrem Umfange nach in zwey gleich große Theile, weil ihre gemeinschaftliche Durchschnitts- oder Theilungslinie durch die Mittelpuncte beyder Kreise geht.

Die ferneren Sätze von der Kugel, ihren Schnitten, Polen, Parallelkreisen u. s. f. sind für jenen Theil der Geometrie, welcher die sphärische Trigonometrie heißt, sehr wichtig; weil aber diese vorzüglich der geographischen Aufnahme wegen vorgetragen wird, und außer dem Zwecke des gegenwärtigen Lehrbuches liegt; so kann hier von den fernern Sätzen der Kugel, womit sich unter den alten Geometern vorzüglich Archimedes und Theodosius berühmt gemacht haben, keine Rede

seyn;

seyn; diejenigen ausgenommen, welche die Berechnung der Oberfläche und des Kubik-Inhaltes der Kugel beabsichten.

Der Inhalt der Oberfläche einer Kugel wird gefunden, wenn man aus ihrem Durchmesser den Inhalt eines größten Kreises berechnet. Das Vierfache davon ist der Inhalt der Oberfläche der Kugel. (Fig. 28.) Wäre der Durchmesser = d; so ist der Umfang des größten Kreises $= \frac{314.d}{100} = 3,14.d$. Der Inhalt des größten Kreises ist $= \frac{3,14.d^2}{4}$. Also der Inhalt der Oberfläche der Kugel $= \frac{3,14.d^2.4}{4} = 3,14.d^2$. Nimmt man den Halbmesser = CA; so ist der erst genannte Inhalt $= 4CA^2.3,14$.

Durch den Quadranten ACB legt man zwey Gerade DF, EG gleichlaufend mit dem Halbmesser CA, daher dem andern Halbmesser CB normal. Dreht sich der Quadrant um seinen unbeweglichen Halbmesser BC: so beschreibt er die Halbkugel, der Bogen AB die Oberfläche, und der Bogen DE einen Theil der Oberfläche, ein Kugelband.

Ist in N, als in der Mitte von DE, eine Tangente DE, welche sich mit der verlängerten Linie CB in O schneidet; so ist das Dreyeck DFO ein rechtwinkeliges Dreyeck, durch dessen Herumdrehung ein senkrechter Kegel entsteht. Die gerade Linie DE beschreibt die Oberfläche eines gestümmelten Kegels, einer Kegelscheibe, welche Oberfläche, wenn NP mit AC gleichlaufend ist, = 1NP.3'14. DE ist. (§. VIII.)

Da sich nun die Parallelen DF, EG (die Ordinaten) so nahe, als man will, an einander bringen lassen: so kann man die Gerade DE für den Bogen DE, also das Stück der Kegelfläche, welches die Gerade DE beschreibt, für das Stück der Kugelfläche annehmen, welches der Bogen DE beschreibt. Es ist also dieses = 2NP.3,14.DE.

Zieht man den Halbmesser CN, welcher der Tangente NE im Berührungspuncte N normal seyn wird, und zieht man von dem Puncte E die der Linie FK Normale EM, welche von NP in V rechtwinkelig geschnitten wird; so ist der Winkel NEV dem Winkel MNV gleich, d. i. der Winkel DEM ist dem Winkel CNP gleich. Da nun DME und CPN rechte Winkel sind, also auch ECM = NCP ist; so ist DE : EM = CN : NP, woraus $NP = \frac{EM.CN}{DE} = \frac{CA.FG}{DE}$ folgt, da man nähmlich Gleiches statt Gleichen setzt. Nimmt man diesen Werth in den obigen Ausdruck statt NP; so erhält man das Stück der Kugelfläche, welches der Bogen DE beschreibt, = 2.CA.3,14.FG.

Theilt man nun den Halbmesser CB in lauter solche sehr kleine Theile FG, und zieht durch die Theilpuncte mit CA Gleichlaufende; so ist die Summe aller solcher Stücke der Kugelfläche, d. i. die halbe Kugelfläche, das Product aus 2CA.3,14 in die Summe aller dieser Theilchen, d. i. FG nähmlich in den Halbmesser CB oder CA folglich = $2CA^2.3,14$; also ist die ganze Kugelfläche = $4CA^2.3,14$.

Hieraus folgt, daß ein Cylinder, der den Durchmesser der Kugel, d. i. 2CA, zur Höhe hat, der Fläche nach der Kugel gleich sey. Denn das Quadrat ACBH beschreibt durch seine Umdrehung um CB einen Cylinder, dessen Fläche durch die Gerade HA entsteht, KL = FG beschreibt ein Stück davon, welches = 2.3,14.AC.FG, folglich dem Stücke der Kugelfläche gleich ist, das der Bogen DE beschreibt. Auch ist die ganze Fläche des Cylinders, dessen Höhe CA ist, = $2.3,14.CA^2$, und der 2CA zur Höhe hat, = $4.3,14.CA^2$, also der ganzen Kugelfläche gleich.

Der Kubik-Inhalt einer Kugel ist gleich dem 3. Theile des Productes aus der Oberfläche, multiplicirt mit dem Halbmesser der Kugel.

So wie man sich die Kreisfläche als ein Vieleck von sehr vielen Seiten vorstellet; so stellet man sich auch die Ku-

Kugel als einen vielseitigen Körper (Polyedron) von sehr vielen Seiten-Ebenen vor. Denkt man sich die ganze Oberfläche der Kugel in eine sehr große Zahl gleicher Theile, z. B. in gleichseitige Dreyecke getheilt, und aus den Ecken dieser Dreyecke gerade Linien nach dem Mittelpuncte der Kugel gezogen; so wird dadurch die ganze Kugel in Pyramiden von gleicher Höhe getheilt. Der Kubik-Inhalt einer jeden solchen Pyramide ist dem 3. Theile des Productes aus dem Halbmesser in den sehr kleinen Theil der Kugelfläche, welchen diese Pyramide zur Grundfläche hat, gleich. Daher ist auch die Summe der Kubik-Inhalte aller dieser Pyramiden gleich, dem 3. Theile des Productes aus dem Halbmesser multiplicirt mit der Summe aller dieser sehr kleinen Theilchen der Kugelfläche, d. i. multiplicirt mit der Oberfläche der Kugel.

Dasselbe läßt sich von einem Kugel-Ausschnitte sagen; demnach ist auch der Inhalt eines solchen gleich dem 3. Theile des Productes aus dem Halbmesser in die Oberfläche des Kugel-Ausschnittes.

Weil ein Cylinder, denn das Quadrat ACBH beschreibt $= 3{,}14.CA^3$ ist; so ist die Halbkugel $\frac{2}{3}$ dieses Cylinders, folglich die ganze Kugel $\frac{4}{3}$ eines Cylinders, dessen Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich ist. Ein Kegel aber von eben der Höhe über derselben Grundfläche ist $\frac{1}{3}$ des Cylinders. Daher verhalten sich Cylinder, Kugel und Kegel gegen einander $= 3 : 2 : 1$.

Archimedes hat diesen Satz erfunden. Er ließ deßhalb diese drey Körper auf sein Grabmahl setzen.

Die Kugeln verhalten sich gegen einander wie die Würfel oder Kubi ihrer Durchmesser. Denn setzt man zwey Kugeln, deren Durchmesser durch D und d, und deren Halbmesser durch r und R, die Kubik-Inhalte durch I und i bezeichnet sind; so ist i

=

$= \frac{4}{3}r^3.3,14$ und $I = \frac{4}{3}R^3.3,14$. Also ist auch $i : I = \frac{4}{3}r^3\,3,14 : \frac{4}{3}R^3.3,14 = r^3 : R^3$. Multiplicirt man diese Glieder mit 8, so erhält man $i : I = 8r^3 : 8R^3 = (2r)^3 : (2R)^3$, das ist $= d^3 : D^3$.

Weil sich die Gewichte der Kugeln von einerley Materie wie ihre Kubik-Inhalte, daher diese wie ihre Gewichte verhalten: so ist es leicht aus dem gegebenen Durchmesser und dem Gewichte der einen Kugel den Durchmesser, oder aus dem Gewichte der andern Kugel das Gewicht oder den Durchmesser von dieser zu finden. Ein Satz, der in der Artillerie vorzügliche Anwendung hat.

Die Oberflächen der Kugeln, als die Vierfachen der großen Kreise, verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

So wie bey den Kugeln verhalten sich die Kubik-Inhalte der ähnlichen Körper gegen einander, wie die Wurtel (dritten Potenzen) (Cubi) ihrer gleichnahmigen Abmessungen (Dimensionen).

Stellet man sich z. B. zwey ähnliche Körper vor, zwey auf ähnlichen Grundflächen stehende, und von ähnlichen Dreyecken begränzte Pyramiden, und man setzt den Kubik-Inhalt der ersten $= I$, den Inhalt der zweyten $= i$, die drey Dimensionen der ersten seyen A, B, C, die drey ähnlichen Abmessungen der andern $= a, b, c$; so ist $I = A.B.C$ und $i = a.b.c$. Also auch $I : i = ABC : abc$. Vermöge der voraus gesetzten Ähnlichkeit der zwey Körper ist aber $A : a = B : b$ und $A : a = C : c$. Hieraus folgt $b = \frac{aB}{A}$ und $c = \frac{aC}{A}$. Also ist $b.c = \frac{aB.aC}{A^2} = \frac{a^2.BC}{A^2}$. Daher $I : i = ABC : a \cdot \frac{a^2BC}{A^2} =$

$= ABC : \frac{a^3BC}{A^3} = ABC.A^3 : a^3.BC = A^3.BC : a^3BC$

$= A^3 : a^3$, oder $= B^3 : b^3$, oder $= C^3 : c^3$. (Aus der Lehre von Verhältnissen und Proportionen). Dieser Satz ist von der größten Wichtigkeit, wenn es sich um die Vergrößerung oder um die Verkleinerung eines Körpers z. B. eines Modelles u. dgl. handelt, wovon in den Vorlesungen und in den Zeichnungs-Lehrstunden ausführlich gehandelt wird.

Als ein Beyspiel der Berechnung dient Folgendes. Man soll den Kubik-Inhalt und den Flächeninhalt der Erde finden, wenn 15 Meilen auf einen Grad des größten Kreises gehen. Zuerst sucht man den Umfang dieses Kreises. Er ist $= 15.360 = 5400$ geographischen Meilen. Hieraus berechnet man den Durchmesser. Man findet ihn $= 1718.87338$ Meilen. Aus diesen beyden Zahlen findet man den Inhalt des größten Kreises. Dieser viermahl genommen gibt den Inhalt der Erdfläche $= 9231916$ geographische Quadrat-Meilen. Der Flächeninhalt eines größten Kreises ist $= 2320479$ geographische Quadrat-Meilen. Hieraus findet man den Kubik-Inhalt der Erde $= 2659$ Millionen Kubik-Meilen, wofür man gewöhnlich 2660 nimmt.

Ist der Durchmesser der Sonne 111mahl größer als der Durchmesser der Erde; so ist die Sonne dem körperlichen Raume nach 1367631mahl größer als die Erde. Verhält sich der Durchmesser der Erde zu dem Durchmesser des Mondes $= 1000 : 273$; so verhalten sich ihre Körperräume gegen einander $= 1000^3 : 273^3$. d. i. $= 1090$ Millionen : 20,346,417 fast $= 50 : 1$.

Die Oberflächen aber verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser. Die Oberfläche der Sonne ist 12321mahl größer, als die Oberfläche der Erde, und diese ist beynahe $13\frac{1}{2}$ mahl größer, als jene des Mondes.

§. X.

Folgerungen und Beyspiele der vorhergehenden Sätze.

Ganz unregelmäßige Körper, welche sich nicht in solche, deren Berechnung schon erklärt wurde, zerlegen lassen, werden berechnet, nähmlich ihre Inhalte gefunden, wenn man sie in ein mit Wasser oder Sand gefülltes Gefäß von bekanntem Inhalte, in ein hohles Parallelepipedon legt, und die Menge des ausfließenden, oder in dem Gefäße höher stehenden Wassers oder Sandes bemerkt. Die Differenz der beyden Inhalte gibt den Inhalt des eingetauchten Körpers.

So könnte man die Inhalte der Statuen, Vasen u. dgl. leicht finden. Größerer Bequemlichkeit wegen könnte zu solchen Berechnungen ein Gefäß dienen, dessen Inhalt durch eine darin angebrachte Scale leichter gefunden werden könnte, z. B. ein quadratisches Prisma von 10 oder 12″ innerer Weite, in dem ein in Linien und Theile der Linien eingetheilter Maßstab an einer Seitenwand, der Bodenfläche senkrecht, angebracht seyn könnte. Gesetzt man hätte zur Berechnung eines Körpers z. B. eines Steines, eines Stückes Metall u. dgl. Wasser gebraucht, und dieses wäre vor dem Eintauchen 19‴ nach dem Eintauchen hingegen 32‴ hoch gestanden. Ist nun das Gefäß ein quadratisches Prisma von 12″ innerer Weite; so ist der Inhalt des eingetauchten Körpers $= 12.12.\frac{32}{144} - 12.12.\frac{19}{144}$ Zoll $= (32 - 19)^{12} = 156$ Kubik-Zoll.

Wenn

Wenn p und n die Höhen des Wassers oder Sandes und n die Seite der Grundfläche bedeutet; so ist allgemein der Inhalt des eingetauchten Körpers $I = (p - n)s$. Nähmlich man findet den Inhalt des gegebenen Körpers in Kubik-Zollen, wenn man den Unterschied der beyden Höhen, die durch die Oberfläche des Wassers oder Sandes auf der Scale bestimmt werden, mit der Seite der Bodenfläche multiplicirt. Berechnet man die Inhalte von Linie zu Linie, so könnte man für alle gegebenen Körper jedes Mahl das Rechnen ersparen.

Sollte mehrere Genauigkeit verlangt werden; so müßte man die Scale in kleinere Theile, etwa $\frac{1}{4}$ zu $\frac{1}{4}$ Linien abtheilen. Dieselbe Vorrichtung dienet auch, die Inhalte verschiedener Gefäße z. B. der Kolben, Retorten, Kessel ꝛc. anzugeben.

Auch kann mittels einer richtigen Wage der Kubik-Inhalt irgend eines unregelmäßigen Körpers leicht gefunden werden, wenn es bekannt ist, wie viel 1 Kubik-Schuh oder 1 Zoll jener Materie wiegt, aus der der Körper besteht. Z. B. ein Kubik-Schuh gegossenes Eisen wiegt 410 ℔, also ein Kubik-Zoll $\frac{410}{12.12.12}$ ℔ $= 0{,}237$ ℔.

Wiegt also ein Körper z. B. 84 ℔ (allgemein n ℔) so enthält er, wenn p das Gewicht eines Kubik-Schuhes bedeutet, $\frac{12.12.12.\times 84}{410}$ Kubik-Zoll allgemein $\left(\frac{12^3.n}{p} \text{ Kubik}''\right)$.

Derley Berechnungen können in manchen Fällen, z. B. bey Bestimmung der Lasten für das Fuhrwerk, gute Dienste leisten.

Wenn die Abmessungen, Länge, Breite und Höhe, eines senkrechten Parallelipipedum in Klafter-Schuhen, Zollen und Linien ausgedruckt sind, so muß man dieses alles auf die kleinste Benennung, Linie, bringen, damit alle drey Abmessungen mit derselben Einheit gemessen werden. Das durch die Multiplication erhaltene Product wird so dann in Kubik-Zolle, dann in Kubik-Schuhe, endlich in Kubik-Klafter verwandelt, indem zuerst durch $1728 = 12.12.12$, dann wieder durch dieselbe Zahl, endlich durch $6.6.6 = 216$ getheilet wird.

Meistens wird man mit der Rechnung geschwinder fertig, wenn man die Größen der kleineren Gattung als Brüche der größeren Gattung vorstellet. Zur Erläuterung dienen folgende Beyspiele.

a) Die Länge einer gewissen Mauer ist $7°—3'$, die Höhe derselben $2°—4'$ und die Dicke $5'—9''$, der Inhalt derselben ist $= \frac{15°}{2} \cdot 3 \cdot \frac{23°}{24} = 19$ Kubik° und 36 Kubik'.

Ebenfalls wird sehr oft auch bey anderen Körpern die Rechnung leicht, wenn man Multiplication und Division nur anzeigt. Z. B.

b) Es soll ein runder Brunnen gegraben werden, dessen Weite $5'$ die Tiefe $4°—3'$ beträgt. Wie hoch belaufen sich die Kosten, wenn für ein Kubik' Erde auszuheben und wegzuführen z. B. 3 kr. bezahlt würde? In diesem Beyspiele ist ein Cylinder zu berechnen, der Durchmesser der Grundfläche (die Dicke des Cylinders) ist $5'$, die Höhe $4°—3'$.

Nach

Nach §. VIII. ist der Inhalt dieses Cylinders $= \frac{314.5.5,27}{4.100}$

$= \frac{314.27}{4.4} = \frac{157.27}{8} = 529\frac{7}{8}' = 530$ Kub.'

die Kosten sind $= \frac{53}{2}$ fl. $= 26$ fl. 30 kr. u. dgl.

c) Wie oft muß ein Wagen fahren, um die Erde von einem gewissen Orte nach einem Garten zu führen? Man läßt einen Erdkörper ausheben 10' lang, 10' breit und 6' tief. Vermöge der Beschaffenheit des dort befindlichen Erdreichs muß man annehmen, daß die Erde beym Ausheben sich um den 3. Theil vermehre. Der Wagen ist eine sogenannte Sandtruhe $3\frac{1}{2}'$ lang, 4' breit, und $1\frac{1}{4}'$ tief.

Der Erdkörper ist ein Parallelipipedon, seine Dimensionen sind 10', 10' und 6' also ist sein Kubik-Inhalt $= 10.10.6 = 600$ Kub.'. Dieß um den 3. Theil $= 200$ vermehrt gibt 800.

Der Rand der Sandtruhe ist ein Parallelipipedon, seine Dimensionen sind 4', $3\frac{1}{2}'$ und $1\frac{1}{4}'$. Demnach ist sein Inhalt $= 4.3\frac{1}{2}'.1\frac{1}{4}$ Kub.' $= \frac{48.42.5}{12.12.12}$ Kub.'

$= \frac{42.15}{3.12}$ Kub.' $= \frac{42.5}{12} = \frac{7.5}{2} = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$ Kub.'

wofür 18 Kub.' genommen werden können.

Also fährt der Wagen $\frac{800}{18} = 44$mahl ungefähr, wenn einmahl so viel als das andere Mahl geladen wird.

d) Man hat einen viereckigen Wasserkübel, der durch-

durchaus gleiche Weite z. B. $3\frac{1}{4}$ hat; seine Tiefe ist $4\frac{1}{2}$. Man will statt dieses Kübels einen runden (walzenförmigen) Wasserkübel von derselben Tiefe; er soll dieselbe Wassermenge enthalten (denselben Inhalt haben), wie der vierseitige Kübel. Wie groß wird seine Weite im Lichten seyn müssen?

Man hat hier zwey Körper, nähmlich ein quadratisches Prisma und einen Cylinder. Von dem erstern sind alle Dimensionen gegeben; von dem Cylinder aber nur seine Höhe, hier Tiefe, und sein Kubik-Inhalt, welcher dem Kubik-Inhalte des Prisma gleich seyn muß. Demnach kommt es hier darauf an, aus dem Inhalte des Cylinders seine Grundfläche zu finden. Dieses geschieht aber ganz leicht, wenn man den Inhalt als Product durch die Höhe als Factor theilt. Der Quotient wird die Grundfläche (Kreisfläche) geben, aus deren Inhalte ihr Durchmesser berechnet wird. Die Rechnung ist folgende:

Inhalt des Prisma in Kub.$'' = 39.39\,54$ Kub.''. Nun ist dieses auch der Inhalt des Cylinders, dessen Höhe, hier Tiefe, 54'' beträgt. Also muß die Grundfläche desselben, die Kreisfläche $\frac{39.39\,54}{54} = 39.39$ Quadrat-Zoll haben. Daher muß man den Durchmesser berechnen. Nach §. XXXIV., ist dieser $= \sqrt{\frac{39.39.400}{314}} = 44''$ beynahe. Also müßte der walzenförmige Wasserkübel fast 44'' Weite haben.

Man kann zwar diese, so wie die nächst folgenden Beyspiele auch mittels der im §. XI. erklärten Rechnungs-Methode bearbeiten. Um aber zu zeigen, daß derley Beyspiele auch ohne jene Rechnungs-Methode meistens leicht und geschwinde berechnet werden kön-

können, hat man sie etwas früher gesetzt, da die Gründe der Rechnung bereits in den vorigen §en enthalten sind.

Man berechnet gewöhnlicher Weise senkrecht gestümmelte Kegel und derley Pyramiden, wenn die Grundfläche, und die dieser entgegen gesetzte Abschnittsfläche mitsammen gleichlaufend sind, da man die halbe Summe dieser Flächen mit ihrem Abstande multiplicirt. Diese Art der Berechnung ist besonders in der Baukunst gebräuchlich.

Fleißige Anfänger können, um sich in den für jedes Geschäft nützlichen Berechnungen der Körper zu üben, folgende Beyspiele bearbeiten.

I. Um die Röhren für eine Wasserleitung zu legen, wird ein Graben ausgehoben, 3°— 2' lang, 3' breit und 4'—6" tief. Wie viel Kub.° beträgt die auszuhebende Erde?

II. Um ein gewisses Dorf wider Überschwemmung zu schützen ist beschlossen worden, daß längs dem Flusse, an welchem das Dorf liegt, ein Damm aufgeschüttet werden soll. Nach den Anträgen der Bauverständigen muß dieser Damm 450°—3' lang werden. Seine Höhe muß 1° betragen, die untere Breite (die Fußbreite) soll 2°—4', die obere Breite (in der Krone) 1°—2' haben. Wie viel Kub.° Erde sind hierzu erforderlich?

III. In einer Kiste, welche 5' lang, 2'—6" tief und 3' (im Lichten weit ist, befindet sich eine gewisse Waare. Diese soll in zwey andere Kisten vertheilet werden, jede zu 5' Länge. Der Inhalt der 1ten muß sich zu dem Inhalte der 2ten verhalten = 7 : 5. Dabey muß auf eine schickliche Form gesehen werden. Wie breit und wie tief müssen sie werden?

IV.

IV. Um das Wasser eines runden Springbrunnen zu sichern, muß das Becken desselben mit Leym ausgeschlagen werden, so daß dieser zwischen die Mauer und das Erdreich kommt. Wie viel ist hierzu erforderlich, wenn die Weite des Beckens sammt der Mauer 3°—4', die Dicke des Leymverschlages 9", die Tiefe 3' beträgt?

