I
534105 a

Rosenberg

Methodisch geordnete

Sammlung von Aufgaben

aus der

Planimetrie Stereometrie u. Trigonometrie

N

Methodisch geordnete
Sammlung von Aufgaben
aus der
Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie

Von
Dr. Karl Rosenberg

Zwölfte Auflage

Mit 115 in den Text gedruckten Figuren

Wien 1937
Hölder-Pichler-Tempsky A. G.

I
534.105
Wien Universitätsbibliothek

Rosenberg

Methodisch geordnete Sammlungen von Aufgaben aus der Mathematik

umfassen folgende Bände bzw. Hefte:

Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik u. Algebra 16. Aufl. 1937

Sammlung von Aufgaben aus der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie 12. Aufl. 1937

Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene 1934

Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung 1934

Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie 1935

Ergänzungen zur Arithmetik und Algebra (Aufgaben zur Kombinatorik, dem binomischen Lehrsatz und der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie ein Anhang über unbestimmte Gleichungen) 1935

Alle Rechte vorbehalten

Druck von Ferd. Kleinmayr in Klagenfurt

Inhalt.

Erſter Teil.

Planimetrie.

Seite

I. Gerade Linien und Winkel 1
II. Das Dreieck 2
III. Viereck und Vieleck 5
IV. Kongruenz der Dreiecke 7
V. Konſtruktionsaufgaben 13
VI. Flächenberechnung 17
VII. Verwandlung und Teilung geradliniger Figuren 31
VIII. Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren 34
IX. Der Kreis 42
X. Der Kreis und das Vieleck 49
XI. Kreismeſſung 58
XII. Kegelſchnittslinien 72
XIII. Wiederholungsaufgaben 83

Zweiter Teil.

Stereometrie.

XIV. Das Prisma 98
XV. Der Zylinder 111
XVI. Die Pyramide und der Pyramidenſtumpf 116
XVII. Der Kegel und der Kegelſtumpf 129
XVIII. Rotationskörper 139
XIX. Die Kugel 146
XX. Die regulären Polyeder 167
XXI. Wiederholungsaufgaben 172

Dritter Teil.

Ebene Trigonometrie.

XXII. Winkelfunktionen. — Auflöſung des rechtwinkligen Dreieckes (I. Teil) 185
XXIII. Auflöſung des ſchiefwinkligen Dreieckes (I. Teil) 193
XXIV. Goniometriſche Transformationen 199
XXV. Auflöſung des rechtwinkligen und ſchiefwinkligen Dreieckes (II. Teil) 205
XXVI. Wiederholungsaufgaben 211

Ergebniſſe der Rechnungsaufgaben 218

Einige Konstanten.

$\pi = 3{\cdot}14159265\ldots$

$2\pi = 6{\cdot}28318531\ldots$

$\frac{\pi}{2} = 1{\cdot}57079633\ldots$

$\frac{\pi}{3} = 1{\cdot}04719755\ldots$

$\frac{\pi}{6} = 0{\cdot}52359878\ldots$

$4\pi = 12{\cdot}56637061\ldots$

$\frac{4\pi}{3} = 4{\cdot}18879020\ldots$

$\frac{1}{\pi} = 0{\cdot}31830989\ldots$

$\frac{1}{2\pi} = 0{\cdot}15915494\ldots$

$\pi^2 = 9{\cdot}86960440\ldots$

$\frac{1}{\pi^2} = 0{\cdot}10132118\ldots$

$\sqrt{\pi} = 1{\cdot}77245385\ldots$

$\sqrt[3]{\pi} = 1{\cdot}46459189\ldots$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{\cdot}56418958\ldots$

$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = 0{\cdot}68278406\ldots$

$\sqrt{2} = 1{\cdot}4142136\ldots$

$\sqrt{3} = 1{\cdot}7320508\ldots$

$\sqrt{5} = 2{\cdot}2360680\ldots$

$\sqrt{6} = 2{\cdot}4494897\ldots$

$\sqrt{10} = 3{\cdot}1622777\ldots$

Erſter Teil.

Planimetrie.

I. Gerade Linien und Winkel.

1. Zwei gegebene Strecken zu addieren. 1

2. Zwei gegebene Strecken zu ſubtrahieren. 2

3. Zwei gegebene Winkel zu addieren. 3

4. Zwei gegebene Winkel zu ſubtrahieren. 4

5. Es ſind alle Gattungen von Winkeln, angefangen vom Nullwinkel bis zum vollen Winkel, zu zeichnen. 5

6. Man meſſe gegebene ſpitze, ſtumpfe und erhabene Winkel mit dem Transporteur! 6

7. Warum mag man gerade die Zahl 360 für die Kreisteilung gewählt haben? (Man denke an die Teilbarkeit dieſer Zahl!) 7

8. Man zeichne mit Hilfe des Transporteurs Winkel von 25°, 30°, 42°, 45°, 60°, 75°, 90°, 120°, 135°, 152°, 218°, 236°, 270°, 300°, 338°! 8

9. Man berechne den Nebenwinkel eines Winkels von 68° 15′ 37″! 9

10. Es iſt zu beweiſen, daß die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel aufeinander ſenkrecht (normal) ſtehen. 10

11. Die Differenz zweier Nebenwinkel iſt 26° 24′ (17° 28′); wie groß iſt jeder von beiden? 11

12. Schneiden ſich drei Gerade in einem Punkte, ſo iſt die Summe von drei nicht benachbarten Winkeln immer gleich zwei Rechten. (Beweis!) 12

13. Man hat durch den Scheitel eines rechten Winkels eine unbegrenzte Gerade gezogen und dadurch vier Winkel bekommen. Warum iſt die Differenz je zweier einander gegenüberliegender Winkel immer 90°? 13

14. Zwei Gerade ſchneiden ſich derart, daß einer der vier entſtehenden Winkel 37° 28′ 44″ iſt; man berechne die drei anderen Winkel! 14

15 15. Im Scheitel eines Winkels von 58° hat man auf beide Schenkel Senkrechte nach außen errichtet. Welchen Winkel schließen sie ein und in welcher Beziehung steht dieser immer zum ursprünglichen Winkel?

16 16. An einer Seite einer Geraden liegen vier Winkel mit demselben Scheitel, von denen immer jeder folgende doppelt so groß ist wie der vorhergehende. Wie groß ist jeder dieser vier Winkel?

17 17. Um einen Punkt herum liegen neun Winkel, von denen der erste 75° 26′, der zweite 30° 28′ mißt und die übrigen sieben gleich groß sind. Wie groß ist jeder von ihnen?

18 18. Wenn man einen rechten Winkel in zwei beliebige Teile teilt, welchen Winkel schließen dann die Halbierungslinien a) ihrer Komplemente, b) ihrer Supplemente ein?

19 19. Zwei parallele Gerade werden von einer dritten geschnitten; man halbiert zwei Gegenwinkel, zwei Wechselwinkel und zwei innere Anwinkel; was für einen Winkel bilden die beiden Halbierungslinien in jedem der drei Fälle?

20 20. Welche Eigenschaft besitzen zwei Winkel, deren Schenkel a) paarweise zueinander parallel, b) paarweise aufeinander normal stehen?

21 21. Warum ist die Polhöhe eines Ortes (Höhe des Weltpoles über dem Horizont des Ortes, gemessen durch den Meridianbogen zwischen Pol und Horizont) gleich der geographischen Breite?

22 22. Man zeichne spitze, stumpfe und erhabene Winkel und übertrage sie mit Hilfe von Zirkel und Lineal an beliebig andere Stellen des Zeichenblattes!

23 23. Man ziehe zu einer gegebenen Geraden parallele Gerade a) mit Hilfe von Zirkel und Lineal, b) mit Hilfe zweier Dreiecke oder eines Dreieckes und eines Lineales!

II. Das Dreieck.

24 1. Man berechne: a) aus zwei Dreieckswinkeln den dritten, z. B. $\alpha = 76° 38' 19''$ und $\beta = 41° 29' 57''$; b) aus dem spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes den anderen, z. B. $\alpha = 36° 48' 32''$; c) aus dem Außenwinkel und dem einen gegenüberliegenden Innenwinkel die beiden anderen, z. B. $\delta = 128° 17' 43''$ und $\alpha = 62° 24' 36''$!

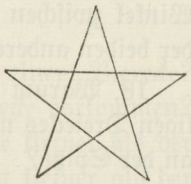
25 2. Man zeichne an jede Ecke eines Dreieckes einen Außenwinkel und berechne ihre Summe!

3. In einem Dreieck ist $\sphericalangle \alpha$ dreimal, $\sphericalangle \beta$ viermal so groß wie $\sphericalangle \gamma$. Wie groß sind die Außenwinkel dieses Dreieckes? 26

†4.*) In einem Dreieck ist $\sphericalangle \alpha = 44°$, $\beta = 64°$. Die Halbierungslinien der drei Außenwinkel dieses Dreieckes bilden ein dem gegebenen umschriebenes Dreieck. Wie groß sind dessen Winkel und wie groß die Winkel seiner vier Teildreiecke? Versuche die Aufgabe auch allgemein zu lösen! 27

†5. Man bestimme die Summe der fünf Winkel an den Spitzen des nebengezeichneten, fünfspitzigen Sternes (Pentagramm, Drudenfuß) (Fig. 1)! **) 28

Fig. 1.



†6. Dieselbe Aufgabe ist für einen Stern mit sieben Spitzen (Heptagramm) (Fig. 2) zu lösen.**) 29

7. In einem Dreiecke verhalten sich die Winkel ihrer Größe nach wie 1 : 2 : 3, wie groß ist jeder? 30

8. In einem Dreieck ist ein Winkel 94° 57′ (44° 33′); wie groß sind die beiden anderen, wenn sie sich verhalten wie 4 : 3 (5 : 2)? 31

9. In einem rechtwinkligen Dreiecke werden die zwei spitzen Winkel halbiert; welchen Winkel schließen die Halbierungslinien ein? 32

10. Welchen Winkel schließen die Halbierungslinien der beiden Außenwinkel ein, die man an den Endpunkten der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes zeichnen kann? 33

Fig. 2.

11. In einem Dreiecke ist ein Winkel α; welchen Winkel schließen die Halbierungslinien der beiden anderen Dreieckswinkel ein? (Allgemein, dann besonders für $\alpha = 75° 26′$.) 34

12. Man verlängert die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Winkel α und β beiderseits um die Länge der anstoßenden Kathete. Wie groß sind die Winkel des neu entstandenen Dreieckes? 35

13. Zeichne a) ein spitzwinkliges, b) ein rechtwinkliges, c) ein stumpfwinkliges Dreieck, dessen Winkel der Gradzahl nach gegeben sind! 36

*) Die Aufgaben, welche vor der Nummer mit dem Zeichen † versehen sind, sind entweder etwas zeitraubender oder schwieriger oder können bei Zeitmangel unbeschadet des Folgenden vorläufig übergangen werden.

**) Der Stern braucht nicht regelmäßig zu sein (wie in der Figur). Es ist der Satz vom Außenwinkel zu benützen.

37 14. Zeichne ein gleichſchenkliges Dreieck, in dem der Winkel am Scheitel a) 50°, b) 90°, c) 130° iſt. Die übrigen Winkel ſind dabei zu berechnen.

38 15. Berechne die Winkel eines gleichſchenkligen Dreieckes aus dem gegebenen Winkel an der Grundlinie, z. B. $\alpha = 48° 17' 26''$!

39 16. Berechne die Winkel eines gleichſchenkligen Dreieckes aus dem gegebenen Winkel an der Spitze, z. B. $\gamma = 56° 24' 38''$!

40 17. In einem Dreieck wird ein Winkel halbiert und von ſeinem Scheitel aus die Höhe auf die Gegenſeite gezogen. Beweiſe, daß der Winkel zwiſchen dieſen beiden Geraden gleich iſt der halben Differenz der beiden anderen Winkel!

41 18. Warum iſt der Winkel, den die Seitenhöhe eines gleichſchenkligen Dreieckes mit der Grundlinie bildet, halb ſo groß wie der Winkel an der Spitze?

42 19. In einem rechtwinkligen Dreiecke iſt einer der Winkel 60°; er wird halbiert und zugleich die Hypotenuſenhöhe gezogen. Berechne alle in der Figur vorkommenden Winkel! Warum iſt eines der entſtandenen Dreiecke ein gleichſeitiges?

43 20. In einem gleichſchenkligen Dreiecke iſt ein Baſiswinkel doppelt ſo groß wie der Winkel am Scheitel. Wie groß ſind ſeine Winkel? Was für Dreiecke entſtehen durch die Halbierung eines Baſiswinkels?

44 21. Warum iſt jeder Winkel im Halbkreiſe ein rechter? (Lehrſatz des Thales von Milet, 640—548 v. Chr.)

45 22. Zwei parallele Gerade werden von einer dritten geſchnitten; man halbiert zwei innere Anwinkel und zieht durch den Schnittpunkt der Halbierungslinien eine dritte Parallele; es iſt zu zeigen, daß ſie die Strecke der ſchneidenden Geraden, die zwiſchen den urſprünglichen Parallelen liegt, halbiert.

46 23. In einem rechtwinkligen Dreiecke iſt ein ſpitzer Winkel gleich 30°; man ſoll beweiſen, daß die kürzere Kathete die Hälfte der Hypotenuſe iſt.

47 24. Wie lautet die Umkehrung dieſes Satzes?

48 25. In einem Dreiecke iſt jede Höhe kleiner als die halbe Summe der anliegenden Seiten. Warum?

49 26. In jedem Dreiecke iſt die Summe der drei Höhen kleiner als der Umfang. Warum?

27. Verbindet man einen Punkt außerhalb (innerhalb) eines Dreieckes mit jeder Ecke, so ist die Summe dieser drei Verbindungsstrecken größer als der halbe (und kleiner als der ganze) Dreiecksumfang. Warum? Was ergibt sich, wenn der Punkt im Dreiecksumfang liegt? **50**

28. In einem Dreiecke sollen von zwei Eckpunkten aus auf die gegenüberliegenden Seiten die Höhen konstruiert werden.*) **51**

†29. Von einem Dreiecke sind gegeben eine Seite und die Höhen auf die beiden anderen Seiten; das Dreieck ist zu konstruieren.*) **52**

III. Viereck und Vieleck.

1. Wie groß ist die Summe der Außenwinkel in einem Vierecke? **53**

2. Wieviel stumpfe Winkel können in einem Vierecke vorkommen? **54**

3. In jedem Vierecke ist immer a) eine Diagonale kleiner als der halbe Umfang, b) die Summe der beiden Diagonalen kleiner als der ganze und größer als der halbe Umfang. Warum? **55**

4. Zeichne die verschiedenen Gattungen der Vierecke! **56**

5. In einem Parallelogramme ist ein Winkel gegeben (z. B. $\alpha = 29^\circ$ 38′ 47″); wie groß sind die anderen? **57**

6. Zeichne eine unregelmäßiges Siebeneck und zähle die Seiten und Winkel ab! **58**

7. Man ziehe in dem zuletzt gezeichneten Siebeneck von einer Ecke alle möglichen Diagonalen; wieviel sind es? **59**

8. In wieviel Dreiecke erscheint das Siebeneck nach Nr. 7 zerlegt? **60**

9. Wieviel Diagonalen lassen sich im gezeichneten Vielecke überhaupt ziehen? **61**

*) Zur Lösung derartiger Konstruktionsaufgaben nehme man die Aufgabe als gelöst an (*Analysis*) und suche aus dieser Annahme mit Hilfe zweckmäßiger Hilfskonstruktionen auf Grund bekannter Sätze zur gesuchten Konstruktion zu kommen (vgl. auch S. 13 u. ff.)! Die Aufgabe **51** stützt sich darauf, daß der Halbkreis der *geometrische Ort* (vgl. S. 15 u. 31), der Scheitel aller rechtwinkligen Dreiecke ist, die den Durchmesser als Hypotenuse haben. — Was die graphische Ausführung derartiger Aufgaben anbelangt, so soll die Zeichnung immer auch für andere *lesbar* sein, d. h. jeder, der die fertig ausgeführte Zeichnung besieht, muß daran erkennen, was gegeben war und was gesucht wurde. Es wird dies erreicht, wenn man *gegebene Linien voll und fein, Hilfslinien punktiert oder gestrichelt, Resultatlinien voll und stark, geometrische Örter gestrichelt-punktiert* ausführt. Flächen, die zu suchen waren, werden *schraffiert*.

62 10. Man behandle die Aufgaben 7—9 allgemein für ein Vieleck mit n Seiten und begründe dafür folgende Formeln:

$$d = n - 3 \qquad \Delta = n - 2^{*}) \qquad D = \frac{n(n-3)}{2}.$$

63 11. Ein Vieleck zerfällt durch die aus einer Ecke gezogenen Diagonalen in 12 Dreiecke; wieviel Ecken hat es?

64 12. In einem Vielecke lassen sich von einer Ecke aus 7 Diagonalen ziehen; wieviel Ecken hat es? **)

65 13. Man berechne für ein Vieleck mit n Seiten a) die Summe der Innenwinkel, b) die Summe der Außenwinkel!

66 14. Man berechne a) die Winkelsumme, b) einen Umfangswinkel für ein regelmäßiges (reguläres) Vieleck mit der Seitenzahl $n = 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 50, 100, 1000, 1{,}000.000$, stelle die Ergebnisse zusammen und verwerte sie zur Beantwortung der nächsten Aufgaben!

67 15. Welchem Grenzwerte nähert sich die Größe eines Vieleckwinkels, wenn die Seitenzahl des regelmäßigen Vieleckes unendlich groß wird?

68 16. Man leite aus der in Aufgabe 14b erlangten Formel den Grenzwert für die Größe eines Vieleckwinkels in einem regelmäßigen Vielecke mit unendlich großer Seitenzahl ab!

Anleitung: Aus $\sphericalangle \alpha = \frac{n \cdot 2R - 4R}{n} = 2R - \frac{360^\circ}{n}$ ergibt sich für $n = \infty \sphericalangle \alpha = 180^\circ$.

69 17. Welche Verwertung kann das Ergebnis der Aufgaben Nr. 15 und 16 in der Kreislehre finden?

70 18. In welchem Vielecke ist die Winkelsumme 900°? In welchem 2700°?

71 19. In welchem regelmäßigen Vielecke beträgt ein Winkel $147^3/_{11}^\circ$? In welchem 160°? In welchem 165°?

72 20. Verdoppelt man in einem regelmäßigen Vielecke die Zahl der Seiten, so wird jeder Vieleckswinkel um 18° ($22^1/_2^\circ$) größer. Wieviel Seiten hatte das ursprüngliche Vieleck?

---

*) Man kann unter anderem auch Δ aus d und n durch Rechnung finden.

**) Die Aufgabe, aus der gegebenen Zahl der Diagonalen die Anzahl n der Seiten zu bestimmen, führt auf eine gemischt quadratische Gleichung (vgl. z. B. Nr. 832 u. ff.).

IV. Kongruenz der Dreiecke.

1. Es soll ein Dreieck konstruiert werden, von dem gegeben sind: 73
   a) eine Seite a und die beiden anliegenden Winkel β und γ;
   b) zwei Seiten a und b und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ;
   c) zwei Seiten a und b (wobei $a > b$ ist) und der Winkel α;
   d) die drei Seiten a, b, c.

2. Versuche die Konstruktion in Nr. 1 c), wenn $a < b$ ist! (Determination der Aufgabe.) 74

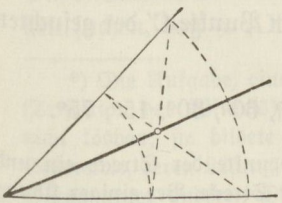
3. Die Konstruktion Nr. 1 a) ist dahin abzuändern, daß die Seite a, ein anliegender Winkel β und ein gegenüberliegender Winkel α gegeben sind. 75

4. In Nr. 1 ist in jedem einzelnen Falle ein Dreieck aus drei Bestimmungsstücken zu konstruieren; wären außer den angeführten Fällen noch andere derartige Konstruktionen aus Seiten und Winkeln des Dreieckes möglich? 76

5. Inwieferne kann man die Eindeutigkeit der obigen vier Konstruktionen in Nr. 1 als Begründung der vier Kongruenzsätze auffassen? 77

6. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, von dem gegeben ist: 78
   a) eine Kathete und ein Winkel;
   a) die Hypotenuse und ein Winkel;
   c) beide Katheten;
   d) die Hypotenuse und eine Kathete!

Fig. 3.



7. Einen spitzen (rechten, stumpfen) Winkel zu halbieren (seine Winkelsymmetrale zu konstruieren). 79

†8. Man begründe außer dem gewöhnlichen Verfahren für die Aufgabe 7 auch die aus Fig. 3 ersichtliche Methode! 80

9. Eine Strecke zu halbieren (ihre Streckensymmetrale zu konstruieren).*) 81

*) In der Praxis (z. B. bei Anfertigung von technischen Zeichnungen, Plänen usw.) pflegt man die Halbierung einer Strecke lediglich durch Probieren in folgender Weise auszuführen. Man setzt mit der Spitze des Zirkels in dem einen Endpunkt der Strecke ein, öffnet den Zirkel nach dem Augenmaße beiläufig auf die Hälfte der Strecke und markiert die gewählte Zirkelöffnung auf der Strecke durch die Bleispitze des Zirkels; dann setzt man, ohne

§2 10. In einem beliebigen Punkte einer Geraden auf diese eine Normale zu errichten.

§3 11. Im Endpunkte einer Strecke auf diese eine Normale zu errichten. Man begründe außer dem zumeist angewandten Verfahren*) noch die beiden folgenden, aus Fig. 4 ersichtlichen Konstruktionen!

Fig. 4.

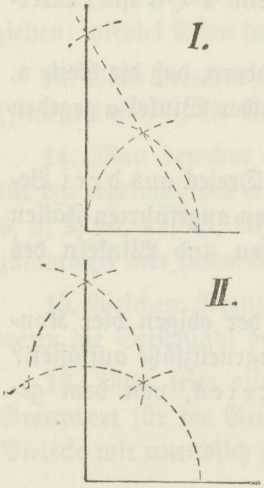
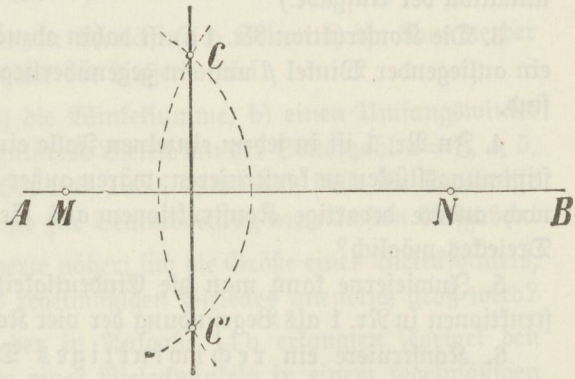


Fig. 5.



§4 12. Von einem Punkte C außerhalb einer Geraden AB auf diese eine Normale zu fällen. Man begründe außer der zumeist angewandten Methode noch die in Fig. 5 ausgeführte Konstruktion, bei der aus zwei beliebig gewählten Punkten M und N mit MC und NC als Halbmesser Kreisbogen beschrieben werden, die sich in einem Punkte C′ der gesuchten Normale schneiden!

§5 13. Man konstruiere Winkel von 45°, 135°, 60°, 30°, 15°, 75°.

---

die Zirkelöffnung zu ändern, in dem zweiten Endpunkte der Strecke ein und markiert wieder den Endpunkt der Bleispitze auf der Strecke. Bei einiger Übung des Augenmaßes werden die beiden Marken in eine einzige zusammenfallen und die Halbierung ist vollzogen; wenn dies aber nicht der Fall ist, so fallen doch beide Marken so nahe aneinander, daß ihre Mitte mit voller Sicherheit nach dem Augenmaße bestimmt werden kann. (Der Schüler übe sich auch in diesem praktischen Verfahren, das nicht allein kürzer, sondern auch genauer ist als das gewöhnliche.)

*) Mittels des Satzes vom Winkel im Halbkreise.

14. Ein rechter Winkel ist in drei gleiche Teile zu teilen! *) 86

15. Es sind zwei Punkte A und B gegeben. Wie kann man mit alleiniger Benützung des Zirkels beliebig viele Punkte bestimmen, die mit A und B auf einer Geraden liegen? 87

16. Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren aus: a) Grundlinie und Winkel an der Grundlinie; b) Grundlinie und Winkel am Scheitel; c) Schenkel und Winkel an der Grundlinie; d) Schenkel und Höhe auf die Grundlinie; e) Grundlinie und Höhe auf den Schenkel. 88

17. Zieht man von einem beliebigen Punkte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes Parallele (Senkrechte) zu den beiden Schenkeln, so ist die Summe dieser Strecken gleich dem Schenkel (der Seitenhöhe) des Dreieckes. Warum? 89

18. Zieht man von einem beliebigen Punkte im Innern eines gleichseitigen Dreieckes Normale auf alle drei Seiten, so ist deren Summe gleich der Dreieckshöhe. Warum? 90

19. Verbindet man die Halbierungspunkte der drei Seiten eines Dreieckes, so zerfällt es in vier kongruente Dreiecke. Warum? 91

20. In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein anderes gleichseitiges Dreieck derartig einzuzeichnen, daß seine Eckpunkte auf den Seiten des gegebenen Dreieckes liegen und die Seiten beider Dreiecke paarweise aufeinander senkrecht stehen. 92

†21. Es sind gegeben eine Gerade MN und zwei nicht auf ihr liegende Punkte A und B. Man soll in MN einen Punkt X von der Beschaffenheit suchen, daß $\sphericalangle AXM = \sphericalangle BXN$ ist. 93

*) Die Aufgabe, einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen (Trisektion des Winkels), ist mit alleiniger Benützung von Zirkel und Lineal nicht lösbar; sie bildete eines der berühmtesten Probleme der altgriechischen Geometrie, deren Lösung die hervorragendsten Gelehrten beschäftigte. Die Lösung gelang unter anderen Dinostratus (335 v. Chr.) mit Hilfe einer von Hippias v. Elis (420 v. Chr.) entdeckten Kurve, der Quadratrix; ebenso ließ sich das Problem lösen mittels der von Nikomedes (180 v. Chr.) entdeckten Conchoide; auch die Kegelschnittslinien gestatten Lösungen dieser Aufgabe, die übrigens auch die Gelehrtenwelt des Mittelalters lange beschäftigte. Ausführliches darüber bietet Cantors großes Werk „Geschichte der Mathematik". Für Anfänger ist bestens zu empfehlen: Klimpert, Geschichte der Geometrie, Stuttgart, Maier, und Dr. A. Sturm, Geschichte der Mathematik (Sammlung Göschen).

94 †22. Nimmt man in der Geraden MN (Nr. 21) noch einen anderen beliebigen Punkt Y an, so ist immer $AY + YB > AX + XB$.*)

95 23. Ein gleichseitiges Dreieck a) aus der Seite, b) aus der Höhe zu konstruieren.

96 24. Zwischen den Schenkeln eines Winkels ist ein Punkt gegeben; durch ihn ist eine Gerade derart zu ziehen, daß sie die beiden Schenkel des Winkels unter gleichen Winkeln schneidet (2 Lösungen).

97 25. Durch drei gegebene Punkte sind Parallele so zu legen, daß sie gleiche Abstände voneinander haben. Wie viele Lösungen ergibt die Aufgabe?

98 26. Drei Punkte bilden ein Dreieck. Durch einen von ihnen soll eine Gerade so gezogen werden, daß die Abstände der beiden anderen von ihr gleich lang werden, wobei sie a) auf derselben, b) auf entgegengesetzten Seiten der Geraden liegen. Wie viele Lösungen ergibt die Aufgabe?

99 †27. Im Dreieck ABC soll eine Parallele zur Grundlinie AB so gezogen werden, daß das im Dreiecke liegende Stück MN dieser Geraden gleich der Summe der Abschnitte AM und BN wird.

100 28. Man konstruiere in einem Dreieck die drei Streckensymmetralen der Seiten (Mittellote), wobei a) ein spitzwinkliges, b) ein stumpfwinkliges, c) ein rechtwinkliges Dreieck anzunehmen ist. Warum schneiden sich jedesmal die Streckensymmetralen in einem einzigen Punkte? — Was ist dabei über die Lage dieses Schnittpunktes zu sagen? — Der erhaltene Punkt (Schnittpunkt der Strecken- oder Seitensymmetralen des Dreieckes) heißt der *erste merkwürdige Punkt* des Dreieckes.

101 29. Man zeichne in einem Dreiecke die drei Winkelsymmetralen! Warum schneiden sie sich in einem einzigen Punkte? Ist hier die Lage des Schnittpunktes bezüglich des Dreieckes von dem Umstande abhängig, ob das Dreieck spitzwinklig, stumpfwinklig oder rechtwinklig sei? Der erhaltene Punkt (Schnittpunkt der Winkelsymmetralen des Dreieckes) heißt der *zweite merkwürdige Punkt* des Dreieckes.

102 †30. Man zeichne in einem schiefwinkligen Dreiecke alle Halbierungslinien der Innen- und Außenwinkel und zeige, daß die Halbierungslinien eines Innenwinkels und der beiden ihm nicht anliegenden Außenwinkel sich in einem einzigen Punkte schneiden!

*) Der höchst einfache Beweis für diese Aufgabe begründet, daß der Weg und daher auch die Zeit, die eine Lichtwelle braucht, um von einem Punkte durch Reflexion von einem ebenen Spiegel nach einem anderen Punkte zu gelangen, ein kürzester (ein Minimum) ist, wenn die Reflexion nach dem bekannten Reflexionsgesetze stattfindet. Ähnliches gilt bei der Brechung des Lichtes.

†31. Man halbiere einen Winkel, dessen Scheitel nicht mehr am Zeichenblatte liegt! 103

32. In einem Quadrat werden zwei beliebig gewählte Punkte zweier Gegenseiten geradlinig verbunden und auf die Verbindungsstrecke eine Normale gezogen, die die beiden anderen Gegenseiten — oder auch ihre Verlängerungen — schneidet. Warum sind die beiden zwischen den Quadratseiten liegenden Strecken gleich lang? 104

33. Ein Quadrat zu konstruieren a) aus der Seite, b) aus der Diagonale. 105

34. Ein Rechteck zu konstruieren, von dem gegeben sind: a) Länge und Breite; b) eine Seite und die Diagonale; c) eine Seite und der Winkel der Diagonalen; d) die Diagonale und der Winkel, den beide Diagonalen bilden. 106

35. Einen Rhombus zu konstruieren, von dem gegeben sind: a) die Seite und der spitze Winkel; b) die beiden Diagonalen; c) die Seite und die Höhe; d) ein Winkel und eine der beiden Diagonalen (2 Lösungen). 107

36. Ein Rhomboid zu konstruieren, von dem gegeben sind: a) die beiden Seiten und ein Winkel; b) die Seiten und eine Diagonale; c) die beiden Diagonalen und eine Seite; d) die beiden Diagonalen und der Winkel, den sie einschließen; e) die beiden Seiten und die Höhe auf die eine Seite. 108

37. Wenn man in einem Rhomboide alle vier Innenwinkel (oder alle vier Außenwinkel) halbiert, so schließen die vier Halbierungslinien ein Rechteck ein. Warum? 109

38. Ein Trapez zu konstruieren: a) aus den beiden Parallelseiten und den Winkeln an der größeren; b) aus der längeren Parallelseite, ferner aus einer der beiden nichtparallelen Seiten, dann aus dem Winkel der beiden gegebenen Seiten und aus der Diagonale, die durch diesen Winkel hindurchgeht; †c) aus allen vier Seiten; †d) aus den beiden Parallelseiten und den beiden Diagonalen. 110

39. Ein gleichschenkliges Trapez (Antiparallelogramm) zu konstruieren a) aus der Grundlinie, dem Schenkel und der Diagonale; b) aus der Grundlinie, dem Schenkel und der Höhe; c) aus den beiden Parallelseiten und dem Winkel der Diagonalen (2 Lösungen). 111

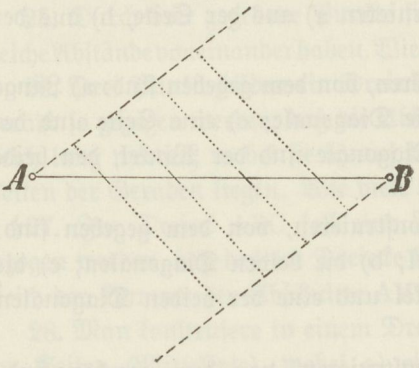
40. Die Verbindungslinien der vier Seitenmitten eines gleichschenkligen Trapezes bilden einen Rhombus. Warum? 112

113 41. Halbiere in einem gleichschenkligen Trapeze die Basiswinkel und verbinde die Schnittpunkte der Winkelsymmetralen mit den Trapezschenkeln geradlinig. Wieso entsteht dadurch ein Trapez mit drei gleichlangen Seiten?