V. Wie viel Ziegel braucht man, um ein Thor zu verlegen, welches mit einem vollen Bogen geschlossen ist? Die Weite im Lichten ist 8', die Höhe bis zu dem Schlußsteine ist 12', die Dicke der Mauer 2'. Auf 1 Kub.° Mauerwerk rechnet man 1800 Ziegel.

VI. Jemand läßt in einem Steinbruche einen viereckigen Wasserbehälter (Grand zu einem Brunnen) verfertigen. Die Länge desselben ist 6', die Breite 4', die Höhe $3\frac{1}{2}$'. Die Weite im Lichten beträgt nach der Länge 5', nach der Breite 3', die Tiefe ist $2\frac{1}{4}$'. Kann dieser Wasserbehälter durch 4 Pferde, bey guten Straßen fortgeführet werden, wenn auf ein Pferd 10 Zentner gerechnet werden, und 1 Kub.' des Steines 80 ℔ wiegt?

VII. Für die Kubik-Klafter altes Mauerwerk auszuheben rechnet man 25 ℔ Sprengpulver, wie viel braucht man davon um das Grundmauerwerk eines alten Thurmes auszuheben? Es ist rund, hat im Durchmesser 5°—3' und in der Tiefe 4°—3'.

VIII. Wenn ein Kubik-Schuh Wasser 60 ℔ wiegt, wie groß ist der Druck auf die Bodenfläche eines konischen Reservoir, dessen Tiefe 5'—7", die obere Weite 7'—4" ist? Die Bodenfläche desselben verhält sich zur oberen Fläche = 6400 : 10000.

IX. Holz wird zuweilen nach dem Kubik-Maße bezahlt. Wie viele Kubik' Holz gibt ein Stamm, dessen größerer Durchmesser 2', der kleinere 1'—8", enthält, die Länge 10° ist?

X. Zu irgend einem technischen Gebrauche soll eine hohle metallene Walze gegossen werden. Ihre Länge ist 2', die Weite im Lichten 10", die Stärke des Metalls 10"'; 1 Kubik' desselben wiegt $\frac{3}{4}$ ℔, und das ℔ kostet 2 fl. Was wird diese Walze kosten?

XI. Mauern, welche vorzüglich dazu erbaut werden, damit sie zu Erderhöhungen (Terrassen) dienen, erhalten eine Böschung; sie werden nähmlich so gebaut, daß eine ihrer Seiten-Ebenen schief ist. Für die Kub.° Terraß-Mauerwerk von Klaub- und Bruchsteinen werden 40 fl. bezahlt. Was kostet eine Mauer von 42°—3' Länge? Ihre obere Breite ist 1', die untere 3'—6", die Höhe ist 2°—3', der Vorsprung im Grunde ist 6", die Tiefe 5'.

XII. Jemand läßt auf einem seiner Güter einen Teich graben.

Dessen Länge beträgt 120° — 4'
" Breite " 80 — .
" Tiefe " — — 4'

der Böschungswinkel ist 45 Grade. Für die Kubik-Klafter Erdaushebung sammt Verführen und Planiren werden 2 fl. bezahlet. Was kostet die Aushebung dieses Teiches?

§. XI.

Von dem Schicht- oder Schachtmaße. Beyspiele. Visirstäbe.

So wie man die im Vorigen angeführte Eintheilung des Flächenmaßes gebraucht, theilet man auch die Kub.° in 6 Kubik-Klafter-Schuhe, 1 Kubik-Klafter-Schuh in 12 Kubik-Klafter-Zolle u. s. f.

Ein Kubik-Klafter-Schuh ist ein senkrechtes Parallelipipedum, das $1^{\square\circ}$ zur Grundfläche und 1′ zur Höhe hat. Ein Kubik-Klafter-Zoll ist ein senkrechtes Parallelipipedum, das $1^{\square\circ}$ zur Grundfläche und 1″ zur Höhe hat, u. s. w.

Demnach ist

1 Kubikkl.′ (1 Schicht oder Schacht′) = 36 Kub.′

1 Kubikkl.″ (1 Schicht oder Schacht″) = 72.72 Kub.″
3 Kub.′

1 Kubikkl.‴ (1 Schicht oder Schacht‴) = 72.12.72.12
= 432 Kub.‴ = $\frac{1}{4}$ Kub.′ u. s. f.

Nach dieser Eintheilung und Benennung kann sehr leicht jede Multiplication verrichtet werden, z. B.

Länge 3° — 0′ — 4″
Breite 0 — 5 — 3

1 — 3 — 2
1 — 0 — 1 — 4
0 — 0 — 9 — 2

2 — 4 — 0 — 6

Dicke 0 — 4 — 6

0 — 5 — 4 — 2
0 — 5 — 4 — 2
0 — 1 — 4 — 0

2 — 0 — 0 — 4

$5' = 3' + 2'' = \frac{1}{2}^{\circ} + \frac{1}{3}^{\circ}$

3″ von 2′ = $\frac{1}{8}$

$4' = \frac{1}{3}^{\circ} + \frac{1}{3}^{\circ}$

nähmlich 2 Kub.° 0 Kubikkl.′ 0 Kubikkl.″ 4 Kubikkl.‴

Oder nach der 2ten Methode

Länge	3°	—	0	—	4			
Breite	0	—	5	—	3			
	0	—	15	=	0	—	40	
					9	—	0	— 24
	2	—	4	—	0	—	6	
Dicke	0	—	4	—	6			
	0	—	8	—	32	—	0	— 48
					12	—	48	— 0 — 72
	2	—	0	—	0	—	4	— 6 —

und so fort.

Sollten in irgend einem Falle solche Körper vorkommen, die weder Prismen, noch Pyramiden u. s. f. doch von ebenen Flächen begränzet sind; so zerlegt man diese Körper in solche, deren Berechnung bekannt ist.

In der Baukunst, wenn es sich um die Verfertigung der Vorausmaßen handelt, kommt die Zerlegung eines Körpers in andere Körper oft vor. In solchen Fällen sind mehrere Aufrisse, zuweilen auch Grundrisse dieser Körper erforderlich. Beyspiele sollen in den Vorlesungen vorkommen.

Die Berechnung der Inhalte der Fässer hat viele Anwendungen, Die gebräuchlichsten Methoden dieser Berechnung sind folgende.

A. Man betrachtet das Faß als einen geometrischen Körper, welcher aus zwey gleich großen gestümmelten Kegeln, die mit ihren Grundflächen sich berühren, zusammen gesetzet ist.

B. Man betrachtet das Faß als einen Cylinder von der Länge des Fasses, dessen Grundfläche das Mit-

tel zwischen dem Boden des Fasses und dem Querschnitte beym Spunde wäre.

C. Man nimmt von der Bodenfläche des Fasses $\frac{1}{3}$ und von dem Querschnitte beym Spunde $\frac{2}{3}$. Diese Summe wird mit der Länge des Fasses multiplicirt. Sämmtliche Abmessungen werden im Lichten genommen.

D. Man addirt $\frac{1}{3}$ vom Durchmesser der Bodenfläche zu $\frac{2}{3}$ vom Durchmesser der Spundtiefe. Diese Summe sieht man als den Durchmesser eines Cylinders an, dessen Länge die Länge des Fasses ist.

E. Man berechnet sowohl die mittlere Cylinder-Fläche (C) als die nach D, nimmt von diesen beyden die halbe Summe, und multiplicirt sie mit der Länge des Fasses.

Außer diesen 5 Methoden hat man noch viele andere, wie z. B. jene von Lulof, Müller, Camus, Guldinus u. s. f. welche aus der höhern Geometrie abgeleitet sind, meistens aber etwas zusammen gesettere für die Practik nicht ganz anwendbare Berechnungen erfordern, weßhalb man sie hier aufzuführen für unnöthig erachtet.

Um den Kubik-Inhalt der in einem nicht ganz vollen Fasse befindlichen Flüssigkeit zu berechnen, wenn die Achse des Fasses genau wagerecht liegt, kann man mit ziemlicher Sicherheit nach folgenden Regeln verfahren.

1. Man berechnet zuerst den Inhalt des benetzten Bodenstückes, welche Fläche ein Kreisabschnitt seyn wird. Diesen Inhalt multiplicirt man mit der Länge des Fasses, so hat man den Inhalt des zwischen den beyden Flächen der Böden befindlichen, walzenförmigen Stückes.

2. Dann berechnet man nach einer der vorerwähnten Methoden den Inhalt des ganzen Fasses. Davon zieht man den Inhalt des ganzen cylindrischen Raumes ab, dessen Grundflächen die beyden Faßböden sind. Der Rest ist der Inhalt der eigentlichen Ausbäuchung des Fasses.
3. Von diesem letztern Inhalte nehme man den so vielten Theil, als das benetzte Stück der Bodenfläche von der ganzen Bodenfläche beträgt, so hat man den Inhalt von dem angefüllten Theile der ganzen Ausbäuchung.
4. Dieser jetzt gefundene Inhalt, zu dem in 1. berechneten cylindrischen Stücke addirt, gibt den verlangten Inhalt.

Hierbey wird angenommen, daß beyde Bodenflächen von gleicher Größe seyn, und daß ein Theil dieser Flächen von der Flüssigkeit benetzet sey.

Um zu finden, wie viele Maße (Kannen) ein Faß enthalte, braucht man eigene Maßstäbe, die man Visierstäbe heißt. (Fig. 29.)

Um sie zu verfertigen mißt man den Durchmesser eines cylindrischen Gefäßes, das gerade 1 Maß (Kanne) enthält. Diesen Durchmesser trägt man auf zwey rechtwinkelig zusammen gesetzte Linien von A nach B und nach C, und zieht BC; so ist diese der Durchmesser einer Fläche, auf der zwey Maß von der nähmlichen Höhe stehen können. Man trägt ferners BC von A nach D, und zieht BD; so ist diese der Durchmesser eines Gefäßes, das 3 Maß enthält, von gleicher Höhe. Daher gibt EB vier, BF fünf Maß u. s. f.

Hat man nun eine Anzahl solcher Durchmesser; so trägt man sie auf die eine Seite eines viereckigen Maßstabes; auf die andere Seite desselben wird die Höhe

des Maßgefäßes so oft aufgetragen, als es erforderlich ist.

Wird nun mit diesem Maßstabe ein cylindrisches Gefäß gemessen, so zeigt die Scale der Durchmesser, wie viele Maße auf der unteren Kreisfläche stehen können; das Längenmaß aber, wie viele Maße auf einander stehen. Eine Zahl mit der andern multiplicirt gibt die in dem cylindrischen Gefäße enthaltene Anzahl von Maßen an.

Visierstäbe für prismatische Gefäße werden verfertiget, wenn man ein Gefäß mit einem quadratischen Boden nimmt, in dasselbe eine Maß (z. B. Wasser) gießt, und die Seite des Quadrates auf einem viereckigen Stabe so oft aufträgt, als es nöthig ist.

Auf die andere Seite des Stabes wird die Höhe des im Gefäße enthaltenen Wassers eben so oft getragen.

Der Gebrauch ist dieser. Man mißt mit der Seite des Stabes, worauf die Seite der Grundfläche enthalten ist, die Länge und Breite, d. i., die Grundfläche des Wasserbehälters (des gegebenen Gefäßes). Mit der andern Seite, wo die Höhen aufgetragen sind, wird die Höhe gemessen.

Diese Zahlen mit einander multiplicirt geben die verlangte Anzahl der Maße oder Eimer.

Daß bey der Verfertigung, und dem Gebrauche solcher Visirstäbe auf die Verschiedenheit der Formen, welche die Fässer haben, zu sehen ist, versteht sich von selbst.

Auch hat man Visierstäbe verfertiget, mit welchen man Haufen Getreide, oder ganze Schiffe visiren kann.

Hier-

Hierüber siehe Leutmanns Geometrie. St. Petersburg 1718.

§. XII.

Anwendungen und Zusätze des Vorhergehenden.

Brennholz wird in Klaftern nach dem Kubik-Maße verkauft. Die Klafter hält meistens 6′ Höhe und 6′ Breite. Die Dicke aber oder die Scheiterlänge ist nicht überall gleich. Sie ist z. B. $4' - 3\frac{1}{2}'$, $3' - 2\frac{1}{2}'$ u. s. f., wie es in jedem Orte eingeführt ist.

Man erhält demnach $6.6.4 = 144$ Kub.′, oder $6.6.3 = 108$ Kub.′, oder 90 Kub.′ u, dgl.

Weil aber beym Aufrichten der Holzklaftern zwischen den Scheitern Räume entstehen, so müssen auch diese in Betrachtung gezogen werden. Man hat gefunden, daß die Anzahl der Kub.′ des Stammholzes sich, wenn es gespaltet, und in dem gewöhnlichen Klaftermaße aufgerichtet wird, um die Hälfte vermehre. Hat man nun Stämme, welche z. B. 2340 Kub.′ Stammholz geben, und man will wissen, wie viele Kub.′ Scheiterholz sie geben; so ist $2340 + \frac{2340}{2}$ $= 2340 + 1170 = 3510$ Kub.′ Klafterholz.

Sind ferners die Scheiter z. B. $3\frac{1}{2}'$ lang; so gebe dieß $\frac{3510}{6.6.3\frac{1}{2}} = \frac{3510}{126} = 27\frac{1}{2}$ Klafter Holz.

Die Stämme sind meistens gestümmelte Kegel, seltener Cylinder. Gewöhnlich wird bey der Berechnung statt der Achse des Kegels dessen Seite genom-

nommen und mit der Kreisfläche multiplicirt, welche zwischen der oberen und unteren Kreisfläche die mittlere Proportionale ist. In den meisten Fällen ist diese Berechnungsart hinlänglich genau.

Ist man mit einem Werkzeuge versehen, mit welchem sowohl die Durchmesser als auch die Höhen der Baumstämme gemessen werden können (mit dem Dendrometer), so kann man bestimmen, wie viel Holz irgend ein Baum geben wird.

Bauholz wird größten Theils nach dem Current-Schuh verkauft; Latten, Bretter u. dgl. nach dem Stücke, Duzend, Schock u. s. f.

Das übrige Holz, wozu vorzüglich das Blockholz gehört, wird nach der Seltenheit und Schönheit, ausländische Hölzer (Bux-Eben-Rosenholz u. s. f.) werden nach dem Gewichte verkauft.

Als ein Beyspiel der Verwandlung der Parallelipipeden. In einem Lande ist die Holzklafter 6′ lang, 6′ hoch und $4\frac{1}{2}$′ breit. Das Holz wird in eine Factorey verkauft, bey der die Klafter nach den vorigen Maßen $6\frac{1}{4}$′ hoch, $6\frac{1}{4}$′ lang und 4′—$8\frac{1}{4}$″ breit ist. Wie viele Landklafter = x gehören zu einer gewissen Menge z. B. zu 5000 Factorey-Klafter?

Man findet $x = \frac{75.75.56\frac{1}{4}.5000}{72.72.54}$ Landklafter.

= $5651\frac{1}{2}$ Landklaftern ungefähr.

Es ist leicht durch Zeichnung oder Rechnung die Anzahl von Brettern, Riegeln, Latten u. s. f. zu finden, welche aus einem Stamme geschnitten werden können.

Denn wird (Fig. 30.) dem Kreise A_1B_2 als Quer-

Querschnitt des Stammes ein Quadrat abcd eingeschrieben; so kann man dieses nach Erforderniß eintheilen. Meistens ist die Dicke der Segmente, Schwarte, A, 1, B, 2, von $1\frac{1}{2}$ Zoll bis 2, und für den Schnitt der Säge wird Ein Viertel Zoll gerechnet. Überhaupt aber muß hierbey auf das Verhältniß der beyden als Kreisflächen angenommenen Querschnitte gesehen werden.

Auf ähnliche Art verfährt man, wenn Riegeln oder Latten geschnitten werden sollen.

Jene Rechnung, welche zeigt, wie viele Steine, Ziegel, Holz, Kalk, Sand u. s. f. zu irgend einem Baue erforderlich sind, wird das Vorausmaß genennet. Die Rechnung aber, welche die Baukosten ausweiset, heißt der Anschlag oder Überschlag.

Derley Rechnungen werden ohne besondere Anstände verfertiget, wenn man weiß, wie viel für die als Einheit angenommene Größe z. B. für die Quadrat-Klafter, Kubik-Klafter, an Arbeit und Materiale nöthig ist. So können z. B. die Kosten des Baues was immer für einer Mauer berechnet werden, wenn bekannt ist, wie viel Erde zu dem Grundmauerwerk ausgehoben werden muß, wie viele Klafter Grundsteine man braucht, wie viel Kalk und Sand zum Mörtel (Malter) für eine Kubik-Klafter Grundmauerwerk nöthig sind, wie viele Steine oder Ziegel ein Maurer in 1 Tage verarbeitet, wie viele Handlanger zu dieser oder jener Arbeit nöthig sind, wie viel ein Wagen z. B. eine Sandtruhe ladet, nach was für einem Verhältnisse sich Kalk und Sand vermehret u. s. f.

Diesen Rechnungen muß immer eine genaue, im größern Maßstabe verfertigte Zeichnung der Gebäude

zum

zum Grunde liegen, als: Grundrisse, Aufrisse, Längen und Querdurchschnitte.

Andere Theile, als Fensterrahmen, Schmid- Schlosser- und Glaser, auch in vielen Fällen die Steinmetzarbeit, werden an die Handwerksleute für bestimmte Preise verdingt. Gewöhnlich wird dem ganzen Baubetrage noch nach Beschaffenheit der Umstände $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$ aller Kosten zugerechnet.

Jene Methoden, nach welchen die Maurermeister, Steinmetze u. s. f. ihre Arbeiten zu berechnen pflegen, weichen von den zuvor gegebenen Regeln ab. Siehe Fr. Sax practischer Unterricht zur Berechnung aller Bestandtheile eines Gebäudes. Wien 1808. bey Doll. 8. m. K.

Bey manchen Baugegenständen z. B. bey der Aufschüttung eines Dammes, der Aushebung eines Wassergrabens u. dgl. ist vorzüglich auch auf das Rücksicht zu nehmen, was in der Geometrie von Berechnung der Flächen u. s. f. gesagt wurde. Über dieß ist noch zu bemerken, daß nicht in allen Fällen mit einem Mittel-Profile (verticalen Querschnitte), dessen Inhalt die Summe der Inhalte der verschiedenen Querschnitte ist, getheilet durch die Anzahl derselben, die Rechnung richtig gemacht werden kann. Beyspiele sollen in den Vorlesungen vorkommen.

Solchen in der Landes-Cultur öfters vorkommenden Berechnungen wird eine genaue Aufnahme der Gegend und ein mit allen Cotirungen versehener Niveau-Plan zum Grunde gelegt, wobey auf Vermehrung der Erde beym Ausheben, und auf Verminderung derselben beym An- oder Aufschütten (auf näheres Zusammenrücken der Theile durch ihren Druck, auf das Setzen) Rücksicht genommen werden muß.

Die

Die Berechnung der Oberflächen kommt sowohl in der Baukunst, als auch in andern technischen Künsten etwas seltener als die Berechnung der Kubik-Inhalte vor. Die meisten Beyspiele werden nach §. XXII. XXIV. d. Geom. §. VIII. X. der Stereometrie leicht berechnet.

Zur Übung können folgende dienen.

I. Fig. A 31. stellet das Dach eines Kirchthurmes vor. Die Gemeinde, welche die Baukosten von der ganzen Kirche bestritten hat, beschloß das Thurmdach ganz mit weißem, verzinnten Bleche überziehen zu lassen. Der dießfällige Kosten-Anschlag weiset dazu 3220 fl. aus. Was hat man für den □′ gerechnet?

II. Jemand muß eine Partie Kupferstiche, Zeichnungen und Mahlereyen verschicken. Dazu ist schon eine sehr brauchbare Kiste vorräthig, diese aber muß inwendig mit gutem Papiere ausgepappet werden. Ein Bogen desselben ist lang 1′—2″ und breit 1′—5″. Die Kiste hat im Lichten folgende Maßen:

Weite der Länge nach . $4\frac{1}{2}'$
Weite nach der Quere . $4'$
Tiefe . . . . . $2\frac{1}{2}'$

Die Fläche des Deckels wird nicht überzogen. Wie viele Bogen Papier wird man brauchen?

Man findet: $\frac{(48+54)2.30+48.54}{14.17} = 36\frac{7}{49}$

wofür man 37 nehmen kann.

III Aus Erfahrung weiß man, daß für $1\square'$ mit irgend einer Farbe anzustreichen, 2, $2\frac{1}{2}$, 3 Loth derselben nöthig sind. Wie viel Farbe braucht man um

die

die Fläche eines Daches anzustreichen, welches die Fig. 32. vorstellet?

Alle Prismen, Parallelipipedon, Cylinder, Pyramiden und Kegel, wenn sie gleiche Höhe haben, verhalten sich wie ihre Grundflächen, und wenn sie gleich große Grundflächen haben, so verhalten sie sich wie ihre Höhen.

Denn die Prismen, Parallelipipeden und Cylinder verhalten sich gegen einander wie ihre Inhalte, d. i. wie die Producte aus ihren Grundflächen in ihre Höhen; die Pyramiden und die Kegel aber, wie die Producte aus dem dritten Theile ihrer Höhen in ihre Grundflächen; also verhalten sich diese Körper, wenn ihre Höhen gleich groß sind, wie ihre Grundflächen, und wenn ihre Grundflächen gleich groß sind, wie ihre Höhen.

Daher verhalten sich die Cylinder von gleichen Höhen gegen einander wie die Quadrate ihrer Durchmesser, d. i. wie die Quadrate der Durchmesser ihrer Grundflächen.

Diese Sätze haben bey der Verwandlung und Theilung der Körper manche Anwendung. So z. B. kann man ein Parallelipipedon, einen Würfel und ein Prisma in wie viel immer gleich große, oder proportionale Theile theilen, wenn man dasjenige, was von der Theilung und der Verwandlung der Flächen gesagt wurde, gut verstanden hat.

Die Theilung des Würfels in 6 gleich große quadratische Pyramiden ist die Erfindung eines neuern Geometers, W. Saunderson.

Jeder Körper von gegebenem Inhalte kann in einen Würfel verwandelt werden, wenn man aus diesem Inhalte die Kubik-Wurzel zieht, welche die Länge der Seite des Würfels ist.

Auch

Auch kann man einen Würfel angeben, welcher 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 . . . mahl größer ist, als ein gegebener Würfel; denn es ist: $x = \sqrt[3]{2}l$, $= \sqrt[3]{3}l = \sqrt[3]{n}l$, wenn x die Seite des verlangten Würfels und n die Vergrößerungszahl bedeutet.

Die Aufgabe jeden Würfel zu verdoppeln war unter den Geometern des alten Griechenlandes sehr berühmt.

Für ein Beyspiel der Verwandlung S. 219. d.

Für ein Beyspiel der Theilung der Körper Nro. II. S. 221.

§. XIII.

Einige Anwendungen der vorigen Sätze.

Außer dem zuvor erklärten Schrägmaße hat man bey Zeichnung der Körper, z. B. bey Abzeichnung der Modelle, andere Werkzeuge nöthig. Außer dem Zirkel und Lineale das Rollmaß und den Tastenzirkel (Greif- oder Bauchzirkel).

Folgende leichte Auflösungen verschiedener im gemeinen Leben öfter vorkommender Fälle haben viele Anwendungen.

Soll der Mittelpunct der Grundfläche des auf die Achse senkrechten Querschnittes eines Cylinders gefunden werden; so zeichnet man einen dieser Grundfläche gleichen Kreis entweder mittels des Tastenzirkels, des Rollmaßes, oder ganz practisch durch Anpassen mit dem Papiere. Man schneidet dann die Kreisfläche genau aus, legt sie zweymahl zusammen, und erhält einen Viertelzirkel-Ausschnitt. Wird der Bogen desselsel-

selben auf den Umfang gelegt; so gibt die Spitze den Mittelpunct des Kreises.

Soll auf der gebogenen Oberfläche eines Cylinders (einer Walze) eine mit der Achse desselben Parallele gezogen werden; so kann dieses auf mehrerley Art geschehen.

Auf dem senkrechten Cylinder AB (Fig. 33.)

Man sucht die Mittelpuncte 1, 2 der beyden Kreisflächen, und befestiget an dem einen z. B. 2 eine Latte 4.2; die an dem Mittelpuncte 1 der andern Kreisfläche gehaltenen Latte 1.3 wird so lange um diesen Punct herumgewendet, bis die Linien 1.3 und 2.4 in einer und derselben Ebene liegen. Zieht man dann entweder mit dem Lineale, oder mit einer in Farbe getauchten Schnur die Gerade m.o; so ist diese mit der Achse 1.2 parallel.

Auf dem schiefen Cylinder CD ließe sich zwar dasselbe Verfahren anwenden, wie auf dem senkrechten; doch verfährt man sicherer beym schiefen und senkrechten Cylinder, besonders wenn dieser nicht von beträchtlicher Länge ist, nach folgender Art. (Fig. 34.)

Man befestigt zwey Latten oder Lineale ab, cd so neben einander, daß sie gleiche Abstände, 1.2, 3,4 haben; es muß aber die Weite 1,3 oder 2,4 größer als die Länge des gegebenen Cylinders seyn. Legt man diese Vorrichtung auf den Cylinder; so kann man wie viel immer mit seiner Achse Gleichlaufende zeichnen, da man diese längs 1.3, oder 2.4 fort zieht.

Stellet man den senkrechten Cylinder auf eine wagerechte Ebene; so kann mit einem Senkbley oder

Win-

Winkelhaken jede mit der Achse Parallele bestimmt werden. Dasselbe wird auch mittels des Netzes leicht bewerkstelligt.

Soll auf der gebogenen Oberfläche eines Cylinders eine mit dem Umkreise der Grundfläche Parallele gezeichnet werden; so wird ein Winkelhacken 1.2.3 an die Grundfläche gelegt, auf diesem der gegebene Punct n bemerkt. Dann wird der Winkelhacken um den ganzen Cylinder herum gedreht, und es werden so viele Puncte angemerkt, als man nöthig hat, durch welche die Kreislinie geführt wird.

Von der Theilung der Daumenwellen wird in der Maschinenlehre gehandelt.

Theilet man die Dicke des Cylinders in 7 gleiche Theile, und trägt 22 solcher Theile auf einen Streifen von etwas starkem Papiere; so gibt dieser, wenn er nach der Oberfläche gebogen wird, die verlangten parallelen Kreise am senkrechten und am schiefen Cylinder. Auf ähnliche Art wird mittels eines Streifens von Bley der Durchmesser jeder Säule ohne Rechnung gefunden. S. Geom. §. XVI.

Die Methode verschiedene krumme Linien zu zeichnen, welche entstehen, wenn z. B. ein Cylinder-Gewölbe von Kugel-Gewölben durchschnitten wird, die Zeichnung der Cylindroiden, Cycloimber, Ellipsimber, der Geradlinien von Thurmkuppeln u. dgl. gehören in die Stereotomie.

§. XIV.

Von den Netzen der Körper.

Wenn die einen Körper umgebenden Flächen so an einander gelegt dargestellet werden, daß sie bey einer richtigen Zusammenbeugung einen hohlen Körper bil-

bilden, welcher dem gegebenen gleich ist; so nennet man diese Zeichnung das Netz eines Körpers. Diese Netze dienen dazu theils um hohle Körper zusammenzusetzen, theils auch andere gegebene Körper mit dünneren Körpern zu überziehen, und verschiedene Zeichnungen auf ihre Oberfläche zu bringen.

Folgende drey Aufgaben sind nicht unwichtig; es lassen sich aus ihnen die Regeln zur Verfertigung der Netze vieler anderer Körper leicht ableiten.

Soll man (Fig. 35.) das Netz eines senkrechten Cylinders zeichnen, so theilet man den gegebenen Durchmesser in 7 gleiche Theile und trägt 22 solcher Theile auf eine Gerade AB, zieht AC, und darauf die Senkrechte BD; dann trägt man die Höhe des Cylinders darauf, schließet das Rechteck mit der Linie CD, und hängt oben und unten die Kreisflächen daran.

Die Peripherie AB kann, wenn der Durchmesser gezogen ist, auch durch Rechnung gefunden und nach dem Maßstabe aufgetragen werden.

Soll man das Netz einer gestümmelten 3seitigen senkrechten Pyramide verfertigen (Fig. 36.); so zeichnet man zuerst die Grundfläche ABC, trägt die Länge einer Seite von M nach O, zeichnet über NS das obere ähnliche Dreyeck, zieht AN und BS, die sich verlängert in i berühren. Aus diesem Puncte werden mit dem Halbmesser iA die ähnlichen Bögen DABE, RNSP, beschrieben, man trägt die Seiten der beyden Dreyecke darauf, und verbindet sie mit geraden Linien.

Das Netz eines senkrechten Kegels wird gezeichnet, da man (Fig. 37.) eine Gerade AB zieht, von B nach A die Höhe des Kegels trägt, aus der Spitze

A mit dem Halbmesser 1D den Kreisbogen 3D4,5 beschreibt. Jede Hälfte desselben B3 oder B5 muß $\frac{11}{7}$ des Durchmessers enthalten. Die Kreisfläche R und das Dreyeck A3D4,5 geben zusammen das Netz des Kegels.

Das Netz des Würfels, eines senkrechten oder schiefen Prisma, einer gestümmelten senkrechten oder schiefen Pyramide u. m. dgl. ist aus dem, was über diese Zeichnungsaufgaben schon gesagt worden ist, ohne große Mühe abzuleiten, und eine Übung für lernbegierige Schüler.

Die Netze anderer Körper, welche keine wesentlichen Anwendungen darbiethen, z. B. des Tetraeders, Icosaeders u. dgl. m. können ebenfalls ohne große Mühe gezeichnet, aber hier nicht aufgeführet werden.

Eben so werden sich im Zeichnen der Netze zusammengesetzter, mit Ebenen begränzter Körper keine großen Schwierigkeiten ergeben. Die Zeichnung der Netze zusammengesetzter, mit krummen Flächen allein, oder mit gebogenen und ebenen Flächen bekränzter Körper gehört größten Theils in die höhere Geometrie, und kann hier nicht vorgetragen werden.

Die Zeichnung der Netze ist für die Verfertigung der Modelle, und für die Zeichnung verschiedener Gegenstände auf gebogenen Flächen, daher für die Verschneidung der Säulenglieder, der Rosetten, Vasen u. dgl. nothwendig.

Bey den Gliedern der Architectur, wenn sie Profile haben, welche aus Kreisbögen bestehen, ist es nothwendig die Länge derselben zu wissen (sie zu rectificiren), um diese als die Breite des Netzes zu gebrauchen, und die gegebene Zeichnung auf die gebogene Fläche zu bringen. Beyspiele hierüber finden sich in den Elementar-Täfelchen, wo mehrere Profile verzierter Glieder z. B. der Hohl- Kehl- Rinnleisten u. s. f. vorkommen. Als ein leichtes Beyspiel dient Fig. 29. Sind

die

die Bögen 1.2 und 2.3, aus welchen die krumme Linie 1.2.3 besteht, z. B. von 60°; so kann aus einem willkührlichen Puncte c ein Kreis beschrieben, und in diesem eine Sehne or gezogen werden, welche einen Bogen von 120° abschneidet, der mit demselben Halbmesser wie die Bögen 1,2 und 2,3 beschrieben seyn muß. Die Länge dieses Bogens or kann man zwar nach Geom. §. XVII. ziemlich genau, schärfer aber nach Geom. §. XXXII. durch Rechnung angeben. Diese Länge ist die Breite (die Höhe) einer Ebene, auf der die verlangte Zeichnung verfertigt werden kann. Sodann wird diese Zeichnung durch Beugen (Anpassen) auf die gebogene Fläche M gebracht.

Auf ähnliche Art wird vorgegangen, wenn die Halbmesser a1 und b3 einander nicht gleich sind, und wenn es bekannt ist, der wie vielte Theil des ganzen Umkreises, oder mehrerer Umkreise die Bögen 1,2, dann 2,3 u. s. f. sind, oder wie viel Grade sie enthalten.

In vielen Fällen ist die Rectificirung dieser Bögen der Profile sehr schwer, und gehört gänzlich zur höhern Geometrie.

Dahin gehört auch die Berechnung der Oberflächen und der körperlichen Inhalte vieler Glieder der Säulenordnungen, deren Profile keine Kreisbögen, sondern andere krumme Linien sind.

In manchen Fällen wird der Inhalt der Oberfläche aus dem Netze leicht gefunden. Beyspiele hierüber sollen in den Vorlesungen vorkommen.

a. Rönneberg von Ausmessung der nach der Länge liegenden und nicht vollen Fässer. Wismar 1747.

b. Hubert Vergleichung fremder Fruchtmaße gegen das Wirzburgische. Wirzburg 1777.

c.

c. Anweisung zum Messen des stehenden Holzes. Frankfurth 1758.

d. Vierenklee, Anfangsgründe der Arithmetik und Geometrie, für jene, die sich dem Forstwesen widmen wollen. Leipzig 1767.

e. Krüger, von Ausrechnung des Inhaltes roher und behauener Stämme. Berlin 1780.

f. Abt, Anweisung zur Ausmessung und Berechnung des Bau- und Nutzholzes. Berlin 1783.

g. Tafeln für die Werthe geschlagener Bau- und Werkhölzer. Giessen 1771.

h. Beyträge zur Forstwissenschaft aus der practischen Geometrie. Leipzig 1789.

i. Hofmann, von Berechnung des Bauholzes. Königsberg 1799.

k. Marpurg, Anfangsgründe des Progressional-Calculs, nebst der Construction der eckigen geom. Körper. Berlin 1774.

l. Schulze, Taschenbuch der Drepecksmeßkunst. Berlin 1783.

m. Die Elemente der Stereometrie, und deren Anwendung auf den Steinschnitt. Von D. Kosmann. 1. Thl. Berlin 1801. 8.

n. Trattato della misura delle fabbriche. Di G. A. Alberti. Venezia. 1757. 8. c. f.

§. XV.

Von einigen krummen Linien.

Die Geometrie der krummen Linien, der Curven, ist einer der weitläufigsten Gegenstände der reinen Mathe-

matik. Die ganze Lehre der krummen Linien wird entweder synthetisch nach der Methode des alten Geometer, oder analytisch mit Beyziehung der Trigonometrie und der algebraischen Analysis behandelt. Hier genügt es, die nothwendigsten krummen Linien zu nennen, und ihre Zeichnung zu erklären.

Von den Kegelschnitten.

Schneidet man einen Kegel parallel mit seiner Grundfläche, so ist der Schnitt dieser ähnlich, demnach eine Kreisfläche, welche desto kleiner wird, je mehr sie sich von der Grundfläche entfernt, je weiter sie davon absteht. §. VI. und §. VII.) Wird der Kegel durch seine Achse geschnitten, so erhält man ein Dreyeck. Dieses ist gleichschenkelig, wenn der Kegel ein senkrechter Kegel ist, wenn nähmlich die aus seiner Spitze nach dem Mittelpuncte seiner Grundfläche gezogene Gerade dieser Fläche normal ist.

Schneidet man aber den Kegel gleichlaufend mit seiner Seite, gleichlaufend mit seiner Achse, oder schief gegen die Seite und gegen die Grundfläche; so erhält man gewisse krumme Linien, welche Kegelschnitte oder Kegelschnitt-Linien heißen.

Wird der Kegel parallel mit seiner Seite geschnitten, so erhält man eine Fläche, die zum Theil mit einer krummen Linie begränzt ist, welche man Parabel nennt.

Wird der Kegel schief gegen die Grundfläche und gegen die Seite geschnitten; so erhält man eine mit einer einzigen krummen Linie begränzte Fläche, welche eine Ellipse heißt. Diese wird auch erhalten, wenn ein Cylinder mit einer gegen seine Achse schiefen Ebene geschnitten wird.

Wird endlich der Kegel parallel mit seiner Achse geschnitten; so erhält man eine zum Theil mit einer krum-

men

nen Linie begränzte Fläche. Diese krumme Linie heißt Hyperbel.

Die Parabel (Fig. 38.) ist eine krumme Linie, eine Curve, mit zwey immer fortlaufenden Schenkeln. Eine Gerade AX, ihre Achse, theilt sie in zwey Hälften. In dieser Geraden liegt ein Punct F, dessen Abstand von dem Scheitel der Parabel A die Figur der Parabel bestimmt. Dieser Punct F heißt der Brennpunct der Parabel. Wenn man nähmlich an einem Puncte M des Umfanges aus F die Gerade FM und durch M die Parallele MN mit der Achse zieht; so machen beyde mit der Berührungslinie oder Tangente Tt in M gleiche Winkel, so daß Lichtstrahlen, die gleichlaufend mit der Achse in einen paraboliſchen Spiegel fallen, alle nach F geworfen werden; und umgekehrt, kämen sie aus dem Brennpuncte F; so würden sie mit der Achse der Parabel gleichlaufend fortgehen. Zieht man von dem Puncte M eine Normale MP auf die Achse, eine Ordinate des Punctes M; so ist FM = AP + AF. Es ist nähmlich der Leitstrahl FM so groß als die Abscisse AP und der Abstand des Brennpunctes F vom Scheitel A, das ist AF. Die doppelte Ordinate des Brennpunctes, nähmlich die Gerade 1.2, nennet man den Parameter der Parabel. Verlängert man die Achse AX so, daß A3 = AF ist, und macht man im Puncte 3 die Normale 4.5; so ist FM = M4 vermöge der Natur der Parabel. Nun ist aber M4 = P3 = AP + A3 = AP + AF = FM = AP + $\frac{p}{4}$, wenn durch p der Parameter der Parabel ausgedruckt wird. Aus diesem folgt eine bequeme Methode die Parabel zu zeichnen. Das Quadrat der Ordinate PM ist so groß, als das Rechteck von AP in das Vierfache des Abstandes AF. Hieraus leitet man ab, daß sich die Quadrate der Ordinaten so gegen einander verhalten, wie die zu diesen Ordinaten gehörigen Abscissen; also verhalten sich diese so gegen einander, wie die Quadrat-Wurzeln aus den Ordinaten. Die Gerade 4.5 nennt man die Leitlinie.

Soll (Fig. 39.) eine Parabel gezeichnet werden, die durch einen Punct O geht, so wird

1tens, die Gerade CD und mit dieser durch den gegebenen Punct O eine Parallele AF gezogen;

2tens, wird die auf diese beyden Geraden Normale AB gezogen;

3tens, wird CE in eine gewisse Zahl gleich großer Theile getheilt, und auf AF aus A werden eben so viele gleich große Theile getragen;

4tens, aus dem gegebenen Puncte O werden nach den ersten Puncten 1, 2, 3 die Geraden O1, O2, O3 u. s. f. gezogen.

5tens. Dasselbe geschieht aus E nach den zweyten Puncten, 1, 2, 3 u. s. f. Die Durchschnitts-Puncte der gleichnahmigen Linien geben Puncte der Parabel. Werden von diesen Normale auf ED gezogen, und auf die andere Seite getragen; so erhält man die ganze Parabel.

Soll der Brennpunct einer Parabel gefunden werden (Fig. 40.); so wird

1tens, auf einem beliebigen Puncte G der Geraden ED, der Achse, eine Normale GH, dann die Sehne HE gezogen.

2tens, im Anfangspuncte H wird eine dieser Sehne Normale HI gezeichnet. Wo diese die Achse schneidet, ist der Endespunct des Parameters GI.

3tens, wird endlich der Parameter in 4 gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil von E nach F getragen; so ist F der Brennpunct der Parabel.

Soll (Fig. 41.) an irgend einem Puncte M der Parabel eine Tangente gezogen werden; so wird

1tens,

1tens, der Brennpunct F gesucht.

2tens, dessen Entfernung vom Scheitel E, nähmlich EF, wird von E nach C getragen, und in diesem Puncte C eine Normale CK gezogen.

3tens, auf diese Linie CK wird aus dem Puncte M eine der Leitlinie CR Normale MK gezogen. Endlich wird

4tens, von dem Puncte K nach dem Brennpuncte F eine Gerade KF gezogen und in der Mitte derselben die ihr normale LO gezeichnet. Diese ist die verlangte Tangente.

Hieraus läßt sich ableiten, wie man, wenn eine Tangente gezogen worden ist, den Berührungs-Punct derselben findet.

Die Parabel läßt sich auch durch ununterbrochene Bewegung beschreiben.

Dreht sich die Parabel um ihre Achse, so beschreibt sie einen paraboliſchen Kegel, den man ein Paraboloid nennt.

Die Quadratur paraboliſcher Flächen, die Cubatur der Paraboloiden ist ein Gegenstand der höhern Geometrie.

Es sey AB (Fig. 42.) eine Gerade, F und f zwey Puncte derselben. Man denke sich eine krumme Linie von der Beschaffenheit, daß die Summe der Abstände MF+mf, von den Puncten F und f eines jeden Punctes M immer einer unveränderlichen Geraden NO gleich und dabey > Ff sey; so wird eine solche krumme Linie eine Ellipse seyn. Die Puncte F und f sind die Leit- oder Brennpuncte. Die Linie AB ist der große Durchmesser, oder die große Achse. Eine in der Mitte derselben ihr Normale bis an die krumme Linie gezogen, heißt der kleine Durchmesser oder die kleine Achse.

Da-

Daher kann man aus der gegebenen unveränderlichen Summe der Abstände = MF + Mf = NO, und aus dem gegebenen Abstande des Brennpunctes = Ff eine Ellipse durch ununterbrochene Bewegung mittels eines Fadens oder einer Schnur beschreiben. Auch hat man eigene Werkzeuge Ellipsen zu zeichnen.

Mittels des Zirkel-Instrumentes kann man mehrere Puncte der Ellipse bestimmen, wenn man (Fig. 43.) eine Gerade NO, MF + Mf zieht, diese in mehrere gleich, oder ungleich große Theile theilt, und sodann mit jeden zweyen zusammen gehörigen Theilen der Geraden NO, als Halbmesser, aus den Brennpuncten Durchschnittspuncte 1, 2, 3 u. s. f. macht. Diese liegen in der Ellipse.

Wäre auch die Bogenhöhe, d. i. die halbe kleine Achse gegeben so wird, um die Brennpuncte zu finden, die halbe große Achse aus C aufgetragen. Die Durchschnittspuncte f und F sind die Brennpuncte. Denn es ist FC + fC = ON; nun aber ist FC = fC = I, also I + I = AB; d. i. der Leitstrahl in dem Puncte C ist der halben großen Achse gleich.

Hieraus folgt, wie eine Ellipse gezeichnet werden kann, wenn die große und die kleine Achse gegeben sind.

Soll an einem in der Ellipse gegebenen Puncte O (Fig. 44.) eine Tangente gezogen werden; so wird

1tens, der gegebene Punct O mit den beyden Brennpuncten F und f verbunden, und der Leitstrahl so verlängert.

2tens. Man trägt den andern Leitstrahl FO und O nach M, und zieht die Linie PM. Endlich wird

3tens, auf die Mitte dieser Linien die Normale RU gezeichnet. Diese ist die verlangte Tangente.

Aus diesem leitet man ab, wie der Berührungspunct der Tangente O gefunden werden kann.

Soll

Soll ein elliptischer Platz (Fig. 45.) aufgenommen, oder, was dasselbe ist, die große und die kleine Achse einer gegebenen Ellipse gefunden werden; so zieht man

1tens, ein Paar beliebige Linien AB und CD, theilt jede in zwey gleich große Theile, und zieht durch ihre Mittelpunct m und n die Gerade GH. Der Mittelpunct dieser Linie ist der Mittelpunct der Ellipse.

2tens. Wird nun mit was immer für einem Halbmesser aus O ein Kreis beschrieben, der die Ellipse in 4 Puncten schneidet, und man errichtet auf einer der Sehnen 1.2 oder 3.4 eine Senkrechte; so erhält man dadurch die kleine Achse, woraus die große Achse leicht gefunden wird. Mittels dieser Auflösung kann man die der Achse des Cylinders schiefen Durchschnitte zeichnen.

Soll mit einer gegebenen Ellipse eine andere Parallele geführt werden (Fig. 44.), so wird der Abstand der beyden Ellipsen AB auf die Verlängerung der gegebenen großen Achse rc getragen. Dieses gibt die große Achse der innern Ellipse 1.2, deren Hälfte aus b aufgetragen die Durchschnitts-Puncte f und F, d. i. die Brennpuncte für die parallele Ellipse gibt. Je näher die beyden Brennpuncte der Ellipse an einander kommen, desto weniger unterscheidet sich die Ellipse von dem Kreise.