114 42. Die Mittellinie eines Trapezes halbiert dessen Diagonalen. Beweis!

115 43. Ein Deltoid zu konstruieren a) aus den Seiten und der Symmetriediagonale, b) der Symmetriediagonale, der zweiten Diagonale und einer Seite.

Fig. 6.



116 44. Eine gegebene Strecke in 4, 5, 7 usw. gleiche Teile zu teilen.

117 45. Es ist das aus der vorstehenden Fig. 6 ersichtliche Verfahren für die Aufgabe Nr. 44 zu begründen.

118 †46. Zwischen den Schenkeln eines Winkels ist ein Punkt M gegeben; es soll durch ihn eine Gerade so gezogen werden, daß M der Mittelpunkt der zwischen den Schenkeln des Winkels liegenden Strecke wird.

119 †47. Es ist ein Winkel und ein Punkt M außerhalb der Schenkel des Winkels gegeben; durch M soll eine Gerade so gezogen werden, daß der eine Schenkel die Strecke zwischen M und dem anderen Schenkel halbiert.

120 48. Warum schneiden sich die drei Höhen eines jeden Dreieckes in einem einzigen Punkte? (Höhenschnittpunkt, dritter merkwürdiger Punkt des Dreieckes.)

121 49. Warum schneiden sich die drei Mittellinien (Schwerlinien) eines jeden Dreieckes in einem einzigen Punkte? (Schwerpunkt, vierter merkwürdiger Punkt des Dreieckes.)

122 50. Wenn man in einem Parallelogramm die Mittelpunkte zweier Gegenseiten mit den Endpunkten einer Diagonale verbindet, wird dadurch die zweite Diagonale in drei gleiche Teile geteilt. Beweis!

123 51. Wie liegen die vier merkwürdigen Punkte in einem gleichseitigen Dreiecke?

124 52. Wann liegt der Schnittpunkt der drei Höhen innerhalb, wann außerhalb des Dreieckes? Kann er auch im Umfange des Dreieckes liegen?

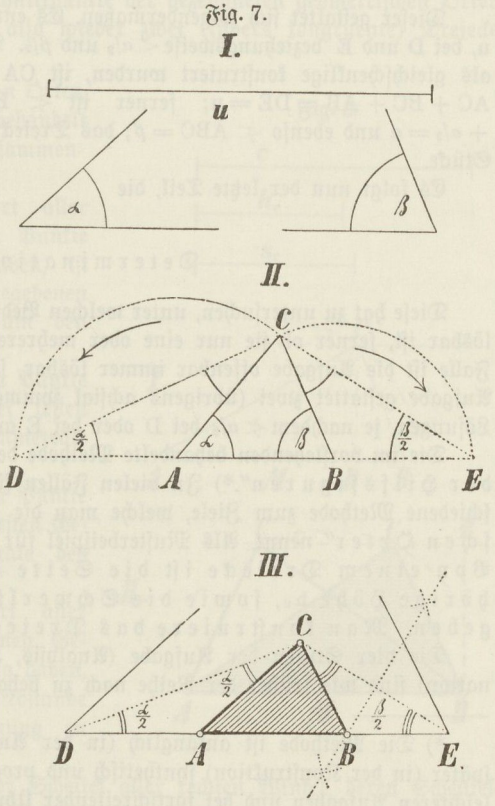
†53. Man konstruiere ein Dreieck aus seinen drei Schwerlinien! 125

54. Wenn man in einem beliebigen Vierecke die Mittelpunkte der vier Seiten paarweise verbindet, erhält man ein Parallelogramm; wann wird es ein rechtwinkliges, wann ein gleichseitiges sein? 126

V. Konstruktionsaufgaben.

Vorbemerkung: Es ist schon an früherer Stelle (Anmerkung zu Nr. 52, S. 5) der allgemeine Weg zur Behandlung von Konstruktionsaufgaben angedeutet worden. Hier soll in etwas vollständigerer Weise gezeigt werden, wie bei Behandlung schwierigerer Konstruktionsaufgaben vorzugehen ist. Als Musterbeispiel soll zunächst die Aufgabe behandelt werden: Ein Dreieck ist aus seinem Umfange u und den Winkeln α und β (Fig. 7, I.) zu konstruieren.

Fig. 7.



Der erste Teil der Aufgabe ist die

Analysis:

Man nimmt (Fig. 7, II.) an, das Dreieck ABC sei das verlangte; es soll also als Umfang die Strecke u und bei A und B die Winkel α und β enthalten. Man muß zunächst trachten, in die Figur alle gegebenen Größen hineinzubringen; die Winkel α und β kommen bereits bei A und B vor; damit auch u vorkomme, drehen wir die Seiten AC und BC so lange im Sinne der Pfeile, bis sie in die Verlängerung von AB fallen; es ist also DE der Umfang des Dreieckes. Nun trachtet man durch Ziehen von Hilfslinien und durch Benützung geometrischer Lehrsätze auf eine Hilfsfigur zu kommen, die man aus den Angaben der Aufgabe zeichnen könnte. In unserer Figur wäre dies das Dreieck CDE; denn dieses enthält in DE die Strecke u, bei D aber den Winkel $\alpha/_2$ (wegen $\sphericalangle$ CAB = $\sphericalangle$ ADC + ACD

und $\sphericalangle$ ADC = ACD wegen AC = AD), endlich bei E den Winkel $\beta/_2$ (aus ähnlichen Gründen). Dies genügt zur Konstruktion der Hilfsfigur und man schreitet daher zum zweiten Teile der Aufgabe, zur

Konstruktion:

Man trage (Fig. 7, III.) in DE die Strecke u auf und konstruiere in ihren Endpunkten die Winkel $\alpha/_2$ und $\beta/_2$; dadurch erhält man den Punkt C; nun hat man noch die Punkte A und B auf ED zu suchen; dies geschieht entweder durch Auftragen von $\sphericalangle \alpha/_2$ bei C oder durch Zeichnung der Streckensymmetrale von CE usw. Damit ist das Dreieck ABC gefunden; daß es in der Tat das verlangte ist, zeigt der dritte Teil der Aufgabe, der

Beweis:

Dieser gestaltet sich folgendermaßen. Es enthält $\triangle$ ECD in DE die Strecke u, bei D und E beziehungsweise $\sphericalangle \alpha/_2$ und $\beta/_2$. Weil die Dreiecke ACD und CBE als gleichschenklige konstruiert wurden, ist CA = DA und CB = BE; also ist AC + BC + AB = DE = u; ferner ist $\sphericalangle$ BAC = $\sphericalangle$ ADC + ACD = $\alpha/_2$ + + $\alpha/_2 = \alpha$ und ebenso $\sphericalangle$ ABC = β; das Dreieck ABC enthält also die gegebenen Stücke.

Es folgt nun der letzte Teil, die

Determination:

Diese hat zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Aufgabe überhaupt lösbar ist, ferner ob sie nur eine oder mehrere Lösungen zuläßt. In unserem Falle ist die Aufgabe offenbar immer lösbar, so lange $\sphericalangle \alpha + \beta < 180°$ ist; die Aufgabe gestattet zwei (übrigens achsial symmetrische oder invers kongruente) Lösungen, je nachdem $\sphericalangle \alpha/_2$ bei D oder bei E aufgetragen wird. —

Die im vorstehenden behandelte Methode der Lösung heißt die „Methode der Hilfsfiguren".*) In vielen Fällen führt eine zweite, wesentlich verschiedene Methode zum Ziele, welche man die „Methode der geometrischen Örter" nennt. Als Musterbeispiel für diese möge die Aufgabe dienen: Von einem Dreiecke ist die Seite c, ferner die zu ihr gehörige Höhe h_c, sowie die Schwerlinie s_c zu derselben gegeben. Man konstruiere das Dreieck!

Die vier Stufen der Aufgabe (Analysis, Konstruktion, Beweis, Determination) sind wie früher der Reihe nach zu behandeln, doch trachtet man in der

*) Die Methode ist anfänglich (in der Analysis) analytisch und regressiv, später (in der Konstruktion) synthetisch und progressiv. Zu bemerken ist, daß bei leichteren Aufgaben und bei fortschreitender Übung oft die Analysis fortgelassen werden kann; ebenso liegt es in der Natur der Sache, daß manchmal die Determination wegfallen wird.

Analysis den Schlüssel zur Konstruktion nicht in Hilfsfiguren, sondern in geometrischen Örtern zu finden. Unter einem *geometrischen Orte* versteht man eine Linie oder Fläche von solcher Beschaffenheit, daß alle in ihr liegenden Punkte, aber auch nur diese Punkte allein, einer gewissen geometrischen Bedingung entsprechen. So ist z. B. der geometrische Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkte A einen Abstand r haben, der aus A als Mittelpunkt mit r als Halbmesser beschriebene Kreis. Im folgenden ist nur in Kürze angedeutet, wie Analysis und Konstruktion sich gestalten. Es sei (Fig. 8, I.) in ABC das gesuchte Dreieck gezeichnet, so trifft die Höhe CD die Seite AB unter einem rechten Winkel; die Schwerlinie CM verbindet C mit der Seitenmitte M. Nun ist der geometrische Ort für die Scheitel aller Dreiecke, die die Basis AB und die Höhe CD haben, eine im Abstande CD zu AB parallel verlaufende Gerade; der geometrische Ort für alle Dreiecke mit der Basis AB und der Schwerlinie CM ist aber ein Kreis mit dem Halbmesser CM und dem Mittelpunkt M. Da der gesuchte Scheitel des Dreieckes beiden Bedingungen zu entsprechen hat, entsprechen die Schnittpunkte der gezeichneten geometrischen Örter der Aufgabe; es ergeben sich also wieder zwei (invers kongruente) Dreiecke (Fig. 8, II.). —

Die wichtigsten geometrischen Örter, die im bisherigen Lehrstoffe behandelt wurden, sind im folgenden zusammengestellt:

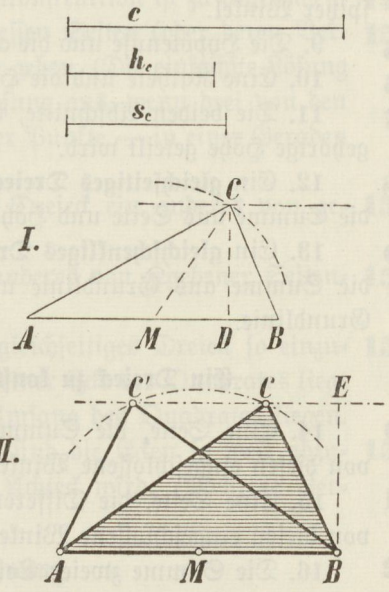
1. Der geometrische Ort aller Punkte, die von einem festen Punkte eine gegebene Entfernung haben, ist eine Kreislinie, die mit der gegebenen Entfernung als Halbmesser um den festen Punkt beschrieben ist.

2. Der geometrische Ort der Punkte gleicher Entfernung von zwei festen Punkten ist die Streckensymmetrale ihrer Verbindungsstrecke.

3. Der geometrische Ort der Punkte gleicher Entfernung von zwei festen Geraden ist die Winkelsymmetrale des Winkels der beiden Geraden.

4. Der geometrische Ort aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden eine gegebene Entfernung haben, ist die Parallele, die in einem Abstande gleich der gegebenen Entfernung zu der Geraden gezogen ist.

Fig. 8.



5. Der geometrische Ort der Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch die Endpunkte einer gegebenen Strecke gehen, ist jener Kreis, in dem die gegebene Strecke ein Durchmesser ist.

Nach der Methode der Hilfsfiguren und der Methode der geometrischen Örter behandle man nun folgende Konstruktionsaufgaben:*)

Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von dem gegeben ist:

127 1. Die Hypotenuse und die Summe der Katheten.

128 2. Die Hypotenuse und die Differenz der Katheten.

129 3. Die Summe der Katheten und ein spitzer Winkel.

130 4. Die Differenz der Katheten und ein spitzer Winkel.

131 5. Die Summe aus der Hypotenuse und einer Kathete und die andere Kathete.

132 6. Die Differenz aus der Hypotenuse und einer Kathete und die andere Kathete.

133 7. Die Summe aus der Hypotenuse und einer Kathete und ein spitzer Winkel.

134 8. Die Differenz aus der Hypotenuse und einer Kathete und ein spitzer Winkel.

135 9. Die Hypotenuse und die auf sie errichtete Höhe.

136 10. Eine Kathete und die Höhe auf die Hypotenuse.

137 11. Die beiden Abschnitte, in die die Hypotenuse durch die zu ihr gehörige Höhe geteilt wird.

138 12. Ein **gleichseitiges Dreieck** zu konstruieren, von dem gegeben ist die Summe aus Seite und Höhe.

139 13. Ein **gleichschenkliges Dreieck** zu konstruieren, wenn gegeben ist die Summe aus Grundlinie und Schenkel sowie der Winkel an der Grundlinie.

Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben ist:

140 14. Eine Seite, die Summe der beiden anderen Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel.

141 15. Eine Seite, die Differenz der beiden anderen Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel.

142 16. Die Summe zweier Seiten und zwei Winkel.

143 17. Zwei Seiten und die Höhe zu einer von beiden.

*) Nicht selten führt jede Methode gleichmäßig gut zum Ziel. Die obige Aufgabe hätte z. B. auch nach der Methode der Hilfsfiguren gelöst werden können. Wie? Zwei weitere Methoden werden später mitgeteilt werden.

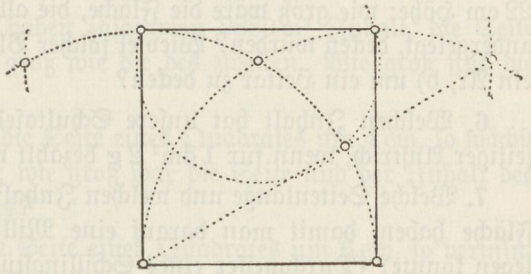
18. Zwei Seiten und die Höhe zu der dritten. **144**

19. Von einem Dreiecke kennt man die Mittelpunkte zweier Seiten und auf einer von ihnen auch den Fußpunkt der Höhe. Das Dreieck ist aus diesen Angaben herzustellen. **145**

20. Ein **gleichschenkliges** Dreieck zu konstruieren, wenn seine beiden Höhen gegeben sind. **146**

21. Ein **Quadrat** zu konstruieren, wenn gegeben ist a) die Summe aus seiner Seite und der Diagonale, b) die Differenz aus Diagonale und Seite. **147**

Fig. 9.



22. Ein **Rechteck** zu konstruieren aus der Diagonale und dem Umfang. **148**

23. Die aus Fig. 9 ersichtliche Quadratkonstruktion ist zu begründen. **149**

†24. Ein Quadrat zu konstruieren, dessen Seiten (oder deren Verlängerungen) durch vier gegebene Punkte gehen. (Die einfachste Lösung stützt sich auf Nr. **104**.) Wie fällt die Lösung aus, wenn drei von den gegebenen Punkten — oder wenn alle vier Punkte — in einer Geraden liegen? **150**

†25. In ein gegebenes, gleichseitiges Dreieck ein anderes von gegebener Seitenlänge einzubeschreiben. **151**

†26. In ein gegebenes Quadrat ein anderes von gegebener Seitenlänge einzubeschreiben. **152**

†27. In ein gegebenes Quadrat ein gleichseitiges Dreieck so einzuzeichnen, daß eine Spitze des Dreieckes in einer Ecke des Quadrates liegt und die beiden anderen Ecken auf dem Umfang des Quadrates liegen. **153**

†28. Von einem gegebenen Quadrate sind die Ecken so weit abzuschneiden, daß daraus ein regelmäßiges Achteck wird. (Mehrere Verfahren!) **154**

VI. Flächenberechnung.

1. Was versteht man unter dem Umfange, was unter dem Inhalte einer Figur? **155**

2. Welche Flächenmaße gibt es? In welcher Beziehung stehen sie zu den Längenmaßen? **156**

157 3. Wie berechnet man den Inhalt eines Rechteckes, wie den Inhalt eines Quadrates?

158 4. Man berechne nach vorangegangener Messung a) den Flächeninhalt des Schulzimmers, b) des Schulgartens (Hofes, Spielplatzes), falls dieser annähernd ein Rechteck ist, und vergleiche ihre Größen mit der Größe eines Ar [bei b) gegebenenfalls mit dem Hektar]!

159 5. Unser Rechenbuch hat 126 Blätter von 14·5 cm Breite und 22 cm Höhe; wie groß wäre die Fläche, die alle Blätter, passend aneinandergelegt, decken würden? Wieviel solcher Blätter wären nötig, a) um ein Ar, b) um ein Hektar zu decken?

160 6. Welchen Inhalt hat unsere Schultafel; was kostet ihr beiderseitiger Anstrich, wenn für 1 dm^2 2 g bezahlt werden?

161 7. Welche Seitenlänge und welchen Inhalt müßte eine quadratische Fläche haben, damit man darauf eine Million Silberschillinge auflegen könnte? (Durchmesser eines Schillingstückes rund 25 mm.)

162 8. Ein rechteckiges Grundstück von 32 m Länge und 24·5 m Breite wird um 92 S per a verkauft; was erhält man dafür?

163 9. Der Inhalt eines Rechteckes ist 1014·3 m^2; eine Seite ist 27·6 m. Wie groß ist der Umfang?

164 10. Ein Rechteck und ein Quadrat haben gleichen Umfang. Die beiden Seiten des Rechteckes betragen 15 cm und 27 cm; welche von beiden Figuren besitzt den größeren Flächeninhalt und wieviel beträgt der Unterschied?

165 11. Um einen Garten von 64·5 m Länge und 41·2 m Breite soll ein ringsum laufender Weg von 3·4 m Breite angelegt werden; welchen Flächenraum wird dieser Weg einnehmen?

166 12. Ein von allen Seiten freistehendes Schulhaus, dessen Grundriß ein Rechteck von 45 m Länge und 32 m Breite darstellt, soll mit einem 1·5 m breiten Zementpflaster umgeben werden; wieviel kostet dieses, wenn 1 m^2 mit 6 S berechnet wird?

167 13. Ein rechteckiger Platz von 48 m Länge und 36·6 m Breite soll mit Granitwürfeln von 12 cm Seitenlänge gepflastert werden; wieviel Würfel sind nötig und wie hoch belaufen sich die Kosten dafür, wenn das Hundert Würfel mit 90 S bezahlt wird?

168 14. Ein Weingarten von rechteckiger Form mit der Länge von 345·78 m und der Breite von 278 m brachte in einem besonders günstigen Jahre per Ar 0·6 hl Wein. Wieviel Fässer von 230 l Inhalt sind

für die Ernte nötig? Welcher Ertrag ergab sich, wenn die Kosten für Bearbeitung und Düngung per ha 4800 S betrugen und 1 hl Wein mit 140 S verkauft wurde?

15. Eine rechteckige Waldparzelle von 144 m Breite und 240 m Länge soll durch einen Kreuzweg von 4 m Breite in vier gleichgroße, rechteckige Flächen zerlegt werden; welchen Inhalt hat jedes der vier Stücke und welchen Inhalt hat der Kreuzweg? **169**

16. Zwei Quadrate haben zusammen 2880 m^2 Inhalt, die Seite des ersten ist doppelt so groß wie die des zweiten. Wie groß sind die Umfänge? **170**

17. Vergrößert man die Seite eines Quadrates um 4 cm, so wächst der Inhalt um 240 cm^2; wie groß war die Seite und der Inhalt des ursprünglichen Quadrates? **171**

18. Verkürzt man die Seite eines Quadrates um 6 cm, so vermindert sich der Inhalt um 396 cm^2; wie groß ist Seite und Inhalt des ursprünglichen Quadrates? **172**

19. Der Umfang eines Rechteckes, in dem die Länge das Vierfache der Breite ist, beträgt 1200 cm; es ist die Seite eines Quadrates zu berechnen, dessen Umfang im Umfange des Rechteckes ebenso oft enthalten ist wie der Inhalt des Quadrates im Inhalt des Rechteckes. **173**

20. Wie berechnet man den Inhalt eines Parallelogrammes? **174**

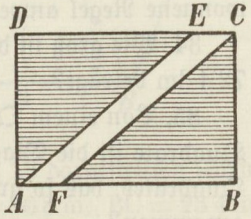
21. Den Inhalt eines Parallelogrammes zu berechnen, in dem die Grundlinie 1·75 dm und die Höhe 8·6 cm lang ist. **175**

22. Wie groß ist der Inhalt eines Rhombus, dessen Grundlinie 26·4 m beträgt und dessen Höhe halb so lang ist als die Seite? **176**

23. In einem Rhomboide ist die Grundlinie 240 cm, die Höhe 168 cm; die beiden anderen Seiten betragen je 224 cm; wieweit stehen diese voneinander ab? **177**

24. In Fig. 10 ist ein rechteckiges Feld von 376·277 a Inhalt dargestellt. Es soll ein Eisenbahndamm in der bezeichneten Weise hindurchgeführt werden; wie groß ist die Entschädigungssumme, die dem Besitzer gezahlt wird, wenn $AB = 216{\cdot}5$ m, $AF = EC = 12$ m ist und für ein Ar 60 S Entschädigung gezahlt werden? **178**

Fig. 10.



179 25. Wie berechnet man den Inhalt a) eines beliebigen, b) eines rechtwinkligen Dreieckes? — In einem Dreiecke ist die Grundlinie g und die Höhe h gegeben; wie groß ist der Inhalt, wenn a) $g = 26{\cdot}5\,m$; $h = 17{\cdot}4\,m$, b) $g = 215{\cdot}4\,cm$, $h = 36{\cdot}45\,dm$ ist?

180 26. Berechne den Inhalt eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Katheten $k_1 = 18{\cdot}4\,dm$ und $k_2 = 27{\cdot}5\,dm$!

181 27. Die drei Seiten eines Dreieckes sind $a = 2{\cdot}73\,m$, $b) = 2{\cdot}925\,m$, $c) = 2{\cdot}535\,m$; die zur ersteren gehörige Höhe ist $h_a = 2{\cdot}34\,m$; wie groß sind die beiden anderen Höhen?

182 28. Ein dreieckiges Feld, in dem die Grundlinie 137·6 m, die Höhe 107·5 m beträgt, hat mit einem quadratischen Felde gleichen Inhalt; wie groß ist der Umfang des letzteren?

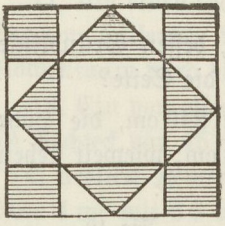
183 29. Verbindet man den Schwerpunkt eines dreieckigen Brettes mit den drei Eckpunkten, so wird dadurch das Dreieck in drei gleich schwere Dreiecke zerlegt. Beweis!

184 30. Verlängert man jede der drei Seiten eines Dreieckes in einerlei Sinn um die eigene Länge, so ist der Inhalt des so bestimmten neuen Dreieckes siebenmal so groß wie jener des ursprünglichen Dreieckes. Warum?

185 31. Aus der Seite des großen Quadrates ist der Inhalt des schraffierten Teiles der Fig. 11 zu berechnen.

186 32. Ein Rechteck soll in ein Dreieck umgewandelt werden, dessen Grundlinie $^5/_4$ von der Grundlinie des Rechteckes ist und dessen Fläche $^3/_4$ der Rechtecksfläche beträgt; wie hoch muß das Dreieck sein?

Fig. 11.



187 33. Wie berechnet man den Inhalt eines Vierecks, in dem die Diagonalen aufeinander senkrecht (normal) stehen, aus den gegebenen Längen der Diagonalen? Für welche Vierecke läßt sich die gewonnene Regel anwenden?

188 34. Wie groß ist der Inhalt eines Quadrates, in dem die Diagonale 72·4 dm beträgt?

189 35. Von einem Quadrate ist der Umfang 48 cm, von einem zweiten Quadrate ist die Diagonale 15 cm; wie groß ist die Seite eines dritten Quadrates, das so groß ist wie die beiden ersten Quadrate zusammengenommen?

36. Wie groß ist der Inhalt eines Rhombus mit den Diagonalen **190**
$D_1 = 42{\cdot}5$ cm und $D_2 = 27{\cdot}4$ cm?

37. Wie groß ist der Inhalt eines Deltoides mit den Diagonalen **191**
$D_1 = 125{\cdot}4$ mm und $D_2 = 27{\cdot}5$ mm?

38. Wie berechnet man den Inhalt eines Trapezes? **192**

39. Die Parallelseiten eines Trapezes sind a und b, die Höhe h; **193**
wie groß ist der Flächeninhalt, wenn a) $a = 36{\cdot}8$ cm, $b = 23{\cdot}6$ cm, $h = 27{\cdot}5$ cm, b) $a = 13{\cdot}82$ m, $b = 95{\cdot}8$ dm, $h = 8^1/_4$ m beträgt?

40. Der Inhalt eines Trapezes beträgt 90 cm², die Grundlinie a **194**
ist 19 cm und die Höhe h mißt 5 cm; wie groß ist die zweite Parallelseite?

41. Wie Nr. 40 mit $f = 34$ m² 59 dm² 26·58 cm², $a = 7$ m $12{\cdot}4$ cm, **195**
$h = 610{\cdot}8$ cm.

42. Wie Nr. 40 mit $f = 37{\cdot}125$ a, $a = 105$ m, $h = {}^3/_7$ von a. **196**

43. Durch eine eingeplankte Wiese von trapezförmiger Gestalt, deren **197**
Inhalt $6{\cdot}708$ a beträgt und deren parallele Begrenzungen $36{\cdot}8$ m und $25{\cdot}6$ m lang sind, wird in schräger Richtung zu den letzteren ein geradliniger Fahrweg angelegt; wieviel Gartenfläche geht dadurch verloren, wenn die beiden in den Parallelseiten des Trapezes liegenden Eingangstore zum neuen Wege je 3 m breit sind?

44. Wie verhalten sich die beiden Teile, in die ein Trapez durch die **198**
Mittellinie zerlegt wird?

45. Wie berechnet man den Inhalt a) eines regelmäßigen, b) eines **199**
unregelmäßigen Vieleckes?

46. Der Inhalt eines Feldes von der in Fig. 12 dargestellten Form **200**
ist zu berechnen, wenn $AC = 28{\cdot}4$ m, $DE = 14{\cdot}3$ m, $BF = 21{\cdot}6$ m ist.

Fig. 12.

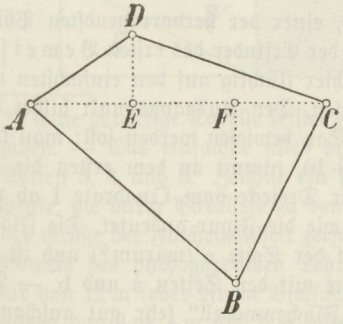
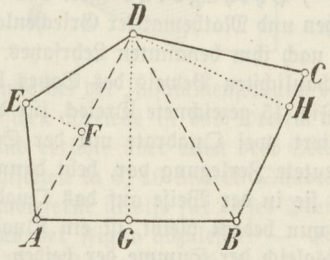


Fig. 13.



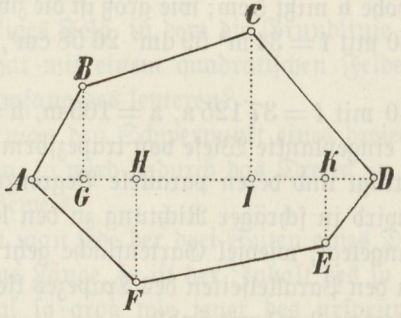
47. Der Inhalt eines Feldes von der in Fig. 13 dargestellten Form **201**
ist zu berechnen aus den Abmessungen: $AB = 16{\cdot}8$ m, $BC = 23{\cdot}4$ m,

AD = 31·4 m, EF = 6·4 m, DG = 21·6 m, DH = 18·4 m (Polarmethode).

202 48. Der Inhalt des in Fig. 14 skizzierten Feldes ist zu berechnen aus den Abmessungen: AG = 12 m, GH = 10·4 m, HI = 29·3 m, IK = 13·5 m, DK = 8·2 m, BG = 18·5 m, CI = 27·8 m, FH = 19·3 m, EK = 9·4 m (Koordinatenmethode).*)

203 49. Wie lautet der pythagoreische Lehrsatz? (Begründung.)**)

Fig. 14.



204 50. In einem rechtwinkligen Dreiecke sind die beiden Katheten gegeben, und zwar ist a = 16·8 m, b = 9·5 m; wie lang ist die Hypotenuse c? Wie groß sind Umfang und Inhalt?

205 51. Wie Nr. 50 mit a = 28 cm, b = 195 cm.

---

*) Um den Inhalt unregelmäßiger, krummlinig begrenzter Figuren bestimmen zu können, ersetzt man den krummlinigen Umfang mit möglichster Einhaltung des Inhaltes durch eine geradlinige Figur.

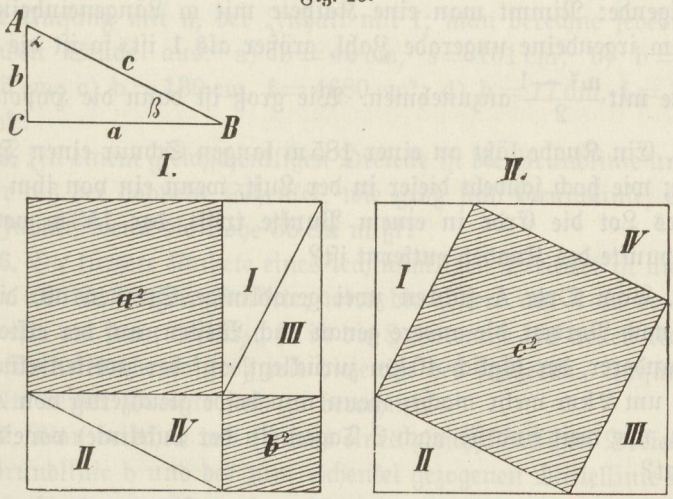
**) Pythagoras (geb. 582 v. Chr.), einer der hervorragendsten Philosophen und Mathematiker Griechenlands, ist der Erfinder des ersten Beweises des nach ihm benannten Lehrsatzes. Es sei hier flüchtig auf den einfachsten und anschaulichsten Beweis des Satzes hingewiesen. Den Ausgangspunkt bildet das in Fig. 15 gezeichnete Dreieck, für das der Satz bewiesen werden soll; man konstruiert zwei Quadrate mit der Seite (a + b), nimmt an dem ersten die angedeutete Zerlegung vor, hebt dann die vier Dreiecke vom Quadrate I ab und legt sie in der Weise auf das Quadrat II, wie die Figur andeutet. Die Fläche, die nun bedeckt bleibt, ist ein Quadrat mit der Seite c (warum?) und ist inhaltsgleich der Summe der beiden Quadrate mit den Seiten a und b. — Der hier angedeutete Beweis kann durch ein „Flächenmodell" sehr gut anschaulich gemacht werden; er verdient zudem besondere Beachtung, weil er vielleicht der älteste Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes sein dürfte.

52. Von einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse $c = 20{\cdot}5\,\text{dm}$, die eine Kathete $a = 13{\cdot}3\,\text{dm}$; wie lang ist die zweite Kathete b? Wie groß sind Inhalt und Umfang? **206**

53. Wie Nr. 52 mit $c = 3{\cdot}17\,\text{m}$, $a = 0{\cdot}75\,\text{m}$. **207**

54. In den letzten Aufgaben sind rechtwinklige Dreiecke mit Seiten, deren Länge durch rationale Zahlenwerte ausgedrückt sind (sogenannte „pythagoreische Dreiecke"), berechnet worden. Es ist nun zu zeigen, daß immer, wenn $a = 2mn$ und $b = m^2 - n^2$ ist, worin m und n teilerfremde Zahlen vorstellen, von denen die eine gerade, die andere ungerade ist, sich $c = m^2 + n^2$ ergibt. Das betreffende Dreieck ist dann immer ein „pythagoreisches" Dreieck. Der Satz ist zuerst allgemein nachzuweisen und dann zur Bildung einer Tabelle „pythagoreische Dreiecke" *) nach folgendem Muster zu verwerten. **208**

Fig. 15.