So wie die Parabel hat auch die Ellipse in der Naturlehre und in der angewandten Mathematik eine vorzügliche Anwendung. Die Ellipse aber wird über dieß noch in der Baukunst öfter gebraucht. Man baut elliptische Gewölbe, Zimmer und Säle nach der Ellipse, man legt elliptische Rasenplätze und Blumenbeete an, u. dgl. m.

Um die elliptische Fläche zu berechnen berechne man einen Kreis, dessen Halbmesser zwischen den beyden Halbachsen der Ellipse die mittlere Proportionale ist. Der Flächeninhalt dieses Kreises ist der Flächeninhalt der Ellipse.

Die Hyperbel (Fig. 46.) besteht aus zwey zusammen gehörigen, immer fortlaufenden, gleichen und ähnlichen Li-

Linien NAM, nbm, jede von zwey Schenkeln. Die durch die Scheitelpuncte gezogene Gerade AB ist die Achse, wenn sie auf beyden Seiten nach X und Z verlängert wird. Sie theilt jede dieser Linien in zwey gleiche und ähnliche Theile. Die Hyperbel hat zwey Brennpuncte F und f, welche die Eigenschaft haben, daß der Unterschied zweyer Linien MF, Mf, die von irgend einem Puncte M der krummen Linie an die Brennpuncte gezogen werden, der Achse AB gleich ist.

Wenn einer derselben ein leuchtender Punct ist, so werden die von ihm an die Hyperbel fallenden Strahlen so zurück geworfen und zerstreuet, daß ihre Verlängerungen rückwärts durch den andern Brennpunct gehen. Die Berührungslinie in jedem Puncte M macht nähmlich mit FM und fM gleiche Winkel auf jeder Seite.

Durch den Mittelpunct der Hyperbel C lassen sich zwey Gerade DCE, HCG ziehen, welchen sich die Schenkel der Hyperbel immer mehr nähern ohne sie je zu erreichen. Diese Linien heißen daher Asymtoten. Wenn man durch irgend einen Punct M der Hyperbel die Parallele MD mit der einen Asymtote bis an die andere, und durch den Scheitel A die Parallelen AI, AK mit jeder der Asymtoten zieht, woraus das gleichseitige Parallelogramm AICK entsteht; so ist DM so vielmahl in AI enthalten, als CI in CD. Ist z. B. $CD = 4CI$; so ist $DM = \frac{CI}{4} = \frac{AI}{4}$. Daher ist jedes Parallelogramm, wie CDML dem Parallelogramme AICK, gleich.

Zieht man durch den Scheitel auf die Achse eine dieser Normale AD bis an die eine Asymtote; so ist $CD = Cf = Cf =$ der Entfernung der Brennpuncte vom Mittelpuncte.

Die Strahlen, welche von einem Lichte oder von einer Stimme aus dem Brennpuncte der Hyperbel an die Schenkel treffen, z. B. von F nach M, werden nach der Richtung zurück geworfen, als wenn sie aus dem Brennpuncte f der andern Hyperbel kämen, d. i. nach MR. Die

hy-

hyperbolische Figur ist demnach zur Verbreitung des Lichtes und des Schalles sehr geschickt, deßhalb man sie auch für die Rückwände der Lampen und Kamine vortheilhaft anwendet.

Soll eine gleichseitige Hyperbel gezeichnet werden (Fig. 47); so wird

1tens, eine Gerade AB auf eine andere Gerade CD rechtwinkelig gezeichnet;

2tens, wird unter einem beliebigen Winkel eine Gerade CE gezogen.

3tens. Zieht man nun aus dem Durchschnitts-Puncte O mit CE eine Parallele OG, so sind CO und OX die beyden halben Achsen der Hyperbel.

4tens, werden mit beliebigen Halbmessern Halbkreise beschrieben, welche in C anfangen. Ihre Mittelpuncte liegen in CE. Endlich werden

5tens, von den Durchschnitts-Puncten 1, 2, 3 auf die Gerade CE normale Linien gezogen, und aus den Puncten o, p, q mit den Halbmessern na, ab, pc die Puncte der Hyperbel bestimmt.

Soll der Brennpunct gefunden werden; so wird aus C mit CX der Bogen XF beschrieben. F ist der Brennpunct. (Fig. 10.)

Soll an einem gegebenen Puncte M eine Tangente gezogen werden (Fig. 46.); so werden von M nach dem Brennpuncte F und nach dem Puncte f die Geraden MF und Mf gezogen, dann wird MF von M nach G getragen und FG gezogen. Eine dieser Linie in ihrer Mitte 1 Normale 1.2 ist die Tangente.

Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes, der Kegelschnitt-Linien, die Berechnung der Ellipsoiden, Sphäroiden,

den, Paraboloiden u. s. f., so wie die Beweise der erst angeführten Auflösungen, gehören in die höhere Geometrie.

Die übrigen krummen Linien, mit welchen sich die Geometer in der Analysis beschäftigen, sind die Logistik, die Cycloide und Epicycloide, die Spiral-Linie, die Muschel-Linie des Nicomedes, die Cyssoide des Diocles, die Quadratrix des Dinostrates, die Sinus-Linie, die elastische Linie, die Linie von doppelter Krümmung u. s. f.

§. XVI.

Anwendungen auf die geometrische und auf die perspectivische Zeichnung.

Die §. I. II. III. IV. V. IV. VII. XIII. und XIV. erklärten Sätze haben viele und sehr wichtige Anwendungen auf die Zeichnung der Linien, Flächen und der Körper. Der gegenwärtige §. enthält einige dieser Anwendungen, welche leichte Fälle der Zeichnung betreffen.

1te Abtheilung.

Wenn von einem gegebenen Puncte eine gerade Linie geführet wird, welche einer Ebene normal, oder schief ist; so entsteht in dieser ein Berührungs- oder ein Durchschnitts-Punct, welcher die Projection des gegebenen Punctes genannt wird. So z. B. ist Tab. IX. Fig. 48. der Punct b die Projection des Punctes a.

Jene

Jene Geraden, welche von den zu projicirenden Puncten aus auf eine Ebene gezogen werden, auf der die Projection gezeichnet werden soll, heißen die Projicirungs-Linien, die Ebene aber, die Projections-Ebene. So z. B. ist ab die Projicirungs-Linie des Punctes a, die Ebene MN die Projections-Ebene. Diese Ebene wird in den Zeichnungen entweder horizontal, oder vertical, oder schief angenommen.

Was von Einem Puncte gesagt worden ist, gilt auch von jedem andern Puncte einer ebenen oder einer körperlichen Figur.

Die Projicirungs-Linien sind entweder mit einander parallel, oder sie kommen in einem Puncte zusammen. Nimmt man die Lichtstrahlen für gerade Linien an; so hat man an den Sonnenstrahlen mit einander parallele Projicirungs-Linien, da wegen der großen Entfernung der Sonne von der Erde die Sonnenstrahlen als mit einander parallel angenommen werden. Hingegen geben die Strahlen des Lampen- (Kerzen-) Lichtes zusammenlaufende Projicirungs-Linien.

Denket man sich irgend eine ebene Figur, z. B. ein geradseitiges Dreyeck, dessen durch die Sonnenstrahlen verursachter Schatten auf eine Ebene, z. B. auf die Vertical-Ebene einer Wand fällt; so befindet sich zwischen dieser Figur, und ihrem Schatten ein gewisser Raum, welcher als ein prismatischer Körper betrachtet wird. Bey Lampen- (Kerzen-) Licht würde ein pyramidalischer Raum (nach einer gestümmelten Pyramide geformter Raum) erscheinen.

Sind

Sind die Projicirungs-Linien mit einander gleichlaufend; so nennet man die Projection eine Parallel-Projection. Kommen die Projicirungs-Linien aber in einem Puncte zusammen, so nennet man die Projection eine Pyramidal-Projection. Bey der ersten können die Projicirungs-Linien der Projections-Ebene normal oder schief seyn. Bey der zweyten aber sind entweder alle oder doch die meisten Projicirungs-Linien der Projections-Ebene schief. Man unterscheidet daher die normale und die schiefe Projection. Das Sonnen- und das Lampen- (Kerzen-) Licht geben hierüber Beyspiele.

Die Projection durch Parallel-Projicirungs-Linien zeichnen, ist also eben so viel, als den Querschnitt, (die Grundfläche) eines Prisma zeichnen. Die Projection durch zusammenlaufende Projicirungs-Linien, die Pyramidal-Projection zeichnen, ist eben so viel, als den Durchschnitt (die Grundfläche) einer Pyramide zeichnen.

Weil der Durchschnitt einer geraden Linie mit einer Ebene ein Punct ist; so ist die Projection eines Punctes nur ein Punct.

Sind aber zwey Puncte c, d gegeben, als der Anfangs- und der Endes-Punct einer geraden Linie, so ist diese der Projections-Ebene M'N' entweder normal oder ihr parallel, oder ihr schief. Im ersten Falle ist die Projection dieser gegebenenen Geraden ein Punct, im zweyten Falle wieder eine Gerade der gegebenen gleich, im dritten Falle auch eine Gerade, kürzer als die gegebene, wenn die Projicirungs-Linien der Projections-Ebene normal sind. Die Projection einer ge-

ra-

raden Linie ist also entweder ein Punct oder eine gerade Linie.

Sind drey Puncte 1, 2, 3 oder mehrere Puncte gegeben, welche nicht in einer geraden Linie, sondern, wenn ihrer mehrere als drey sind, in einer und derselben Ebene liegen; so betrachtet man sie als die Ecken einer ebenen Figur R.R'. Die (Fig. 49.) Ebene dieser Figur kann der Projections-Ebene entweder normal oder gegen dieselbe schief, oder sie kann ihr parallel seyn. Im ersten Falle ist die Projection der gegebenen Figur eine gerade Linie DF, im zweyten Falle ist sie eine ebene Figur r dem Raume nach kleiner als die gegebene R', im dritten Falle erhält man eine Figur der gegebenen gleich und ähnlich. Hierbey wird angenommen, daß die Projicirungs-Linien mit einander parallel und der Projections-Ebene normal seyn. Die Projection einer Ebene ist daher eine gerade Linie FD oder eine Ebene r. Die Projection eines Körpers ist immer eine Ebene oder eine Fläche. Die Projection einer krummen Linie ist entweder eine krumme Linie oder eine gerade Linie. Im ersten Falle muß die krumme Linie in einer Ebene liegen, welche mit den Projicirungs-Linien parallel oder schief ist.

Ist die Projections-Ebene horizontal und den Projicirungs-Linien normal; so sind die Höhen der zu projicirenden Puncte mit ihren Abständen von dieser Ebene einerley. Ist aber diese Ebene schief, so sind diese Höhen von den erst erwähnten Abständen verschieden.

Um die Projection einer Ebene oder eines Körpers zu zeichnen muß man den Querschnitt eines Pris-

ma oder eine Pyramide zeichnen. Die Seiten-Linien dieser Körper sind die Projicirungs-Linien, (Fig. 19. B und Fig. 20.) und die Seiten-Ebenen dieser Körper sind die Projicirungs-Ebenen.

Hieraus lassen sich die Erklärungen der Grundrisse, der Aufrisse, der Profile und der Durchschnitte ableiten.

Die Methode, die im Raume gegebenen Puncte so zu bestimmen, ist unter dem Nahmen der Projections-Methode bekannt.

Um die Theile eines Gebäudes darzustellen denket man sich eine horizontale Ebene, auf welche die Gränzen der verschiedenen Theile geführet werden, welche das Gebäude ausmachen. Die so erhaltene Zeichnung nennet man den Grundriß des Gebäudes. Er zeigt die Lagen der Projectionen von den vorzüglichsten Theilen des Gebäudes, welche auf die Projections-Ebene durch verticale Projicirungs-Linien geführet sind.

Ein horizontaler Durchschnitt wird sehr oft der Grundriß (ital. la Pianta) des Gebäudes genennet.

Denket man sich ferners eine im Grundrisse angenommene Gerade und auf diese eine verticale Ebene, auf welche die Gegenstände der Höhe durch Horizontal-Linien projicirt sind, so entsteht dadurch eine Figur, welche der Durchschnitt (ital. lo Spaccato), zuweilen auch das Profil (ital. il Profilo) genennt wird, wenn sie durch das Innere des Gebäudes geht.

Man hat Längen- und Quer-Durchschnitte, je

nach-

nachdem die vorerwähnte Linie mit der längern oder mit der kürzern Seite des Grundrisses parallel angenommen wird.

Eben so erklärt man den Aufriß (ital. la Facciada) eines Gebäudes. Man hat Haupt- und Seiten-Aufrisse, welche mit den Haupt- und Seiten-Ansichten nicht verwechselt werden dürfen, da die Aufrisse geometrische, die Ansichten aber perspectivische Projectionen sind.

Durchschnitte und Aufrisse geben die Erhöhungen der darin befindlichen Puncte über der horizontalen Ebene, welche entweder durch einen im Gebäude angenommenen Punct, oder durch den Durchschnitt der Erdoberfläche mit der verticalen Projections-Ebene vorgestellet ist. Die Durchschnitte und die Aufrisse sind also nichts anders als die Zusammensetzung mehrerer Puncte, welche auf einer Vertical-Ebene durch die darauf normalen, also horizontalen Linien, projicirt sind.

Die gegen die Durchschnitts-Ebene und die Ebene des Grundrisses schiefen Abmessungen können daher nicht nach ihren wahren Längen dargestellet werden. Es ist also nothwendig, daß man in den Grundrissen, Aufrissen und Durchschnitten zu solchen schiefen Linien ihre wirklichen Längen schreibt, wenn auch diese durch Zeichnung und durch Rechnung gefunden werden können. (Tab. VIII. Fig. 31.)

Aus diesen Erklärungen kann man leicht ableiten, daß den Grundriß, den Aufriß oder den Durchschnitt eines Gebäudes oder einer Maschine zeichnen eben so viel bedeutet, als die Parallel-Projection der wichtigsten Puncte dieser Objecte angeben.

Zur

Zur mehreren Deutlichkeit dieser Sätze und als Vorbereitung für einige Zeichnungs-Aufgaben folgen hier verschiedene Sätze über das Sehen und über die Schatten.

Unter dem Lichte versteht man das, was die Empfindung des Sehens hervorbringt. Das Sehen geschieht durch die Sehestrahlen, welche von dem Gegenstande, der gesehen wird, als gerade Linien an das Auge kommen. Ist zwischen dem Auge und dem gesehenen Gegenstande etwas, welches die Sehestrahlen nicht durchläßt, ein undurchsichtiger Körper, so kann man den Gegenstand nicht mehr sehen.

Wenn man sich von allen Puncten des gesehenen Gegenstandes in das Auge gezogene gerade Linien als die Sehestrahlen vorstellet; so bilden diese die Seiten-Linien eines kegel- oder pyramidenförmigen Raumes, dessen Spitze im Auge liegt. Ist der Gegenstand, welchen man sieht, eine Ebene, z. B. eine Zeichnung, so stellet diese die Grundfläche einer Pyramide, der optischen Pyramide vor. Wird diese von einer zwischen dem Auge und dem Gegenstande befindlichen verticalen oder schiefen Ebene geschnitten, so entsteht eine Figur, welche das Bild (die perspectivische Projection, die Pyramidal-Projection) des gesehenen Gegenstandes heißt. Die Abbildungen oder Ansichten von Landschaften, Gebäuden, Statuen u. s. f. sind die Zeichnungen solcher Bilder.

Die Perspectiv, Perspectiv-Zeichnung, (ital. la Prospettiva) ist jener Theil der Geometrie, welche das Bild eines jeden gegebenen Gegenstandes nach seiner scheinbaren Form und Größe auf eine Ebene

zeich-

zeichnen lehret. Diese Projections Ebene nennet man die perspectivische Tafel (die Glastafel).

Demnach ist das Bild eines Punctes ein Punct, das Bild einer geraden Linie wieder eine gerade Linie, ausgenommen das Auge läge in ihrer Verlängerung. Ist der gesehene Gegenstand eine Ebene, so erscheint diese dem Auge wieder als eine Ebene, ausgenommen beyde lägen in derselben Ebene, in welchem Falle ihr Bild eine gerade Linie wäre.

Die scheinbare Größe ist die Größe des Sehewinkels, d. i. jenes Winkels, welchen zwey den Gegenstand (das Object) berührende Sehestrahlen im Auge machen.

Sieht das Auge eine ebene oder eine körperliche Figur, so entsteht in demselben ein körperlicher Winkel, dessen Größe sich nach der Größe des gesehenen Gegenstandes (des Objectes) und nach dem Abstande des Auges von diesem Objecte richtet. Hierbey wird das Auge als ein Punct, als die Spitze des optischen Winkels und als die Spitze der Sehepyramide betrachtet.

Von weit entfernten Gegenständen kann man ohne wirkliche Messung nicht sagen, ob sie alle in derselben Weite vom Auge sich befinden.

Bey gleichen Sehewinkeln scheinen die Objecte gleich groß. Sie erscheinen desto größer oder kleiner, je größer oder kleiner ihr Sehewinkel ist. Derselbe Gegenstand kann in verschiedenen Entfernungen gleich groß scheinen, wenn der Sehewinkel derselbe ist. So z. B. würde die Sehne ab (Fig. 31.) dem Auge in den Puncten 1, 2, 3 gleich groß erscheinen.

Sehr weit entfernte Gegenstände entziehen sich dem Gesichte, wenn ihr scheinbarer Durchmesser unter $\frac{1}{2}$ Minute ist. Sehr glänzende Körper sind auch unter noch kleineren Winkeln sichtbar.

Werden die Sehewinkel zu klein, so sieht man die Gegenstände nicht mehr, wenn nähmlich ihre Entfernung vom Auge in Hinsicht auf ihre wirkliche Größe zu groß wird. Man sieht ein Object nicht mehr, wenn dessen Entfernung vom Auge 5000mahl größer, als der Durchmesser oder die Breite des Gegenstandes ist. Wäre z. B. eine Allee 5000mahl länger, als sie breit ist; so würde man an ihrem Ende keine Breite mehr wahrnehmen, sie würde dem Auge geschlossen erscheinen.

Das Sehen richtet sich auch nach der Güte des Auges. Kurzsichtige können nahe liegende kleinere Gegenstände bemerken, welche in ihren Augen kleinere Sehewinkel machen, als sehr weit entfernte Gegenstände in den Augen der Weitsichtigen.

Auf einer weit ausgebreiteten Ebene ist man gewohnt jede von dem Standorte aus auf dieser Ebene befindliche Gerade (Fig. 31.) AC mit einer durch das Auge O damit gleichlaufenden Horizontalen OL zu vergleichen. Daher scheint es, die Ebene hebe sich, weil die Sehewinkel BOE, COL, DOZ abnehmen.

Wäre die Erdfläche ganz eben, so würde die Strecke, welche das Auge gerade vor sich hin übersehen könnte, nicht viel mehr betragen, als die Höhe des Auges über dieser Ebene 5000mahl genommen. Auf der gekrümmten Erdfläche aber erstreckt sich diese Sehegränze kaum halb so weit. Eine solche weit ausgebreitete Ebene erscheint dem Auge wie in einem Kreise eingeschlossen, welcher die Gesichtsgränze oder der Horizont heißt, weil die äußersten, von dem Auge erreichten Puncte alle gleich weit von demselben entfernt scheinen.

Die scheinbare Entfernung zweyer Gegenstände B und E ist der optische Winkel BOE, unter welchem ihre wahre Entfernung dem Auge in O erscheint (Fig. 50.)

Ist man mit einer Menge von Gegenständen umgeben, die sich mit dem, der sie sieht, zugleich auf einerley Art und mit einerley Geschwindigkeit bewegen, so bemerkt man seine eigene Bewegung deßwegen nicht, weil alle diese Gegenstände sowohl unter einander als gegen das Auge dieselbe Lage beybehalten. Jene Gegenstände scheinen uns in Bewegung zu seyn, deren Entfernung von andern ruhenden Gegenständen Veränderungen leidet. Bey dem Fahren in Wägen und in Schiffen beobachtet man die scheinbare und wahre Bewegung sehr leicht.

Wäre ao = of (Fig. 49 I.), so würde man fälschlich ab schätzen. Wären in a und b Gegenstände von derselben Höhe, z. B. gleich hohe Stäbe; so würde man aus den scheinbaren Höhen derselben schließen, daß ao < ob ist.

Ist eine gewisse Weite als gerade Linie in eine gewisse Anzahl gleich großer Theile getheilt, so scheinen diese dem von ihnen entfernten Auge von verschiedener Größe, und jene Theile erscheinen am kleinsten, welche von dem Auge am weitesten abstehen. Diese Bemerkung gilt nicht, wenn das Auge in der Verlängerung der gegebenen Weite sich befindet.

Der Schluß über eine gewisse Länge ist desto unsicherer, je spitziger bey derselben Entfernung der Winkel o ist. (Fig. 50.)

Ist 3.o = 2.o = 1.o (II.), so schätzet man die Länge der Geraden am sichersten, wenn a2 von b2 wenig unterschieden ist. Käme endlich o in der

Verlängerung von ab, so würde man statt ab nur einen Punct bemerken. Je mehr eine Länge ab von der horizontalen Lage abweicht, desto unsicherer wird das Urtheil über diese Länge.

Ist bi (III. (Fig. 49.) ein aliquoter Theil von ab, und in o das Auge, so daß an von nb nicht viel verschieden ist, wenn ano und bno gleich große Winkel sind; so läßt sich bey einiger Übung ziemlich genau die Größe $\frac{ab}{bi}$ angeben.

Wären (Fig. 50.) die Kreise 5, 4, 3, 2, 1 die Projectionen von verticalen cylindrischen Abstech-Stäben und in o das Auge; so würden diese Stäbe alle nach derselben Richtung in derselben Vertical-Ebene zu stehen scheinen. Der erste in 5 würde alle folgenden 4, 3, 2, 1 verdecken.

Wenn hingegen das Auge o nach der Richtung der Tangente on sähe, welche allen Kreisen 5, 4, 3 gemeinschaftlich ist, so würden auch geringere Abweichungen von der Ebene on bemerket werden. Je weiter das Auge von dem Stabe 5 entfernt ist, desto merklicher wird jede Abweichung von der Tangenten-Ebene on.

Wenn zwey Körper von verschiedener Größe D'E' und A'C' gleich groß erscheinen; so verhalten sie sich gegen einander, wie ihre Abstände von dem Auge D'B' und A'B'. Denn wenn zwey Körper von gleicher Größe erscheinen; so sind die Bilder, welche sie am Auge machen, von gleicher Größe; also machen die beyden äußersten Strahlen A'B' und C'B' im Auge B' einerley Winkel. Da nun bey D' und A' rechte Winkel sind; so ist D'E' mit A'C' parallel, also ist D'E' : A'C' = D'B' : A'B'.

Hier-

Hieraus folgt weiter, daß, wenn zwey Körper von gleicher Größe dem Auge gleich groß erscheinen, sie auch gleich große Abstände vom Auge haben müssen, und daß die Körper von gleicher Größe in ungleichen Abständen vom Auge von ungleicher Größe erscheinen, u. m. dgl.

Alle sichtbaren Körper werden eingetheilt in für sich leuchtende, dunkle, und durchsichtige. Die ersten sind jene, welche durch ihr eigenes Licht sichtbar sind, z. B. die Sonne. Dunkle Körper sind nur sichtbar, wenn sie von andern erleuchtet werden. Durchsichtige Körper lassen die Lichtstrahlen durch, undurchsichtige nicht.

Man stellet sich vor, jeder leuchtende Punct sende in geraden Linien Lichtstrahlen aus. Diese werden durch gerade Linien in den Zeichnungen vorgestellet.

Das Licht verbreitet sich von dem leuchtenden Puncte aus, wenn kein Hinderniß da ist, nach allen Seiten und in gerader Richtung, vorausgesetzet, daß das Mittel oder die Masse, durch welche die Lichtstrahlen dringen, als Luft, Wasser, Glas, von gleichförmiger Dichte sey.

Tritt das Licht von einem Mittel in ein anderes von verschiedener Dichte, so ändert es seine Richtung, und geht nach dieser so lange fort, bis es in ein drittes verschiedenartiges Mittel tritt.

Von undurchsichtigen polirten Flächen wird das Licht nach entgegen gesetzten Richtungen, in welchen es auffällt, zurückgeworfen.

Wird ein Theil des von einem leuchtenden Puncte ausströmenden Lichtes mit einer Ebene aufgefangen; so ist der Raum, welcher von dem Lichte erfüllet wird, eine Pyramide oder ein Kegel, nachdem die Ebene, welche

che das Licht auffängt, geradlinig oder kreisrund ist. Dadurch entsteht die Strahlen-Pyramide oder der Strahlen-Kegel.

Die Ebenen, welche von gleich viel Lichte erleuchtet werden, verhalten sich gegen einander umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von dem leuchtenden Puncte. Der Beweis dieses Lehrsatzes der Optik folgt aus Sereom. §. VII.

Ist (Fig. 50.) L ein leuchtender Punct, vom Auge, und I ein anderer leuchtender Punct, vom Auge nicht so weit als L entfernt, und es erfolgt die Fortpflanzung des Lichtes gleichförmig, und mit einer gewissen Geschwindigkeit; so wird L von dem Auge in O später als I gesehen werden.

Ein von dem Lichte nicht erfüllter Raum wird der Schatten genannt. Er ist, wie schon gesagt wurde, bey Parallel-Strahlen prismatisch und bey zusammenlaufenden Strahlen pyramidenförmig.

Der Raum, in welchen gar kein Licht kommen kann, wenn ein dunkler Körper einen Theil des von einem leuchtenden Körper umherstrahlenden Lichtes auffängt, liegt im vollen Schatten oder im Kernschatten, der übrige nur zum Theil erleuchtete Raum im Halbschatten. Meistens versteht man den vollen Schatten, wenn vom Schatten die Rede ist.

Senkrecht erleuchtet (normal erleuchtet) ist eine Ebene, wenn sie unter rechten Winkeln von den Lichtstrahlen getroffen wird. Im Gegentheile ist die Ebene schief erleuchtet.

Weil die Sonnenstrahlen mit einander gleichlaufend angenommen werden können; so wird jede von der Sonne beleuchtete Ebene unter denselben Winkeln beleuchtet.

Ist der leuchtende Punct mit dem Mittelpuncte des Körpers, der den Schatten verursachet, in einer und derselben Parallelen mit der Grundebene des erwähnten Körpers, so ist der Schatten unbegränzt, auch wenn der erste Punct tiefer als der Mittelpunct des Körpers sich befindet.

Der Schatten, welchen ein Körper auf einen andern Körper oder auf irgend eine Ebene wirft, wird der Schlagschatten genannt.

Denjenigen Schatten, welcher sichtbar ist, wenn die weiter von dem Auge entfernten Theile gebogener Flächen von wenigeren oder mehreren Lichtstrahlen berühret werden, als die dem Auge nähern Theile, nennt man den Rundschatten. Er ist desto merklicher, je kleiner der (oder die) Krümmungs-Halbmesser der gebogenen Flächen ist.

Die Stärke des Schlagschattens hängt ab: a. von der Stärke der Erleuchtung, b. von der Dichte des Körpers, der den Schatten wirft, und c. von der Richtung der Lichtstrahlen gegen die erleuchtete Fläche.

Bescheint mehr als ein leuchtender Punct einen dunkeln Körper, so wird dieser so viele Schatten werfen, als leuchtende Puncte vorhanden sind. In diesem Falle werden sich Schatten kreuzen, und dort eine stärkere Schattierung hervor bringen.

Im vollen Lichte ist eine Ebene, wenn sie von dem Sonnenlichte normal beleuchtet wird. Beym Lampen-(Kerzen-)Lichte müssen der leuchtende Punct und der Mittelpunct der Ebene in derselben auf die Ebene Normalen liegen.

Die Sonnenstrahlen, so wie die Strahlen des Lampen- (Kerzen-) Lichtes, projiciren den von ihnen beleuchteten Körper. Der mit einer Ebene aufgefange-

ne Schlagschatten kann in unzählig vielen Fällen für die Projection des Körpers genommen werden. Ist also der Winkel bekannt, unter welchem ein Körper von den Sonnenstrahlen beleuchtet wird, der Beleuchtungs-Winkel, so kann man den Schatten zeichnen. So z. B. kann die Form und Größe des Schattens angegeben werden, den ein auf einer Ebene befindlicher Cylinder, ein Prisma, eine Pyramide, eine Kugel u. s. f. auf der Ebene verursachen, u. m. dgl.

Fällt der von den Sonnenstrahlen projicirte Schatten eines Würfels, eines senkrechten Prisma oder eines senkrechten Cylinders mit der Grundfläche eines dieser Körper zusammen, da sie auf einer Ebene stehen, so ist diese rechtwinkelig (normal) beleuchtet. Demnach ist es leicht die Sonnenstrahlen eine Ebene rechtwinkelig beleuchten zu machen, und sowohl die geraden als die schiefen Projectionen verschiedener Körper practisch zu finden.

Sind mehrere Körper von gleicher Materie, Farbe und Politur vorhanden, so hat bey derselben Beleuchtung derjenige das stärkste (grellste) Licht und den stärksten Schatten, welcher dem Auge am nächsten ist. Die andern haben ein desto schwächeres Licht und einen desto mattern Schatten, je weiter sie vom Auge entfernt sind. Dasselbe gilt auch vom Colorite (den Farben). Dieses in einer Zeichnung gut beobachten, nennt man die Haltung beobachten.

Mehrere Sätze der Optik hier aufzuführen erlauben die engen Gränzen dieses für Anfänger bestimmten Werkchens nicht. Auch sind zur weitern Ausführung dieser so wohl für Zeichner als für Feldmesser dringend nothwendigen Wissenschaft manche andere Theile der Mathematik erforderlich, welche aber in den

gegenwärtigen Anfangsgründen keinen Platz haben können.

2te Abtheilung.

Es sey (Fig. 51. I.) eine Ebene, z. B. ein Rechteck, a1 die Länge desselben, und a'1.2b die Projection dieser Ebene, NM eine andere Ebene als Grundebene. Diese mache mit der ersten einen Winkel = V. Wird diese Projection R unter einem spitzigen Winkel w unter die Grundlinie NM gelegt, werden von den Puncten a, b, 2, 1 Verticale ab, by, 2t und 1u gezogen; so durchschneiden diese die horizontalen Geraden MN und aC. Die gleichnahmigen Durchschnitte geben die Puncte a'', b'', 1'' und 2''. Dadurch erhält man das Rechteck R''. Die Ebene des Winkels V macht mit der Grundlinie den Winkel w''. Es ist daher der Winkel V''=V. Je größer der Winkel w'' wird, desto größer erscheint der Neigungs-Winkel V''. Er erscheint nie kleiner als V. Je kleiner w'' angenommen wird, desto kleiner erscheinen die Längen a'1 und b'2 im Aufrisse R''.

Dieses gilt von jeder andern schiefen Ebene, auch von der Kreisebene. II.

Ist MN (Fig. 52. I.) eine schiefe Ebene und R ein darauf liegender Körper, z. B. ein Würfel, dessen eine Seitenebene ab.cd ist; so kann seine Projection R' gezeichnet werden. Wird diese unter einem schicklichen Winkel w gegen die Grundlinie gelegt; so kann der gegebene Körper R geometrisch so dargestellet werden, daß drey Seitenflächen desselben sichtbar sind. Denn zieht man die Horizontalen b1, c2, a3, d4 u. s. f. dann die Verticalen a5, b6, d7, c8 u. s. f.; so verbindet man

die gleichnahmigen Durchschnittspuncte a'', b'', c'', d'', a'', b'', c'', d'' mit Geraden, und erhält dadurch den verlangten Aufriß, an welchem drey Seitenebenen A, B und C ersichtlich sind. Die Ebene a''a''d''d'' und die Grundlinie NO liegen in derselben Ebene. Der Winkel K ist dem Winkel K' gleich.

Diese Art der Zeichnung der Körper ist für die Architectur, und besonders für die Maschinen-Zeichnung von der größten Wichtigkeit, und daher ein vorzüglicher Gegenstand der fleißigen Übung in den Anfangsgründen der Geometral-Zeichnung.

Ist P (11.) der Aufriß eines senkrechten Parallelepipedon, dessen Projection P, MN eine horizontale Ebene ist, und die Sonnenstrahlen a, b, c als Projicirungs-Linien mit einander parallel sind; so ist die Figur 1'.3'.2'.2'.3'.1 die Projection des Schattens. Da die Höhe 3.0 der Weite od gleich und der Winkel 3od ein rechter Winkel ist; so ist der Beleuchtungswinkel 45°. Für den Strahl f ist n ein Punct der Schatten-Projection.

Ist C (Fig. 53.) der Aufriß eines verticalen Cylinders, C' seine Projection (Grundriß), und sind die Sonnenstrahlen als Projicirungs-Linien mit einander parallel; so stellet der mit Schatten erfüllte Raum eine Art von schiefem Cylinder vor, dessen horizontaler Querschnitt ab ein Kreis ist. Es läßt sich beweisen, daß die horizontale Grundfläche cd dieses Cylinders dem erst erwähnten horizontalen Durchschnitte ab gleich und ähnlich ist. Soll also die Projection des Schattens gezeichnet werden; so sucht man nur die Projection des Punctes m, nähmlich m''. Der Halbkreis trs und die Tangenten ht und is geben die Schatten-Projection.

Wären (Fig. 54.) die Projicirungs-Linien mit einander nicht parallel, sondern in einem Puncte L zusammen laufend, was beym Lampen-(Kerzen-) Lichte der Fall ist; so wird der leuchtende Punct L projicirt, die beyden Tangenten La', La werden gezogen, und der Kreisbogen a'fa wird in eine beliebige Anzahl, zur Bequemlichkeit, gleich großer Theile getheilt. Von L aus werden durch diese Theilpuncte und durch Berührungs-Puncte die Geraden Li, Ll gezogen. Der Berührungs-Punct a und die Theilpuncte 1, 2, 3, 4 werden am Halbkreise ZV projicirt. Durch L' und durch die dadurch erhaltenen Puncte a', 1', 2', 3', 4', 5' werden die Projicirungs-Linien L'a'', L2'', L3'', L4'', u. s. f. gezogen. Von den dadurch erhaltenen Durschnitts-Puncten a'', 1'', 2'', 3'', 4'' zieht man Verticale abwärts; diese geben die Puncte a'', 1''', 2''', 3''', 4''', 5''', 6''', 7''' a der Schattengränze. Diese und die Tangenten a''a', und aa''' geben die Projection des Schattens.

Es läßt sich beweisen, daß der horizontale Kreisbogen a1.2.3... a' und die horizontale Schattengränze a''', 1''', 2''', 3''', 4'''... a'' einander ähnlich seyn werden; es sind demnach der Punct m'' und der Halbmesser m''4''' = ma''', dann die beyden Tangenten a'a'' und aa''' erforderlich, um die Projection des Schattens zu zeichnen.

Ist A (Fig. 55.) der Aufriß eines Parallelipipedon, P der Grundriß desselben, und L ein leuchtender Punct; so projiciren die Lichtstrahlen L1', L2', L3' und L4' die Ebene 1.2.3.4 auf die Bodenebene MN. Ist die Verticale Lf gezogen, und in dem Theile gf derselben der Punct l bestimmt; so zieht man 15, 16, 17 und 18; in diesen liegen die Ecken der Schat-

ten-

ten-Projection. Um diese Puncte zu finden zieht man von den Puncten 1', 2', 3' und 4' Verticale abwärts. Diese geben die verlangten Puncte I, II, III und IV.

Die Vertical-Ebenen L1'R, L2'R, L3'R, L4'R sind rechtwinkelige Dreyecke. Rücket der Punct L abwärts, z. B. nach L; so werden die Winkel um L, die Winkel an der Spitze der Licht-Pyramide, immer größer, daher die Winkel L1'R' L2'R immer kleiner, also die horizontalen Katheten R1', R2', R4', R3' immer länger, daher wird die Ebene I, II, III, IV immer größer, je mehr sich der Punct L der Ebene 1, 2, 4, 3 nähert. Läge dieser Punct in dieser Ebene, oder wäre er in einem so kleinen Abstande von derselben, daß kein kleinerer mehr angegeben werden könnte; so wird die Ebene I, II, III, IV so groß, daß ihre Gränzen gar nicht mehr angegeben werden können. Sie wird über alle Gränzen groß werden. Im Gegentheile, wenn der leuchtende Punct L immer weiter aufwärts rücket, sich immer weiter von der Ebene 1.2.4.3 entfernet, werden die Winkel an der Spitze der Licht-Pyramide, nähmlich die Winkel 1'LR, 2'LR u. s. f. immer kleiner, also die Winkel L1'R, L2'R u. s. f. immer größer, und daher die horizontalen Katheten R1', R2' u. s. f immer kleiner, da die verticale Kathete LR immer zunimmt.

Die Winkel L1'R, L2'R werden sich daher dem rechten Winkel so sehr nähern, daß sie von ihm nicht mehr zu unterscheiden sind. In diesem Falle verschwinden die Winkel 1'LR, 2'LR u. s. f. gar, die Strahlen L1', L2', L3' u. s. f. werden mit einander parallel, und die Schatten-Projection I, II, III, IV wird der Grundfläche P gleich und ähnlich. Dieß ist der Fall beym Sonnenlichte.

Es

Es könnten hier mehrere Betrachtungen über diesen Gegenstand Statt finden. Da sie aber das Fassungsvermögen der meisten Anfänger übersteigen, und die engen Gränzen dieses Werkchens zu sehr erweitern würden, so hat man ihnen hier keinen Platz geben können.

Es gibt Zeichnungen, wo der Schlagschatten in mehreren Ebenen oder Flächen liegt, und gleichsam gebrochen vorkommt. In manchen dieser Fälle ist die Zeichnung sehr schwer, und erfordert Kenntnisse der höhern Geometrie. Als ein leichtes Beyspiel kann Fig. 56. dienen. Der Strahl SO schneidet die Vertical-Ebene MN in einem Puncte b. Die Höhe ba ist der Grundlinie MR in dem Puncte a normal. Endlich ist leicht einzusehen, daß ab = an ist.

Zuweilen kommen Körper vor, welche aus verschiedenen andern mit ebenen und mit gekrümmten Flächen begränzten Körpern bestehen, und man soll die Schatten-Projectionen dieser Körper zeichnen. Als ein für Anfänger leichtes Beyspiel dient Fig. 57. Die Linie ab ist gegeben. Die Puncte 1', 2', 3', 4 u. s. f. sind im Aufrisse vorhanden. Die Puncte 1', 2', 3', 4' u. s. f. werden auf die Gerade ab projicirt. Die Strahlen 1'.1', 2'.2', 3'.3' u. s. f. geben die Puncte f, g, h, u. s. f. In diesen werden die Verticalen fm, gn u. s. f. errichtet, welche die Strahlen 1o, 2p, 3q durchschneiden. Die Durchschnitte sind die Puncte 1', 2', 3' u. s. f. der verlangten Schatten-Projection. Sie werden in der Vertical-Ebene AB liegen.

In manchen Fällen der Zeichnung ist die Schattengränze nur eine krumme Linie. Als ein leichteres Beyspiel dient Fig. 58. Hier ist die Schattengränze in der hohlen Viertelkugel M, und im hohlen Halb-

Cy-

Cylinder N gezeichnet. Im Kreisbogen A, E, H werden Puncte A, B, C, D . . . G angenommen, und von diesen die Strahlen Aa, Bb, Cc u. s. f. gezogen, welche mit der Vertical-Linie den am meisten üblichen Winkel von 45° machen.

Aus den Puncten A', B', C' . . . G' werden die Strahlen A', B', C' u. s. f. unter einem Winkel von 45° gezogen. Dadurch erhält man die Berührungs-Puncte 1, 2, 3 . . . 7. Von diesen werden verticale Linien aufwärts gezogen, welche die gleichnahmigen im Aufrisse schneiden werden. Die Durschnitt-Puncte unter der Horizontalen AR, z. B. die Puncte 1', 2', 3', 4', sind Puncte der Schattengränze im halben Cylinder. Eben so sucht man Puncte 5', 6', 7', u. s. f. in der Viertelkugel M. Von diesen Puncten werden Horizontale 7f, 6g, 5h u. s. f. an die Tangente RP gezogen, und die zwischen dieser Tangente und dem Halbkreise AFR enthaltenen Abschnitte 7f, 9g, 10h u. s. f. auf die den erst erwähnten Puncten correspondirenden Strahlen E'5, F'6 und G'7 von der Kreislinie einwärts getragen. Dadurch erhält man die Puncte z, y, und x'. Von diesen zieht man die Verticalen z'z, y'y und x'x aufwärts, und erhält die Durchschnitts-Puncte z, y. x als die verlangten Puncte der Schattengränze. Der Punct des Anschlusses, d. i. der Berührungs- oder Anfangspunct H ist gegeben; denn es ist dieser Punct durch den Beleuchtungswinkel bestimmt.

Im hohlen, oben offenen Halb-Cylinder A und G ist der Schlagschatten auf ähnliche Art zu finden. (Fig. 59.) Die Tangente mn und die Strahlen 1'2b, 3x, 4f sind mit einander parallel. Die Punkte fabc geben die Verticalen c'v, b'o, a'z u. s. f.

Eben

Eben so die Puncte 1, 2, 3 . . . die Puncte 1', 2', 3 . . . Durch diese werden die Strahlen 1'q, 2'p, 3o . . . unter dem gegebenen Winkel gezogen. Die Durchschnitts-Puncte y, z, x sind die verlangten Puncte. Die krumme Linie dx, zo.v ist die verlangte krumme Linie.

Zum Beschluß dieser leichtern Aufgaben der Projectional-Zeichnung hat man folgende Aufgabe noch beygefügt. Ihre Auflösung wird dem fleißigen Anfänger, welcher das Vorhergehende wohl verstanden hat, nicht schwer vorkommen.

Ist L ein leuchtender Punct (Fig. 60.), K eine Kugel, welche auf der Horizontal-Ebene MN liegt, L' die Projection des leuchtenden Punctes, K' die Projection der Kugel, und M'N' die Horizontal-Ebene, und man sucht die Form und Größe des Schattens auf dieser Ebene; so wird

1. Die Tangente LI und die Tangente LF' gezogen. Die zwey Puncte, wo diese Tangenten die Ebene MN treffen, nähmlich I und F', sind zwey Puncte der verlangten Schatten-Projection.

2. Wird aus der Projection des Punctes L, nähmlich aus L', durch den Mittelpunct m der Kugel-Projection K' eine Gerade LR gezogen; so ist diese der Durchschnitt der Vertical Ebene LF'I' mit der Horizontal-Ebene M'N'. In dieser Linie liegen die Puncte F' und I'. Um sie zu erhalten zieht man die Verticalen F'f und I'i. Die Durchschnitte F und I sind die verlangten Puncte, welche als der Anfang und als das Ende der verlangten Schatten Projection betrachtet werden müssen.

3. Werden die Berührungs-Puncte 1 und 7 mit einer Geraden 1,7 verbunden; so stellet diese den Durch-

mes-

messer und zugleich den Umfang eines Kreises vor, welcher der Beleuchtungskreis genannt werden kann. Dann zieht man durch den Mittelpunct m' der Kugel K von L aus eine Gerade, welche die Linie 1,7 halbirt, und in der Horizontal-Ebene MN einen Punct C' gibt.

4. Aus dem Mittelpuncte C' der Geraden 1'7 wird mit der Hälfte dieser ein Halbkreis 1, 2, b, c, d, e, 7 beschrieben, und dieser in eine beliebige Anzahl gleich großer Theile getheilt. Die Theil-Puncte a, b, c, d, e projicirt man auf die Gerade 1,7 durch Ordinaten, welche auf diese Gerade normal sind. Dadurch werden die Puncte 2, 3, 4, 5, 6 erhalten.

5. Diese Gerade projicirt man auf die gerade Linie L'R durch verticale Linien. Man erhält dadurch die Puncte 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7'. In den Puncten 2', 3', 4', 5', 6' errichtet man Normalen von unbestimmter Länge, sowohl ober- als unterhalb der Geraden 1'7'.

6. Nun projicirt man die Ordinaten a2, b3, c4, d5 und e6 auf eine Horizontale. Die erste Ordinate ist 6'e, die zweyte 5,d, die dritte 4'i, die vierte 3'b, die fünfte 2'a.

7. Diese Ordinaten werden aus den Puncten 6', 5', 4', 3', 2', der Projection 7',1' auf die zuvor gezogenen Normalen getragen. Dadurch erhält man die Puncte e', d', i', b' und a' in der Projection des Beleuchtungskreises.

8. Aus dem Puncte L' werden durch diese erst genannten Puncte gerade Linien von unbestimmter Länge gezogen. Dasselbe geschieht aus dem Puncte L und den Puncten 2, 3, 4, 5, 6 des Beleuchtungskreises 1,7. Diese Geraden geben die

Pun-

Puncte I', A', B', D' und E'. Aus diesen und dem Puncte C' werden Senkrechte von unbestimmter Länge abwärts gezogen.