*) Eine derartige Tabelle leistet gute Dienste bei der Zusammenstellung von Aufgaben. — Das einfachste aller pythagoreischen Dreiecke ist das Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5. Zeichne ein solches und errichte über allen drei Seiten Quadrate, die durch Parallele zu den Quadratseiten in 9, 16 und 25 Quadrate von der Größe der Flächeneinheit zerfallen. Inwieferne ist also für dieses Dreieck der Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes aus der Figur abzulesen? — Eine Schnur von 12 m (oder einem Vielfachen von 12 m) Länge ist durch zwei Knoten in Längen von 3 m, 4 m und 5 m (oder entsprechenden Vielfachen dieser Längen) abgeteilt. Wie kann diese Schnur zum Abstecken rechter Winkel auf dem freien Felde dienen? Dieses Verfahren war schon den alten Ägyptern bekannt.

m	n	a	b	c
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
	3	24	7	25
5	2	20	21	29
	4	40	9	41
6	1	12	35	37
	5	60	11	61
7	2	28	45	53
	4	56	33	65
	6	84	13	85

usw.

209 55. Eine andere Regel zur Berechnung pythagoreischer Dreiecke ist die folgende: Nimmt man eine Kathete mit m Längeneinheiten an, wobei m irgendeine ungerade Zahl, größer als 1 ist, so ist die zweite Kathete mit $\frac{m^2-1}{2}$ anzunehmen. Wie groß ist dann die Hypotenuse?

210 56. Ein Knabe läßt an einer 185 m langen Schnur einen Drachen steigen; wie hoch schwebt dieser in der Luft, wenn ein von ihm herabgefälltes Lot die Erde in einem Punkte trifft, der 153 m von dem Standpunkte des Knaben entfernt ist?

211 57. Vom Orte A führen zwei geradlinige Straßen ab, die eine genau nach Norden, die andere genau nach Westen; auf der ersten geht ein Wanderer, der täglich 40 km zurücklegt, auf der zweiten einer, der täglich um 2 km mehr macht; wenn nun beide gleichzeitig von A ausgingen, wie weit sind sie nach 3 Tagen (in der Luftlinie) voneinander entfernt?

212 58. In einem spitzwinkligen Dreiecke ist eine Seite c, die Höhe auf eine zweite Seite h_a und die Mittellinie zu ihr m_a. Man berechne den Inhalt! (Konstruktion.) (Besondere Werte $c = 20$ cm, $h_a = 12$ cm, $m_a = 13$ cm.)

213 †59. In einem Vierecke mit aufeinander normalen Diagonalen sind drei Seiten 32 cm, 24 cm, 54 cm (22·5 cm, 10·5 cm, 30 cm) lang.*) Wie groß ist die vierte Seite?

*) Die Aufeinanderfolge der Seiten darf nicht geändert werden.

60. In einem Rechtecke soll l die Länge, b die Breite, d die Diagonale, u den Umfang und f den Inhalt bezeichnen; man berechne jedesmal die fehlenden Stücke aus: a) $l = 105$ m, $b = 88$ m; b) $l = 63$ dm, $d = 65$ dm; c) $d = 8{,}9$ m, $b = 3{,}9$ m; d) $f = 21840$ cm², $l = 208$ cm! **214**

61. In einem Rechtecke ist $d = 35$ cm; wie groß sind Inhalt und Umfang, wenn $l : b = 4 : 3$ ist? **215**

62. Der Umfang eines Rechteckes ist 136 cm und die Länge übertrifft die Breite um 28 cm; wie groß sind Inhalt und Diagonale? **216**

63. In einem Rechtecke mit der Länge l und der Breite b hat man alle Winkel halbiert. Welche Figur schließen die vier Winkelsymmetralen ein? Wie groß ist ihr Inhalt? **217**

64. In einem gleichschenkligen Dreiecke soll bezeichnet werden: die Grundlinie mit b, der Schenkel mit s, die Höhe auf b mit h, der Umfang mit u, der Inhalt mit f; man berechne jedesmal die fehlenden Stücke aus: a) $b = 40$ cm, $s = 101$ cm; b) $b = 32$ cm, $s = 65$ cm; c) $b = 130$ cm, $f = 4680$ cm²; d) $b = 17$ dm, $f = 112$ dm² 20 cm²! **218**

65. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Grundlinie um 50 cm kleiner als der doppelte Schenkel; wie groß sind Grundlinie, Schenkel und Inhalt, wenn die Höhe 35 cm mißt? **219**

66. Die kürzere Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist um 17 cm kleiner als die längere Kathete; wird die erstere um 8 cm verlängert, die zweite um 4 cm verkürzt, so ist die Hypotenuse des neuen rechtwinkligen Dreieckes ebenso groß wie diejenige des früheren. Umfänge und Inhalte beider Dreiecke sind zu berechnen. **220**

†67. Man berechne den Inhalt eines gleichschenkligen Dreieckes aus der Grundlinie b und der zum Schenkel gezogenen Mittellinie m! (Besondere Werte $m = 25$ cm, $b = 32$ cm.) **221**

†68. Wie Nr. 67 aus der Höhe h und der zum Schenkel gezogenen Mittellinie m. (Besondere Werte $h = 40$ cm, $m = 29$ cm.) **222**

†69. Umfang und Inhalt eines gleichschenkligen Dreieckes zu berechnen aus der Grundlinie b und der Höhe auf einen Schenkel h_s. (Allgemein, dann für die besonderen Werte $b = 130$ cm und $h_s = 120$ cm). **223**

†70. Wie Nr. 69 aus der Basishöhe h und der Schenkelhöhe h_s. (Allgemein, dann für die besonderen Werte $h = 20$ cm, $h_s = 24$ cm.) **224**

225 71. In einem Rhombus soll bezeichnet werden: die längere Diagonale mit D, die kürzere mit d, die Seite mit s, die Höhe mit h, der Umfang mit u und der Inhalt mit f; man berechne jedesmal die fehlenden Stücke aus: a) $D = 32$ cm, $d = 24$ cm; b) $D = 7$ dm, $d = 2{\cdot}4$ dm; c) $D = 42$ cm, $f = 840$ cm^2; d) $D = 168$ cm, $f = 5880$ cm^2; e) $D = 15{\cdot}4$ cm, $s = 8{\cdot}5$ cm; f) $D = 198$ mm, $s = 101$ mm; †g) $D = 312$ mm, $h = 120$ mm; †h) $h = 3{\cdot}36$ m, $d = 3{\cdot}5$ m!

226 †72. Man berechne die Diagonalen eines Rhombus aus der Seite $s = 25$ cm und dem Inhalte $f = 600$ cm^2!

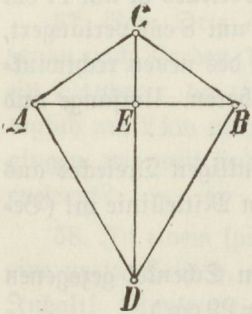
227 †73. Wie Nr. 72 mit $s = 16{\cdot}81$ cm, $f = 121{\cdot}032$ cm^2.

228 74. In einem gleichschenkligen Trapeze (Antiparallelogramme) sollen die beiden Parallelseiten mit a und b, die nichtparallelen Seiten mit c, die Höhe mit h, der Flächeninhalt mit f und der Umfang mit u bezeichnet werden; man berechne jedesmal die fehlenden Stücke aus: a) $a = 32$ cm, $b = 18$ cm, $c = 25$ cm; b) $a = 61$ m, $b = 37$ m, $c = 37$ m; c) $b = 9{\cdot}6$ m, $c = 51$ dm, $h = 4{\cdot}5$ m; d) $a = 66$ cm, $h = 84$ cm, $f = 4452$ cm^2!

229 75. In einem gleichschenkligen Trapeze ist $a = 125$ cm, $b = 99$ cm, $c = 85$ cm; man berechne den Inhalt und die Diagonale d!

230 76. In einem Antiparallelogramme ist $b = 57$ cm, $d = 106$ cm, $h = 56$ cm; man berechne den Inhalt und den Umfang!

Fig. 16.



231 77. Man berechne Umfang und Inhalt des in Fig. 16 dargestellten Deltoides aus:

232 AB = 32 cm, AC = 20 cm, AD = 65 cm!

78. Ebenso aus CD = 76 cm, AB = 126 cm, AC = 65 cm.

233 79. Man berechne den Umfang des Deltoides, wenn AB = 154 cm, AC = 85 cm und der Flächeninhalt 231 dm^2 beträgt!

234 80. Ein gleichschenkliges Dreieck mit den Seiten $a = 96$ cm, $b = c = 290$ cm wird in halber Höhe parallel zur Grundlinie geschnitten; es sollen die Inhalte und die Umfänge beider Teile berechnet werden.

235 81. Ebenso für $a = 144$ cm, $b = c = 222$ cm.

236 82. Man berechne den Inhalt eines gleichseitigen Dreieckes aus der Seite s (allgemein und dann für $s = 4{\cdot}56$ dm)!

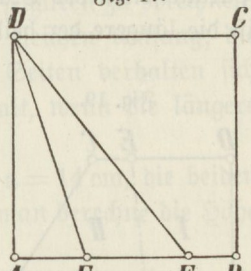
83. Man berechne den Inhalt eines Rhombus, in dem ein Winkel a) 60°, b) 45°, c) 30° beträgt, aus der Seite s! (Zuerst allgemein, dann für s = 4·2 cm.) 237

84. Man berechne den Inhalt eines Rhomboides aus den Seiten s und s', wenn ein Winkel beträgt a) 60°, b) 45°, c) 30°! (Zuerst allgemein, dann für s = 28·2 cm, s' = 18 cm.) 238

85. Der Inhalt eines Quadrates beträgt 282 dm² 24 cm²; eine Strecke von der Länge von 193 cm teilt es von einer Ecke ausgehend in zwei Teile, deren Inhalte und Umfänge berechnet werden sollen. 239

86. In dem Quadrate (Fig. 17) ist AB = = 24 cm; von D aus gehen zwei Strecken, die dadurch bestimmt sind, daß AE = 7 cm und EF = 3 cm ist; man berechne die Inhalte und die Umfänge der drei Teile! 240

Fig. 17.

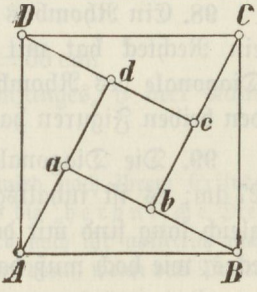


87. Wie Nr. 86, wenn gegeben ist AD = = 36 cm, DE = 39 cm, DF = 45 cm. 241

88. Der Inhalt eines Quadrates beträgt 36 dm². Von der Ecke A aus ist nach den Punkten E und F, die auf den Seiten BC und DC liegen, je eine Strecke gezogen; ihre Längen sind AE = 75 cm und AF = 68 cm; es sind die Umfänge und die Inhalte der drei entstehenden Flächenstücke zu berechnen. 242

89. Man hat in ein Quadrat, dessen Seite 51 cm beträgt, ein zweites Quadrat eingezeichnet, dessen Ecken auf den Seiten des ursprünglichen Quadrates in 15 cm Entfernung von den Eckpunkten liegen; man berechne Umfang und Inhalt des eingezeichneten Quadrates! 243

Fig. 18.



†90. Das Quadrat ABCD (Fig. 18) soll durch die eingezeichneten Teilungslinien*) in fünf inhaltsgleiche Teile geteilt werden; wie lang fällt die Seite des inneren Quadrates aus? Die Berechnung ist zuerst allgemein, dann für AB = 10 cm auszuführen! 244

†91. In welchem Verhältnisse stehen die Inhalte eines gleichseitigen Dreieckes und eines Quadrates, wenn deren Umfänge gleich sind? 245

*) Dieselben sind so zu ziehen, daß immer eine Quadratecke (z. B. A) mit der Mitte einer Gegenseite (z. B. DC) geradlinig verbunden wird.

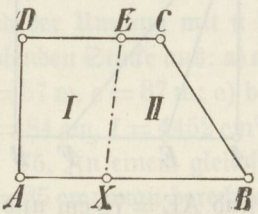
246 92. Ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck haben gleichen Inhalt; wie verhalten sich ihre Umfänge?

247 93. Ein gleichschenkliges Dreieck mit den Seiten $a = 42$ cm, $b = c = 35$ cm ist inhaltsgleich mit einem Trapeze, dessen kleinere Parallelseite 22 cm lang ist; wie groß ist die zweite, wenn das Trapez um 7 cm niedriger ist als das Dreieck?

248 94. Ein Rhombus mit den Diagonalen $d = 18$ cm und $D = 24$ cm ist inhaltsgleich einem Trapeze, dessen Höhe der Hälfte der längeren Rhombusdiagonale gleichkommt. Wenn nun die kürzere der beiden Parallelseiten des Trapezes gleich ist der Seite des Rhombus, wie groß ist die längere der beiden Parallelseiten?

249 95. Im Trapeze ABCD (Fig. 19) ist $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 40$ cm, $AD = 24$ cm, $BC = 26$ cm; von dem Punkte E aus, dessen Abstand von $C = 10$ cm beträgt, ist die Teilungslinie EX so gezogen, daß die beiden entstehenden Flächenteile inhaltsgleich werden; wie lang sind AX und EX?

Fig. 19.



250 96. In einem Antiparallelogramme sind die Parallelseiten $a = 200$ cm und $b = 136$ cm; die beiden nichtparallelen Seiten sind $c = 130$ cm; man hat die Mittelpunkte der vier Seiten des Trapezes paarweise miteinander verbunden, wodurch in das ursprüngliche Trapez ein neues Viereck eingezeichnet ist. Man berechne die Inhalte und die Umfänge beider Figuren!

251 97. Wie Nr. 96 mit $a = 63$ cm, $b = 33$ cm, $c = 39$ cm; auch ist die Diagonale des Trapezes zu berechnen.

252 98. Ein Rhombus hat als Diagonalen $d = 24$ cm und $D = 70$ cm; ein Rechteck hat mit dem Rhombus gleichen Umfang, die kürzere Diagonale des Rhombus gibt die Breite des Rechteckes. Welche von den beiden Figuren hat den größeren Inhalt?

253 99. Die Diagonale eines Rechteckes beträgt 45 dm, seine Breite 27 dm; es ist inhaltsgleich mit einem Trapeze, dessen Parallelseiten gleich lang sind mit den beiden angegebenen Abmessungen des Rechteckes; wie hoch muß das Trapez sein?

254 100. Ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie von 22 cm und ein Antiparallelogramm, in dem $a = 38$ cm, $b = 6$ cm ($a \parallel b$) und $c = 34$ cm ist, sind inhaltsgleich; welche Figur hat den größeren Umfang?

101. Zwei gleichschenklige Dreiecke sind inhaltsgleich; in dem ersten ist $a = 40$ cm, $b = c = 29$ cm; in dem zweiten ist die Höhe $h = 35$ cm. Welches von beiden Dreiecken hat den größeren Umfang? **255**

102. In dem Deltoide ACBD (Fig. 16 auf S. 26) ist $AC = CB = 17$ cm, $AD = DB = 25$ cm; $AB = 30$ cm; das Deltoid ist inhaltsgleich mit einem Rechtecke von der Länge von 35 cm. Welche von beiden Figuren hat den größeren Umfang? **256**

103. Von einem Rhombus ist die Seite 9·5 cm lang, während eine Diagonale 11·4 cm mißt; dieser Rhombus ist sechsmal so groß wie ein Quadrat. Es sind Inhalte und Umfänge beider Figuren zu berechnen. **257**

104. Ein Rhombus und ein Rechteck haben gleichen Umfang; die Diagonale des Rechteckes beträgt 50 cm, seine Seiten verhalten sich wie 3 : 4; welche Figur hat den größeren Inhalt, wenn die längere Diagonale des Rhombus 56 cm beträgt? **258**

105. Von einem Dreiecke ist die Grundlinie $a = 14$ cm, die beiden anderen Seiten sind $b = 13$ cm und $c = 15$ cm; man berechne die Höhe auf a und den Flächeninhalt! **259**

Anleitung: Man bezeichne einen der beiden Abschnitte, in die die Seite a von der Höhe geteilt wird, mit x, so ist der zweite gleich $(14 - x)$; aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken, die nun entstehen, ist $h^2 = 13^2 - x^2$ und $h^2 = 15^2 - (14 - x)^2$; setzt man diese beiden Werte von h^2 einander gleich, so ergibt sich die Gleichung $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$, woraus x berechnet werden kann; mit Hilfe des erlangten Wertes kann sodann h gefunden werden.

106. Wie Nr. 105, wenn $a = 44$ cm, $b = 39$ cm, $c = 17$ cm ist. **260**

107. Von einem Dreiecke sind die drei Seiten a, b und c gegeben; man berechne den Flächeninhalt! *) **261**

108. Berechne den Inhalt eines Dreieckes, in dem $a = 35$ cm, $b = 28$ cm, $c = 21$ cm ist! **262**

109. Ebenso für $a = 39$ cm, $b = 41$ cm, $c = 50$ cm. **263**

110. Ebenso, wenn a ein Fünftel des Umfanges, b drei Achtel davon und c 51 cm beträgt. **264**

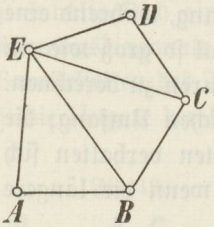
---

*) Die Formel $f = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ wird nach ihrem Erfinder Heron von Alexandria (zirka 110 v. Chr.) als die „heronische Dreiecksformel" bezeichnet. Der Inhalt des Dreieckes wird nach ihr natürlich nicht immer als rationale Zahl erscheinen; dies geschieht nur dann, wenn das Dreieck, das man in diesem Falle ein „heronisches Dreieck" nennt, aus zwei „pythagoreischen" Dreiecken (vgl. Nr. 54) besteht. Man untersuche, inwieferne dies in Nr. 105 und 106 zutrifft, und bilde mit Hilfe der in Nr. 54 aufgestellten Tabelle einige „heronische Dreiecke"!

265 111. Die drei Seiten eines Dreieckes sind a = 10·5 cm, b = 9·8 cm und c = 9·1 cm; wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Inhalt 21mal so groß ist als das Dreieck?

266 112. Von einem viereckigen Felde ABCD hat man die vier Seiten der Reihe nach gemessen und dafür die Werte gefunden: AB = 90 m, BC = 84 m, CD = 88 m, DA = 34 m; die Diagonale AC wurde gleichfalls gemessen und betrug 78 m. Wie groß ist der Inhalt?

Fig. 20.



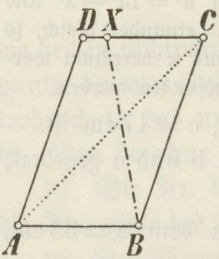
267 113. Um den Inhalt eines Feldes von der Form eines unregelmäßigen Fünfeckes (Fig. 20) zu bestimmen, hat man durch Messung gefunden: AB = 55 m, BC = 36 m, CD = 56 m, DE = 52 m, EA = 73 m, EC = 60 m, EB = 48 m; wie groß ist der Inhalt?

268 114. Aus den Seiten a = 52 cm und b = 25 cm sowie der Diagonale d = 33 cm eines Rhomboides ist dessen Inhalt zu bestimmen.

269 115. Ebenso für a = 56 m, b = 25 m, d = 39 m.

270 116. Im Parallelogramme ABCD (Fig. 21) ist AB = 27 cm, BC = 30 cm, AC = 51 cm, DX = = 2 cm. Man berechne zuerst den Inhalt des Parallelogrammes, ferner die Inhalte und die Umfänge der beiden Teile, in die das Parallelogramm durch die Gerade BX geteilt wird!

Fig. 21.



271 117. Man berechne den Inhalt eines Parallelogrammes aus der Seite a = 15 dm und den beiden Diagonalen D = 26 dm, d = 8 dm!

272 118. Wie Nr. 117 mit a = 51 cm, D = 90 cm, d = 48 cm.

273 119. Wie Nr. 117 mit a = 63 cm, D = 130 cm, d = 32 cm.

274 120. Von einem Parallelogramme ist die eine Seite gleich 2·5 dm, die Diagonalen sind 3 dm und 4 dm lang; wie groß ist der Inhalt? Wie groß ist die zweite Seite?

275 121. In einem Trapeze sind die parallelen Seiten a und b, die nichtparallelen c und d; man berechne den Inhalt, wenn a) a = 36 cm, b = 28 cm, c = 30 cm, d = 26 cm; b) a = 40 cm, b = 12 cm, c = 26 cm, d = 30 cm; c) a = 80 cm, b = 50 cm, c = 40 cm, d = 50 cm; d) a = = 78 cm, b = 45 cm, c = 39 cm, d = 60 cm; e) a = 9 dm, b = 63 cm,

$c = 12\,\text{dm}$, $d = 123\,\text{cm}$; f) $a = 102\,\text{m}$, $b = 60\,\text{m}$, $c = 39\,\text{m}$, $d = 45\,\text{m}$; g) $a = 3{\cdot}69\,\text{m}$, $b = 1{\cdot}8\,\text{m}$, $c = 0{\cdot}9\,\text{m}$, $d = 1{\cdot}53\,\text{m}$!

122. In dem Trapeze ABCD ist $AB = 155\,\text{cm}$, $BC = 61\,\text{cm}$, $CD = 112\,\text{cm}$, $DA = 68\,\text{cm}$ [$AB \parallel DC$]; es ist der Inhalt und die Diagonale AC zu berechnen. **276**

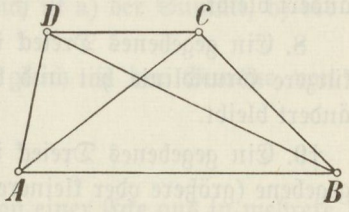
123. Wie Nr. 122, wenn $AB = 46{\cdot}5\,\text{dm}$, $BC = 18{\cdot}3\,\text{dm}$, $CD = 33{\cdot}6\,\text{dm}$, $DA = 20{\cdot}4\,\text{dm}$ ist. **277**

124. In dem Trapeze ABCD [wobei $AB \parallel CD$ ist] beträgt $AB = 66\,\text{cm}$, $BC = 25\,\text{cm}$, $CD = 30\,\text{cm}$, $DA = 29\,\text{cm}$; wie groß ist der Inhalt? Man zieht die Mittellinie und ihre Streckensymmetrale und verbindet die vier Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit den Trapezseiten paarweise miteinander; Umfang und Inhalt der neuen Figur sind zu berechnen. **278**

125. Wie Nr. 124 mit $AB = 220{\cdot}5\,\text{mm}$, $BC = 82\,\text{mm}$, $CD = 163{\cdot}5\,\text{mm}$ und $DA = 89\,\text{mm}$. **279**

126. Ein Trapez hat als Parallelseiten $a = 64\,\text{cm}$, $b = 20\,\text{cm}$, als nichtparallele Seiten $c = 39\,\text{cm}$ und $d = 17\,\text{cm}$; ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Höhe dreimal so groß ist wie die Höhe des Trapezes, hat den doppelten Inhalt wie das Trapez. Wie verhalten sich die Umfänge der beiden Figuren? **280**

Fig 22.



†127. In dem Trapeze ABCD (Fig. 22) ist $AB = 45\,\text{cm}$, $CD = 32\,\text{cm}$, $AC = 40\,\text{cm}$, $BD = 51\,\text{cm}$. Man berechne den Inhalt! **281**

†128. Wie Nr. 127 mit $AB = 42\,\text{cm}$, $CD = 28\,\text{cm}$, $AC = 65\,\text{cm}$ und $BD = 75\,\text{cm}$. **282**

VII. Verwandlung und Teilung geradliniger Figuren.

Vorbemerkung: Die folgenden Aufgaben können zumeist nach der „Methode der geometrischen Örter" gelöst werden. Außer den schon früher (S. 15) angeführten Sätzen (1—5) über geometrische Örter berücksichtige man noch den folgenden:

6. Der geometrische Ort der Spitzen aller flächengleichen Dreiecke, die eine und dieselbe Grundlinie haben, ist eine Parallele zur Grundlinie.

1. Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, das mit ihm gleiche Grundlinie hat. **283**

284 2. Ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, das an einer bestimmten Ecke einen gegebenen Winkel α enthält.

285 3. Ein gegebenes Dreieck in ein rechtwinkliges zu verwandeln.

286 4. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, so daß die Grundlinie des ersten Dreieckes in dem zweiten Dreiecke als Schenkel erscheint.

287 5. Ein gegebenes Dreieck, dessen Höhe kleiner ist als die halbe Grundlinie, in ein rechtwinkliges zu verwandeln, in dem die Grundlinie des ersten Dreieckes als Hypotenuse erscheint.

288 6. Zur Begründung der folgenden Aufgabe sowie einiger anderen Aufgaben dieses Kapitels benütze man den Lehrsatz: „Zieht man in einem Trapeze beide Diagonalen, so erhält man vier Dreiecke, von denen die beiden an den nichtparallelen Seiten liegenden inhaltsgleich sind." Man beweise diesen Lehrsatz!

289 7. Ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, das eine längere Grundlinie hat und bei dem ein anliegender Winkel unverändert bleibt.

290 8. Ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, das eine kürzere Grundlinie hat und bei dem ein anliegender Winkel unverändert bleibt.

291 †9. Ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene (größere oder kleinere) Höhe hat.

292 †10. Ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, dessen Spitze in einen gegebenen Punkt fällt, wenn die Richtung der Grundlinie und einer ihrer Endpunkte unverändert bleibt.

293 †11. Ein gegebenes Dreieck in ein anderes inhaltsgleiches zu verwandeln, von dem zwei Seiten gegeben sind.

294 12. Ein gegebenes Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln, das einen Winkel und eine Seite des Dreieckes enthält.

295 13. Ein gegebenes Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln, das mit ihm a) gleiche Grundlinie, b) gleiche Höhe hat.

296 14. Ein Parallelogramm in ein Rechteck über derselben Grundlinie zu verwandeln.

297 15. Ein Parallelogramm in ein Rechteck mit gegebener Grundlinie zu verwandeln.

16. Ein gegebenes Trapez a) in ein Parallelogramm, b) in ein Rechteck zu verwandeln, wobei jedesmal die Höhe des Trapezes beibehalten werden soll. **298**

17. Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln. **299**

18. Ein gegebenes Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln. **300**

†19. Ein gegebenes Parallelogramm in einen Rhombus a) von gegebener Seite, b) von gegebener Höhe zu verwandeln. **301**

†20. Ein Quadrat in ein Rechteck mit gegebener Diagonale zu verwandeln. **302**

†21. Ein Parallelogramm in einen Rhombus zu verwandeln, von dem eine Diagonale gegeben ist. **303**

22. Ein Trapez in ein Antiparallelogramm zu verwandeln, das dieselbe Grundlinie und Höhe hat wie das Trapez. **304**

23. Ein gegebenes unregelmäßiges Vieleck in ein anderes zu verwandeln, das um eine Seite weniger hat. **305**

24. Ein gegebenes unregelmäßiges Vieleck in ein Quadrat zu verwandeln. **306**

25. Ein Quadrat zu zeichnen, das gleich ist a) der Summe, b) der Differenz von zwei gegebenen Quadraten. **307**

26. Ein Quadrat zu zeichnen, das gleich ist der Summe von mehreren gegebenen Quadraten. **308**

* * *

27. Ein Dreieck durch gerade Linien von einer Ecke aus in mehrere (z. B. drei) gleiche Teile zu teilen. **309**

28. Ein Dreieck von einem Punkte einer Seite aus in drei gleiche Teile zu teilen. **310**

29. Man beweise, daß ein jedes Dreieck durch die drei Schwerlinien in sechs flächengleiche Dreiecke zerfällt. **311**

30. Ein Dreieck in drei gleiche Teile zu teilen, so daß die Teilungslinien von einem (natürlich erst zu bestimmenden) Punkte innerhalb des Dreieckes nach den drei Eckpunkten gehen. **312**

31. Ein Dreieck von einem gegebenen Punkte des Inneren aus so zu teilen, daß eine Teilungslinie durch eine bestimmte Ecke des Dreieckes geht. **313**

32. Ein Dreieck durch ein eingezeichnetes in vier kongruente Dreiecke zu zerlegen. **314**

315 33. Ein Parallelogramm durch Gerade, die einer Seite parallel laufen, in eine beliebige Zahl gleicher Teile zu zerlegen.

316 34. Ein Rechteck soll auf vier verschiedene Arten durch eingezeichnete Teilungslinien in vier flächengleiche Teile geteilt werden.

317 35. Ein Parallelogramm soll auf vier verschiedene Arten in acht kongruente Dreiecke geteilt werden.

318 36. Ein Parallelogramm von einer Ecke aus a) in sechs, b) in fünf inhaltsgleiche Teile zu teilen.

319 37. Ein beliebiges Viereck von einer Ecke aus zu halbieren.

320 38. Ein beliebiges Viereck ist von einer Ecke aus in eine Anzahl gleicher Teile (z. B. in drei) zu teilen.

321 †39. Ein Parallelogramm von einem Punkte einer Seite aus in eine Anzahl gleicher Teile (z. B. in drei) zu teilen. Bei dieser Aufgabe kann es vorkommen, daß eine der Teilungslinien die Gegenseite des Parallelogrammes erst in ihrer Verlängerung schneidet; in diesem Falle muß die Teilungslinie weiter gedreht werden. Wie weit hat dies zu geschehen? (Man benütze S. 32, Nr. 6!)

322 40. Ein Trapez in eine beliebige Anzahl gleicher Trapeze mit gleichen Grundlinien so zu teilen, daß die Teilungslinien von der einen der parallelen Seiten zur anderen gehen.

323 41. Ein Trapez von einer Ecke aus zu halbieren.

324 42. Ein Trapez von einer Ecke aus in eine Anzahl gleicher Teile (etwa in vier gleiche Teile) zu teilen.

325 †43. Ein Trapez ist in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile (z. B. in sechs) so zu teilen, daß die Teilungslinien eine gebrochene Linie bilden, die an einer Ecke beginnt und zwischen den Parallelseiten des Trapezes hin- und hergeht. (Der Zusatz von Nr. 39 ist hier zu berücksichtigen.)

326 †44. Ein Trapez von einem Punkte aus, der in einer der parallelen Seiten liegt, durch eine Gerade zu halbieren.

327 †45. Ein Trapez in eine Anzahl gleicher Teile (etwa fünf) zu teilen, wobei die Teilungslinien durch einen gegebenen Punkt einer der nicht-parallelen Seiten gehen.

VIII. Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren.

328 1. Bestimme auf graphischem Wege das größte gemeinsame Maß der folgenden Strecken: a) $a = 16\,\text{cm}$ und $b = 10\,\text{cm}$; b) $a = 215\,\text{mm}$ und $b = 150\,\text{mm}$; c) $a = 143\,\text{mm}$ und $b = 104\,\text{mm}$; d) $a = 249\,\text{mm}$ und $b = 72\,\text{mm}$!