9. Diese werden die zuvor aus E' gezogenen in gewissen Puncten A, B, C, D und E schneiden. Diese Durchschnitte von gleichnahmigen Linien geben die Puncte der verlangten Schattengränze, welche dann auch unter die Mittellinie L'I getragen werden müssen. Eine krumme, durch diese Puncte gezogene Linie ist der Umfang des verlangten Schattens.

Obschon manche dieser Aufgaben, besonders jene, in welchen ein Beleuchtungs-Punct gegeben wurde, bey den im gemeinen Leben vorkommenden Zeichnungen selten Statt haben; so hat man sie dennoch in diese kurzen Anfangsgründe mit aufgenommen, theils um die große Anwendung zu zeigen, welche die Lehrsätze der Stereometrie haben, theils um fleißigen Schülern, welche die Geometrie auf das Zeichen anzuwenden sich Mühe geben, (der einzige Weg gründlich zu zeichnen), Gelegenheit zu verschaffen das Erlernte zu brauchen, und sich selbst für schwerere Zeichnungsaufgaben vorzubereiten.

Bey genauer Betrachtung dieser über die Schattenbestimmung hier aufgeführten leichten Aufgaben ist klar, daß es sich immer darum handle den Durchschnitt zu zeichnen, welcher entsteht, wenn ein Körper von einer Fläche, oder von einem andern Körper durchschnitten wird. Dahin gehört auch die Zeichnung krummer Linien, welche in gekrümmten Flächen liegen, z. B. die Zeichnung der Schraubenlinie u. m. dgl.

Die engen Gränzen dieser Anfangsgründe erlauben keine weitere Ausführung dieses wichtigen Gegenstandes der Projectional-Zeichnung. Man hat zur

Übung fleißiger und talentvoller Anfänger einige Aufgaben hierher gesetzt, deren Auflösung aus dem zuvor Erklärten abgeleitet, und dadurch eine weitere Lust zum Nachdenken geweckt werden kann.

1tens. Zwey Cylinder von gleichem Durchmesser schneiden sich. Es soll die Durchschnitts-Linie gezeichnet werden. Die Achsen sind einander normal.

2tens. Es soll die Durchschnitts-Linie dieser Cylinder gezeichnet werden, wenn die Achsen mit einander einen Winkel, z. B. von 50°, machen.

3tens. Diese beyden Aufgaben sollen aufgelöset werden, wenn die beyden Cylinder ungleiche Durchmesser z. B. von 5″ und 2″ u. dgl. haben.

4tens. Ein senkrechter Cylinder wird mit Ebenen geschnitten, welche mit der Grundfläche Winkel von gegebener Größe, z. B. von 30°, 45° u. s. f., machen. Man soll die Gestalt und Größe des Durchschnittes zeichnen u. s. f.

5tens. Ein senkrechter, spitziger Kegel von gegebenen Abmessungen wird mit einem Cylinder von gegebenem Durchmesser geschnitten. Die Achse des Cylinders ist der Achse des Kegels normal. Es soll die Gestalt und Größe des Durchschnittes gezeichnet werden.

6tens. Derselbe Kegel wird mit einem Cylinder von gegebenem Durchmesser geschnitten. Die Achse des Cylinders ist der Seite des Kegels normal. Es soll die Gestalt und Größe des Durchschnittes gezeichnet werden.

7tens. Derselbe Kegel wird von diesem Cylinder geschnitten. Die Achse des Cylinders ist der Achse des Kegels parallel. Es soll die Gestalt und Größe des Durchschnittes gezeichnet werden.

8tens. Vor einer Kugel z. B. von 4" Durchmesser steht eine Pyramide von 8" Höhe; sie ist dreyseitig, senkrecht und spitzig. Die Sonnenstrahlen machen mit der Achse dieser Pyramide einen Winkel, z. B. von 60°. Die Pyramide ist vom Mittelpuncte der Kugel, z. B. 7", entfernt. Man soll den Schatten zeichnen, welcher von der Pyramide auf der Kugelfläche entsteht.

9tens. Eine vertical stehende Schraube von gegebenen Abmessungen steht vor einer verticalen Ebene. Man soll den durch die Sonnenstrahlen verursachten Schatten von der Schraube an die Ebene zeichnen. Die Strahlen machen mit der Ebene einen Winkel von 45°.

10tens. Auf einer Horizontal-Ebene liegt ein Cylinder von gegebenen Abmessungen. Vor dem Cylinder steht eine schiefe, 6seitige Pyramide von gegebenen Abmessungen. Die Sonnenstrahlen machen mit der Horizontal-Ebene einen gegebenen Winkel. Man sucht die Gestalt und Größe des Schattens, welcher durch die Pyramide zum Theil auf dem Cylinder entsteht, u. m. dgl.

Anwendungen dieser Zeichnungen auf die Gegenstände der Baukunst, z. B. auf die Zeichnung der Gewölbe, können hier keinen Platz finden, da die Schüler die dazu erforderlichen Kenntnisse der Architectur nicht besitzen.

Zum Beschluß dieser kurzen Anfangsgründe der Geometrie folgt hier eine Anwendung auf die perspectivische Zeichnung, welche hinreicht fleißige Schüler für größere, diesen wichtigen Gegenstand des theoretischen Zeichnens abhandelnde Werke vorzubereiten.

Die Perspectiv lehret die Gegenstände so abbilden, wie sie in einer gewissen Weite und Höhe angesehen dem Auge erscheinen.

Ist in O das Auge (Fig. 61.), so wird das Dreyeck ABC mittels der Sehestrahlen AO, BO, CO gesehen, und zwar in derselben Größe, so lange die Sehestrahlen im Auge einerley Winkel machen. Durchschneidet die (hier verticale) Ebene HL die Sehe-Pyramide OCBA; so ist der Durchschnitt abc das Bild der Fläche ABC, welches dem Auge in O eben so erscheint, als diese Fläche. Jener Theil der Geometrie, welcher die Puncte abc auf der als durchsichtig angenommenen Ebene HL, der Glastafel, geometrisch finden lehret, wird die Perspectiv (ital. la Prospettiva) genennt.

Der Auge-Punct, Gesichts-Punct, (Fig. 58.) ist jener Punct F, welcher durch die Normale OF an der Tafel HL gemacht wird.

Die Berührungs-Linie der Grund- oder Fundamental-Ebene und der Tafel, nähmlich die Linie NL, wird die Grund- oder Fundamental-Linie genennt. Die Horizontal-Linie ist die Gerade PQ durch den Auge-Punct F, gleichlaufend mit der Fundamental-Linie NL gezogen.

Der Distanz-Punct P oder Q ist in der Horizontal-Linie von dem Auge-Puncte F so weit entfernet, als das Auge O von demselben entfernt ist. S heißt der Fuß-Punct, wenn die Ebene ER die Horizontal-Ebene ist. FC ist die Vertical-Linie.

Um eine auf der Grundfläche geometrisch gezeichnete Figur perspectivisch abzubilden, z. B. (Fig. 63.) das Rechteck M, wird

1tens, von dieser Fläche die Projection auf die Grundlinie AC gezeichnet, und zwar durch die senkrechten, von den Ecken der Figur aus aufwärts gezogenen Geraden.

2tens. Dann wird die verjüngte Projection durch die in dem Puncte C zusammen laufenden Geraden auf der Linie ED gesucht.

3tens. Dasselbe geschieht mittels des Punctes O von der ersten (in 1. gefundenen) Projection der gegebenen Fläche M auf NE.

4tens. Von den dadurch erhaltenen Durchschnitts-Puncten werden horizontale Linien gezogen, und um die gleichnahmigen Puncte der perspectivischen Abbildung zu erhalten, die Abstände E1, E4, E2, E3 aufgetragen. Dadurch wird man die Puncte der perspectivischen Projection M′ erhalten.

Eben so erhält man die perspectivische Projection einer jeden Figur. Die Kreisfläche wird als ein regelmäßiges Vieleck von 6, 12, 24 oder von 8, 16 u. s. f. Seiten betrachtet. (Fig. 65.)

Auf ähnliche Art findet man die perspectivische Projection eines jeden regel- oder unregelmäßigen Körpers. Von jedem müssen eine oder mehrere Längen oder Höhen gegeben seyn. Z. B. die Höhe des Würfels, des Cylinders, der Pyramide u. s. f. In manchen Fällen sind, nebst dem Grundrisse des Körpers, auch mehrere Aufrisse desselben erforderlich.

Wird aus O auf CE eine Normale OC gezogen; so ist diese die Entfernung des Auges, in welcher die perspectivische Fläche oder das Bild angesehen werden muß.

Leichter als nach dieser Regel kann jede Ebene abc (Fig. 64.) in das Perspectiv gebracht werden, wenn man

1tens, die Normal-Projection der gegebenen Ebene auf die Grundlinie AB zeichnet;

2tens, von den dadurch erhaltenen Puncten b, a, c nach dem schicklich gewählten Puncte O die Geraden b″o, a″o, c″o u. s. f. zieht.

3tens. Auf die entgegen gesetzte Seite des Punctes D werden aus den Puncten der Projection die Abstände c″c, a″a, b″b, getragen, und von den dadurch erhaltenen

Pun-

Puncten nach dem Puncte D gerade Linien gezogen. Die Puncte, wo sich die gleichnahmigen Linien Oc'', Dc' und Ob'', Db' schneiden, sind die verlangten Puncte der perspectivischen Abbildung. Dasselbe gilt für krummlinige Ebenen. (Fig. 65.)

Im Falle ein Punct, oder eine Seite der gegebenen Figur an die Grundlinie stößt, (in dieser liegt), wird die Zeichnung dadurch leichter.

Bey der Zeichnung der Körper wird die Grundebene und die dieser entgegen stehende Ebene, wenn eine vorhanden ist, in das Perspectiv gebracht, und die verschiedenen Höhen auf der Grundlinie werden bestimmt, wornach sich sodann die perspect. Höhen ergeben. Daß bey der Pyramide und bey dem Kegel nur eine dieser Höhen vorkommt, ist für sich klar. (Fig. 66).

Der Punct d ist willkührlich; doch die Puncte e, f, g, i werden durch die Puncte 1, 2, 3, 4 bestimmt; dn ist die gegebene Höhe. Mittels des Punctes z kann man die Richtigkeit der Zeichnung prüfen.

Nach diesen kurzen Beyspielen und Erklärungen ist ein fleißiger Anfänger im Stande, auch andere Flächen und Körper perspectivisch zu zeichnen, z. B. geradlinige Flächen mit einwärts gehenden Winkeln, Kreise mit Ab- und Ausschnitten, Cylinder, schief abgeschnittene Prismen und Pyramiden, u. m. dgl. dann die zuvor erklärten Schatten-Projectionen. (Fig. 52—60.)

Diese Übungen werden nicht allein eine größere Fertigkeit der Hand, sondern auch Gelegenheit zum Nachdenken verschaffen, und daher jedem wichtig seyn, welcher die Anfangsgründe der Elementar-Geometrie auf die Zeichnung anwenden muß.

Die Perspectiv-Zeichnung ist nicht allein dem Mahler, sondern auch dem Architecten, und jenen, die sich mit der practischen Mechanik beschäftigen, sehr wichtig. Man zeigt deßwegen hier einige Werke an, welche die practische Perspectiv so vollständig enthalten, daß ein in diesen Anfangsgründen der gemeinen Geometrie geübter Anfänger

ohne

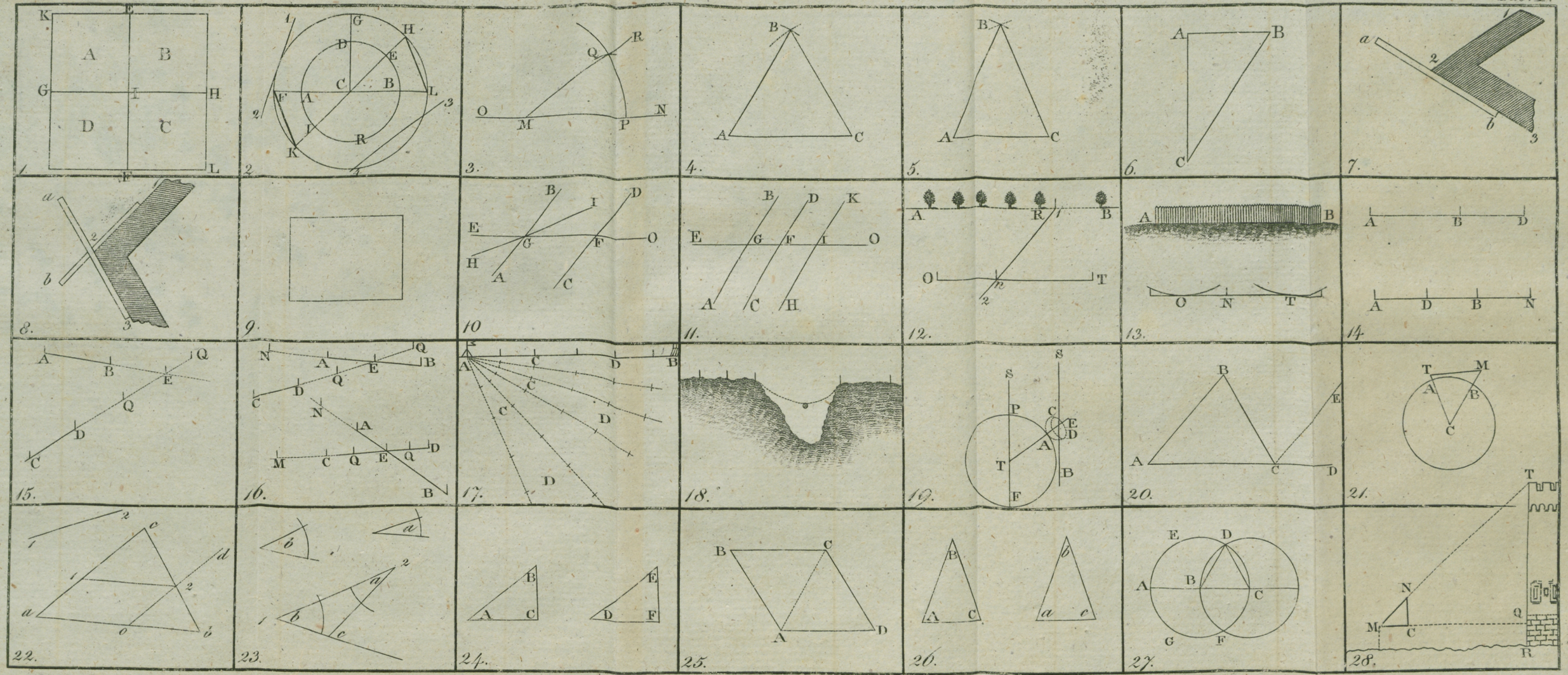
ohne fremde Beyhülfe sich selbst gründlich unterrichten wird, wenn er die in diesen Schriften vorkommenden Sätze wohl durchstudirt, und die dazu gehörigen Figuren im vergrößerten Maßstabe, und bey anders angenommenen Auge- und Distanz-Puncten, bey einem höher oder tiefer angenommenen Horizonte fleißig nachzeichnet.

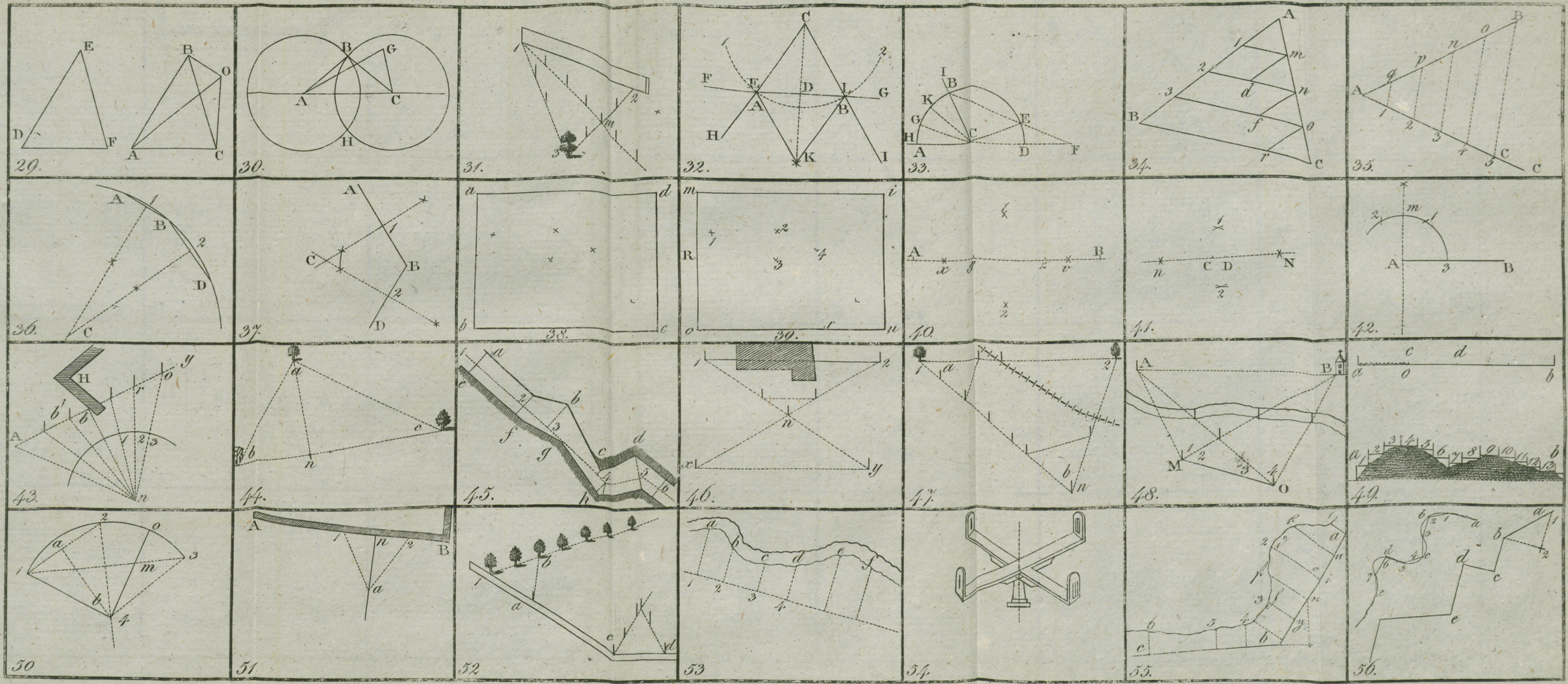
Itens. Über die Anwendung des perspectivischen Maßstabes, des Proportional-Zirkels und des Winkelmessers:

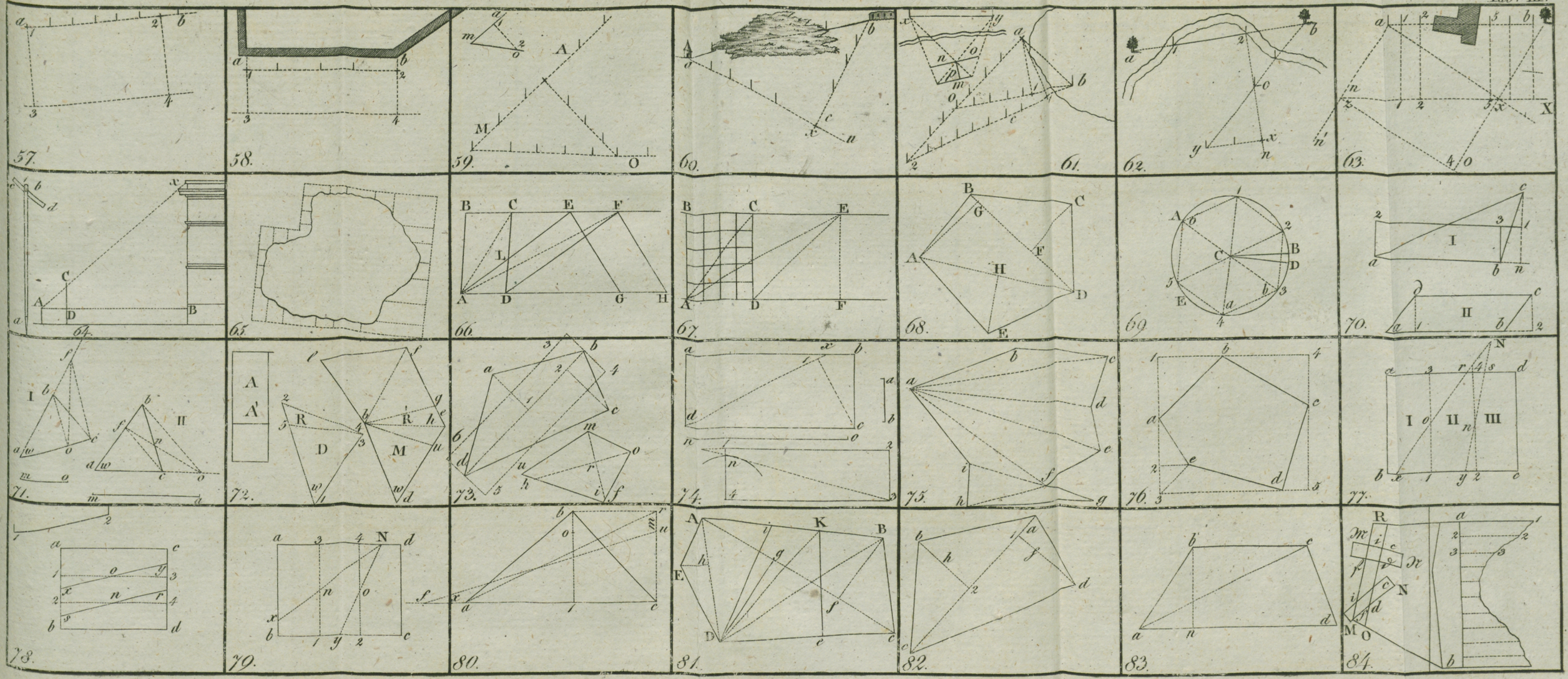
a. Handbuch der Perspective. Von J. A. Eitelwein. Berlin 1810. 4.
b. Jacobzs Ausführlicher Unterricht in dem Perspectiv. Amsterdam 1767. 8. (Mehrere Auflagen.)
c. Eust. Zanotti Trattato di prospettiva. Bologna 1766. 4.