2. Es sind drei Strecken a, b und c gegeben: man konstruiere eine vierte Strecke x so, daß $a:b=c:x$ ist! (Konstruktion einer vierten Proportionalen.) **329**

3. Eine gegebene Strecke ist im Verhältnis von zwei anderen gegebenen Strecken zu teilen. **330**

4. Von einem Rechtecke ist der Umfang als Strecke gegeben und Länge und Breite stehen in einem gewissen Verhältnisse (z. B. 5 : 3); man konstruiere das Rechteck! **331**

5. Über einer gemeinsamen Grundlinie sind zwei Dreiecke von gleicher Höhe konstruiert und man schneidet beide durch eine Gerade parallel zur Grundlinie. Es ist zu zeigen, daß die innerhalb der beiden Dreiecke liegenden Strecken gleich sind. **332**

6. Man verlängert eine Dreiecksseite um ihre eigene Länge und verbindet den Endpunkt mit der Mitte einer zweiten Dreiecksseite. Warum wird dadurch auf der dritten Seite ein Drittel abgeschnitten? (2 Fälle zu untersuchen.) **333**

7. Durch einen Punkt gehen drei Strahlen. Man suche die Richtung einer sie schneidenden Geraden, deren innerhalb der Strahlen liegende Abschnitte gleiche Länge besitzen! **334**

8. In einem Trapeze sind die Diagonalen gezeichnet und durch ihren Schnittpunkt eine Gerade parallel zu den beiden parallelen Seiten gezogen; der Schnittpunkt der Diagonalen halbiert die innerhalb des Trapezes liegende Strecke dieser Schnittgeraden. Warum? — Verlängert man die Nichtparallelen bis zum Durchschnitt und verbindet ihren Schnittpunkt mit dem Schnittpunkte der Diagonalen, so halbiert die Verbindungslinie die beiden parallelen Seiten des Trapezes. Warum? **335**

9. Zwischen den Schenkeln eines Winkels ist ein Punkt gegeben: man soll durch ihn eine Strecke derart ziehen, daß der gegebene Punkt sie in bestimmtem Verhältnisse (z. B. 1 : 2) teilt (2 Lösungen). **336**

10. In einem Dreiecke ABC ist $AB = 42$ cm, $BC = 45$ cm und $AC = 39$ cm; man halbiert den Winkel ACB; wie groß sind die Abschnitte, in die die Gegenseite AB durch die Winkelsymmetrale geteilt wird? Man vergleiche das Verhältnis von AC : CB mit dem Verhältnisse dieser beiden Abschnitte! Auch sollen die Inhalte der beiden Dreiecke bestimmt werden, in die das ursprüngliche Dreieck durch die gezeichnete Winkelsymmetrale zerfällt. **337**

338 11. In einem Dreieck teilt die Halbierungslinie des Winkels A die Gegenseite BC in die Abschnitte von 12 cm und 18 cm; wie groß sind die beiden anderen Seiten, wenn sie zusammen 70 cm ausmachen?

339 12. In einem Dreieck mit den Seiten $a = 126$ cm, $b = 168$ cm und $c = 210$ cm sind die drei Winkel halbiert. In welche Abschnitte werden die Dreieckseiten durch die Winkelsymmetralen geteilt?

340 13. Über einer gegebenen Strecke ist ein Dreieck zu konstruieren, das einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

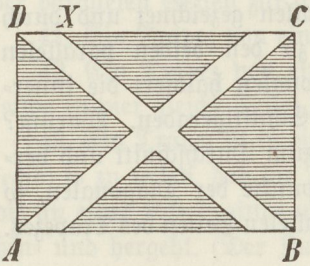
341 14. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus der Hypotenuse dem Verhältnisse des Schenkels zur Grundlinie.

342 15. Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren aus der Höhe und dem Verhältnisse des Schenkels zur Grundlinie.

343 16. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, dem Verhältnisse der einschließenden Seiten und der dritten Seite.

344 17. Ein Dreieck hat als Seiten $a = 26$ cm, $b = 28$ cm, $c = 30$ cm; in einem zweiten ähnlichen Dreiecke entspricht der Seite $a = 26$ cm die Seite $a' = 65$ cm; wie lang sind die übrigen Seiten des zweiten Dreieckes? Man bestimme auch die Inhalte der beiden Dreiecke und drücke ihr Verhältnis in den einfachsten Zahlen aus!

Fig. 23.



345 †18. In einem rechteckigen Garten ABCD (Fig. 23) ist ein Kreuzweg in der gezeichneten Weise angelegt; wie groß ist der Inhalt des vom Wege freibleibenden Teiles, wenn $AB = 29{\cdot}2$ m, $BC = 27{\cdot}4$ m, $DX = 1{\cdot}8$ m ist?

346 †19. Wie Nr. 18 mit $AB = 39{\cdot}6$ m, $BC = 25{\cdot}2$ m, $DX = 1{\cdot}8$ m.

347 20. Um die Höhe eines Turmes zu messen, hat man seinen waagrechten Schatten mit 114 m Länge abgemessen und gleichzeitig den Schatten eines Stabes von 1 m Länge bestimmt; wenn sich dieser mit 1·2 m ergab, wie hoch war der Turm?

348 21. In einem gleichschenkligen Trapeze ist die Diagonale 60 cm; sie steht senkrecht auf dem Schenkel. Wie groß ist Umfang und Inhalt, wenn die Höhe 16·8 cm beträgt?

349 †22. In einem Trapeze ist $AB \parallel CD$ und $AB = 35$ cm, $CD = 21$ cm; die beiden anderen Seiten betragen 13 cm und 15 cm; man berechne

Seiten und Inhalt des Dreieckes, zu dem man das Trapez durch Verlängern der nichtparallelen Seiten ergänzen kann!

23. Zu beweisen, daß in ähnlichen Dreiecken die Flächeninhalte sich verhalten wie die Quadrate gleichliegender Abmessungen. **350**

24. Wenn man die in Nr. 122 erhaltenen Teilungspunkte der Diagonale eines Rhomboides paarweise verbindet, was kann man von dem entstandenen Vierecke behaupten? Wie verhält sich sein Inhalt zu dem des gegebenen Parallelogrammes? **351**

25. Man zeichne ähnliche Dreiecke, in denen sich die Seiten des ersten zu den Seiten des zweiten verhalten wie 1 : 2, die Seiten der ersten zu den Seiten des dritten wie 1 : 3 usw. und zeige durch passende Zerlegung, daß die Inhalte dieser Dreiecke sich verhalten wie 1 : 4 : 9 usw.! *) **352**

26. Worauf beruht die Konstruktion und der Gebrauch eines sogenannten Transversalmaßstabes? **353**

†*27.**) Von einer Ecke A eines Quadrates, dessen Umfang 48 cm beträgt, ist nach der einen gegenüberliegenden Seite eine schräge Gerade gezogen, deren Verlängerung auch die zweite der Ecke A gegenüberliegende Quadratseite schneidet. Wie groß ist das innerhalb des Quadrates liegende Stück dieser Geraden, wenn das außerhalb liegende 5 cm lang ist? **354**

†28. Ein Dreieck soll durch eine Gerade parallel zur Grundlinie so geschnitten werden, daß das abgeschnittene Dreieck inhaltsgleich ist mit dem übrigbleibenden Trapeze. In welcher Entfernung vom Scheitel muß der Schnitt geführt werden? (Die Aufgabe ist zuerst rechnend auszuführen, indem man die Grundlinie g und die Höhe h einführt; sodann ist das Ergebnis der Rechnung zu konstruieren.) **355**

†29. In der vorigen Aufgabe ergibt sich für den gesuchten Scheitelabstand der Teilungslinie eine Formel, die nur die Größe h enthält; was folgt daraus? Man rechne nun auch die Länge der Teilungsstrecke; was sagt die betreffende Formel aus? (Vgl. Nr. 5!) **356**

*) Aus der Figur ist ein geometrischer Nachweis für den Satz zu ersehen, daß die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich dem Quadrate von n ist. (Verwertung bei den Fallgesetzen in der Mechanik.)

**) Aufgaben, vor deren Nummern das Zeichen * steht, führen auf gemischt quadratische Gleichungen. — Die Aufgabe 27 führt auf eine reziproke Gleichung des vierten Grades.

357 †30. Für die Aufgabe Nr. 154, S. 17, ist auf dem Wege der „algebraischen Analysis“*) die folgende Konstruktion zu begründen: Man beschreibe aus den vier Eckpunkten des Quadrates mit der halben Diagonale als Halbmesser im Innern des Quadrates Kreisbogen; diese geben auf den Quadratseiten die Eckpunkte des regelmäßigen Achteckes an.

358 †31. Ein Dreieck ist durch eine Gerade parallel zu c so zu schneiden, daß der obere Abschnitt auf der Seite a ebensolang ist wie der untere Abschnitt auf der Seite b. (Algebraische Analysis.)

359 †32. Ein gleichschenkliges Dreieck hat als Grundlinie 18 cm, als Höhe 12 cm; es soll durch einen Schnitt parallel zur Grundlinie so geteilt werden, daß die Fläche des entstandenen Trapezes sich zu der des abgeschnittenen Dreieckes verhält wie 5 : 4; in welchem Abstande vom Scheitel muß der Schnitt geführt werden und wie lang ist die Teilungslinie?

360 †33. In einem Rhombus mit den Diagonalen $D = 56$ cm und $d = 42$ cm hat man beide Diagonalenwinkel halbiert. Was für ein Viereck bestimmen die Schnittpunkte der Halbierungslinien und der Rhombusseiten? Sein Umfang und Inhalt soll berechnet werden.

361 †34. Die Diagonalen eines Rhombus sind 150 cm und 200 cm lang. Von ihrem Schnittpunkte aus hat man auf die vier Rhombusseiten Senkrechte errichtet und deren Fußpunkte paarweise miteinander verbunden. Was für ein Viereck entsteht? Man berechne seinen Umfang und Inhalt!

362 35. Auf der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, die 130 cm lang ist, ruht ein Rechteck mit seiner längeren Seite auf, während seine oberen Eckpunkte auf den Schenkeln des Dreieckes liegen. Der Umfang dieses Rechteckes beträgt 28 dm und die Länge und Breite stehen im Verhältnis von 4 : 3. Es sind die Umfänge und die Inhalte der beiden Figuren zu berechnen.

363 †36. In einem Trapeze sind die parallelen Seiten 17 cm und 7 cm; die beiden anderen Seiten betragen je 13 cm. Das Trapez ist durch eine Teilungslinie, die parallel zu den beiden Parallelseiten des Tra-

*) Die Analyse der Aufgabe auf Grund der Rechnung heißt „algebraische Analysis“ zum Unterschiede von der „geometrischen Analysis“ (vgl. S. 5 u. 13). Diese Methode gestattet häufig sehr einfache und sinnreiche Lösungen von Konstruktionsaufgaben.

pezes verläuft, in zwei inhaltsgleiche Teile zu teilen. Man soll die Länge der Teilungslinie sowie die Abschnitte, die sie auf den nichtparallelen Seiten hervorbringt, berechnen.

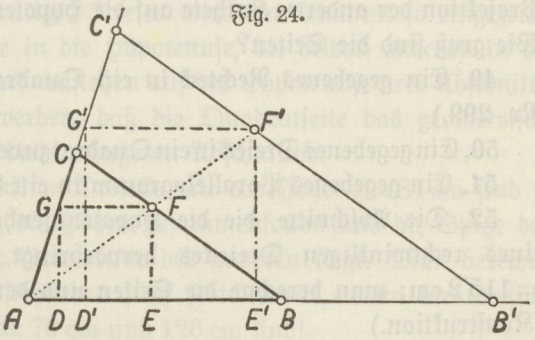
†37. In ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b ist ein Quadrat so einzuschreiben, daß ein Eckpunkt des Quadrates in den Scheitel des rechten Winkels, der gegenüberliegende in die Hypotenuse fällt; man soll die Umfänge und die Inhalte beider Figuren berechnen und die entsprechende Konstruktion auf dem Wege der „algebraischen" und der „geometrischen" Analysis ausführen. (Zuerst allgemein, dann für a = 820 mm und b = 861 mm.) **364**

*38. In ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse 35 cm ist ein Quadrat mit der Seite 12 cm eingezeichnet, so daß eine Quadratecke im Scheitel des rechten Winkels, die andere in der Hypotenuse liegt; wie groß sind die Katheten? **365**

*39. Ein Punkt P hat von beiden Schenkeln eines rechten Winkels einen Abstand von $1^5/_7$ cm. Man soll durch ihn eine Gerade so legen, daß sie ein rechtwinkliges Dreieck von 6 cm² Inhalt abschneidet. Wie groß sind die Seiten dieses Dreieckes? **366**

†40. In ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie g und der Höhe h ist ein Quadrat so einzuzeichnen, daß zwei der Eckpunkte in der Grundlinie und je einer auf einem der Schenkel s liegt. Wie groß ist die Quadratseite? (Zuerst allgemein, dann für g = 18 cm, s = 15 cm; auch ist die Konstruktion durchzuführen.*) **367**

Fig. 24.



†41. Wie Nr. 40 mit g = 110 cm und s = 143 cm. **368**

*) Die Ableitung der Formel kann sowohl mit Benützung der Ähnlichkeit als auch ohne diese geschehen; die Konstruktion gelingt entweder auf Grund einer „geometrischen Analysis" mit Benützung von Nr. 37 und Nr. 5 dieses Kapitels oder auf Grund einer „algebraischen Analysis". Noch eine andere Konstruktionsmethode — die „Methode der ähnlichen Figuren" — kann ver-

369 †42. Wie Nr. 40 mit $g = 4{\cdot}96$ cm und $s = 5{\cdot}27$ cm.

370 †43. Die Aufgabe Nr. 40 ist für ein schiefwinkliges Dreieck mit $a = 182$ cm, $b = 195$ cm, $c = 169$ cm (wobei als Grundlinie a anzunehmen ist) durchzuführen.

371 †44. Wie Nr. 43 mit $a = 92{\cdot}5$ cm (Grundlinie), $b = 74$ cm, $c = 55{\cdot}5$ cm.

372 †*45. Einem spitzwinkligen Dreiecke mit der Grundlinie g und der Höhe h ist ein Rechteck einzuzeichnen, dessen Inhalt $^3/_8$ vom Inhalte des Dreieckes ist. Wie groß muß seine Grundlinie angenommen werden? Die Durchführung der Rechnung läßt uns erkennen, daß die Größe h im Resultate keine Rolle spielt. Wieso? Und wie ist dies zu erklären?

373 †*46. Einem Rhombus mit den Diagonalen D und d ist ein Rechteck einzuzeichnen, dessen Seiten parallel zu den Rhombusdiagonalen verlaufen und dessen Inhalt $^4/_9$ vom Inhalt des Rhombus beträgt. Wie groß sind die Seiten des Rechteckes?

374 47. Die mittlere geometrische Proportionale (das geometrische Mittel) von zwei gegebenen Strecken a und b zu konstruieren.

375 *48. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist eine Kathete 15 cm, die Projektion der anderen Kathete auf die Hypotenuse ist um 1 cm größer. Wie groß sind die Seiten?

376 49. Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln. (Vgl. Nr. 299.)

377 50. Ein gegebenes Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln. (Vgl. Nr. 300.)

378 51. Ein gegebenes Parallelogramm in ein Quadrat zu verwandeln.

379 52. Die Abschnitte, die die Hypotenusenhöhe auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes hervorbringt, sind $p = 9{\cdot}8$ cm, $q = 115{\cdot}2$ cm; man berechne die Seiten und den Inhalt des Dreieckes! (Konstruktion.)

380 53. Es sind die Seiten und der Inhalt eines rechtwinkligen Dreieckes zu berechnen, in dem eine Kathete $a = 65$ cm und der ihr anliegende Abschnitt der Hypotenuse $p = 25$ cm ist. (Konstruktion.)

---

wendet werden. Man zeichne zunächst über die Grundlinie AB (Fig. 24) irgendein Quadrat D′E′F′G′ und ziehe durch F′ die C′B′ ∥ CB, so ist Δ AB′C′ ~ ABC. Die Verbindungsgerade der Punkte F′A liefert dann einen Eckpunkt F des gesuchten Quadrates. — Wie könnten andere bisher bereits behandelte Aufgaben (z. B. das Musterbeispiel auf S. 13 oder Nr. 138, 147 u. a.) nach dieser Methode gelöst werden?

†54. Von einem rechtwinkligen Dreiecke ist der Inhalt 1350 cm², die Hypotenuse 75 cm; man berechne die Katheten! *) 381

55. Von einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse 289 mm; einer der beiden Abschnitte, in die sie durch die Hypotenusenhöhe geteilt wird, ist 225 mm; wie groß sind die Katheten und der Inhalt? (Konstruktion.) 382

56. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenusenhöhe 36 cm und einer der beiden Abschnitte der Hypotenuse 8·1 cm. Wie groß ist der Umfang und der Inhalt des Dreieckes? (Konstruktion.) 383

*57. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist c, die zu ihr gehörige Höhe h. Wie groß sind die Abschnitte p und q, in die die Hypotenuse durch die Höhe geteilt wird? (Besondere Werte c = 15 cm, h = 7·2 cm.) 384

58. Wie groß ist Umfang und Inhalt eines rechtwinkligen Dreieckes, wenn eine Kathete a = 58 cm und die Hypotenusenhöhe h = = 42 cm ist? (Konstruktion.) 385

59. Auf geometrischem Wege ist nachzuweisen, daß das geometrische Mittel zweier Strecken (Größen) stets kleiner ist als ihr arithmetisches Mittel. 386

60. In ein rechtwinkliges Dreieck wird ein Quadrat so eingezeichnet, daß zwei Eckpunkte in die Hypotenuse, die beiden anderen in die Katheten fallen. Dadurch entstehen auf der Hypotenuse drei Abschnitte. Es soll nachgewiesen werden, daß die Quadratseite das geometrische Mittel ist zwischen den beiden äußeren Abschnitten. 387

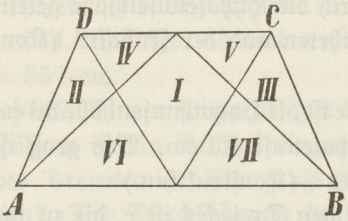
†61. Zwei gleichschenklige Dreiecke mit der Höhe h = 84 cm sind so aufeinander gelegt, daß die Höhen zusammenfallen und die Spitze des einen in der Mitte der Grundlinie des anderen liegt. Man berechne die Inhalte der so entstehenden fünf Flächenteile, wenn die Grundlinien der beiden Dreiecke 70 cm und 126 cm sind! 388

†62. Von einem Rhombus ist die längere Diagonale 408 mm, die kürzere 170 mm lang; es soll ein Quadrat derart eingezeichnet werden, daß seine Seiten parallel zu den Diagonalen des Rhombus verlaufen und seine Ecken auf den Seiten des Rhombus liegen. Wie groß ist die Seite des Quadrates und wie verhalten sich die Inhalte beider Figuren? 389

*) Die Aufgabe kann gelöst werden, indem man aus $a^2 + b^2 = c^2$ und $ab = 2f$ sowohl $a + b$ als $a - b$ berechnet; eine interessante geometrische Lösung gewinnt man, wenn man die Aufgabe auf Nr. 226, S. 26, zurückführt, oder mit Benützung des Lehrsatzes vom Winkel im Halbkreise.

390 †63. Ebenso wie in Nr. 62 soll einem Rhombus, der als Diagonalen 220 mm und 165 mm hat, ein Rechteck eingeschrieben werden, in dem sich die Länge zur Breite verhält wie 2 : 1; man berechne die Seiten des Rechteckes! (2 Lösungen.)

Fig. 25.



391 †64. Im Antiparallelogramme ABCD (Fig. 25) ist AB = 280 cm, CD = 112 cm und die Höhe h = = 105 cm. Man zieht von den Mittelpunkten der Seiten AB und CD die in der Figur angedeuteten Verbindungslinien. Man berechne die Inhalte der sieben entstehenden Flächenstücke!

IX. Der Kreis.

392 1. Es sind drei Punkte gegeben, die nicht in einer Geraden liegen; man lege einen Kreis hindurch!

393 2. Eine Kreislinie liegt gezeichnet vor; ihr Mittelpunkt ist zu suchen.

394 3. Welche charakteristischen Lagen können a) ein Punkt und eine Kreislinie, b) eine Gerade und eine Kreislinie gegeneinander einnehmen?

395 4. Innerhalb einer Kreislinie ist ein Punkt gegeben; man soll von den unzählig vielen Sehnen, die sich durch ihn ziehen lassen, die längste und die kürzeste konstruieren; auch sind ihre Längen zu berechnen, wenn der Halbmesser des Kreises r und der Abstand a des Punktes vom Mittelpunkte des Kreises gegeben sind. (Allgemein, dann für r = = 73 cm, a = 48 cm.)

396 †5. In einem Kreise sind von einem Punkte A des Umfanges aus Sehnen gezogen; es ist nachzuweisen, daß der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Sehnen ein Kreis ist, der durch den Punkt A und durch den Mittelpunkt des Kreises geht.

397 6. An einen gegebenen Kreis ist in einem Punkte des Umfanges die Tangente zu ziehen.

398 7. Ein Kreis und eine Gerade sind gegeben; es sollen an den Kreis jene Tangenten gelegt werden, die parallel (normal) zu der gegebenen Geraden verlaufen.

8. Ein Kreis soll eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte A berühren; ferner ist eine Sehne dieses Kreises, die den Punkt A als einen Endpunkt hat, der Größe und der Lage nach gegeben. Man soll den Kreis konstruieren. **399**

9. Von einem Punkte A außerhalb eines Kreises sollen an diesen Tangenten gelegt werden; man begründe die Richtigkeit der in Fig. 26 dargestellten Konstruktionen! **400**

10. Durch einen Punkt innerhalb einer Kreislinie sind Sehnen von gegebener Länge s zu ziehen. Wann ist die Aufgabe lösbar und wie viele Lösungen ergibt sie? **401**

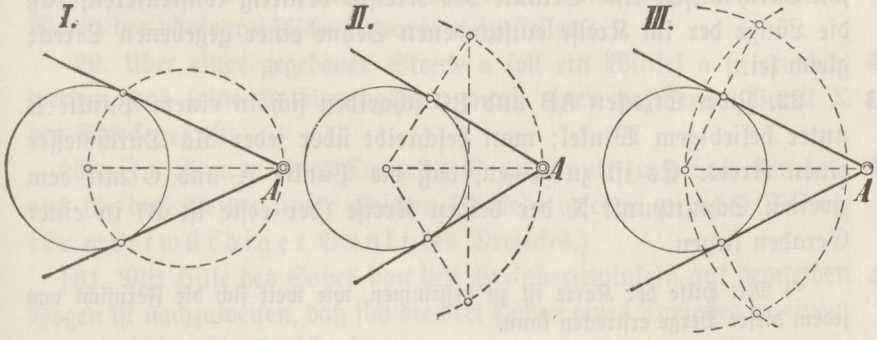
11. Auf einer gegebenen Geraden ist ein Punkt zu suchen, von dem aus die Tangenten an einen gegebenen Kreis a) eine gegebene Länge haben, b) miteinander einen rechten Winkel bilden. (Determination.) **402**

12. Ein Kreis mit einem Halbmesser $r = 44$ cm ist gegeben; die von einem Punkte an den Kreis gezogenen Tangenten t sind 117 cm lang; wie groß ist der Abstand a dieses Punktes vom Mittelpunkte des Kreises? **403**

13. Man ändere die Aufgabe Nr. 12 dahin ab, daß aus $r = 60$ cm und $a = 109$ cm die Länge t der Tangenten berechnet werden soll! **404**

14. Vom Mittelpunkte eines Kreises mit dem Halbmesser $r = 3{\cdot}69$ dm ist ein Punkt 16·81 dm weit entfernt; man berechne die Länge der von diesem Punkte an den Kreis gezogenen Tangenten und die Länge der Berührungssehne! **405**

Fig. 26.



15. Ein Kreis hat als Halbmesser $r = 13{\cdot}6$ cm; ein in der Ebene des Kreises liegender Punkt A ist vom Kreisumfange 15·3 cm weit entfernt; wie lang sind die von A aus an den Kreis gezogenen Tangen- **406**

ten? Wie lang ist die Berührungssehne und wie groß ist der Inhalt des von den zu berechnenden Strecken gebildeten Dreieckes?

407 16. Wie weit muß ein Punkt vom Mittelpunkt eines Kreises abstehen, damit die von ihm an den Kreis gezogenen Tangenten ebenso lang werden wie der Durchmesser?

408 17. Der Durchmesser eines Kreises wird um 25 cm verlängert; vom so gewonnenen Endpunkte werden Tangenten an den Kreis gelegt, die 35 cm lang sind. Wie groß ist der Halbmesser des Kreises?

409 *18. Ein Punkt liegt 17 cm vom Mittelpunkt eines Kreises entfernt. Die von ihm an den Kreis gezogenen Tangenten sind um 7 cm länger als der Kreishalbmesser. Wie lang ist dieser?

410 19. Wie weit erstreckt sich die Fernsicht von einem h m hohen Berge? (Erdhalbmesser $r = 6368$ km.) Allgemein, dann für a) $h = 8840$ m (Gaurisankar); b) $h = 4810$ m (Montblanc); c) $h = 3902$ m (Ortler); d) $h = 2075$ m (Schneeberg).*)

Anleitung: Die allgemeine Formel $x = \sqrt{(2r + h) \cdot h}$ kann für praktische Zwecke bequemer gemacht werden, wenn man statt $2r + h$ nur $2r$ in der Formel beläßt; die Vernachlässigung von h gegen den weit größeren Erddurchmesser $2r$ ist leicht zu rechtfertigen. Wie? **)

411 †20. In einem Kreise sind zwei parallele Sehnen $2a$ und $2b$ gezogen, deren Abstand h ist. Wie groß ist der Kreishalbmesser? (Allgemein; dann für $2a = 24$ cm, $2b = 10$ cm, $h = 7$ cm oder für $2a = 42$ cm, $2b = 40$ cm, $h = 1$ cm.)

412 21. Es ist ein Kreis und ein Punkt außerhalb davon gegeben; man soll durch diesen eine Sekante des Kreises derartig konstruieren, daß die Länge der im Kreise entstandenen Sehne einer gegebenen Strecke gleich sei.

413 22. Zwei Strecken AB und BC schneiden sich in einem Punkte B unter beliebigem Winkel; man beschreibt über jeder als Durchmesser einen Kreis. Es ist zu zeigen, daß die Punkte A und C mit dem zweiten Schnittpunkt X der beiden Kreise (der erste ist B) in einer Geraden liegen.

---

*) Mit Hilfe der Karte ist zu bestimmen, wie weit sich die Fernsicht von jedem dieser Berge erstrecken kann.

) Es ergibt sich in diesem Falle die Formel $x = \sqrt{2rh} = 3{\cdot}56875 \cdot \sqrt{h}$ km. Man hat also, um die „Aussichtsweite" (in Kilometern) zu berechnen, die Quadratwurzel aus der Berghöhe (in m) mit 3·56875 zu multiplizieren. Vgl. Nr. **1449.

23. Welche Beziehung herrscht zwischen einem Peripheriewinkel und einem Zentriwinkel, die beide über einem und demselben Kreisbogen aufstehen? Inwiefern folgt aus dieser Beziehung der „Lehrsatz des Thales"? (Vgl. Nr. 44.) Was kann man von Peripheriewinkeln, die sämtlich über einem und demselben Kreisbogen errichtet sind, behaupten? In welcher Beziehung steht ein Winkel, den eine Sehne AB und eine im Punkte A gezogene Tangente bilden („Sehnen-Tangentenwinkel") zu den über der Sehne in den beiden Kreisabschnitten gebildeten Peripheriewinkeln? **414**

24. Wie sind die Sitze vor einem Bilde anzuordnen, damit jeder Beschauer das Bild unter gleichem Gesichtswinkel (hinsichtlich der Ausdehnung von links nach rechts) sehe? (Anwendung auf das antike und moderne Theater.) **415**

25. Man konstruiere ein Dreieck aus der Seite a, der Höhe h_a auf diese und dem gegenüberliegenden Winkel α! *) **416**

26. Ein an einer Straße liegendes Gebäude soll vom gegenüberliegenden Gehwege dieser Straße aus so photographiert werden, daß die ganze Front unter einem Winkel von 60° erscheint. Wo ist der photographische Apparat aufzustellen? **417**

27. Es sind zwei aneinanderstoßende Strecken a und b gegeben. Man soll einen Punkt suchen, von dem man die Strecke a unter einem gegebenen Winkel β, die Strecke b unter einem Winkel α sieht. (Pothenotsche Aufgabe, vgl. 1954!) **418**

28. Ein Eckhaus soll so photographiert werden, daß seine ungleichlangen Fronten unter einem und demselben Winkel α gesehen werden. Wo ist der photographische Apparat aufzustellen? **419**

29. Über einer gegebenen Strecke a soll ein Winkel α so errichtet werden, daß seine Halbierungslinie durch einen gegebenen Punkt X der Strecke a geht. **420**

†30. Im Innern eines Dreieckes ist ein Punkt zu suchen, von dem aus die drei Seiten unter gleichen Winkeln gesehen werden. (Fünfter merkwürdiger Punkt des Dreieckes.) **421**

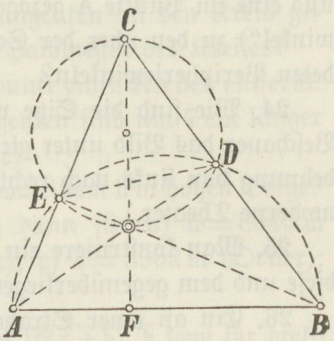
†31. Mit Hilfe des Satzes von den Peripheriewinkeln auf demselben Bogen ist nachzuweisen, daß sich die drei Höhen eines Dreieckes in einem und demselben Punkte schneiden. **422**

*) Die Aufgaben 416—420 sind mit Benützung des „Sehnentangentenwinkels" zu lösen.

Anleitung: Sind zwei Höhen AD und BE (Fig. 27) schon gezogen (vgl. Nr. 51 auf S. 5), so erübrigt nur der Nachweis, daß CF auf AB senkrecht sein muß, was mit Hilfe des oben erwähnten Satzes bewiesen werden kann.

423 †32. Mit Hilfe des in Nr. 23 angeführten Lehrsatzes ist folgender Satz zu beweisen: Zieht man in einem Dreiecke die drei Höhen und verbindet ihre Fußpunkte zu einem Dreiecke (Fußpunktedreieck), so sind die Höhen des ersten Dreieckes zugleich die Winkelsymmetralen für das Fußpunktedreieck.*)

Fig. 27.



424 †33. Aus dem gegebenen Fußpunktedreieck das ursprüngliche Dreieck herzustellen.

425 34. Zwei Strecken sind als Halbmesser zweier Kreise gegeben; man zeichne alle charakteristischen Lagen, die diese Kreise gegeneinander einnehmen können!

426 35. Die Zentrale zweier Kreise beträgt 36 cm; die Halbmesser der Kreise sind $R = 29$ cm und $r = 25$ cm; welche Lage haben die Kreise zueinander?

427 36. Man berechne in Nr. 35 die Länge der gemeinsamen Sehne und die Dicke der entstehenden Linse!

428 †37. Zwei Kreise, die ganz auseinander liegen, sind gegeben; man soll einen Punkt suchen, von dem aus die Tangenten an beide Kreise eine gegebene Länge haben.

429 †38. Zwei Kreise, die ganz auseinander liegen, sind gegeben; man soll auf dem einen Kreise einen Punkt bestimmen, von dem aus die an den anderen Kreis gezogenen Tangenten einen rechten (oder einen beliebigen) Winkel bilden.

430 39. Zwei Kreise sind durch ihre Halbmesser R und r und ihre Zentrale c der Größe und der Lage nach gegeben. Man berechne die Entfernung des äußeren und des inneren Ähnlichkeitspunktes der beiden Kreise vom Mittelpunkte des größeren Kreises! (Allgemein, dann für $R = 18$ cm, $r = 15$ cm und $c = 55$ cm.)**)

*) Sehr interessante Eigenschaften besitzt der um das Fußpunktedreieck beschriebene Kreis; er halbiert die Dreiecksseiten und die oberen Höhenabschnitte und wird deshalb der „Kreis der neun Punkte" genannt.