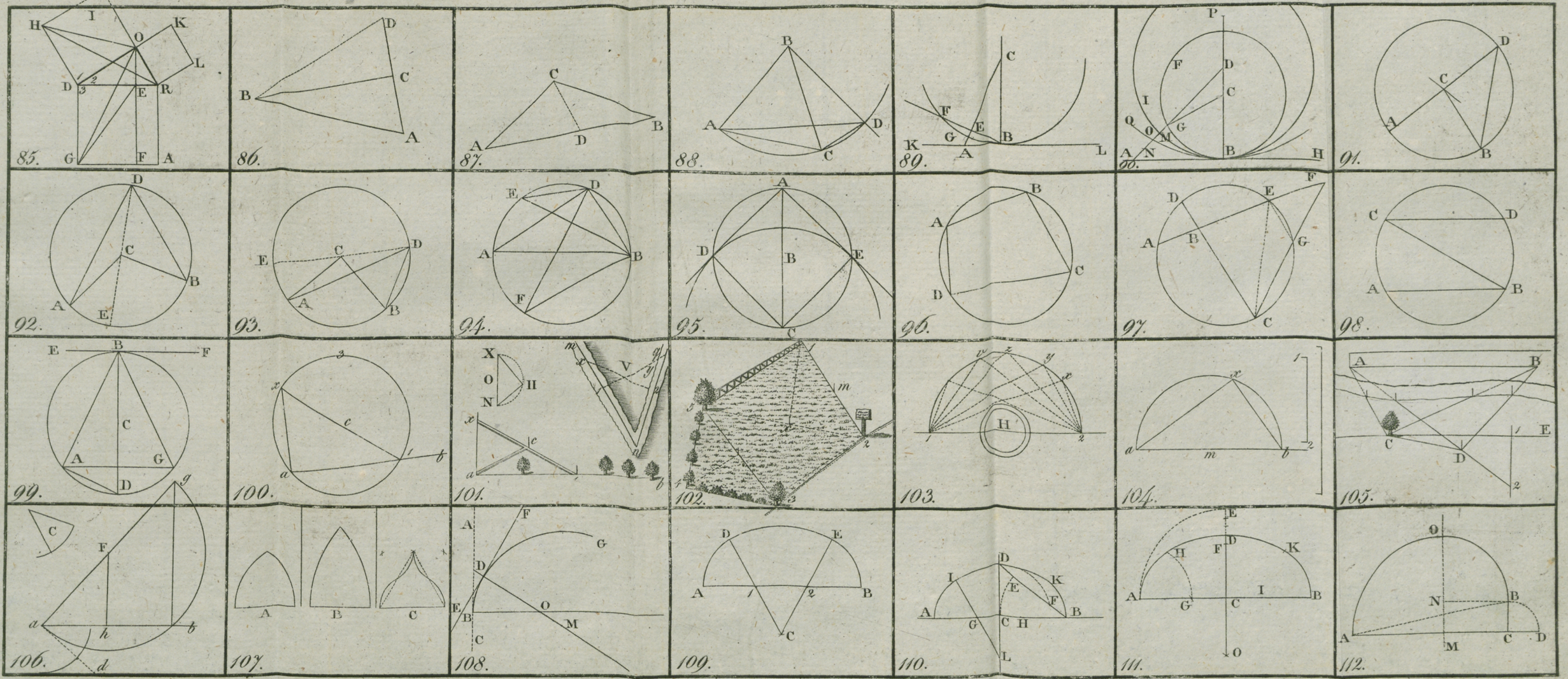
Itens. Von der Perspectiv-Zeichnung überhaupt:

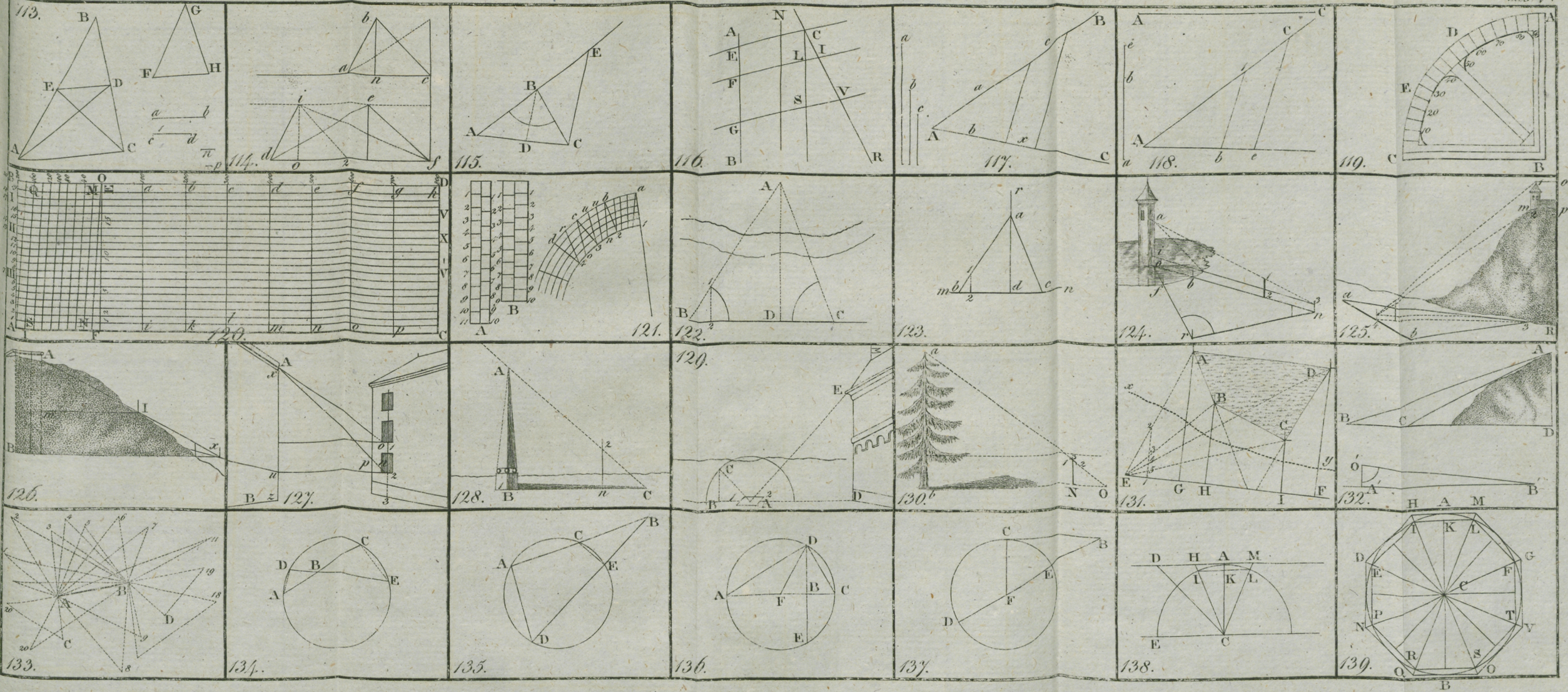
d. Vollständige Anleitung zur Linear-Perspective, oder gründliche Unterweisung zur perspectivischen Stereometrie. Von C. A. Nilson. Augsburg und Leipzig. 8.
e. Die Linear- und Luft-Perspectiv. Von P. Valenciennes. 8. Hof 1803.
f. Vollständige Anleitung zu der Perspectiv-Reißkunst. Durch Ch. Rembold. Augsburg 1710. 4.
g. G. B. da Vignola. Le due regole della prospettiva pratica. Con i commentarj del P. J. Dante. Roma 1583. und Bologna 1682. Fol.
h. F. G. Bibiena Direzioni della prospettiva. Bologna, 1753. 8.

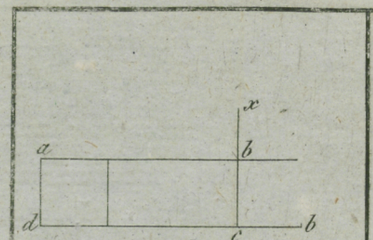

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10
11.
12.
13.
14
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.


29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50
51
52
53
54
55.
56.

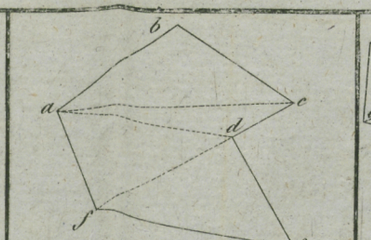

57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.


85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.
99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.
106.
107.
108.
109.
110.
111.
112.

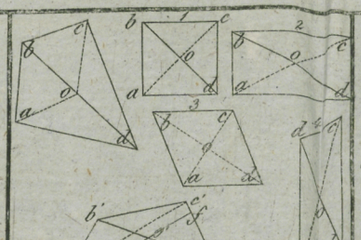

113.
114.
115.
116.
117.
118.
119.
120.
121.
122.
123.
124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
138.
139.

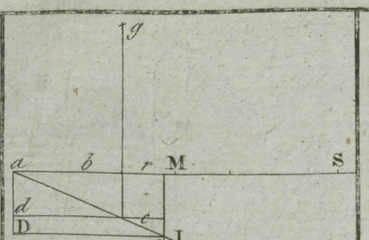


140.

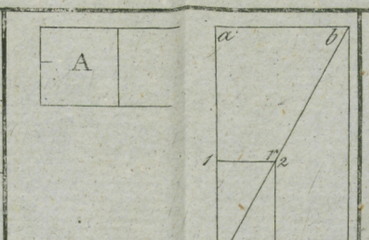


141.

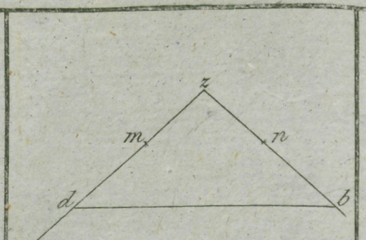

142.



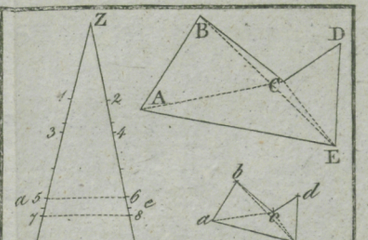
143.



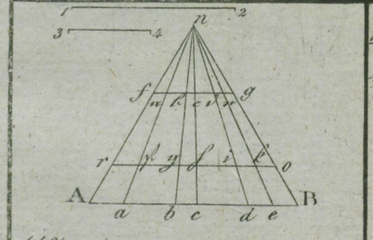
144.



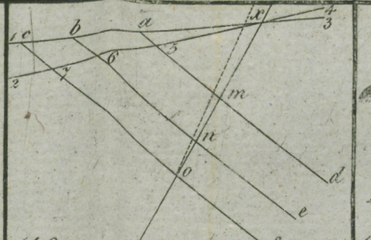
145.



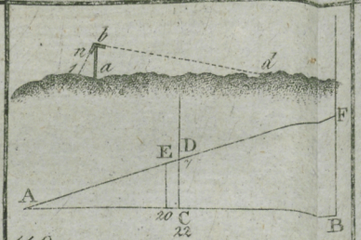
146.



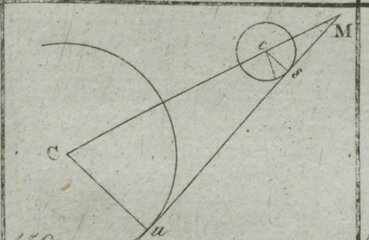
147.



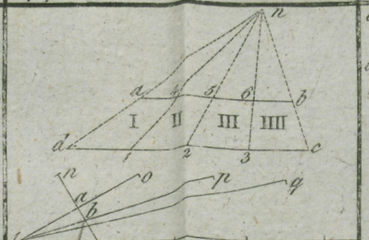
148.



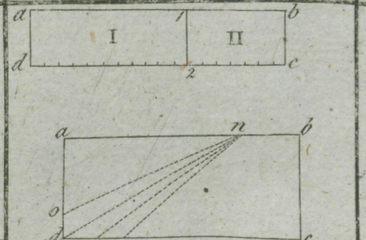
149.



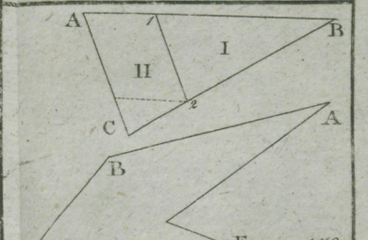
150.



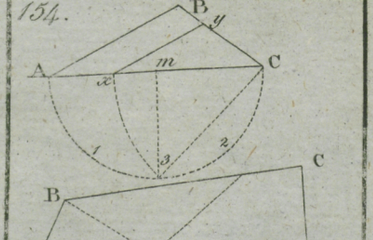
151.



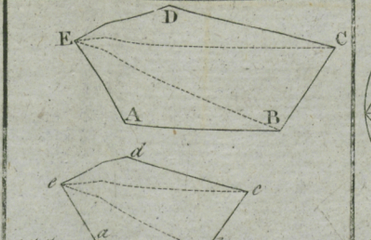
152.



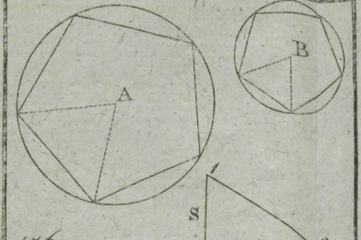
153.



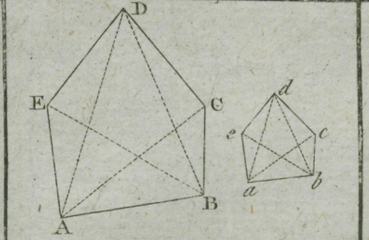
154.



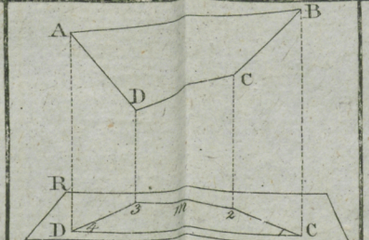
155.



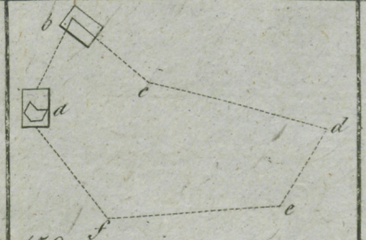
156.



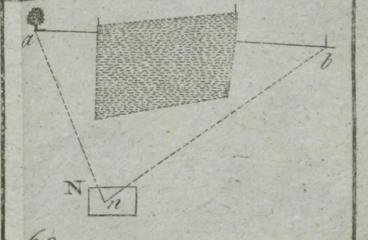
157.



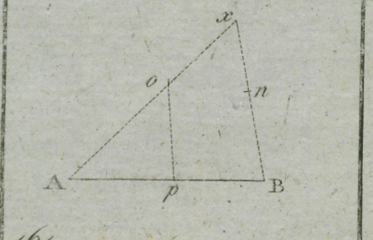
158.



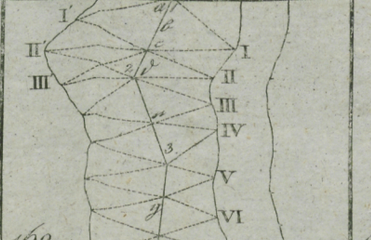
159.



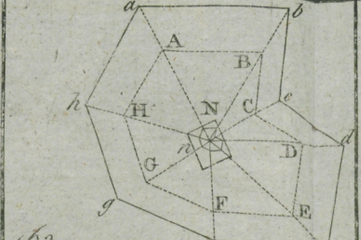
160.



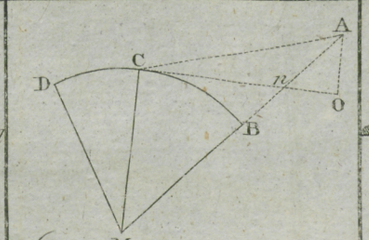
161.



162.

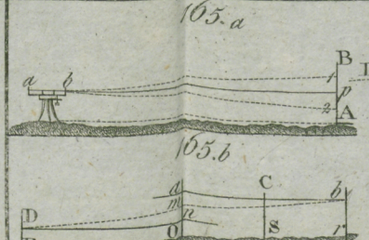


163.



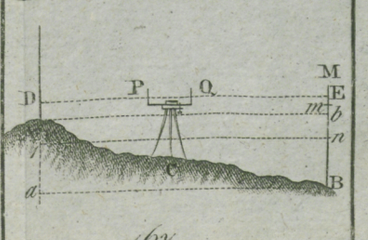
164.

165.a

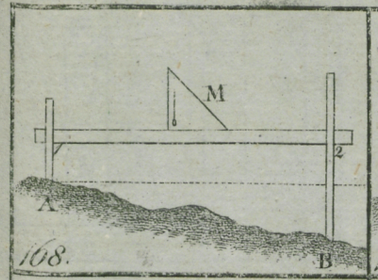


165.b

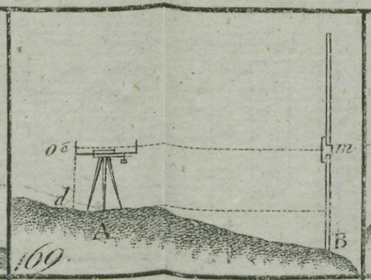
166.



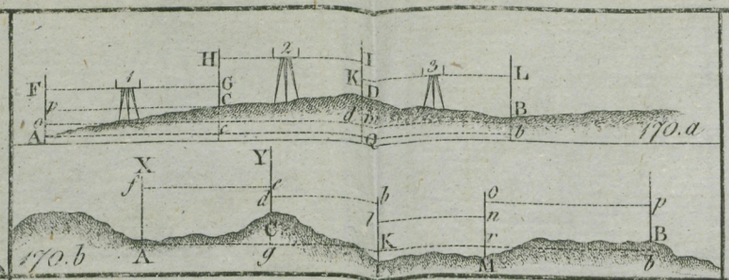
167.



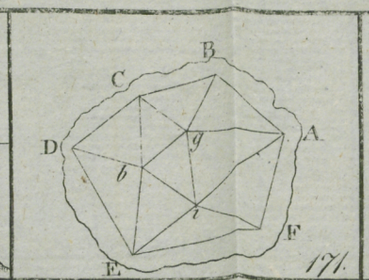
168.



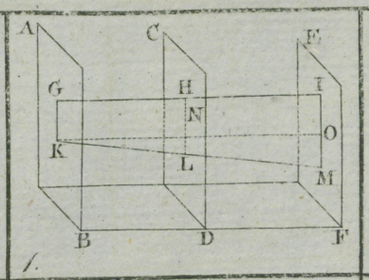
169.



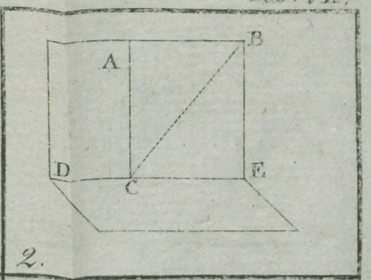
170. a. 170. b.



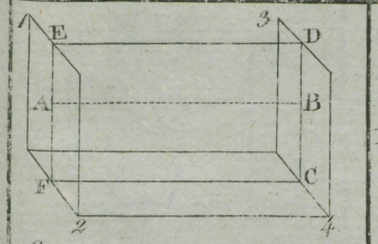
171.



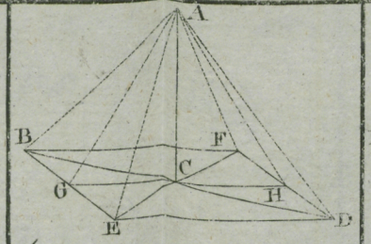
1.



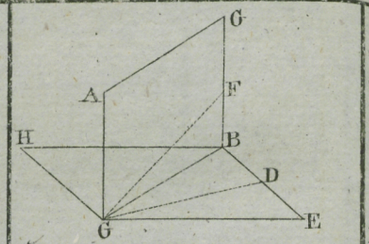
2.



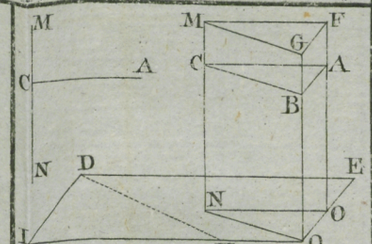
3.



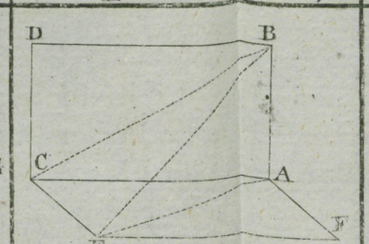
4.



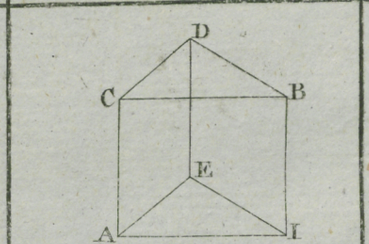
5.



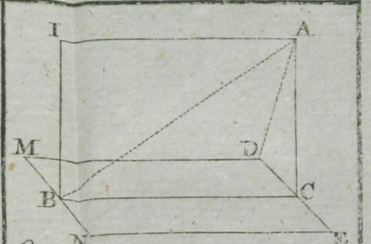
6.



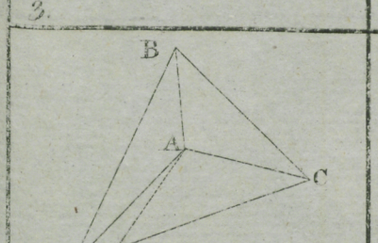
7.



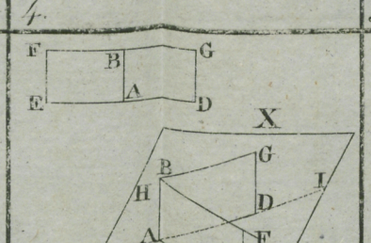
8.



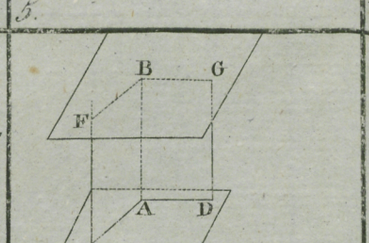
9.



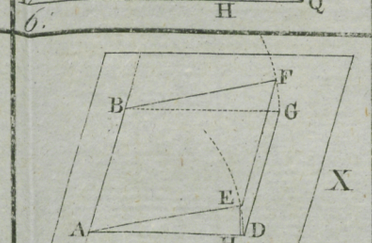
10.



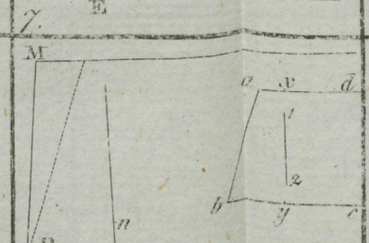
11.