**) Diese Aufgabe findet eine interessante Verwertung in der Optik bei der Bestimmung der Länge des Kernschattens. Man berechne die Länge des Erd-

40. Was läßt sich über den inneren und äußeren Ähnlichkeitspunkt aussagen, wenn die beiden Kreise alle möglichen charakteristischen Lagen (vgl. Nr. 34) annehmen? **431**

41. An zwei Kreise, die sich von außen berühren, ist eine gemeinsame Tangente gelegt. Es ist zu beweisen, daß ihre Länge das geometrische Mittel aus den beiden Kreisdurchmessern ist. **432**

42. Was versteht man unter der „Potenz" eines Punktes in bezug auf einen Kreis? **433**

43. Haben zwei Kreise eine gemeinsame Sehne, so sind die Tangenten, die man von jedem Punkte ihrer Verlängerung (der „Chordale") an beide Kreise ziehen kann, gleich lang. (Beweis.) Warum heißt diese Gerade auch die „Potenzlinie"? **434**

44. In einem Kreise hat man eine 144 cm lange Sehne um 25 cm verlängert und vom so gewonnenen Endpunkte eine Tangente an den Kreis gezogen. Wie lang ist sie? **435**

45. In einem Kreise wird eine 404 mm lange Sehne durch eine zweite so geteilt, daß sich ihre Abschnitte wie 66 : 35 verhalten. Wie lang ist die zweite Sehne, wenn ihr Teilungsverhältnis 42 : 55 ist? **436**

46. Der Durchmesser $2r = 400$ cm eines Kreises ist im Verhältnis 9 : 16 geteilt und die zu ihm senkrechte Sehne gezeichnet. Wie lang ist sie und wie groß ist Inhalt und Umfang des so bestimmten Deltoides? **437**

*47. In einem Kreise liegt eine Sehne von 5 cm Länge. Um wie viel muß sie verlängert werden, damit die von ihrem Endpunkte an den Kreis gezogenen Tangenten 6 cm lang werden? **438**

*48. Durch den Mittelpunkt P einer 24 cm langen Kreissehne ist eine zweite gezogen, die um 2 cm länger ist. In welche Abschnitte wird sie durch den Punkt P geteilt? **439**

*49. Eine Sehne von 52 cm Länge wird von einer zweiten halbiert. Wie lang ist diese, wenn sich ihre Abschnitte um 39 cm unterscheiden? **440**

*50. Von einem Punkte P ist zu einem Kreis mit dem Halbmesser $r = 3$ dm eine Sekante gezogen, deren äußerer Abschnitt um 8 cm größer ist als der innere. Wie groß sind diese Abschnitte, wenn P vom Mittelpunkt des Kreises die Entfernung $a = 82$ cm hat? **441**

---

schattens und des Mondschattens, wenn r den Erdhalbmesser bezeichnet, der Halbmesser der Sonne = 108·6 . r, der Halbmesser des Mondes = 0·273 . r, die (mittlere) Entfernung von Sonne und Erde = 23307 . r, von Sonne und Mond (Mond zwischen Sonne und Erde) = 23247 . r ist!

442 51. Man soll einen Kreis mit gegebenem Halbmesser zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte geht.*)

443 52. Man zeichne einen Kreis mit gegebenem Halbmesser, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt!

444 53. Ein Kreis ist zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte A, B geht und eine zur Richtung AB parallele Gerade berührt.

445 54. Zeichne einen Kreis, von dem eine Tangente und eine durch den Berührungspunkt gehende Sehne der Länge und der Lage nach gegeben sind.

446 55. Mit gegebenem Halbmesser ist ein Kreis zu zeichnen, der durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt.

447 †56. Ein Kreis ist zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt. (Benütze Nr. 42!)

448 57. Zwei Gerade schließen einen gegebenen Winkel ein; man soll einen Kreis mit gegebenem Halbmesser zeichnen der a) beide Gerade berührt, b) auf ihnen Sehnen von gegebener Länge herausschneidet.

449 58. Von einem Kreise ist ein Punkt, eine Tangente und der Halbmesser gegeben; der Kreis ist zu zeichnen.

450 59. Ein Kreis soll durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berühren.

451 60. Von einem Kreise sind zwei Tangenten und auf der einen der Berührungspunkt gegeben; der Kreis ist zu zeichnen.

452 61. Um einen gegebenen Mittelpunkt soll ein Kreis gezeichnet werden, der einen gegebenen Kreis berührt.

453 62. Ein Kreis soll einen gegebenen Halbmesser haben, durch einen gegebenen Punkt gehen und dabei einen gegebenen Kreis berühren.

454 †63. Gegeben ist ein Kreis und eine Gerade; es soll ein Kreis gezeichnet werden, der beide berührt, und zwar entweder den Kreis oder die Gerade in bestimmten Punkten.

Anleitung: Ist auf der Geraden der Berührungspunkt gegeben, so ziehe man im gegebenen Kreise jenen Durchmesser, der auf der gegebenen Geraden senkrecht steht, und verbinde seine Endpunkte mit dem gegebenen Berührungspunkte. Die so gezeichneten Geraden ergeben in ihren Schnittpunkten mit dem Kreise die gesuchten Berührungspunkte. — Ist dagegen der Berührungspunkt auf

*) Diese und die folgenden Aufgaben sind nach der Methode der „geometrischen Örter" zu lösen. Verwendung finden hauptsächlich die bisher bereits besprochenen geometrischen Örter mit passender Abänderung für den Kreis. Bei allen Aufgaben spielt die Determination eine wichtige Rolle.

dem Kreise gegeben, so verfährt man entweder ebenso oder man sucht mit Hilfe der Tangente im gegebenen Punkte sofort den Berührungspunkt auf der Geraden. — Im ersten Falle kann man die Lösung auch dadurch erhalten, daß man zuerst einen dem gesuchten Kreise konzentrischen Hilfskreis bestimmt, der durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises hindurchgeht. (Beweise.)

64. Mit gegebenem Halbmesser ist ein Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt. **455**

65. Mit gegebenem Halbmesser ist ein Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise berührt. **456**

66. Mit den gegebenen Radien r_1, r_2 und r_3 sind drei Kreise zu zeichnen, von denen immer einer die beiden anderen von außen berührt. **457**

67. Es sind zwei konzentrische Kreise und zwischen ihnen ein Punkt (oder eine Gerade) gegeben; man soll einen Kreis zeichnen, der die gegebenen Kreise berührt und durch den gegebenen Punkt geht (oder die gegebene Gerade berührt). **458**

X. Der Kreis und das Vieleck.

1. Man soll die Kreise konstruieren, die sich in, um und an ein Dreieck beschreiben lassen. **459**

2. Zeichne zu einem Dreiecke die drei „Ankreise"! Welche Rolle spielen für das Dreieck ihrer Mittelpunkte die drei Winkelsymmetralen des ursprünglichen Dreieckes? (Vgl. Nr. 423!) **460**

†3. Die Mittelpunkte der drei „Ankreise" sind gegeben. Wie kann man das zugehörige Dreieck konstruieren? **461**

4. Gegeben sind die Seiten a, b und c eines Dreieckes; man berechne den Halbmesser r des eingeschriebenen Kreises („Inkreises")! **462**

Anleitung: Verbindet man den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises mit den drei Eckpunkten, so ergeben sich drei Dreiecke mit der Höhe r und den Grundlinien a, b und c.

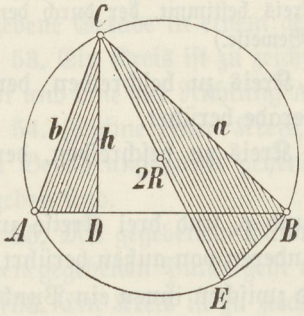
Es ist somit $r = \frac{2f}{u}$ oder $r = \frac{f}{s}$, wobei $s = \frac{a+b+c}{2}$ ist.

†5. Gegeben sind die Seiten a, b und c eines Dreieckes; man berechne den Halbmesser r_a jenes Kreises, der die Seite a und die Verlängerungen der Seiten b und c berührt! **463**

6. Gegeben sind die Seiten a, b und c eines Dreieckes; man berechne den Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises („Umkreises")! **464**

Anleitung: Nach Fig. 28 erhält man $\triangle$ ACD $\sim$ ECB (warum?) und daher $h : b = a : 2R$ und $R = \frac{a\,b}{2\,h}$ oder, indem man Zähler und Nenner mit c multipliziert, $R = \frac{a\,b\,c}{4\,f}$.

Fig. 28.



465 7. Man berechne r und R aus a = 66 cm, b = 120 cm, c = 78 cm!

466 8. Ebenso aus a = 672 mm, b = c = = 1200 mm.

467 †9. Man berechne r, r_a, r_b, r_c und R aus a = 34 cm, b = 30 cm, c = 16 cm!

468 †10. Ebenso aus a = 33 cm, b = 60 cm, c = 39 cm.

469 †11. Man soll zuerst an den Ergebnissen von Nr. 9 und dann allgemein den Nachweis für folgende Beziehungen erbringen.

$$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = f^2 \quad \ldots\ldots \quad \text{(I)},$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \quad \ldots \quad \text{(II)},$$

$$r_a + r_b + r_c - r = 4\,R \quad \ldots \quad \text{(III)}.$$

470 †12. Man berechne r, r_a, r_b, r_c und R aus a = 78 cm, b = 120 cm, c = 126 cm!

471 †13. Wie Nr. 12 mit a = 72 cm, b = 150 cm, c = 102 cm.

472 †14. Man berechne aus r_a = 84 cm, r_b = 96 cm und r_c = 112 cm der Reihe nach r, f, a, b, c, R!

473 †15. Wie Nr. 14 mit r_a = 28 cm, r_b = 120 cm, r_c = 168 cm.

474 †16. Man soll aus r = 42 cm, r_a = 54 cm, r_b = 336 cm die Größen r, R, f, a, b, c berechnen.

475 †17. Man soll für ein gleichseitiges Dreieck die Halbmesser r, R, r_a, r_b und r_c berechnen und zeigen, daß $r : R : r_a = 1 : 2 : 3$ ist.

476 18. a) Es ist um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu zeichnen und b) in einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, das einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

477 19. In einem Kreis ist ein Dreieck mit den Winkeln α, β und γ einbeschrieben. Welche Winkel schließt die in A gezeichnete Tangente mit der Dreieckseite BC ein?

478 20. Ein Dreieck ist zu konstruieren aus R, α, β.

†21. In einem rechtwinkligen Dreieck ist immer $r = \frac{1}{2}[(a+b)-c]$ **479**
und $r_c = \frac{u}{2}$. Allgemein, dann für $a = 12$ cm, $b = 9$ cm, $c = 15$ cm nachzuweisen.

22. Die drei Seiten eines Dreieckes sind $a = 26$ cm (111 cm), $b =$ **480**
$= 28$ cm (39 cm), $c = 30$ cm (120 cm). Berechne die Abschnitte, in die die Seiten durch die Berührungspunkte des Inkreises geteilt werden! Welche allgemein gültigen Formeln ergeben sich für diese Abschnitte?

23. Wie verhalten sich die Inhalte von zwei gleichseitigen Drei- **481**
ecken, wenn der dem einen umgeschriebene Kreis gerade so groß ist wie der dem anderen eingeschriebene Kreis?

†*24. Einem Dreiecke mit 240 cm² Inhalt ist ein Kreis eingezeichnet, **482**
dessen Berührungspunkt mit einer Dreieckseite diese in zwei Abschnitte von 6 cm und von 10 cm teilt. Wie groß sind die Dreieckseiten und der Radius des Inkreises und des Umkreises?

*25. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Höhe 24 cm und die **483**
Grundlinie um 6 cm länger als der Schenkel. Wie groß ist r und R?

†*26. Die Seiten eines gleichschenkligen Dreieckes sind aus $r = 12$ cm **484**
und $R = 25$ cm zu berechnen.

27. Was sind Sehnenvierecke, was Tangentenvierecke? — Welche **485**
Eigenschaften kommen ihnen zu?

28. Wie groß sind die Winkel eines Sehnenviereckes, wenn **486**
$\sphericalangle\, \alpha + \beta = 156°$ und $\sphericalangle\, \alpha + \delta = 198°$ ist?

29. Welchen Vierecken kann man Kreise einschreiben? Welchen **487**
Vierecken lassen sich Kreise umschreiben?

30. Man beweise, daß die Halbierungslinien der Winkel eines **488**
jeden Viereckes und ebenso jene seiner Außenwinkel immer ein Viereck bilden, dem sich ein Kreis umschreiben läßt!

31. Man berechne die Halbmesser der Kreise, die sich einem **489**
Quadrate mit der Seite a ein- und umschreiben lassen! (Allgemein, dann für $a = 2{\cdot}7$ dm.)

32. Die Seiten eines Rechteckes sind 35·2 cm und 11·4 cm; man **490**
berechne den Halbmesser des umschriebenen Kreises!

33. Man berechne den Halbmesser des in einem Rhombus mit den **491**
Diagonalen D und d eingeschriebenen Kreises, wenn a) $D = 40$ cm und $d = 30$ cm; b) $D = 156$ mm und $d = 65$ mm!

34. Von einem Rhombus ist der Inhalt 202·8 cm². Die kürzere **492**
Diagonale beträgt 13 cm; in den Rhombus ist ein Kreis gezeichnet und

Universitätsbibliothek Wien

in diesen ein Quadrat konstruiert. Es ist zu berechnen: a) die längere Diagonale; b) die Seite und die Höhe des Rhombus; c) der Inhalt des Quadrates; d) das Verhältnis der Inhalte von Rhombus und Quadrat.

493 35. Von einem gleichschenkligen Trapeze ist $a = 117$ dm, $b = 75$ dm, $c = d = 35$ dm; man berechne seinen Inhalt! Wenn man die Mittelpunkte je zweier benachbarter Trapezseiten verbindet, erhält man einen Rhombus; wie groß ist dessen Seite und Inhalt und wie groß ist der Halbmesser seines Inkreises?

494 36. Die Parallelseiten eines Trapezes sind $a = 42$ cm und $b = 14$ cm; die beiden anderen Seiten sind $c = 26$ cm und $d = 30$ cm; man soll seinen Inhalt berechnen, ferner untersuchen, ob sich diesem Trapeze ein Kreis einschreiben läßt, und im bejahenden Falle seinen Halbmesser bestimmen.

495 37. In einem Antiparallelogramme sind die parallelen Seiten $a = 440$ mm und $b = 280$ mm; die beiden anderen Seiten sind $c = d = 170$ mm; man berechne den Halbmesser des umschriebenen Kreises! [Die Aufgabe läßt sich entweder mittels ähnlicher Dreiecke oder durch Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes (Gleichung) oder durch Zurückführung auf die entsprechende Aufgabe für ein Dreieck lösen.]

496 38. In einem Deltoide ist die Seite $AC = AD = 10{\cdot}5$ cm, die Seite $BC = BD = 14$ cm; man kann ihm einen Kreis einschreiben und auch einen Kreis umschreiben. Wie groß ist der Inhalt, wie groß sind die Diagonalen und die Halbmesser der beiden Kreise?

497 39. Ein Kreis wird durch vier Punkte in vier Bogen geteilt, die sich wie $2 : 3 : 5 : 8$ verhalten. Wie groß sind die Winkel des dadurch bestimmten Sehnenviereckes und welche Winkel bilden seine Diagonalen mit den Viereckseiten? (Zeichnung!)

498 †*40. Von einem Sehnenviereck, das aus zwei über ihrer gemeinsamen Hypotenuse aufstehenden rechtwinkligen Dreiecken gebildet wird, unterscheiden sich die Katheten des einen um 17 cm (35 cm), jene des anderen um 5 cm (13 cm). Wie groß sind die Seiten, wenn der Umfang 66 cm (176 cm) ist?

499 †41. Wenn man von einem beliebigen Punkte des einem Dreiecke umschriebenen Kreises auf die drei Seiten des Dreieckes Senkrechte fällt, so liegen die Fußpunkte dieser Senkrechten auf einer Geraden. (Beweis.)

Anleitung: Entweder mit Hilfe des Satzes vom Sehnenviereck und den Sätzen über Peripheriewinkel oder mit Hilfe der letzteren Sätze allein.

†42. In einem Kreisquadranten ist ein Kreis einzuschreiben. (Auf Grund einer „geometrischen Analysis" und auf Grund einer „algebraischen Analysis".) **500**

†43. In einen gegebenen Kreissektor ist ein Kreis einzuschreiben. **501**

44. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, der zwei aneinanderstoßende Seiten eines Quadrates mit der Seite a berührt und durch die Gegenecke hindurchgeht? **502**

†45. In einen gegebenen Kreis sind a) drei, b) vier, c) sechs sich berührende kongruente Kreise einzuzeichnen. **503**

†46. Ein Kreis und ein Punkt A außerhalb ist gegeben; man soll eine Sekante durch den Punkt so ziehen, daß die Abstände des Punktes A von den beiden Schnittpunkten mit dem Kreise im Verhältnisse von 1 : 2 stehen. **504**

†47. Eine Strecke AB ist nach dem goldenen Schnitte zu teilen, das heißt, es soll sich ihr kleinerer Abschnitt zu dem größeren so verhalten wie der größere Abschnitt zu der ganzen Strecke. **505**

Anleitung: Man errichte (Fig. 29) im Endpunkte B auf AB eine Senkrechte, mache $OB = \frac{1}{2} AB$, beschreibe aus O mit OB einen Kreis und ziehe AO, wodurch man die Punkte C und D erhält. Ferner mache man $DX \parallel CB$, so ist X der gesuchte Teilungspunkt. (Beweis.) Vgl. auch Ergebnis von Nr. 505.

†48. Man beweise, daß die Seite des in einen Kreis eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes gleich ist dem größeren Abschnitte des nach dem goldenen Schnitte geteilten Halbmessers! **506**

Anleitung: Ist AB (Fig. 30) die Zehnecksseite und halbiert man $\sphericalangle ABO$, so ist $AB = BC = CO$ (vgl. Nr. 43). Wegen $\triangle ABC \sim ABO$ ist aber $AC : AB = AB : AO$ und $AC : CO = CO : AO$.

Fig. 29.

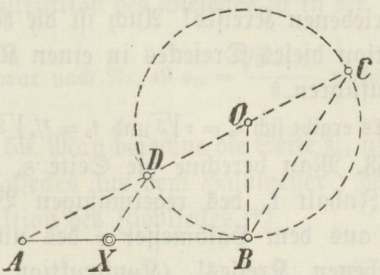
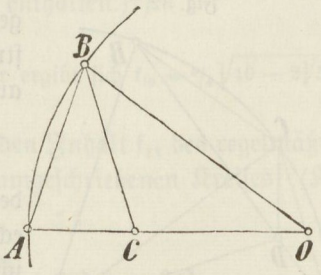


Fig. 30.



†49. Mit Benützung von Nr. 48 berechne man aus dem Halbmesser r eines Kreises die Seite s_{10} des eingeschriebenen Zehneckes! **507**

Anleitung: Aus obiger Proportion folgt $(r - s_{10}) : s_{10} = s_{10} : r$ und $s_{10}^2 + rs_{10} = r^2$; addiert man beiderseits $\left(\frac{r}{2}\right)^2$, so folgt $s_{10}^2 + rs_{10} + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$ oder $\left(s_{10} + \frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$ und daher $s_{10} + \frac{r}{2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}$, woraus endlich folgt:

$$s_{10} = -\frac{r}{2} + \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

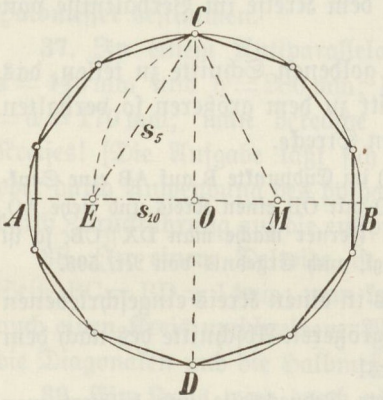
Für die Berechnung kann man diesem Ausdrucke die Form geben:

$$s_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot r.$$

508 †50. Auf Grund der ersten, in Nr. 49 angegebenen Formel läßt sich die in Fig. 31 ausgeführte Zehneckskonstruktion begründen. Wie?

Fig. 31.

509



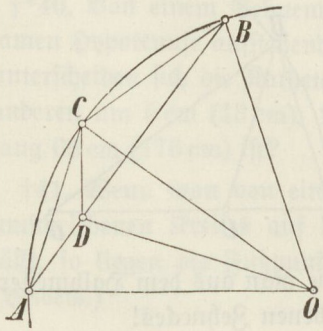
†51. In Fig. 31 ist nicht allein in EO die Zehnecksseite, sondern auch in CE die Fünfecksseite enthalten. Zum Nachweise dafür ist nur zu zeigen, daß $s_5^2 = s_{10}^2 + r^2$ ist.

Anleitung: Ist $AB = s_5$ (Fig. 32), $AC = CB = s_{10}$ und $\sphericalangle AOD = COD$, so folgt:

aus $\triangle BDO \sim ABO$ $BD = \frac{r^2}{s_5}$, aus $\triangle ADC \sim ACB$ $AD = \frac{s_{10}^2}{s_5}$; somit $AD + BD = \frac{s_{10}^2 + r^2}{s_5}$ und $s_5^2 = s_{10}^2 + r^2$.

510 52. Man berechne die Seite s_3 und den Inhalt f_3 des regelmäßigen Dreieckes aus dem Halbmesser r des umgeschriebenen Kreises! Auch ist die Konstruktion dieses Dreieckes in einen Kreis auszuführen.

Fig. 32.



Es ergibt sich $s_3 = r\sqrt{3}$ und $f_3 = \frac{3}{4}\sqrt{3} \cdot r^2$.

511 53. Man berechne die Seite s_4 und den Inhalt f_4 des regelmäßigen Viereckes aus dem Halbmesser r des umgeschriebenen Kreises! (Konstruktion des Vieleckes.)

Es ergibt sich $s_4 = r\sqrt{2}$ und $f_4 = 2r^2$.

†54. Man berechne die Seite s_5 und den Inhalt f_5 des regelmäßigen Fünfeckes aus dem Halbmesser r des umgeschriebenen Kreises! (Die Konstruktion des Vieleckes ist in Nr. 51 enthalten.) **512**

Anleitung: Aus $s_5^2 = s_{10}^2 + r^2$ und $s_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot r$ ergibt sich $s_5 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \cdot r$; für die Berechnung des Inhaltes muß man den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite bestimmen; es ergibt sich $f_5 = \frac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \cdot r^2$.

†55. Man berechne die Diagonale eines Fünfeckes a) aus dem Halbmesser, b) aus der Seite des Fünfeckes! **513**

Es ergibt sich $d = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} \cdot r$ und $d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot s_5$.

56. Man berechne die Seite s_6 und den Inhalt f_6 des regulären Sechseckes aus dem Halbmesser r des umgeschriebenen Kreises! (Konstruktion des Vieleckes.) **514**

Es ist $s_6 = r$ und $f_6 = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot r^2 = 2\, f_3$.

57. Man berechne die Seite s_8 und den Inhalt f_8 des regelmäßigen Achteckes aus dem Halbmesser r des umgeschriebenen Kreises! (Konstruktion des Vieleckes.)*) **515**

Es ist $s_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot r$ und $f_8 = 2\sqrt{2} \cdot r^2$.

†58. Man berechne die Seite s_{10} und den Inhalt f_{10} des regelmäßigen Zehneckes aus dem Halbmesser r des umgeschriebenen Kreises! (Die Konstruktion des Vieleckes ist in Nr. 50 enthalten.)*) **516**

Es war nach Nr. 49 $s_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot r$; ferner ergibt sich $f_{10} = \frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \cdot r^2$.

59. Man berechne die Seite s_{12} und den Inhalt f_{12} des regelmäßigen Zwölfeckes aus dem Halbmesser r des umgeschriebenen Kreises! (Konstruktion des Zwölfeckes.)*) **517**

Es ergibt sich $s_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot r$ und $f_{12} = 3\, r^2$.

*) Für die Berechnung des Inhaltes zerlege man das Vieleck in Deltoide!

518 †60. Die folgenden Figuren 33—36 enthalten Näherungskonstruktionen für das regelmäßige Siebeneck, Neuneck, Elfeck und Dreizehneck. Die Konstruktionen sind zu wiederholen.

Fig. 33.

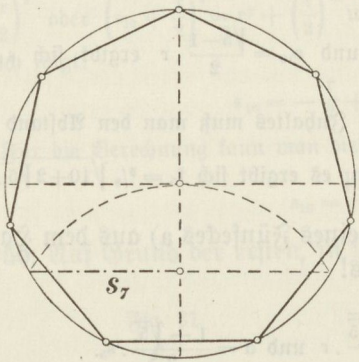
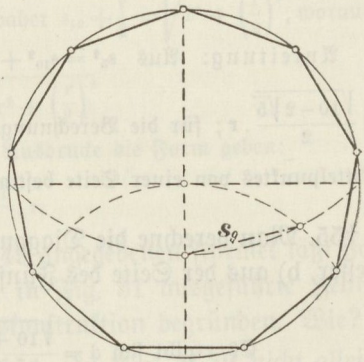


Fig. 34.



519 61. Man berechne aus dem Halbmesser r des Kreises und der Seite s_n des eingeschriebenen, regelmäßigen Vieleckes von der Seitenzahl n die Seite S_n des umgeschriebenen, regelmäßigen Vieleckes von gleicher Seitenzahl!

Man findet $S_n = \frac{r \cdot s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}$.

Fig. 35.

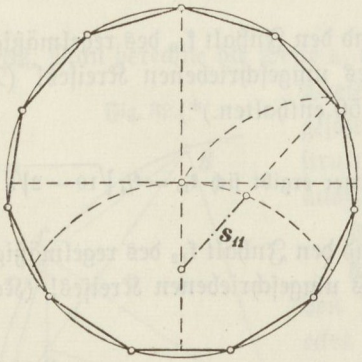
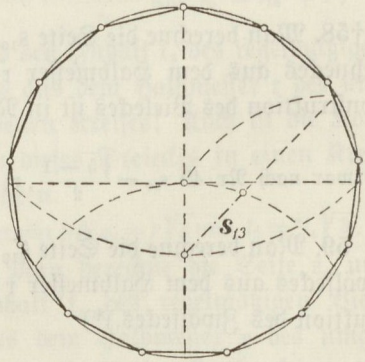


Fig. 36.



520 62. Man berechne aus dem Halbmesser r des Kreises und der Seite s_n des eingeschriebenen, regelmäßigen Vieleckes von der Seiten-

zahl n die Seite s_{2n} des eingeschriebenen, regelmäßigen Vieleckes von der doppelten Seitenzahl!

Man findet $s_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)}$.

63. Auf Grund des Rechnungsergebnisses in Nr. 62 stelle man die Formeln auf für das regelmäßige 24-Eck, 48-Eck usw., wenn $r = 1$ ist! **521**

64. Einem gegebenen Kreise ist je ein regelmäßiges Sechseck ein- und umgeschrieben. Wie verhält sich der Inhalt des zwischen beiden Vielecken liegenden Flächenraumes zum Inhalte des gleichseitigen Dreieckes, das dem gegebenen Kreise einbeschrieben werden kann? **522**

†65. Man berechne aus dem Halbmesser r die Inhalte der in Fig. 37 bis 39 gezeichneten Sternfiguren! (Vielecke höherer Art: das Sechseck zweiter Art [Fig. 37], das Achteck zweiter Art [Fig. 38], das Achteck dritter Art [Fig. 39].*) **523**

†66. Die „heronische Dreiecksformel" (vgl. Nr. 261, S. 29) ist auf rein geometrischem Wege abzuleiten. **524**

Fig. 37.

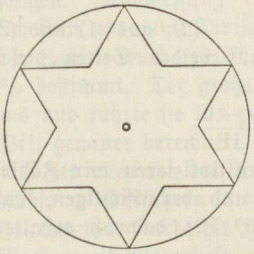


Fig. 38.

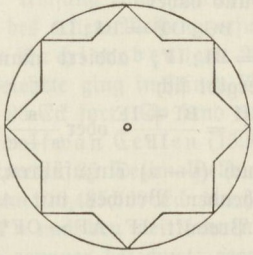
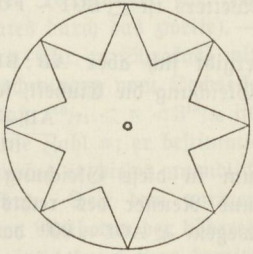


Fig. 39.

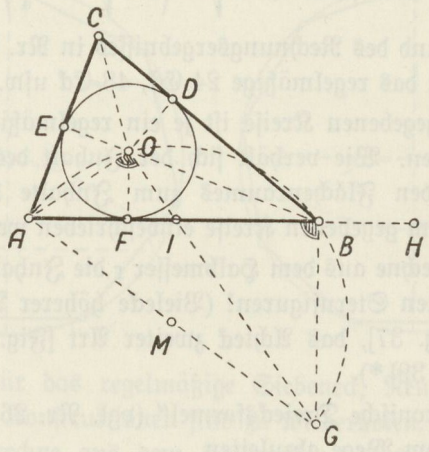


Anleitung: In dem Dreiecke ABC (Fig. 40) ist BC = a, AC = b, AB = c; man hat einen Kreis eingeschrieben und die Berührungspunkte D, E, F mit den Seiten bestimmt; es ist dann (Nr. 480) AF = AE = s — a, BF = BD = s — b, CD = CE = s — c, worin $s = \frac{a+b+c}{2}$. Man zieht nun BG ⊥ AB, OG ⊥ AO und verbindet A mit G. Der gesuchte Inhalt f des Dreieckes wäre nun offenbar durch das Produkt (s . r) gefunden. Um seinen Wert zu bestimmen, trachtet man s in die Figur zu bringen, weshalb man BH = CD = s — c macht. Es ist nun △ BAG ~ DCO (der Nachweis der Gleichheit der Winkel gelingt, weil

*) Vielecke zweiter, dritter, ... Art werden gezeichnet, indem man den ersten Eckpunkt nicht mit dem ersten folgenden, sondern mit dem zweiten, dritten, ... folgenden Eckpunkte verbindet.

$\sphericalangle BAG = 90° - \sphericalangle AGB = 90° - (\sphericalangle BGI + AGI) = 90° - (\sphericalangle BAO + ABO) = 90° - \left(\sphericalangle \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \sphericalangle \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle DCO$ ist) und daher AB : BG = CD : DO oder, wenn

Fig. 40.



man die inneren Glieder vertauscht und berücksichtigt, daß CD = BH und OD = OF ist: AB : BH = BG : OF (1).

Weiters ist $\triangle$ BGI ~ FOI und daher

BG : OF = BI : IF (2); aus (1) und (2) ergibt sich aber AB : BH = BI : IF; addiert man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Einheit, so ergibt sich

$$\frac{AB + BH}{BH} = \frac{BI + IF}{IF} \text{ oder } \frac{s}{s-c} = \frac{s-b}{IF};$$

um in diese Gleichung auch (s — a) einzuführen, multiplizieren wir Zähler und Nenner des rechtsstehenden Bruches mit AF und berücksichtigen, daß wegen $\sphericalangle AOI = 90°$ das Produkt $IF \cdot AF = OF^2 = r^2$ ist; dadurch erhalten wir $\frac{s}{s-c} = \frac{(s-b)(s-a)}{r^2}$, woraus $(s.r)^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ ist; somit ist die Formel $f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ auf geometrischem Wege gefunden.

XI. Kreismessung.

525 1. Inwiefern kann die Behauptung, daß das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises für alle Kreise einen konstanten Wert hat (der mit π bezeichnet werden soll), aus den Sätzen über die Ähnlichkeit gefolgert werden?

526 2. Zur näherungsweisen Bestimmung von π konstruiere man in einen Kreis ein regelmäßiges Sechseck und um den Kreis ein regelmäßiges Viereck und zeige, daß $3 < \pi < 4$ ist!

3. Auf welchem Wege ist die Berechnung der Zahl π geschehen? Welche Näherungswerte von π kommen in der Praxis in Betracht? *) **527**

4. Wie findet man den Umfang des Kreises? Wie berechnet man die Länge eines Kreisbogens von gegebenem Zentriwinkel?**) **528**

5. Der Durchmesser eines Wagenrades ist 96 cm; wie groß ist der Umfang des Rades? Wie oft dreht es sich, wenn der Wagen 1 km weit fährt? **529**

6. Der Minutenzeiger einer Taschenuhr ist 18 mm lang; welchen Weg beschreibt seine Spitze a) in einem Tage, b) in einem Jahre (zu 365 Tagen)? **530**

7. Der Durchmesser der Triebräder einer Lokomotive ist 1·8 m; wie oft drehen sie sich auf einer Fahrt von Wien bis Triest, wobei 589 km zurückgelegt werden? $\left(\pi = \frac{355}{113}\right)$ **531**

8. Das Schwungrad einer Dampfmaschine soll in der Minute 180 Umläufe machen und jeder Punkt des Umfanges soll dabei eine Geschwindigkeit von 20 m in der Sekunde haben; wie groß muß man den Halbmesser des Rades annehmen? **532**

---

*) Die Kreismessung ist sicherlich zunächst nur vom Experimente ausgegangen. (Ausmessung von Umfang und Durchmesser kreisrunder Walzen, Scheiben usw. und Division des ersten Messungsresultates durch das zweite). — Die Zahl π wurde zuerst von Archimedes (geb. 287 v. Chr. zu Syrakus) mit $^{22}/_{7}$ bestimmt. Der große Gelehrte ging in seinen Berechnungen vom Sechsecke aus und führte sie bis zum 96-Eck fort. So fand er, daß $3^{10}/_{71} < \pi < 3^{10}/_{70}$ ist. Weit genauer berechnete Ludolf van Ceulen (1596) die Zahl π; er bestimmte nach der Methode des Archimedes 35 Dezimalstellen, wobei er dieses unendlich mühsame Verfahren bis zum 10,485.760-Eck durchführte. Seit dem vorigen Jahrhundert wurde die Zahl π nach den weit bequemeren Methoden der höheren Mathematik wiederholt noch genauer berechnet; gegenwärtig kennt man bereits 700 Dezimalstellen der Zahl. Das später angeführte Verhältnis $^{355}/_{113}$, das die Zahl π auf 6 Dezimalen genau darstellt, stammt von Adrian Metius, der gegen Ende des 16. Jahrhunderts das Amt eines holländischen Festungsinspektors bekleidete. Einer seiner Söhne wird unter den Erfindern des holländischen Fernrohres genannt.

**) Hinsichtlich der Multiplikation mit π berücksichtige man die in dem Buche des Verfassers: „Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra usw.", Wien (im gleichen Verlage), gegebenen Winke. Als Nährungswert für π ist (wenn nicht ausdrücklich anderes bemerkt ist) immer 3·14159.. zu nehmen. Auch bei Divisionen durch π benütze man diesen Wert oder das Verhältnis von Metius $\pi = \frac{355}{113}$, welches sich dem Gedächtnisse leicht einprägt in der Form 113 | 355.

533 9. Wie groß ist der Halbmesser der Erde am Äquator in geographischen Meilen? (1 Äquatorgrad = 15 geographische Meilen.)

534 10. Wie groß ist der Erdhalbmesser in Kilometern? (u = = 40.000 km.)

535 11. New York liegt unter 40° 43′ 48″ nördl. Breite; wie weit ist es vom Äquator entfernt?

536 12. Wien liegt unter 48° 12′ 36″ nördl. Breite; wie weit ist es vom Äquator entfernt?

537 13. Stockholm und das Kap der guten Hoffnung liegen ungefähr auf demselben Meridiane. Wie weit sind sie voneinander entfernt, wenn die geographische Breite beider Orte ist: für Stockholm 59° 20′ 31″ nördl. Breite, für das Kap der guten Hoffnung 33° 56′ 3″ südl. Breite?

538 14. Wie lange würde ein Fußgänger, der im Tage 30 km zurücklegt, brauchen, um — wenn dies ausführbar wäre — von Wien aus bis zum Äquator der Erde zu gelangen? (Geographische Breite von Wien 48° 12′ 36″.)

539 15. Wie groß ist der Zentriwinkel, dessen Bogen gleich ist dem Halbmesser?

540 16. Man berechne die Länge eines Bogens, dessen Zentriwinkel 48° 35′ 37″ ist, wenn der Halbmesser des Kreises r = 2·38 m ist!

541 17. Wie groß ist der Umfang a) des 30., b) des 45., c) des 60. Parallelkreises der Erde?

542 18. Wie findet man den Inhalt eines Kreises? — Zeichne in einen Kreis ein Quadrat und lege in den vier Eckpunkten Tangenten an den Kreis. Wieso kann man aus dieser Figur schließen, daß der Kreisinhalt größer als das doppelte Quadrat, jedoch kleiner als das vierfache Quadrat des Halbmessers sein muß?

543 19. Ein kreisrunder Raum hat 1·302 m Durchmesser; wie groß ist sein Inhalt auf cm^2 genau?

544 20. Ein kreisrundes Tischchen hat 0·342 m Durchmesser; wie groß ist sein Inhalt auf cm^2 genau?

545 21. Man soll den Inhalt eines Kreises mit dem Halbmesser r = = 5·012 m auf cm^2 genau berechnen.

546 22. Die Reitbahn eines Zirkus hat 24 m Durchmesser; welchen Inhalt und Umfang hat sie? Wie oft muß ein Pferd im Kreise laufen, um 1 km zurückzulegen?

23. Von einer Dampfmaschine haben die Dampfzylinder 64 cm Durchmesser; wie groß ist die Kraft, mit der der Dampf den Kolben hebt, wenn der Dampf 6 Atmosphären Überdruck hat? (1 Atmosphäre = 1·033 kg pro 1 cm².) **547**

24. Man berechne den Umfang eines Kreises (auf cm genau), dessen Inhalt beträgt: a) 9852 cm², b) 8 m² 3468 cm², b) 20 m² 10 dm² 89 cm²! **548**

25. Wie groß ist der Durchmesser und Umfang eines Kreises, dessen Inhalt 1 m² beträgt? **549**

26. Welchen Durchmesser muß man einem kreisrunden Fenster geben, damit es ebensoviel Licht einlasse wie ein rechteckiges von 1·2 m Breite und 2 m Höhe? **550**

27. Man kann den Umfang des Kreises recht genau als Strecke darstellen (die graphische Rektifikation des Kreises ausführen), wenn man den dreifachen Kreisdurchmesser vermehrt um ein Fünftel der Seite des eingeschriebenen Quadrates. Wie ist dies zu begründen? **551**

†28. Der Umfang eines Kreises ist näherungsweise gleich der doppelten Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete der Durchmesser des Kreises und dessen andere Kathete der Überschuß des dreifachen Halbmessers über die halbe Seite des umgeschriebenen, regelmäßigen Sechseckes ist. Begründung?*) **552**

†29. Noch genauer als die Methoden der graphischen Rektifikation in Nr. 27 und 28 ist die folgende Konstruktion: man trage auf dem Durchmesser AB des Kreises über B hinaus $BC = \frac{1}{5} r$ und $BD = \frac{3}{5} r$ auf, ziehe in A die Tangente AM, trage auf dieser $AE = r$ und $AF = EC$ auf, ziehe endlich durch F eine Parallele zu ED, bis sie in G den verlängerten Durchmesser AB schneidet! Dann ist AG gleich der Peripherie des Kreises. Begründung? **553**

30. Um den Kreis in ein inhaltsgleiches Quadrat zu verwandeln (die graphische Quadratur des Kreises**) auszuführen), soll man **554**

*) Zuerst mitgeteilt von dem gelehrten polnischen Jesuiten Kochanski im Jahre 1865.

**) Die „Quadratur des Zirkels" gehört ebenso wie die Trisektion des Winkels" (vgl. Nr. 86) und die „Würfelverdopplung" (vgl. Nr. 891) zu den mit alleiniger Hilfe von Lineal und Zirkel unlösbaren Problemen, die die Geometer Griechenlands durch mehrere Jahrhunderte beschäftigten.

nach Albrecht Dürer (1525) fünf Viertel des Durchmessers als Diagonale des Quadrates annehmen. Wie groß wäre demnach π? — Ein ähnliches Verfahren enthält das älteste „mathematische Handbuch", das unter den Hyksoskönigen zwischen 2000 und 1700 v. Chr. von Ahmes niedergeschrieben wurde. Nach diesem soll die Quadratseite mit $^8/_9$ des Kreisdurchmessers angenommen werden. Welcher Wert von π würde dieser Annahme entsprechen?

555 †31. Ein ziemlich genaues Näherungsverfahren für die Quadratur des Kreises ist das folgende: Man ziehe den Durchmesser AB, dessen Mitte C sei, nehme $AD = {}^2/_5\,AC$, $CE = {}^1/_2\,BC$, verlängere AB um $BF = BE$ und beschreibe über AF und DE als Durchmesser nach verschiedenen Seiten Halbkreise, so wird die in C auf AB gezogene und durch die beiden Halbkreise begrenzte Senkrechte MCN die gesuchte Quadratseite sein. Begründung?

556 32. Wie verhalten sich die Umfänge und wie die Inhalte zweier Kreise, von denen einer einem Quadrate eingeschrieben ist, während der zweite demselben Quadrate umgeschrieben ist?

557 *33. Wird der Halbmesser eines Kreises um 15 cm verlängert, so wird sein Inhalt viermal so groß. Wie groß war der ursprüngliche Halbmesser?

558 *34. Zwei Kreise berühren sich von außen (von innen). Ihre Zentrale ist 12 cm (2 cm), die Summe ihrer Inhalte $74\,\pi$ cm^2 ($100\,\pi$ cm^2). Wie groß sind die beiden Halbmesser?

559 35. Um wieviel übertrifft der Kreis mit dem Halbmesser $r = 15$ cm die Fläche des eingeschriebenen Quadrates?

560 36. Wie kann man zeigen, daß der Kreis über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes gleich ist der Summe der Kreise über den beiden Katheten?

561 37. Die Differenz zwischen dem Umfange eines Kreises und seinem Halbmesser ist 0·090871 m; wie groß ist der letztere?

562 38. Drei Kreise haben als Halbmesser $r_1 = 9$ cm, $r_2 = 12$ cm, $r_3 = 36$ cm; wie groß ist Halbmesser, Umfang und Inhalt einer Kreisfläche, die ebenso groß ist wie alle drei gegebenen Kreisflächen zusammen?

563 39. Wie groß ist der Halbmesser, Umfang und Inhalt eines Kreises, der einem Rechtecke mit den Seiten 56 cm und 90 cm umgeschrieben ist?

40. Der einem gegebenen, regelmäßigen Sechsecke umgeschriebene Kreis sei in der Fläche doppelt so groß als der einem gegebenen, gleichseitigen Dreiecke umgeschriebene Kreis; wie verhält sich die Fläche des Sechseckes zu jener des Dreieckes? **564**

41. Ein Kreis hat gleichen Umfang mit einem regelmäßigen Sechsecke; wie verhalten sich ihre Inhalte? **565**

42. Einem gleichseitigen Dreiecke ist ein Kreis eingeschrieben und in letzteren ein Quadrat eingezeichnet. Wie verhalten sich die Umfänge und wie die Inhalte dieser drei Figuren? **566**

43. Die Inhalte zweier Kreise, deren Halbmesser sich wie 7 : 5 verhalten, unterscheiden sich um 600 cm²; wie groß sind die Inhalte beider Kreise? **567**

44. Um wieviel ist das Dreieck mit den Seiten a = 120 cm, b = 182 cm und dem Winkel $\gamma = 90°$ kleiner als der ihm umgeschriebene Kreis? Auch soll der Umfang des Kreises berechnet werden. **568**

45. Um wieviel ist das Dreieck mit den Seiten a = 102 cm, b = = 90 cm, c = 48 cm kleiner als der ihm umgeschriebene Kreis? **569**

46. Wie berechnet man einen Kreisring? Man berechne einen Kreisring mit den Halbmessern R und r und verwandle ihn in einen inhaltsgleichen Kreis; wie groß muß dessen Halbmesser genommen werden? (Berechnung und Konstruktion.) **570**

47. Die Fläche eines Kreisringes ist 7·7 cm², sein äußerer Umfang 13·2 cm; wie groß sind beide Halbmesser? ($\pi = 3^1/_7$.) **571**

48. Die Fläche eines Kreisringes ist 23·1 cm²; sein innerer Umfang beträgt 30·8 cm. Wie groß sind beide Halbmesser? ($\pi = 3^1/_7$.) **572**

49. Bei einem Kreisringe vom Inhalte von 16·94 dm² beträgt der Inhalt des ausgeschnittenen Teiles 38·5 dm²; wie groß sind beide Halbmesser? ($\pi = 3^1/_7$.) **573**

50. Der Inhalt eines Kreisringes von der Breite von 7 mm beträgt 20 cm² 2 mm²; wie groß sind beide Halbmesser? ($\pi = 3^1/_7$.) **574**

51. Die Seiten eines Dreieckes sind a = 30 cm, b = 26 cm, c = = 8 cm; man soll die Fläche berechnen, die zwischen den beiden Kreisen liegt, die sich dem Dreiecke ein- und umschreiben lassen. **575**

52. Ein kreisrunder und ein quadratischer Teich haben als Umfang je 50·24 m; beide sind von einem 2 m breiten Grasrande umgeben. Welche Grasfläche ist die größere und wie groß ist der Unterschied beider? ($\pi = 3·14$.) **576**

577 53. Man hat einem gleichseitigen Dreiecke von der Seite s einen Kreis eingeschrieben und einen zweiten umgeschrieben. Man berechne den Inhalt des entstandenen Kreisringes!

578 54. Über den Seiten eines gleichseitigen Dreieckes hat man nach außen Halbkreise errichtet. Wie verhält sich der Inhalt des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises zum Gesamtinhalt der drei erwähnten Halbkreise?

579 55. Über den Seiten eines regelmäßigen Sechseckes mit der Seite r sind Halbkreise nach außen beschrieben. Wie groß ist der zwischen diesen Halbkreisen und dem dem Sechsecke einbeschriebenen Kreise gelegene Flächenraum?

580 56. Ein Kreis mit dem Halbmesser $R = 30$ cm ist gegeben; wie groß muß der Halbmesser eines konzentrischen Kreises sein, damit die Fläche des entstandenen Kreisringes a) $^1/_2$, b) $^8/_9$ der Kreisfläche betrage?

581 57. Man hat den Durchmesser eines Kreises im Verhältnis von 3 : 5 geteilt und durch den Teilungspunkt einen zweiten konzentrisch gelegenen Kreis gezeichnet; wie verhält sich die Fläche des entstandenen Kreisringes zur Fläche des großen Kreises?

582 †58. Ein Kreis vom Halbmesser von 90 cm soll durch zwei konzentrische Kreise so geteilt werden, daß sich die Fläche des innersten Kreises zur Fläche des ersten Ringes und diese zur Fläche des zweiten Ringes verhalte wie 16 : 33 : 32; wie groß müssen die Halbmesser sein?

583 *59. Ein Kreis mit dem Halbmesser r ist durch einen konzentrischen Kreis so zu teilen, daß der entstehende Kreisring das geometrische Mittel zwischen dem Inhalt der äußeren und inneren Kreisfläche wird. Wie groß ist der Halbmesser des inneren Kreises zu wählen? (Vgl. Nr. 507.)

584 †60. Ein Kreis hat als Halbmesser 32 cm; man soll in und um ihn je einen konzentrischen Kreis derart zeichnen, daß die Breite der beiden entstehenden Kreisringe gleich ist und der innerste Kreis den gleichen Inhalt hat wie der äußerste Kreisring; wie groß sind die Halbmesser der beiden Kreise zu wählen?

585 61. Wie berechnet man den Inhalt eines Kreisausschnittes aus dem Halbmesser r des zugehörigen Kreises und dem Zentriwinkel α des Ausschnittes? (Allgemein, dann für $r = 3{\cdot}6$ cm, $\alpha = 48° 36'$.)

62. Wie groß ist der Zentriwinkel eines Kreisausschnittes, dessen Inhalt (r^2) Flächeneinheiten beträgt? **586**

63. Wie berechnet man den Inhalt eines Kreisabschnittes? **587**

64. Man hat die Endpunkte eines Viertelkreises vom Halbmesser $r = 12$ cm durch eine Sehne verbunden; wie groß ist der Kreisabschnitt? **588**

65. Man berechne den Kreisabschnitt, der in einem Kreise vom Halbmesser r dem Zentriwinkel α entspricht, für: **589**

a) $\alpha = 45°$; b) $\alpha = 60°$; c) $\alpha = 30°$; d) $\alpha = 120°$!

66. Man hat in einem Kreise vom Halbmesser r eine Sehne gezogen, die doppelt so lang ist als ihr Abstand vom Mittelpunkte; man berechne die beiden Flächenstücke, in die der Kreis zerfällt! (Allgemein, dann für $r = 8{,}32$ m.) **590**

67. Man hat von einem Punkte, der vom Umfang eines gegebenen Kreises gerade um die Größe des Halbmessers absteht, an den Kreis zwei Tangenten gezogen; wie groß ist die Fläche, die zwischen beiden Tangenten und dem die Berührungspunkte verbindenden kürzeren Kreisbogen liegt? (Allgemein, dann für $r = 6{,}12$ dm.) **591**

68. Man soll einen Kreis berechnen und konstruieren, der gleich ist a) der Summe, b) der Differenz zweier Kreise. **592**

69. Zwei Kreise mit den Halbmessern $r_1 = 10$ cm und $r_2 = 20$ cm berühren sich von außen und ein dritter Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Zentrale der beiden Kreise liegt und der beide Kreise von außen berührt, umschließt beide. Wie groß ist die von den drei Kreisen begrenzte Fläche? **593**

†70. Man soll den Umfang und den Inhalt der Ovallinie (ihre Konstruktion erhellt aus Fig. 41) aus dem Halbmesser AO des Hauptkreises berechnen. **594**

Fig. 41.

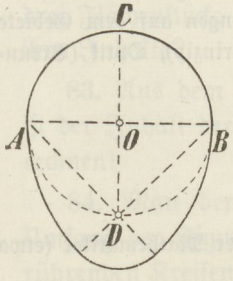
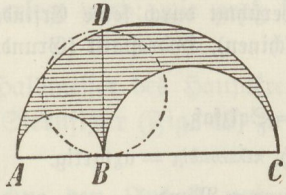


Fig. 42.

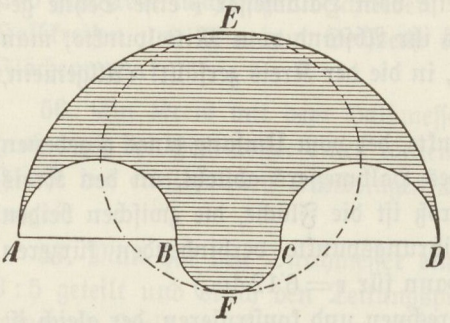


†71. Man zeichne eine Reihe sich gegenseitig berührender Kreise, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, und beschreibe zuletzt über alle einen einhüllenden Kreis; es soll gezeigt werden, daß sein Umfang so groß ist wie die Summe der Umfänge aller eingehüllten Kreise. **595**

596 72. Man berechne die in Fig. 42 schraffierte Fläche des Arbelos*) [Archimedes**)] aus den Halbmessern der beiden über AB und BC konstruierten Halbkreise und vergleiche sie mit dem Inhalte des über BD konstruierten Kreises! (Wann wird die Fläche des Arbelos ein Maximum?)

597 73. Man berechne die in Fig. 43 schraffierte Fläche des Salinon***) (Archimedes) aus den Halbmessern der drei über AB, BC und CD konstruierten Halbkreise und vergleiche sie mit dem Inhalte des über EF konstruierten Kreises! (Wann hat die Fläche des Salinon einen größten und wann einen kleinsten Wert?)

Fig. 43.



598 74. In welcher Beziehung steht die in Fig. 44 schraffierte Fläche des Pelekoides†) zur ganzen Kreisfläche? — In welcher Beziehung steht der Umfang des Pelekoides zum Umfange des ganzen Kreises?

599 75. In einem Kreise sind zwei aufeinander senkrechte Durchmesser AB und CD gezogen. Aus D wird mit DA als Halbmesser bis B ein Bogen beschrieben. Man berechne die zwischen diesem Bogen und dem Halbkreise ACB begrenzte Sichelfläche (Lunula††)) und vergleiche ihren Inhalt mit dem Inhalte des Dreieckes ABD (Hippokrates†††))!

---

*) Arbelos, griech. = Schustermesser.

**) Archimedes (287—212 v. Chr.), einer der hervorragendsten Gelehrten aller Zeiten, insbesondere berühmt durch seine Erfindungen auf dem Gebiete der Mechanik (einfache Maschinen), Hydrostatik (Grundprinzip), Optik (Brennspiegel), Mathematik usw.

***) Salinon, griech. = Salzfaß.

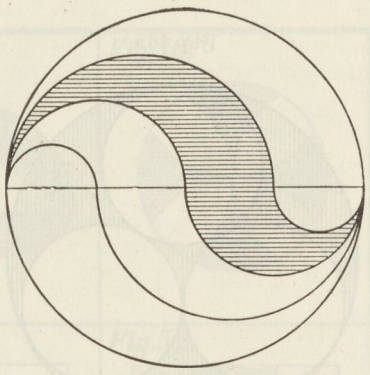
†) „Pelekoid", griech. πελεκοειδής = axtartig.

††) Lunula von lat. luna = Mond.

†††) Hippokrates von Chios, berühmter griechischer Mathematiker (etwa 440 v. Chr.).

76. Man legt um ein rechtwinkliges Dreieck einen Halbkreis und beschreibt auch über beide Katheten nach außen Halbkreise. Man vergleiche die Summe der beiden entstandenen Lunulen mit der Fläche des rechtwinkligen Dreieckes! 600

Fig. 44.



77. Einem Quadrate ist ein Kreis umgeschrieben und über seine vier Seiten sind nach außen Halbkreise konstruiert; man berechne die Summe der vier entstehenden Lunulen und vergleiche sie mit dem Inhalte des Quadrates! 601

78. Man führe die Aufgabe Nr. 77 für ein Rechteck mit der Länge $a = 45$ cm und $b = 24$ cm aus! 602

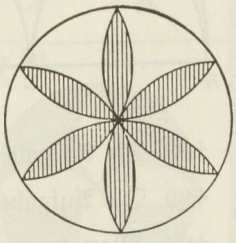
79. Um ein Dreieck mit den drei Seiten $a = 312$ cm, $b = 360$ cm und $c = 336$ cm ist ein Kreis geschlagen und über die drei Seiten sind nach außen Halbkreise konstruiert. Man berechne die Gesamtfläche der entstehenden drei Sicheln! 603

80. Wie groß ist der Halbmesser und der Inhalt eines in einen Viertelkreis eingezeichneten Kreises? 604

81. In einem Quadrate sind von zwei gegenüberliegenden Ecken mit der Quadratseite als Halbmesser Viertelkreise beschrieben; wie groß ist der Inhalt der von ihnen eingeschlossenen Linse? 605

82. Von zwei diametral einander gegenüberliegenden Punkten eines gegebenen Kreises hat man mit der Seite des eingeschriebenen Quadrates als Halbmesser Kreisbogen gezeichnet, wodurch der Kreis in drei Flächenstücke zerlegt wird; wie groß sind ihre Inhalte? 606

Fig. 45.



83. Aus dem Halbmesser des Hauptkreises ist der Inhalt der Sternfigur (Fig. 45) zu berechnen! 607

84. Man berechne den Inhalt und den Umfang der Figur, die zwischen drei kongruenten, sich von außen berührenden Kreisen gelegen ist! 608

609 †85. In einen gegebenen Kreis sind drei kongruente Kreise einzuzeichnen. (Fig. 46 a.) (Konstruktion und Berechnung der freibleibenden Fläche des gegebenen Kreises.)

Fig. 46 a

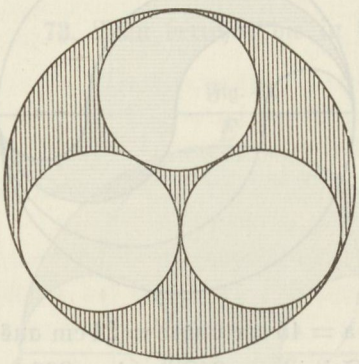
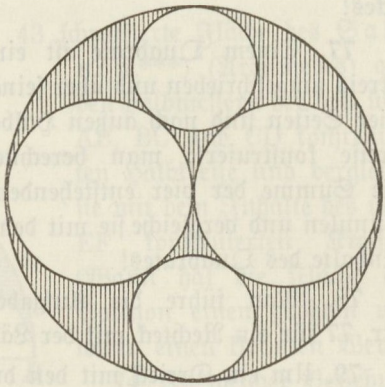
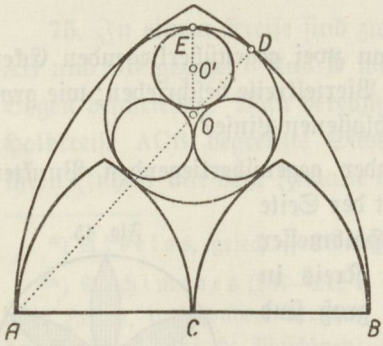


Fig. 46 b.



610 †86. Wie konstruiert man mit Zirkel und Lineal über einer gegebenen Basis AB (Fig. 47) den Oberteil eines zweiteiligen gotischen Spitzbogenfensters mit „gleichseitigen Spitzbögen", „Scheitelkreis" und „Dreipaß"? Auch sind die Halbmesser aller in Betracht kommenden Kreisbogen durch AB = a auszudrücken.

Fig. 47.



611 †87. In ein gleichseitiges Dreieck sind drei kongruente, sich von außen paarweise berührende Kreise einzuzeichnen. Wie groß ist ihr Halbmesser?

612 †88. Die Aufgabe Nr. 85 ist mit vier Kreisen durchzuführen.

613 †89. Die Aufgabe Nr. 85 ist mit sechs Kreisen durchzuführen.

614 †90. Man berechne die in Fig. 46 b schraffierte Fläche aus dem Halbmesser des Hauptkreises! (Allgemein, dann für r = 12 cm. — Konstruktion.)

91. Über die vier Seiten eines Quadrates sind nach innen Halb- **615**
kreise beschrieben; wie groß ist der Inhalt der im Innern entstehenden Sternfigur?

Fig. 49.

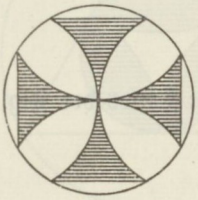


Fig. 48.

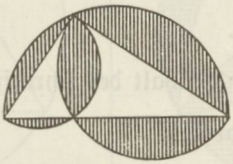


Fig. 50.

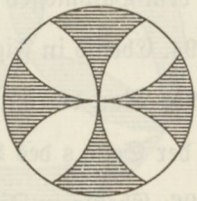


Fig. 51.

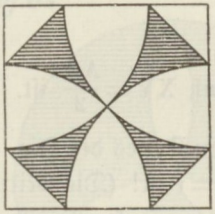


Fig. 53.

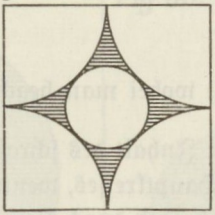


Fig. 52.

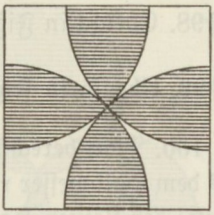


Fig. 56.

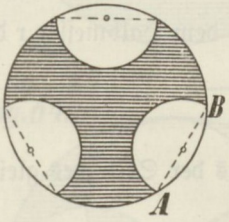


Fig. 54.

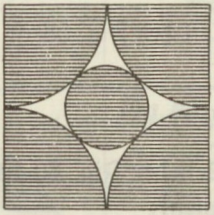


Fig. 57.

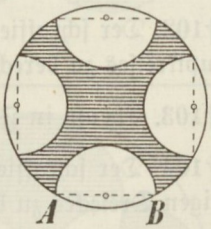


Fig. 58.

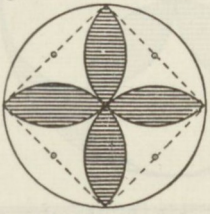


Fig. 55.

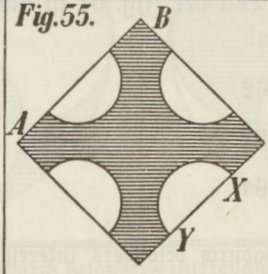
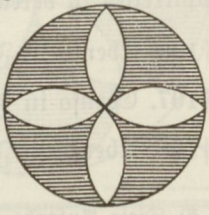


Fig. 59.



616 92. Von dem rechtwinkligen Dreiecke (Fig. 48) sind die beiden Katheten 105 cm und 140 cm. Man berechne den Inhalt der schraffierten Fläche!

617 †93. Man berechne den Inhalt des schraffierten Teiles der Fig. 49 aus dem Halbmesser r des Hauptkreises!

618 †94. Ebenso in Fig. 50.

619 †95. Man berechne den Inhalt des schraffierten Teiles der Fig. 52 aus der Seite s des Quadrates!

620 †96. Ebenso in Fig. 51.

621 †97. Ebenso in Fig. 53.

622 †98. Ebenso in Fig. 54.

623 †99. Ebenso in Fig. 55, wobei man beachte, daß $XY = \frac{AB}{2}$ ist.

624 100. Man berechne den Inhalt des schraffierten Teiles der Fig. 56 aus dem Halbmesser r des Hauptkreises, wenn $AB = r$ ist! (Die Mittelpunkte der kleinen Halbkreise sind durch kleine Ringe markiert.)

625 101. Ebenso in Fig. 57, wobei $AB = r$ ist.

626 †102. Der schraffierte Teil der Fig. 58 ist aus dem Halbmesser r des Hauptkreises zu berechnen!

627 †103. Ebenso in Fig. 59.*)

628 †104. Der schraffierte Teil der Fig. 60 ist aus der Seite des gleichseitigen Dreieckes zu berechnen!

629 †105. Der schraffierte Teil der Fig. 61 ist aus dem Halbmesser r des Hauptkreises zu berechnen!

630 †106. Ebenso in Fig. 62.

631 †107. Ebenso in Fig. 63.

632 †108. Ebenso in Fig. 64.

---

*) Diese Aufgabe ist dadurch besonders interessant, daß in ihr eine von Kreisbogen begrenzte Figur auftritt, deren Inhalt rational ist. (Vgl. Nr. 75—78!)

Fig. 60.

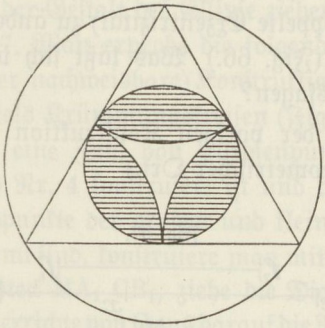


Fig. 62.

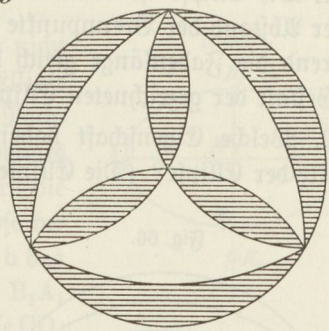


Fig. 61.

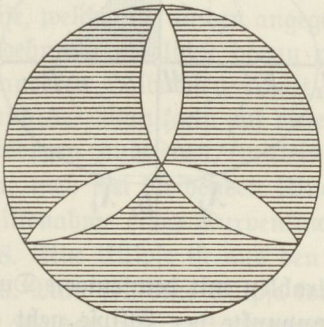


Fig. 63.

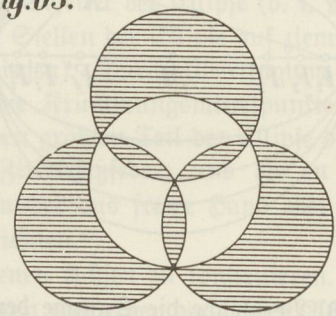


Fig. 64.

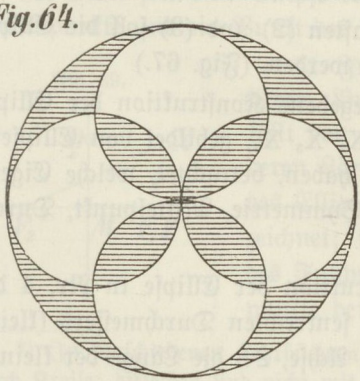
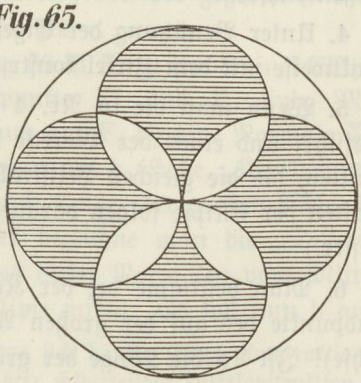


Fig. 65.