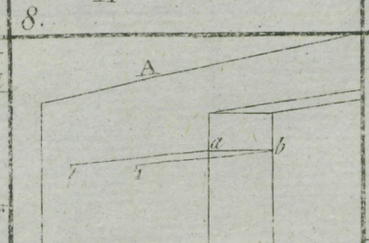
12.



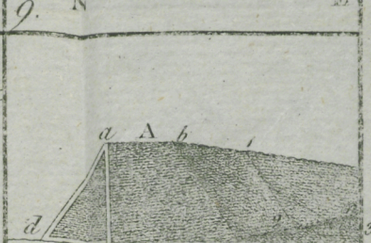
13.



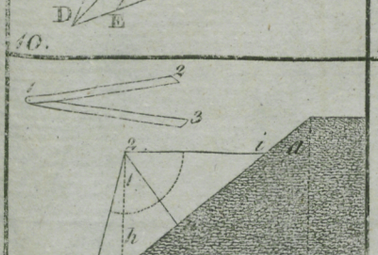
14.



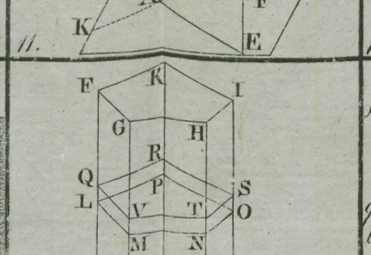
15.



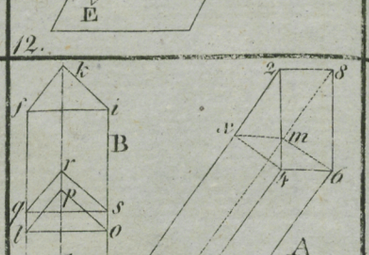
16.



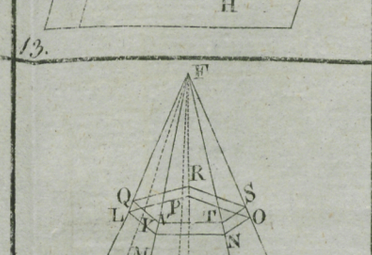
17.



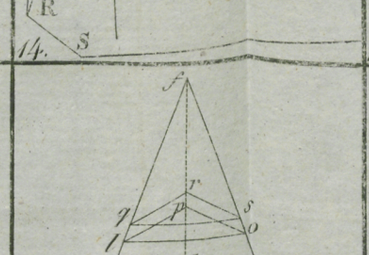
18.



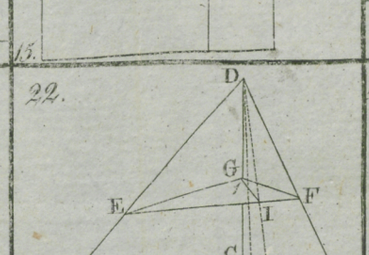
19.



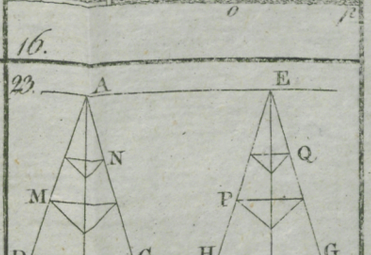
20.



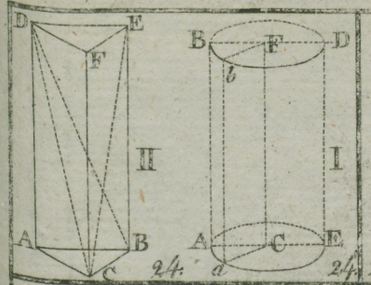
21.



22.

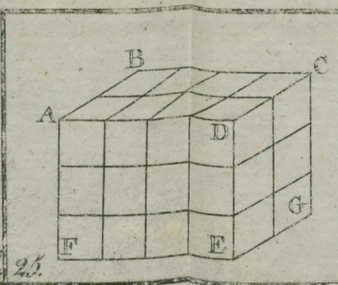


23.

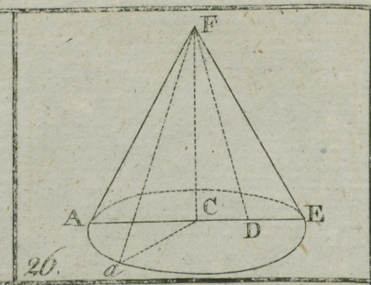


24.

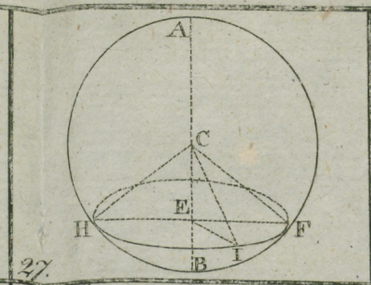
24.



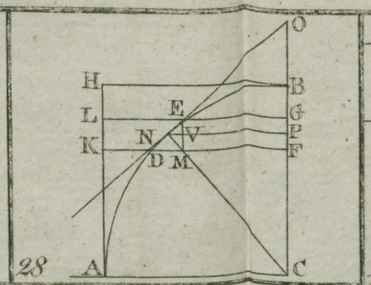
25.



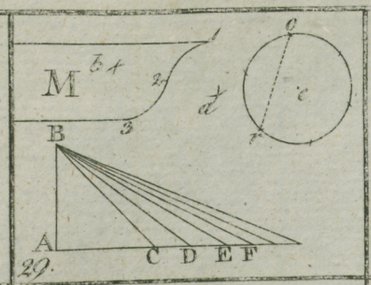
26.



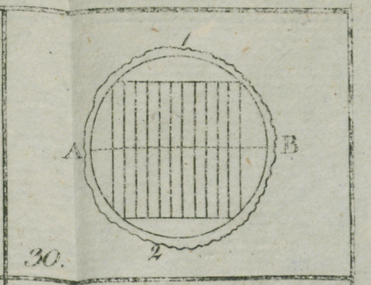
27.



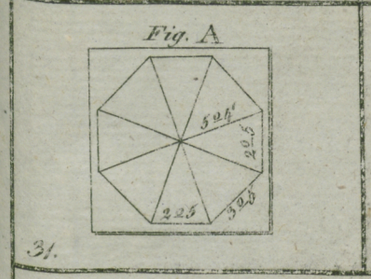
28.



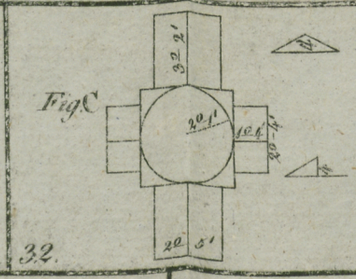
29.



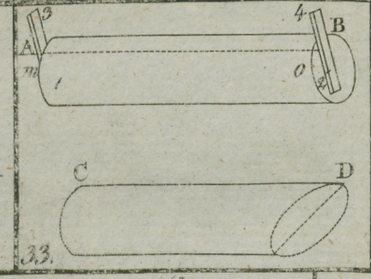
30.



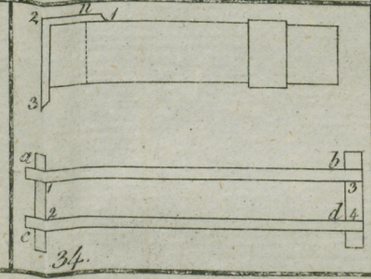
31.



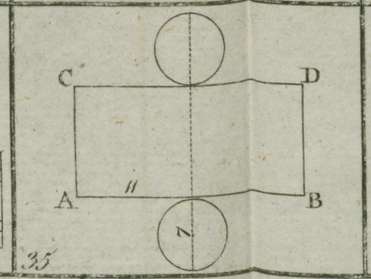
32.



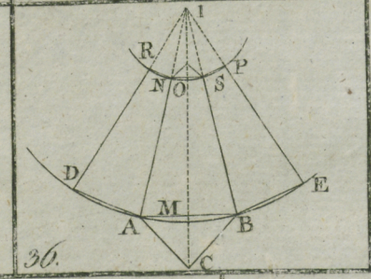
33.



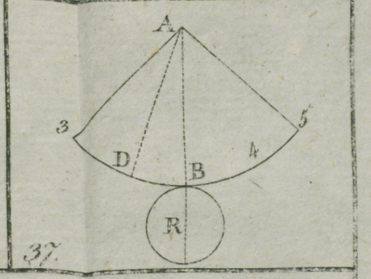
34.



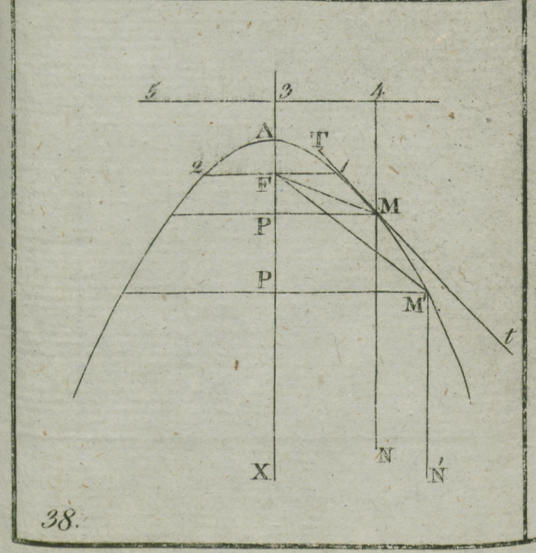
35.



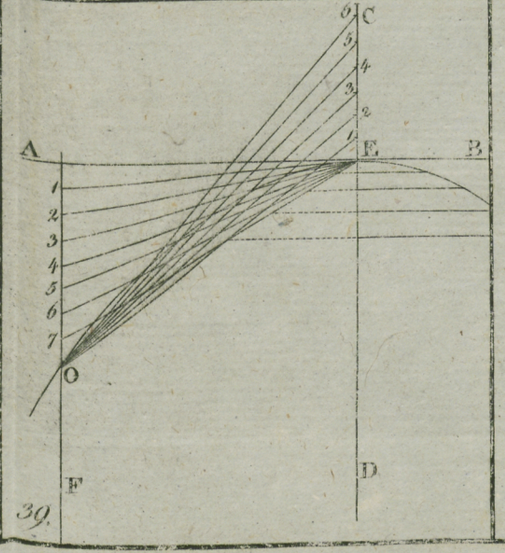
36.



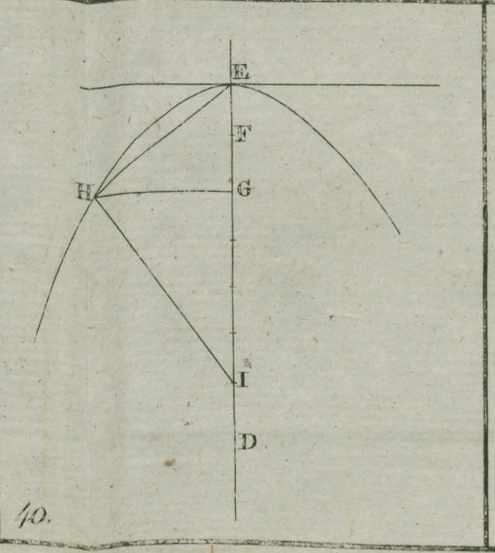
37.



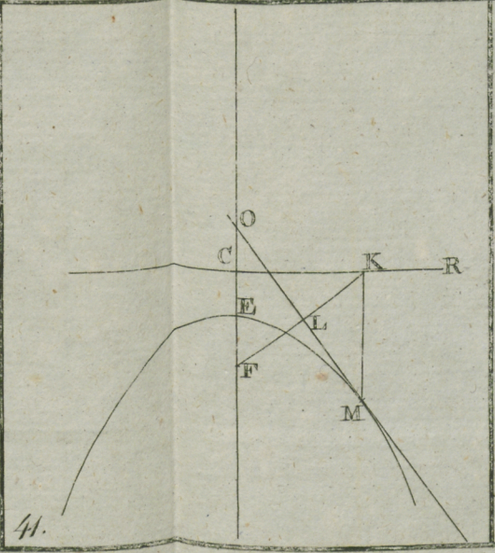
38.



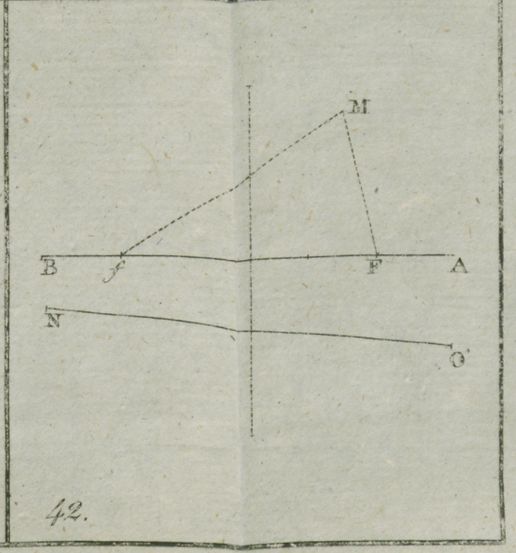
39.



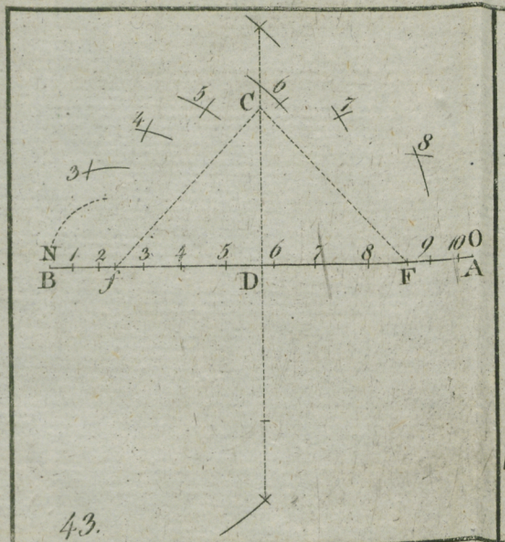
40.



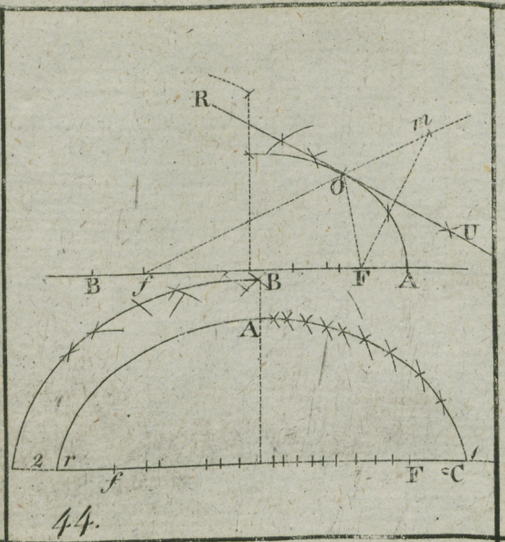
41.



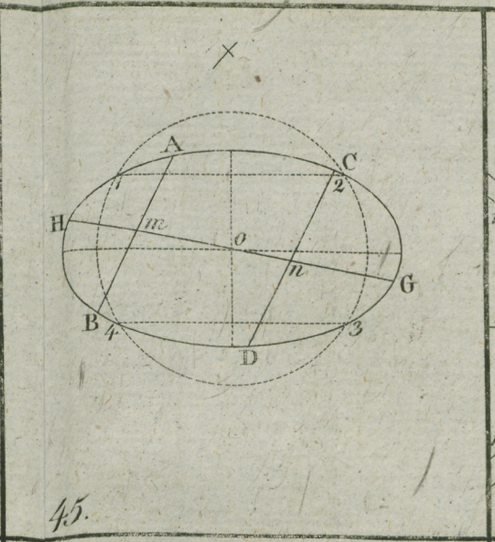
42.



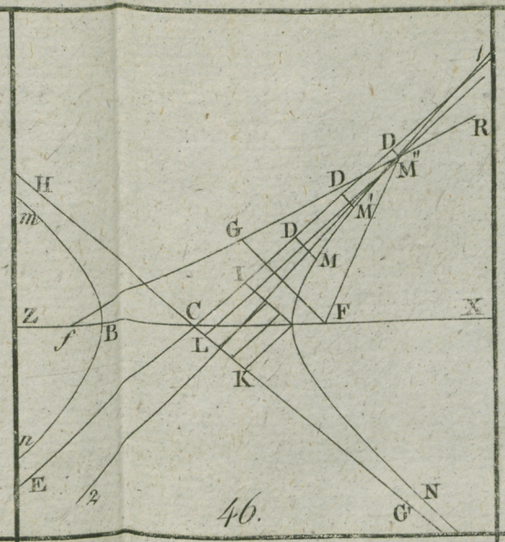
43.



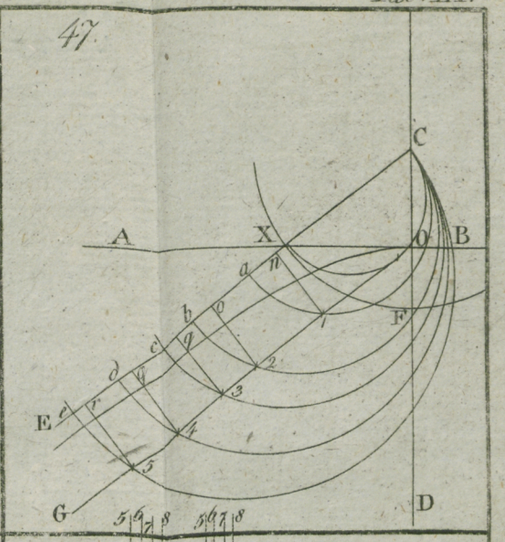
44.

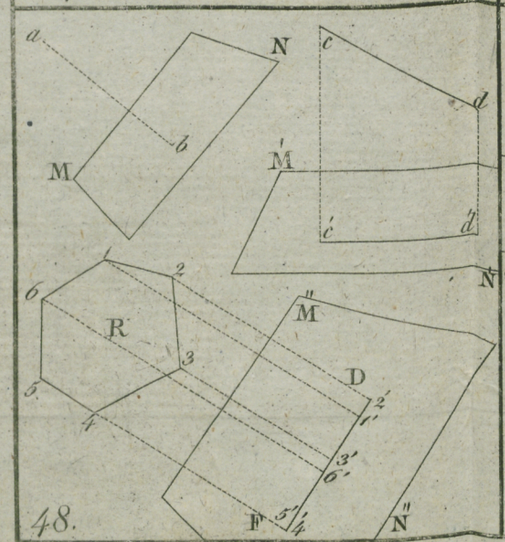


45.

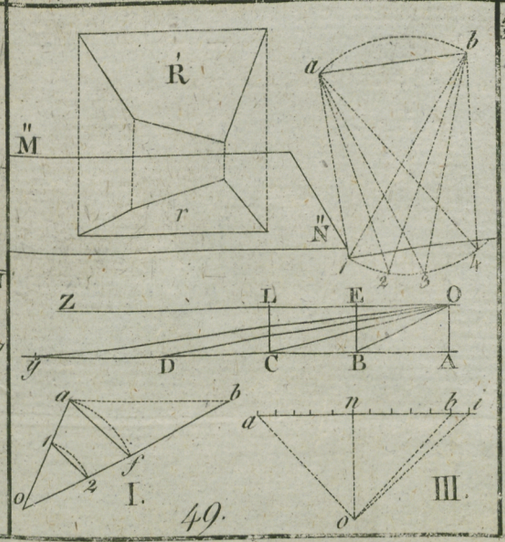


46.

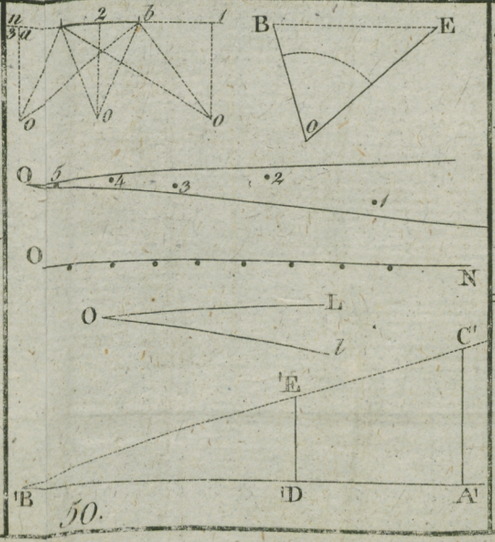




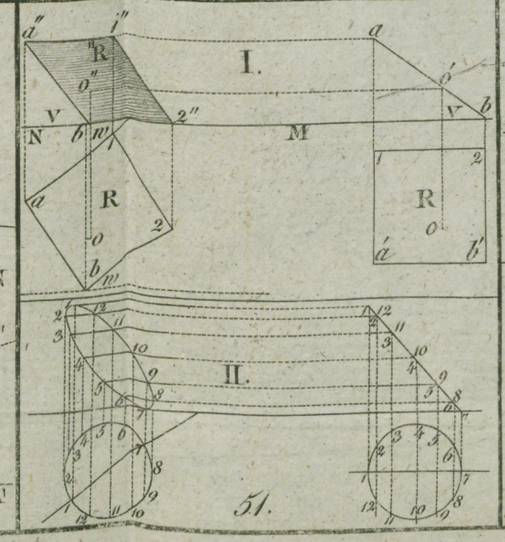
48.



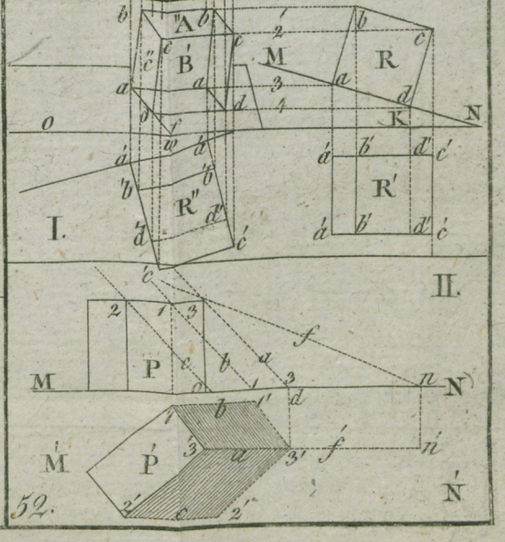
49.



50.



51.



52.

53.

54.

55.

56.

57.

58.

59.

60.

61.

62.

63.

64.

65.

66.

UB Wien
+AM546560600