*) Diese Aufgabe ist dadurch besonders interessant, daß in derselben eine von Kreisbogen begrenzte Figur auftritt, deren Inhalt rational ist. (Vgl. Nr. 75—78!)

634 1. Die Ellipse ist mittels eines Bindfadens zu zeichnen;*) dabei ist der Abstand der Brennpunkte (die doppelte Exzentrizität) zu ändern, während die Fadenlänge gleich bleibt. (Fig. 66.) Was läßt sich über die Gestalt der gezeichneten Ellipsen aussagen?

635 2. Welche Eigenschaft haben nach der vorigen Konstruktion alle Punkte der Ellipse? (Die Ellipse als geometrischer Ort.)

Fig. 66.

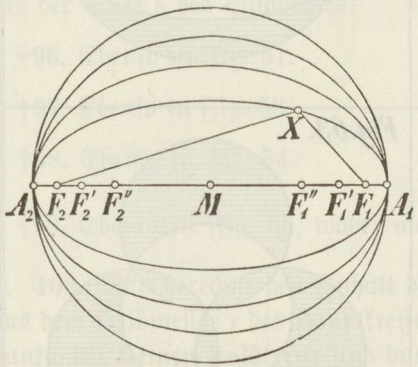
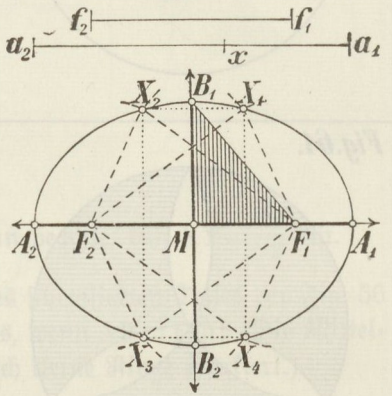


Fig. 67.



636 3. Vergleiche die Summe der Leitstrahlen mit demjenigen Durchmesser der Ellipse, der durch die Brennpunkte der Ellipse geht (der großen Achse)!

637 4. Unter Benützung der Eigenschaften (2) und (3) soll die Ellipse punktweise mit dem Zirkel konstruiert werden. (Fig. 67.)

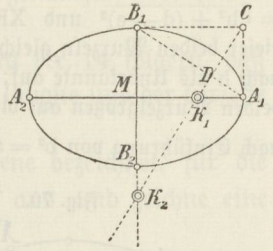
638 5. Wenn man die in Nr. 4 angegebene Konstruktion der Ellipse ausführt und eines der Vierecke $X_1\ X_2\ X_3\ X_4$, gebildet von Ellipsenpunkten, die die gleichen Leitstrahlen haben, betrachtet, welche Eigenschaften der Ellipse folgen daraus? (Symmetrie, Mittelpunkt, Durchmesser.)

639 6. Man bestimme bei der Konstruktion der Ellipse in Nr. 4 die Endpunkte des auf der großen Achse senkrechten Durchmessers (kleine Achse)! Ist 2a die Länge der großen Achse, 2b die Länge der kleinen

*) Die Fadenkonstruktion der Ellipse wird wohl zumeist nur an der Schultafel geübt werden; sie gelingt indessen auch ganz gut auf einem Reißbrette.

Achse, e die Länge der Exzentrizität der Ellipse, so ist zu zeigen, das $e^2 = a^2 - b^2$ ist; was für ein Schluß läßt sich daraus hinsichtlich der Gestalt der Ellipse ziehen?

Fig. 68.



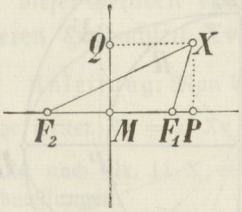
640 7. Man erprobe die folgende (hier nicht näher nachweisbare) Konstruktion der Ellipse mittels Krümmungskreisen (Fig. 68)! Nachdem eine Zahl von Ellipsenpunkten bereits nach Nr. 4 konstruiert ist und besonders die Endpunkte der großen und kleinen Achse bestimmt sind, konstruiere man mit a und b das Rechteck $MA_1\,CB_1$, ziehe die Diagonale B_1A_1 und errichte von C aus darauf die Normale CD; sie schneidet die Achsenrichtungen in den Mittelpunkten K_1 und K_2 der sogenannten Krümmungskreise für die Scheitel der Ellipse (d. i. jener Kreise, welche sich an den angegebenen Stellen der Ellipse auf ziemliche Ausdehnung möglichst genau anschmiegen). Durch Übertragung auf die anderen Halbachsen erhält man die Krümmungsmittelpunkte für B_2 und A_2. Man kann auf diese Art den größten Teil der Ellipse durch Kreisbogen ausziehen (mittels der Zirkelreißfeder) und die in der Mitte noch frei bleibenden Stücke entweder aus freier Hand oder mit Zuhilfenahme eines Kurvenlineals zeichnen.*)

641 8. Eine Ellipse ist aus den gegebenen Achsen zu konstruieren.

642 9. Man soll eine Ellipse konstruieren aus einer der beiden Achsen und aus den beiden Brennpunkten.

643 10. Man soll eine Ellipse konstruieren, von der gegeben sind die Brennpunkte und ein Punkt des Umfanges.

Fig. 69.



644 11. In Fig. 69 ist X ein Punkt einer Ellipse, deren Brennpunkte F_1 und F_2 sind. Man fällt von X aus auf F_1F_2 eine Normale XP, deren Länge man mit h (Höhe, „Überhöhung" des Ellipsenpunktes über der großen Achse) bezeichnet; ferner bezeichne man die „Distanz" des Fußpunktes dieser Normalen vom Mittelpunkte der Ellipse mit d. Es soll nun h aus-

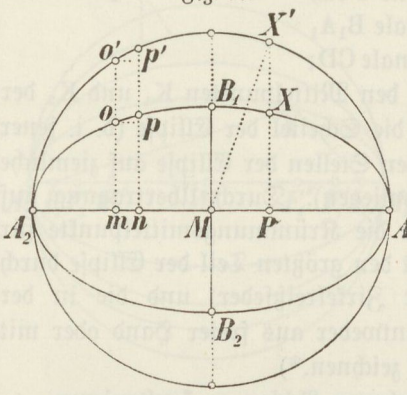
*) In verschiedenen Lehrbüchern finden sich häufig Ellipsenkonstruktionen durch Kreise; dieselben sind nicht mit der hier mitgeteilten Hilfskonstruktion zu verwechseln; sie liefern nur ellipsenähnliche Kurven und niemals korrekte Ellipsen. (Vgl. Nr. 868.)

gedrückt werden durch d, ferner durch die halbe große Achse a und die halbe kleine Achse b.

Anleitung: Man benütze die zwei rechtwinkligen Dreiecke XPF_1 und XPF_2 und drücke XF_1 und XF_2 durch h, a, d und e aus; man erhält $XF_1 = \sqrt{h^2 + (d-e)^2}$ und $XF_2 = \sqrt{h^2 + (d+e)^2}$; dann setze man die Summe dieser beiden Wurzeln gleich 2 a (nach Nr. 3) und löse die so erhaltene Gleichung nach h als Unbekannte auf; dazu empfiehlt es sich, vor dem Quadrieren eine der beiden Wurzelgrößen auf die rechte Seite der Gleichung zu schaffen. Man erhält nach Einführung von $b^2 = a^2 - e^2$ sehr leicht $h = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - d^2}$.

645

Fig. 70.

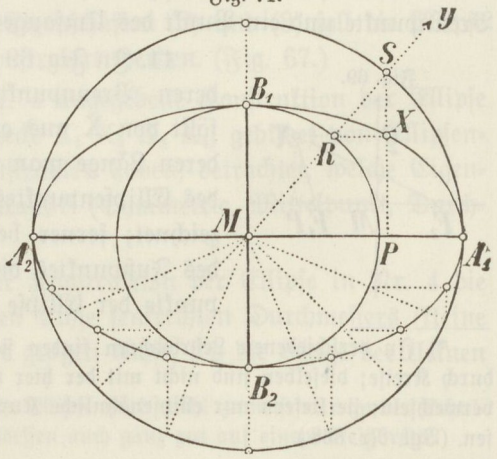


12. Man konstruiere über der großen Achse einer Ellipse einen Kreis (Fig. 70) und vergleiche die „Überhöhung h eines Punktes X der Ellipse" mit der „Überhöhung H desjenigen Punktes X' der Kreisperipherie", der gerade über X liegt; es findet sich $h : H = b : a$; dieser Satz ist zu beweisen und in Worte zu kleiden!

646

13. Man ziehe in einem Kreise einen Durchmesser und senkrecht darauf eine Schar paralleler Sehnen; man teile ferner jede Halbsehne in 2, 3, 4 ... gleiche Teile und verbinde die entsprechenden Teilungspunkte durch einen stetigen Linienzug! Was für Linien erhält man?

Fig. 71.



647 †14. Man begründe die folgende, aus der oberen Hälfte der Fig. 71 ersichtliche Ellipsenkonstruktion: Über die beiden Achsen der Ellipse sind Kreise beschrieben. Man ziehe einen beliebigen Halbmesser My; von den beiden Schnittpunkten R und S des Halbmessers My mit den zwei vorhin gezeichneten Kreisen

ziehe man zwei Parallele zu den Achsenrichtungen; sie durchschneiden sich in einem Punkte X der Ellipse. In der unteren Hälfte der Fig. 71 ist diese Konstruktion mehrmals durchgeführt. Man begründe diese Ellipsenkonstruktion! Warum ist sie die genaueste aller punktweisen Ellipsenkonstruktion?

†15. Wie kann man aus der Konstruktion in Nr. 14 folgern, daß die große und die kleine Achse der Ellipse der längste und der kürzeste Durchmesser der Kurve sind? **648**

16. Als „Ellipse schönster Form" wird jene bezeichnet, für die $e = b$ ist. Man drücke diese Größe durch a aus und zeichne eine solche Ellipse. **649**

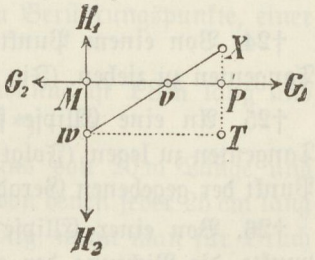
†17. Eine Ellipse ist aus den Richtungen der Achsen, dem Verhältnisse ihrer Längen und einem Punkte der Peripherie zu konstruieren. **650**

18. Wie läßt sich mit Hilfe des in Nr. 12 mitgeteilten Satzes die Fläche der Ellipse berechnen? **651**

Anleitung: Man zerlege nach Fig. 70 die Ellipse und den darüber konstruierten Kreis in sehr schmale Rechteck-Streifen m n o p und m n o′ p′ und vergleiche ihre Inhalte f und f′; es ergibt sich $f : f' = b : a$, woraus man folgern kann, daß sich der Inhalt der ganzen Ellipse zum Inhalte des über der großen Achse als Durchmesser beschriebenen Kreises verhält wie $b : a$; es folgt daraus $F = a\,b\,\pi$. (Was ergibt sich für $a = b$?)

†19. Auf zwei sich rechtwinklig durchschneidenden Geraden G_1G_2 (Fig. 72) und H_1H_2 gleite eine Gerade so, daß zwei Punkte v und w dieser Geraden sich auf den beiden Geraden G_1G_2 und H_1H_2 bewegen; es ist zu zeigen, daß jeder Punkt X dieser Geraden eine Ellipse beschreibt, deren Halbachsen Xv und Xw sind. **652**

Fig. 72.



Anleitung: Man benütze die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke XPv und XTw, setze ferner $Xw = a$, $Xv = b$, $MP = d$, so erhält man $XP = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - d^2}$; es ist dann nach Nr. 11 X ein Punkt einer Ellipse mit den früher angegebenen Abmessungen.

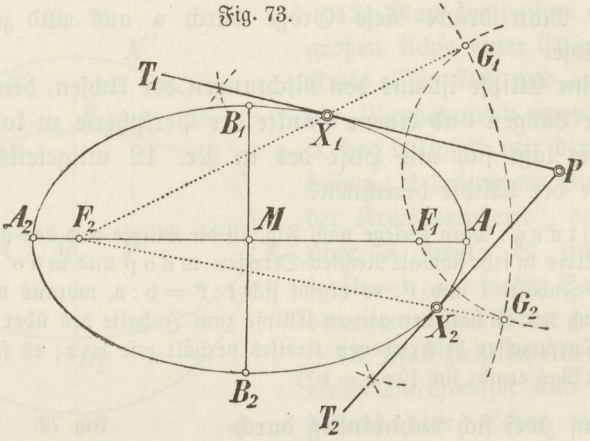
†20. Inwieferne kann die in Nr. 19 mitgeteilte Tatsache zur mechanischen Konstruktion der Ellipse a) mittels eines Papierstreifens (oder mittels des Tafellineales), b) mittels eines Ellipsographen Anwendung finden? **653**

654 †21. Man konstruiere eine Ellipse aus einer der beiden Achsen und einem Punkte des Umfanges, der innerhalb des Streifens liegen muß, den zwei in den Endpunkten der Achse auf diese errichtete Senkrechte bilden!

655 22. Man beweise, daß die Tangente in einem beliebigen Punkte der Ellipse den Winkel der beiden Leitstrahlen halbiert!*)

656 23. Man konstruiere die Tangente der Ellipse in einem gegebenen Punkte!

Fig. 73.



657 †24. Von einem Punkte P außerhalb einer Ellipse sind an diese Tangenten zu ziehen. (Fig. 73.)

658 †25. An eine Ellipse sind parallel zu einer gegebenen Geraden Tangenten zu legen. (Folgt aus Fig. 73, wenn P als der unendlich ferne Punkt der gegebenen Geraden angenommen wird.)

659 †26. Von einer Ellipse ist eine Tangente mit dem Berührungspunkte, die Richtung der großen Achse und ein Brennpunkt gegeben; man zeichne die Ellipse!

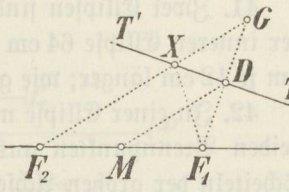
660 †27. Es ist zu beweisen, daß der Fußpunkt jedes Lotes, welches man von einem Brennpunkte auf eine Tangente einer Ellipse fällt, in dem Kreise liegt, den man der Ellipse umschreiben kann (Scheitelkreis).

*) Verwertung in der Optik usw. — Die folgenden Konstruktionsaufgaben sind jedesmal auch für eine Ellipse mit $2e = 0$ (Kreis) zu spezialisieren und die Übereinstimmung der Konstruktion am Kreise mit denen der Ellipse zu konstatieren.

Anleitung: Wird der Leitstrahl F_2X (Fig. 74) um die Länge F_1X bis G verlängert, so ist $F_1G \perp TT'$ und $MD = \frac{1}{2}F_2G = a$.

†28. Eine Ellipse aus der Achse und den Brennpunkten ist dadurch zu konstruieren, daß man beliebig viele einhüllende Tangenten zieht. **661**

Fig. 74.



†29. Die Aufgabe Nr. 24 soll auf Grund des Satzes in Nr. 27 gelöst werden. **662**

†30. Ebenso die Aufgabe Nr. 25. **663**

†31. Von einer Ellipse sind gegeben eine Tangente (ohne den Berührungspunkt) und die beiden Brennpunkte; man zeichne die Ellipse! **664**

†32. Von einer Ellipse ist die große Achse und eine Tangente gegeben; die Ellipse ist zu zeichnen. **665**

†33. In ein Dreieck ist eine Ellipse zu zeichnen, von der ein (im Innern des Dreieckes gelegener) Brennpunkt gegeben ist. **666**

†34. Eine Ellipse ist zu zeichnen, von der gegeben ist ein Brennpunkt, eine Tangente mit dem Berührungspunkte und die Länge der großen Achse. **667**

†35. Ebenso aus einem Scheitel der großen Achse, einem Brennpunkt und einer Tangente. **668**

†36. Ebenso aus einer Tangente mit dem Berührungspunkte, einer zweiten Tangente und einem Brennpunkte. **669**

37. Der Boden einer elliptischen Badewanne ist 1·8 m lang und 0·8 m breit; wie groß ist sein Flächeninhalt? *) **670**

38. Der Boden eines elliptischen Bassins von 20 m Länge und 15 m Breite soll mit Ziegeln belegt werden, von denen jeder 25 cm lang und 12 cm breit ist. Wieviel Steine sind nötig, wenn man für Bruch und Verlust 6% zurechnet? **671**

39. In einer Ellipse ist die große Achse 194 cm, die Exzentrizität 65 cm; aus der Ellipse ist ein möglichst großer Kreis zu schneiden; wieviel beträgt der Abfall? **672**

*) Die Berechnung des Umfanges einer Ellipse kann nur mit Hilfe der höheren Mathematik ausgeführt werden. Für Ellipsen, deren Exzentrizität sehr klein ist — aber nur für solche —, kann man an Stelle des Ellipsenumfanges näherungsweise den Umfang eines Kreises setzen, dessen Halbmesser gleich ist dem arithmetischen Mittel der beiden Halbachsen der Ellipse.

673 40. In ein Rechteck, deſſen Länge 4·8 dm und deſſen Breite 3·2 dm beträgt, iſt eine möglichſt große Ellipſe eingezeichnet; um wieviel iſt ihr Inhalt kleiner als der Inhalt des Rechteckes?

674 41. Zwei Ellipſen ſind konzentriſch, und zwar betragen die Achſen der inneren Ellipſe 64 cm und 48 cm; die Halbachſen der größeren ſind um je 12 cm länger; wie groß iſt die Fläche des elliptiſchen Ringes?*)

675 42. In einer Ellipſe mit den Achſen 34 cm und 16 cm ſind von den beiden Brennpunkten aus Kreiſe beſchrieben, die die Ellipſe in den Scheiteln der großen Achſe von innen berühren; vom Mittelpunkte der Ellipſe aus iſt ein Kreis beſchrieben, der die Ellipſe in den Scheiteln der kleinen Achſe berührt. Wenn nun die zwiſchen der Ellipſe und den drei Kreiſen gelegene Figur wieder einem Kreiſe inhaltsgleich iſt, wie groß iſt deſſen Halbmeſſer?

676 †43. Von einer Ellipſe iſt die große Achſe gleich 70 cm, die Exzentrizität iſt 28 cm; es wird über der kleinen Achſe ein Kreis beſchrieben und in die beiden ſo entſtehenden Sichelflächen je ein Kreis von möglichſter Größe eingezeichnet. Wieviel von der Fläche der Ellipſe laſſen die drei Kreiſe unbedeckt?

677 †44. Die große Achſe einer Ellipſe iſt 120 cm lang, die kleine Achſe mißt 90 cm. Die vier Scheitel der Ellipſe ſind geradlinig verbunden und in den entſtehenden Rhombus iſt ein Kreis eingezeichnet; wie groß iſt die zwiſchen den beiden krummen Linien liegende Fläche?

678 45. Die Ellipſe iſt der geometriſche Ort aller Punkte, für die die Summe der Abſtände von zwei feſten Punkten — den Brennpunkten — (oder die Summe der Leitſtrahlen) gleich iſt einer konſtanten Strecke; es ſoll ähnlich wie in Nr. 4 punktweiſe der geometriſche Ort aller Punkte beſtimmt werden, für welche die Differenz der Abſtände von zwei feſten Punkten (oder die Differenz der Leitſtrahlen) gleich einer konſtanten Strecke iſt. Dieſer geometriſche Ort iſt die Hyperbel. (Fig. 75.)

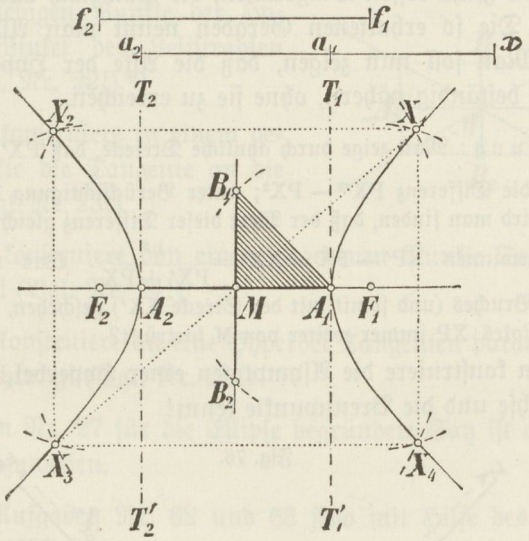
679 46. Man vergleiche die Differenz der Leitſtrahlen mit jenem Durchmeſſer der Hyperbel, der durch die Brennpunkte geht (der reellen Achſe)! (Vgl. Nr. 3!)

680 47. Man führe die in Nr. 5 für die Ellipſe getroffene Überlegung für die Hyperbel aus!

*) Es ſei hier darauf hingewieſen, daß die Breite des elliptiſchen Ringes nicht überall die gleiche iſt.

48. Man errichte in den Endpunkten der reellen Achse der Hyperbel Senkrechte; können Punkte der Hyperbel in dem Flächenstreifen zwischen beiden Parallelen liegen? Was folgt daraus hinsichtlich der Gestalt dieser Kurve? (Fig. 75.) **681**

Fig. 75.



49. Wie läßt sich durch die punktweise Konstruktion der Hyperbel der Nachweis liefern, daß die Äste der Hyperbel sich immer weiter bis in die Unendlichkeit öffnen? **682**

50. Man durchschneide die Streckensymmetrale der reellen Achse von den Scheiteln einer Hyperbel aus mit der halben Exzentrizität als Halbmesser! Man erhält dadurch die Endpunkte B_1B_2 der Nebenachse. Warum mag diese Achse als die „imaginäre" Achse bezeichnet werden? (Fig. 75.) Man beweise die Beziehung $e^2 = a^2 + b^2$! **683**

51. Man konstruiere eine Hyperbel a) aus den beiden Achsen, b) aus einer Achse und den Brennpunkten! **684**

52. Man konstruiere eine Hyperbel, für die $a = b$ ist. Diese Hyperbel heißt gleichseitige Hyperbel; sie spielt unter den Hyperbeln eine ähnliche Rolle wie der Kreis unter den Ellipsen. **685**

53. Man konstruiere eine Hyperbel aus den Brennpunkten und einem Punkte des Umfanges! **686**

687 †54. Man berechne ähnlich wie in Nr. 11 die „Überhöhung eines Hyperbelpunktes über der reellen Achse"!

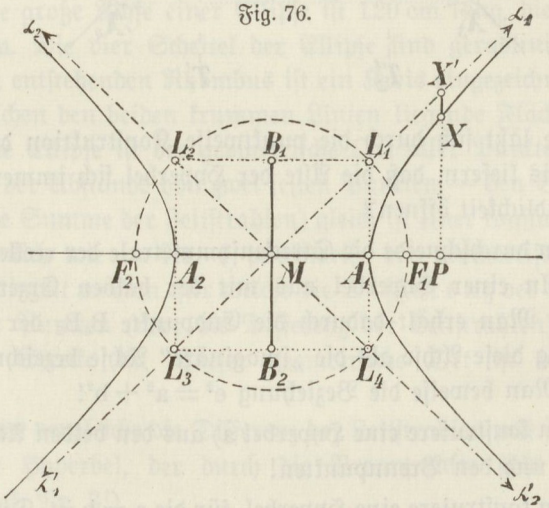
Man findet $h = \frac{b}{a}\sqrt{d^2 - a^2}$.

688 †55. Man zeichne über den Achsen der Hyperbel ein Rechteck $L_1L_2L_3L_4$ (Fig. 76) und ziehe dessen Diagonalen, die man nach allen Richtungen verlängert! Die so erhaltenen Geraden nennt man Asymptoten der Hyperbel. Man soll nun zeigen, daß die Äste der Hyperbel sich den Asymptoten beständig nähern, ohne sie zu erreichen.

Anleitung: Man zeige durch ähnliche Dreiecke, daß $PX' = \frac{a}{b} \cdot d$ ist, und bilde sodann die Differenz $PX'^2 - PX^2$; unter Berücksichtigung des Ergebnisses von Nr. 54 wird man finden, daß der Wert dieser Differenz gleich b^2 ist. Daraus kann man gewinnen $XP' - PX = XX' = \frac{b^2}{PX' + PX}$. Was wird mit dem Werte dieses Bruches (und somit mit der Strecke XX') geschehen, wenn der Fußpunkt P des Lotes XP immer weiter von M fortrückt?

689 56. Man konstruiere die Asymptoten einer Hyperbel, von der man die reelle Achse und die Brennpunkte kennt!

Fig. 76.



690 †57. Welchen Winkel bilden die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel?

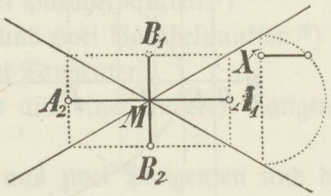
691 †58. Weshalb bildet die Konstruktion der Asymptoten für das Ausziehen der punktweise konstruierten Hyperbel eine Erleichterung?

†59. Man konstruiere eine Hyperbel aus den Asymptoten und einem Punkte des Umfanges! 692

Anleitung: Die Konstruktion ist in Fig. 77 durchgeführt; man benütze die in Nr. 55 erhaltene Beziehung $XX' \cdot (PX' + PX) = b^2$!

60. Man beweise, daß die Tangente in einem beliebigen Punkte der Hyperbel den Winkel der Leitstrahlen halbiert! (Vgl. Nr. 22!)*) 693

Fig. 77.



61. Man konstruiere in einem gegebenen Punkte die Tangente an die Hyperbel! (Vgl. Nr. 23!) 694

†62. Man konstruiere von einem gegebenen Punkte Tangenten an eine Hyperbel! (Vgl. Nr. 24!) 695

†63. Man konstruiere an eine Hyperbel Tangenten parallel zu einer gegebenen Richtung! (Vgl. Nr. 25!) 696

†64. Der in Nr. 27 für die Ellipse begründete Satz ist auch für die Hyperbel nachzuweisen. 697

†65. Die Aufgaben Nr. 62 und 63 sind mit Hilfe des Satzes der Nr. 64 durchzuführen. 698

†66. Eine Hyperbel ist zu zeichnen aus den Brennpunkten und einer Tangente. 699

†67. Ebenso aus einem Brennpunkte, einer Tangente mit dem Berührungspunkte und noch einer zweiten Tangente. 700

†68. Ebenso aus der Richtung der Achse, einem Brennpunkte und zwei Tangenten. 701

†69. Ebenso aus einem Scheitel, einem Brennpunkte und einer Tangente. 702

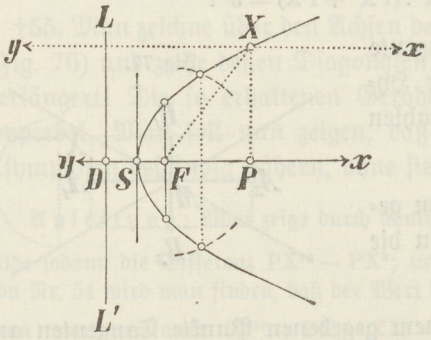
†70. Eine gleichseitige Hyperbel ist zu zeichnen aus einem Brennpunkte und aus einer der beiden Asymptoten. 703

* * *

*) Verwertung in der Optik.

704 71. Gegeben ist eine Gerade LL′ und ein Punkt F außerhalb von ihr (Fig. 78); man suche beliebig viele Punkte, die von der Geraden LL′ (Leitlinie) und von dem Punkte F (Brennpunkte) gleich weit abstehen! Der gesuchte geometrische Ort ist die Parabel. (Definition.)

Fig. 78.



705 72. Man untersuche die Parabel hinsichtlich der Symmetrie! Wie kann man zeigen, daß die Parabel keine geschlossene Kurve ist?

706 73. Man konstruiere aus Leitlinie und Brennpunkt den Parameter der Parabel (d. i. jene Parabelsehne, die im Brennpunkte zur Achse senkrecht steht)! (Fig. 78.)

707 74. Man überzeuge sich, daß der halbe Parameter zugleich der Krümmungshalbmesser für den Scheitel ist!

708 †75. Inwieferne kann die Parabel sowohl als besonderer Fall der Ellipse als auch der Hyperbel angesehen werden?

Anleitung: Man betrachte zuerst F als Brennpunkt einer Ellipse, deren zweiter Brennpunkt in der Richtung x unendlich fern ist; dann als Brennpunkt einer Hyperbel, deren zweiter Brennpunkt in der Richtung y unendlich fern ist!

709 76. Man zeige, daß die Tangente in einem beliebigen Punkte der Parabel den Winkel zwischen dem Leitstrahl zum Berührungspunkte und einer durch den Berührungspunkt zur Achse parallel gezogenen Geraden halbiert! *)

710 77. Man konstruiere auf Grund von Nr. 76 die Tangente in einem gegebenen Punkte der Parabel!

711 †78. Man zeige, daß die Tangente im Punkte X einfacher konstruiert wird, indem man TS = SP macht (Fig. 79) und TX zieht!

712 †79. Man begründe, weshalb der Fußpunkt K einer Senkrechten, die man aus dem Brennpunkte auf eine Parabeltangente zieht, in der Scheiteltangente liegt! (Fig. 79.)

*) Verwertung in der Optik usw.

†80. Man ziehe von einem Punkte Tangenten an die Parabel! (Fig. 80.) 713

†81. Zeichne eine Parabel, von der gegeben ist der Scheitel, die Achsenrichtung und ein Punkt der Parabel. 714

†82. Ebenso aus der Achse, einem Brennpunkt und einer Tangente. 715

†83. Ebenso aus der Leitlinie und zwei Parabelpunkten.*) 716

†84. Ebenso aus einem Brennpunkte und zwei Parabelpunkten.*) 717

†85. Ebenso aus der Leitlinie und zwei Tangenten. 718

†86. Ebenso aus der Scheiteltangente und einer anderen Tangente mit dem Berührungspunkte. 719

†87. Man konstruiere eine Parabel aus zwei Tangenten und der Scheiteltangente! 720

†88. Man konstruiere eine Parabel aus dem Brennpunkte und einer Tangente samt dem Berührungspunkte! 721

Fig. 79.

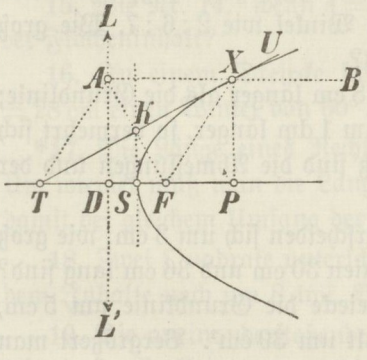
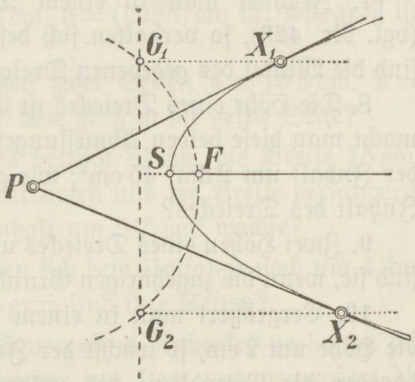


Fig. 80.



†89. Man konstruiere eine Parabel aus einer Tangente mit dem Berührungspunkte und aus der Achse! 722

XIII. Wiederholungsaufgaben.

1. Wenn man den Inhalt eines Quadrates einmal um 10 cm² vermehrt, ein zweites Mal um 6 cm² vermindert und jedesmal daraus wieder ein neues Quadrat bildet, so unterscheiden sich die Seiten der beiden neuen Quadrate um 2 cm; wie groß war der Inhalt des ursprünglichen Quadrates? (Durch Gleichung und durch Schlüsse.) 723

*) Es ergeben sich zwei Parabeln.

724 2. Die Außenwinkel an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes verhalten sich wie 23 : 31. Wie groß sind die Innenwinkel des Dreieckes?

725 †3. In ein Quadrat mit gegebener Seite s ist ein zweites so eingeschrieben, daß seine Ecken in den Mittelpunkten der Seiten des ersten liegen; in dieses zweite Quadrat ist ebenso ein drittes eingeschrieben und so fort ohne Ende; wie groß ist die Summe aller Quadrate? *)

726 4. Eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist gleich 15 cm, die andere ist um 3 cm kleiner als die Hypotenuse. Wie groß ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises?

727 5. Eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist gleich 12 cm, der Umfang beträgt 84 cm. Wie groß ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises?

728 6. Die Außenwinkel eines Dreieckes verhalten sich wie 12 : 13 : 15; wie groß sind die Innenwinkel?

729 †7. Zeichnet man in einem Dreiecke das Höhenfußpunktedreieck (vgl. Nr. 423), so verhalten sich dessen Winkel wie 2 : 6 : 7. Wie groß sind die Winkel des gegebenen Dreieckes?

730 8. Die Höhe eines Dreieckes ist um 8 cm länger als die Grundlinie; macht man diese beiden Abmessungen um 1 dm länger, so vermehrt sich der Inhalt um 2 dm² 45 cm²; wie groß sind die Abmessungen und der Inhalt des Dreieckes?

731 9. Zwei Höhen eines Dreieckes unterscheiden sich um 3 cm; wie groß sind sie, wenn die zugehörigen Grundlinien 30 cm und 36 cm lang sind?

732 10. Vergrößert man in einem Dreiecke die Grundlinie um 5 cm, die Höhe um 2 cm, so wächst der Inhalt um 39 cm². Vergrößert man dagegen die Grundlinie des ursprünglichen Dreieckes um 2 cm, die Höhe um 5 cm, so wächst der Inhalt um 48 cm². Wie groß waren anfänglich Grundlinie und Höhe?

733 11. Über der Höhe eines gleichseitigen Dreieckes wird wieder ein solches konstruiert, über dessen Höhe ein drittes usw. ohne Ende. Wie groß ist die Summe aller dieser gleichseitigen Dreiecke einschließlich des ersten Dreieckes? Wie verhält sie sich zum ursprünglichen Dreiecke? *)

734 †12. Man hat die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes über die Scheitel der spitzen Winkel um die Länge der Hypotenuse verlängert und die so erhaltenen Punkte mit den Endpunkten der Hypo-

*) Unendliche fallende geometrische Reihe.

tenuse verbunden; wie groß ist der Winkel der Verbindungslinien? — Wenn man die beiden Endpunkte der Verlängerungen auch unter sich verbindet, so ergibt sich ein an das ursprüngliche Dreieck angrenzendes Viereck; man soll dessen Inhalt aus den Längen a und b der beiden Katheten berechnen. (Allgemein, dann für $a = 72$ cm und $b = 65$ cm.)

†13. In einem Trapeze mit den Parallelseiten a und b und der Höhe h hat man die Mittellinie und die beiden Diagonalen gezogen. Man zeige, daß der mittlere Abschnitt der Mittellinie immer gleichkommt dem halben Unterschiede der Parallelseiten! — Verbindet man jeden der beiden Endpunkte dieses mittleren Abschnittes mit den beiden näher gelegenen Eckpunkten des Trapezes, so wird das Trapez in vier Flächenstücke zerlegt. Man berechne ihre Inhalte! 735

14. In einem Dreiecke ist ein Winkel $\gamma = 45°$; die ihn einschließenden Seiten sind $a = 8$ dm und $b = 10$ dm lang; wie groß ist die dem Winkel γ gegenüberliegende Seite c? 736

15. Wie Nr. 14, wenn $a = 12$ cm, $b = (\sqrt{288})$ cm ist; wie groß ist der Flächeninhalt? 737

16. In einem Dreiecke schließen zwei Seiten $a = 10{\cdot}5$ cm, $b = 28$ cm einen Winkel von 60° ein. Wie groß ist die dritte Seite? 738

*17. Die Länge eines Rechteckes beträgt 81 cm, die Breite 15 cm. Um wieviel muß man die Länge verkürzen und die Breite verlängern, damit bei gleichem Umfang der Inhalt um 945 cm^2 wachse? 739

18. Zwei Quadrate unterscheiden sich dem Umfange nach um 4 dm, dem Inhalte nach um 8 dm^2. Wie groß sind ihre Seiten? 740

19. Die aneinanderstoßenden Seiten eines Rechteckes verhalten sich wie 4 : 5. Verkleinert man die kleinere um 1 cm und vergrößert die größere um ebensoviel, so nimmt der Inhalt um 8 cm^2 ab. Wie groß waren die ursprünglichen Seiten? 741

†20. In welchem Verhältnisse stehen die Seiten (die Umfänge) eines Quadrates und eines gleichseitigen Dreieckes, wenn ihre Inhalte gleich sind? 742

21. Wie groß ist der Umfang und der Inhalt eines Rechteckes, in dem die Diagonale $d = 75$ cm ist und Länge und Breite sich verhalten wie 4 : 3? Wie groß ist Umfang und Inhalt des Viereckes, das man erhält, wenn man durch die vier Eckpunkte des Rechteckes Parallele zu den Diagonalen des Rechteckes zieht? 743

744 *22. In einem Rechteck von 420 cm² Inhalt unterscheiden sich Länge und Breite um 1 cm. Wie groß ist die Diagonale?

745 *23. In einem Rechteck ist die Diagonale 53 cm. Die Seiten unterscheiden sich um 17 cm. Wie groß ist der Inhalt?

746 *24. Ein Rechteck mit den Seiten 8 cm und 10 cm soll in ein flächengleiches vom Umfange 42 cm verwandelt werden. Wie lang sind dessen Seiten?

747 *25. Über die vier Seiten eines Rechteckes von 40 cm² Inhalt sind Quadrate errichtet, deren Inhalte zusammen 178 cm² ausmachen. Wie groß sind die Rechteckseiten?

748 *26. Aus einem Rechteck vom 50 cm Länge und 40 cm Breite wird ein zweites, dessen Seiten zu jenen des ersten in einerlei Abstand parallel laufen, herausgeschnitten, wodurch sich der Inhalt auf $^2/_5$ der ursprünglichen Größe vermindert. Wie breit ist der übrigbleibende Rand?

749 *27. Jemand besitzt einen Baugrund von 60 m Länge und 32 m Breite. Er will in der Mitte ein Haus mit rechteckigem Grundrisse aufbauen, so daß ringsum eine Gartenfläche von durchaus gleicher Breite übrig bleibt und genau die Hälfte des Baugrundes verbaut wird. Wie breit wird der Vorgarten sein?

750 *28. Um ein Schulgebäude, dessen äußerer Umriß ein Rechteck von 30 m und 40 m Seitenlänge bedeckt, geht ringsum ein überall gleich breiter Spielplatz, dessen Inhalt zehnmal so groß ist wie das erwähnte Rechteck. Wie breit ist der Spielplatz?

751 *29. Die Seiten eines Quadrates sind in derselben Richtung gleichmäßig in zwei Teile so geteilt, daß der kleinere Teil um ½ cm größer ist als die Hälfte des größeren Teiles. Das durch die vier Teilpunkte begrenzte Quadrat ist um 240 cm² kleiner als das ursprüngliche. Wie groß ist dessen Seite?

752 *30. Ein Rechteck von 18 cm Länge und 8 cm Breite wird durch zwei aufeinander normale zu den Seiten parallele Gerade in vier Rechtecke geteilt, von denen zwei an gegenüberliegenden Ecken gelegene 10 cm² und 78 cm² Inhalt haben. In welchen Abständen von den Rechteckseiten die Teilungslinien gezogen?

753 *31. Aus dem Umfang u eines Rechteckes und aus seiner Diagonale d sollen die Seiten und der Inhalt berechnet werden. (Besondere Werte u = 94 cm, d = 37 cm.)

*32. Aus dem Umfang u eines Rechteckes und aus seinem Inhalte f sollen die Seiten und die Diagonale berechnet werden. (Besondere Werte: u = 146 cm, f = 1260 cm².) 754

†33. In ein Quadrat von 24 cm Seitenlänge soll ein gleichschenkliges Dreieck so eingezeichnet werden, daß der Scheitel in eine Quadratecke, die beiden Endpunkte der Grundlinie in die ihr gegenüberliegenden Quadratseiten fallen. Wie groß sind die Dreieckseiten, wenn sein Inhalt 263·5 cm² beträgt? 755

†34. Von einer Quadratecke aus sind zwei je 25 cm lange Teilungslinien gezogen. Wie groß ist die Quadratseite, wenn sich die Inhalte der drei Flächenstücke wie 7 : 34 : 7 verhalten? 756

†*35. In ein Quadrat von der Seitenlänge a ist ein gleichseitiges Dreieck so einzuzeichnen, daß eine Ecke des Dreieckes mit einer Quadratecke zusammenfällt. Wie groß ist Seite und Inhalt des Dreieckes? 757

36. In einem Rhombus beträgt der Umfang 25 dm, die kürzere Diagonale 35 cm. Wie groß sind Inhalt und Höhe? 758

37. Von einem Rhombus beträgt der Inhalt 202 dm² 80 cm², die längere Diagonale ist gleich 31·2 dm. Man soll die zweite Diagonale, die Seite und die Höhe des Rhombus berechnen. 759

38. Der Umfang eines Rhombus beträgt 364 cm. Wie groß ist der Inhalt, wenn sich die Diagonalen verhalten wie $^5/_6$: 2? 760

39. Der Inhalt eines Rhombus, dessen Diagonalen sich um 7 cm unterscheiden, bleibt ungeändert, wenn man die kleinere um 3 cm verkürzt, dagegen die größere um 5 cm verlängert. Wie lang waren die Diagonalen ursprünglich? 761

†40. Zwei Rhomben haben gleichen Umfang. Die Diagonalen des zweiten sind um 8 cm kleiner, beziehungsweise um 16 cm größer als die Diagonalen des ersten. Der Inhalt des zweiten ist um 2·64 dm² größer als der des ersten. Wie groß ist der Umfang? 762

*41. In einem Rhombus ist die Summe der Diagonalen 146 cm, der Inhalt 25·2 dm². Wie groß ist der Umfang? 763

*42. In einem Rhombus von 384 cm² Inhalt unterscheiden sich die Diagonalen um 8 cm. Wie groß ist der Halbmesser des Inkreises? 764

*43. In ein Rechteck von 92 cm Umfang und 480 cm² Inhalt ist ein Rhombus eingezeichnet, dessen Eckpunkte in die Seitenmittelpunkte des Rechteckes fallen. Um wieviel ist sein Umfang kleiner als jener des Rechteckes? 765

766 *44. Der Umfang eines Rhombus, der ebenso wie in Nr. 43 in ein Rechteck eingezeichnet ist, ist 156 cm. Wie groß sind seine Diagonalen, wenn sein Umfang um 48 cm kleiner ist als jener des Rechteckes?

767 45. Die drei Seiten eines Dreieckes betragen $a = 10{\cdot}2$ dm, $b = 21{\cdot}25$ dm, $c = 14{\cdot}45$ dm. Wie groß sind die dazugehörigen Höhen?

768 46. In einem schiefwinkligen Dreiecke sind die drei Höhen und der Umkreis gezeichnet. Man zeige, daß die zum Höhenschnittpunkte bezüglich jeder Dreiecksseite axialsymmetrisch gelegenen Punkte („Spiegelungspunkte") auf dem Umkreise liegen.*)

769 47. Die Höhenabschnitte auf der Gegenseite eines schiefwinkligen Dreieckes verhalten sich wie 2 : 5. Wie groß ist Inhalt und Umfang des Dreieckes, wenn die benachbarten Dreiecksseiten 34 cm und 50 cm betragen?

770 †*48. In einem Dreiecke von 336 cm² Inhalt ist die erste Seite um 2 cm größer als die zweite und die zweite um ebensoviel größer als die dritte. Wie groß sind die Seiten?

771 †*49. In einem Dreiecke ist der Inhalt 756 cm²; eine Seite beträgt 45 cm, die Summe der beiden anderen 81 cm. Wie groß sind die Seiten?

772 †*50. In einem Dreiecke ist der Inhalt 240 cm²; eine Seite beträgt 30 cm, die Differenz der beiden anderen 18 cm. Wie groß sind die Seiten?

773 †* 51. In einem Dreiecke von 210 cm² Inhalt und 70 cm (84 cm) Umfang ist eine Seite um 12 cm (10 cm) kleiner (größer) als die Summe (Differenz) der beiden anderen. Wie groß sind die Seiten?

774 †*52. In einem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten 102 cm, die Differenz der zugehörigen Höhen 12 cm und der Inhalt 840 cm². Wie groß sind diese beiden Seiten?

775 †53. Von einem Dreiecke ist die Mittellinie m_a (zur Seite a), jene m_b zur Seite b und die Höhe h_c zur dritten Seite gegeben. Wie groß ist der Inhalt? (Besondere Werte: $m_a = 30$ cm, $m_b = 51$ m, $h_c = 48$ cm.)

776 †54. Die drei Seiten eines Dreieckes sind a, b, c. Wie lang sind die Winkelsymmetralen des Dreieckes? (Besondere Werte: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.)

*) Zum Nachweise sind kongruente Dreiecke heranzuziehen, wobei die Sätze über Peripheriewinkel und Normalenwinkel anzuwenden sind.

55. Wie groß ist der Inhalt eines Parallelogrammes, in dem die Seiten $a = 65$ cm, $b = 33$ cm sind und die eine Diagonale $d = 56$ cm ist? **777**

56. Wie groß ist der Inhalt eines Parallelogrammes, in dem eine Seite $a = 63$ cm ist und die beiden Diagonalen $D = 104$ cm und $d = 50$ cm sind? Wie groß ist die Höhe? **778**

57. In einem Trapeze ist $a = 51$ cm, $b = 30$ cm, $c = 13$ cm, $d = 20$ cm und $a \parallel b$. Wie groß ist der Inhalt? **779**

58. Wie Nr. 57 mit $a = 11{,}3$ dm, $b = 6{,}2$ dm, $c = 5{,}8$ dm, $d = 4{,}1$ dm. **780**

59. Wie Nr. 57 mit $a = 68$ mm, $b = 40$ mm, $c = 45$ mm, $d = 53$ mm. **781**

60. In einem Antiparallelogramme ist die Höhe 2 cm größer als die größere Parallelseite; der Unterschied beider Parallelseiten ist 14 cm. Vergrößert man die Höhe um 6 cm und verkleinert die obere Parallelseite um ebensoviel, so bleibt der Inhalt unverändert. Wie groß ist der Umfang der ursprünglichen Figur? **782**

†61. In einem jeden Antiparallelogramme ist das Produkt der Parallelseiten gleich dem Quadrat der Diagonale vermindert um das Quadrat des Schenkels. (Beweis!) **783**

*62. Wie groß ist der Umfang eines gleichschenkligen Trapezes, dessen Inhalt 144 cm² beträgt, wenn die größere Parallelseite um 3 cm länger ist als die doppelt genommene kleinere Parallelseite, und wenn die Höhe um 2 cm größer ist als der Unterschied der Parallelen? **784**

†63. Einem gleichschenkligen Trapeze, dessen Parallelseiten $2a$ und $2b$ sind, läßt sich ein Kreis einschreiben. Man zeige, daß die halbe Mittellinie das arithmetische, der Halbmesser des Kreises das geometrische und die Projektion des Halbmessers auf die halbe Mittellinie das harmonische*) Mittel zwischen a und b ist! Inwieferne zeigt die Figur, daß das arithmetische Mittel zweier Größen größer ist als ihr geometrisches und dieses wieder größer ist als ihr harmonisches Mittel? **785**

64. Man berechne Seiten und Inhalt eines rechtwinkligen Dreieckes, in dem die Hypotenuse um 25 cm größer ist als die längere Kathete und die kleinere 17,5 dm lang ist! **786**

*) Unter dem harmonischen Mittel zwischen zwei Größen a und b versteht man den Bruch $\frac{2ab}{a+b}$.

787 65. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse um 1 cm länger, die längere Kathete um 1 cm kürzer als die doppelt genommene kleinere Kathete. Wie groß sind die drei Seiten?

788 66. Verlängert man eine gewisse Strecke der Reihe nach um 1 m, 8 m und 9 m, so bilden die neuen Strecken ein rechtwinkliges Dreieck. Wie groß war die ursprüngliche Strecke?

789 *67. Die Spitzen der Zeiger einer Weckeruhr haben um 3 Uhr den Abstand 53 mm, um 6 Uhr den Abstand 73 mm. Wie lang sind sie?

790 68. Vergrößert man in einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Katheten sich um 7 cm unterscheiden, die kleinere Kathete um 10 cm und verkleinert die andere um 4 cm, so wächst der Inhalt um 30 cm^2. Um wieviel ändert sich der Umfang?

791 69. Vergrößert man eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes um 19 cm, die andere um 5 cm, so wächst das Hypotenusenquadrat um 11·28 dm^2 und der Inhalt des Dreieckes um 4·5 dm^2. Um wieviel ändert sich der Umfang?

792 * 70. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist eine Seite um 2 cm, die andere um 9 cm kleiner als die dritte. Wie groß sind die drei Seiten?

793 *71. Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist um 5 cm länger als die andere und die Hypotenuse um 5 cm größer als die längere Kathete. Wie groß sind die Seiten, der Inhalt und der Halbmesser des Inkreises?

794 *72. Die Summe der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes ist 46 cm; die Hypotenuse ist um 4 cm länger als die eine Kathete. Wie groß sind die Seiten?

795 *73. Der Umfang eines rechtwinkligen Dreieckes beträgt 90 cm; die größere Kathete ist um 9 cm kleiner als die dreifach genommene kleinere Kathete. Seiten, Inhalt und Halbmesser des Inkreises sind zu berechnen.

796 *74. Wie groß sind die Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes, in dem die Hypotenuse um d cm länger ist als die kürzere Kathete und die längere Kathete das arithmetische Mittel der beiden anderen Seiten ist? (Besonderer Wert $d = 10$ cm.)

797 *75. Verlängert man eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Hypotenuse 17 cm beträgt, um 1 cm, die andere um 4 cm, so wächst die Hypotenuse um 3 cm. Wie groß sind die Katheten des ursprünglichen Dreieckes?

*76. Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist 7 cm lang. Sie wird über den Scheitel des rechten Winkels derartig verlängert, daß sie ebensolang ist wie die Hypotenuse. Der Endpunkt der Verlängerung wird mit dem zweiten Endpunkte der Hypotenuse geradlinig verbunden. In dem nunmehr vorliegenden gleichschenkligen Dreiecke ist die Basis um 5 cm länger als jeder der beiden Schenkel. Wie groß sind die Seiten dieses gleichschenkligen Dreieckes? **798**

†*77. Verlängert man in einem rechtwinkligen Dreiecke die eine Kathete, die 6 cm lang ist, über die Hypotenusenecke hinaus um das $1^1/_8$fache der anderen unbekannten Kathete und verbindet den erhaltenen Punkt mit dem anderen Eckpunkt der Hypotenuse, so erhält man ein neues rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse jene des ursprünglichen Dreieckes gerade um das $^7/_8$fache der Länge der unbekannten Kathete übertrifft. Wie groß ist der Inhalt des neuen Dreieckes? **799**

†*78. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist der Inhalt f, der Umfang u. Wie groß sind die Seiten? (Besondere Werte: $f = 150\ cm^2$, $u = 60$ cm.) **800**

†*79. Man berechne Seiten und Inhalt eines rechtwinkligen Dreieckes aus der Mittellinie m_c zur Hypotenuse und der Mittellinie m_a zu einer Kathete! (Besondere Werte: $m_a = \sqrt{601}$ cm, $m_c = 13$ cm). **801**

†*80. Wie Nr. 79 aus m_a und m_b. (Besondere Werte: $m_a = \sqrt{73}$ cm, $m_b = \sqrt{52}$ cm.) **802**

81. Man berechne den Umfang eines rechtwinkligen Dreieckes, in dem die Hypotenusenhöhe um 35 cm größer als der kleinere und um 84 cm kleiner als der größere Abschnitt der Hypotenuse ist! **803**

*82. Aus der Hypotenuse c und der zugehörigen Höhe h sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes zu berechnen. (Besondere Werte: $c = 25$ cm, $h = 6{,}72$ cm.) **804**

*83. Aus der Summe s der Katheten und dem Inhalt f eines rechtwinkligen Dreieckes sind die Seiten zu berechnen. (Besondere Werte: $s = 31$ cm, $f = 84\ cm^2$.) **805**

*84. Aus der Hypotenuse c und der Differenz d der Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind die Katheten und der Inhalt zu berechnen. (Besondere Werte: $c = 29$ cm, $d = 1$ cm oder $c = 65$ cm, $d = 23$ cm.) **806**

*85. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich vom Scheitel aus zwei Körper gleichzeitig mit den Geschwindigkeiten von 1 m/sek. und 2 m/sek. Wann ist ihre Entfernung 26 m, wenn der erste um 2 Sekunden später abgeht als der zweite? **807**

808 †*86. In ein gleichschenkliges Dreieck von 7260 cm² Inhalt und 143 cm Schenkellänge soll ein Quadrat (aufruhend auf der Grundlinie) eingezeichnet werden. Wie groß ist sein Inhalt?

809 87. Wie groß ist die Fläche zwischen den beiden Kreisen, die man einem Dreiecke mit den Seiten a = 34 cm, b = 30 cm und c = 16 cm ein- und umschreiben kann?

810 88. Man berechne die Halbmesser der in, um und an ein Dreieck beschriebenen Kreise, wenn die Seiten des Dreieckes a = 104 cm, b = = 112 cm und c = 120 cm betragen!

811 †89. In einem Dreiecke ist eine Seite 34 cm, die Differenz der beiden anderen 14 cm und der Halbmesser des Inkreises 6 cm. Seiten und Inhalt sind zu berechnen.

812 †*90. Wie Nr. 89, wenn eine Seite 40 cm, die Summe der beiden anderen 56 cm und der Halbmesser des Inkreises 8 cm beträgt.

813 †*91. Die Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes sollen aus den Halbmessern r und R des In- und Umkreises berechnet werden. (Besondere Werte: r = 4 cm, R = 10 cm.)

814 †*92. Seiten und Inhalt eines rechtwinkligen Dreieckes sollen aus dem Umfang u und dem Halbmesser des Inkreises r berechnet werden. (Besondere Werte: u = 72 cm, r = 6 cm.)

815 †93. Es soll gezeigt werden, daß die Summe der Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes gleich ist der Summe der Durchmesser des In- und Umkreises.

816 94. Die Diagonalen eines Rhombus betragen 48 cm und 14 cm; wie groß ist der Umfang und der Inhalt des Inkreises?

817 95. Die Diagonalen eines Rhombus sind 120 cm und 90 cm. In den Rhombus hat man einen Kreis eingeschrieben und in die vier Ecken kleine Kreise so eingezeichnet, daß sie den ersten Kreis von außen berühren. Wir verhalten sich die Halbmesser der so bestimmten Kreise?

818 †96. In einem Trapeze ist die Basis 39 cm, die drei anderen Seiten sind gleich lang, und zwar beträgt jede 25 cm; um wieviel ist der umgeschriebene Kreis größer als das Trapez?

819 †97. Um ein gleichschenkliges Trapez, dessen Parallelseiten 50 cm und 14 cm und dessen nichtparallele Seiten je 30 cm betragen, ist ein Kreis gezeichnet. Die Seitenmitten des Trapezes bestimmen einen Rhombus, in den ein Kreis eingeschrieben ist. Wie groß ist die zwischen beiden Kreisen liegende Fläche?

†*98. In ein gleichschenkliges Trapez, dessen Parallelseiten sich um 16 cm unterscheiden, läßt sich ein Kreis einschreiben. Wie groß sind die Seiten, wenn der Inhalt 255 cm² beträgt? **820**

†99. In einem Trapeze sind die Parallelseiten $a = 12$ cm und $b = 8$ cm; man kann dem Trapeze einen Kreis einschreiben und einen Kreis umschreiben; wie groß ist die zwischen beiden Kreisen liegende Fläche? **821**

100. Die Seiten eines Deltoides sind $s_1 = 65$ cm und $s_2 = 75$ cm; die Symmetriediagonale beträgt 70 cm; wie groß ist der Inhalt, die zweite Diagonale und der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises? **822**

†101. In einem Quadrat mit der Seite s ist jeder der vier rechten Winkel in drei gleiche Teile geteilt. Die Teilungslinien bilden einen vierspitzigen Stern (ähnlich wie in Fig. 81 d). Wie groß ist dessen Inhalt? (Auf zwei verschiedene Arten zu berechnen!) **823**

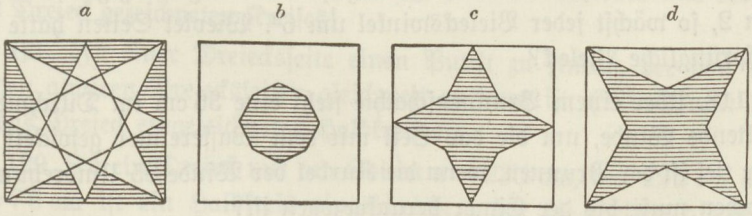
†102. Die leicht zu konstruierende Fig. 81 a enthält ein symmetrisches Achteck (81 b) sowie zwei vierspitzige Sterne (81 c und d). Wie verhalten sich die Inhalte und wie die Umfänge dieser drei Figuren? **824**

103. Welches Vieleck hat fünfmal (siebenmal) soviele Diagonalen, als es Seiten hat? **825**

104. Welche beiden Vielecke unterscheiden sich in der Anzahl der Seiten um 3 (4) und in der Anzahl der Diagonalen um 21 (34)? **826**

105. Zwei Vielecke, die sich in der Anzahl der Seiten um 3 (6) unterscheiden, haben als Winkelsumme 46 (60) Rechte. Welche Vielecke sind gemeint? **827**

Fig. 81.



106. Die Winkelsummen zweier Vielecke, die sich in der Seitenzahl auf 25 (31) ergänzen, verhalten sich wie 13 : 8 (2 : 1). Welche Vielecke sind es? **828**

107. In welchem regelmäßigen Vieleck beträgt der Unterschied zwischen Innenwinkel und Außenwinkel 144° (156°)? **829**

830 108. Verdoppelt (verdreifacht) man die Anzahl der Seiten eines regelmäßigen Vieleckes, so wächst dadurch jeder Vieleckswinkel um 15° (16°). Wie groß ist die Seitenzahl?

831 *109. Welches Vieleck hat 44 Diagonalen?

832 *110. In welchem Vieleck ist die Anzahl der Diagonalen um drei größer als die Anzahl der Seiten?

833 *111. In der Ebene liegt eine Anzahl von Punkten, von denen nicht mehr als zwei in einer und derselben Geraden liegen. Man kann zwischen je zweien dieser Punkte im ganzen 21 geradlinige Verbindungen herstellen. Wie viele Punkte sind es?

834 *112. Verdoppelt man in einem Vielecke die Seitenzahl, so wächst die Anzahl der Diagonalen um 63 (135). Wie viele Seiten hatte das ursprüngliche Vieleck?

835 *113. Welche Vielecke haben zusammen 16 Seiten und 41 Diagonalen?

836 *114. Die Seitenzahlen zweier Vielecke verhalten sich wie 3 : 5. Wieviel Seiten hat jedes, wenn das eine 26 Diagonalen mehr enthält als das andere?

837 *115. In welchem Vieleck ist die Anzahl der Diagonalen um 22 größer als die Summe aus der Anzahl der Seiten und aus der Anzahl der rechten Winkel, die die Winkelsumme des Vieleckes ausmacht?

838 *116. Die Winkelsummen zweier Vielecke ergänzen sich zu 28 Rechten und die Gesamtanzahl ihrer Diagonalen ist 55. Welche Vielecke sind es?

839 *117. Vermehrt man die Seitenzahl eines regelmäßigen Vieleckes um 2, so wächst jeder Vieleckswinkel um 6°. Wieviel Seiten hatte das ursprüngliche Vieleck?

840 118. Über einem Brunnenschachte steht eine 36 cm im Durchmesser haltende Winde, um die das Seil mit dem Wassereimer gewickelt ist; wie tief ist der Brunnen, wenn die Kurbel der Winde 85 Umdrehungen machen muß, bis der Eimer heraufgezogen ist?

841 119. Wenn man um den Äquator der Erde einen Telegraphendraht in 1 m Höhe herumspannen würde, um wieviel würde dessen Länge den Erdumfang übertreffen?

842 120. Wie groß ist der Kreisring, der entsteht, wenn man einem Quadrate von 12 dm^2 96 cm^2 Inhalt Kreise ein- und umschreibt?

121. Die Tangenten, die man von einem 4·45 m vom Mittelpunkt eines Kreises entfernten Punkte an den Kreis ziehen kann, sind 4·37 m lang; wie groß ist Umfang und Inhalt des Kreises? **843**

122. Zwei Sehnen eines Kreises schneiden sich derartig, daß die Abschnitte auf der einen 10·2 cm und 8·1 cm lang sind. Wenn nun der eine Abschnitt auf der zweiten Sehne 15·3 cm beträgt, wie lang ist der zweite Abschnitt? **844**

123. Wie groß ist der Inhalt des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Dreieckes, wenn man an diesen Kreis von einem um a Längeneinheiten von der Peripherie entfernten Punkte Tangenten von der Länge 2 a ziehen kann? **845**

124. Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt des 45. Parallelkreises bei der Achsendrehung der Erde? **846**

125. Um eine kreisrunde Wiese führt ein überall gleich breiter Weg, der 1256·636 m² Inhalt hat; der Inhalt der Wiese ist 5·76mal so groß als der Inhalt des Weges; wie groß ist der Durchmesser der Wiese und wie groß ist die Breite des Weges? **847**

126. Die Seiten eines Dreieckes sind $a = 126$ cm, $b = 50$ cm und $c = 104$ cm; wie groß ist der Umfang und wie groß der Inhalt des eingeschriebenen Kreises? — Wenn das Dreieck inhaltsgleich ist mit einem Rhombus, dessen längere Diagonale gleich ist der längsten Dreiecksseite, wie groß ist die kürzere Diagonale? **848**

127. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes wird durch die zugehörige Höhe so geteilt, daß die beiden Abschnitte 49 cm und 576 cm betragen; man berechne Umfang und Inhalt des Dreieckes und des in das Dreieck gezeichneten Kreises! **849**

128. In einer Dreiecksseite einen Punkt zu finden, der von den beiden anderen Dreiecksseiten gleichweit entfernt ist. (Mittelpunkt des in das Dreieck eingezeichneten Halbkreises.) **850**

129. In ein Dreieck mit den Seiten $a = 23·1$ cm, $b = 22·2$ cm und $c = 7·5$ cm ist ein Halbkreis eingeschrieben, der die Seiten b und c berührt und dessen Mittelpunkt auf der Seite a liegt. Wie groß ist sein Halbmesser? **851**

130. Wie groß sind die Halbmesser eines von konzentrischen Kreisen gebildeten Ringes, wenn ihre Differenz d und die den inneren Kreis berührende Sehne des äußeren Kreises s ist? **852**

853 †131. Man hat einem Kreise vom Halbmesser R ein regelmäßiges Achteck eingezeichnet und diesem einen Kreis eingeschrieben. Wie groß ist die Fläche des entstandenen Kreisringes?

854 †132. Aus den drei Eckpunkten A, B und C eines Dreieckes, von dem $AB = 98$ cm, $BC = 91$ cm und $CA = 105$ cm beträgt, hat man Kreise so gezeichnet, daß ein jeder immer die beiden anderen von außen berührt; wie groß sind ihre Halbmesser?

855 †133. Wie Nr. 132 mit den allgemeinen Werten a, b und c der Seiten. (Konstruktion.)

856 †134. Von einem Rechtecke ist der Inhalt 2940 cm²; die Länge verhält sich zur Breite wie 5 : 3. Wie groß sind die Seiten? — In das Rechteck wird eine Ellipse eingezeichnet und in diese ein Kreis eingeschrieben, endlich in den Kreis ein Quadrat konstruiert; wie verhalten sich die Inhalte von Quadrat und Rechteck? Wie verhält sich der Inhalt des Kreises zum Inhalte der Ellipse? Wie groß ist die Exzentrizität der Ellipse?

857 †135. Man berechne in Nr. **153** auf S. 17 die Seite und den Inhalt des gleichseitigen Dreieckes aus der gegebenen Seite s des Quadrates!

858 †136. Man berechne in Nr. **154** auf S. 17 den Umfang und Inhalt des Achteckes aus der gegebenen Seite s des Quadrates!

859 137. Wie hoch muß ein Rhombus von der Seite s angenommen werden, damit die Senkrechte, die man von einer stumpfwinkligen Ecke auf die Gegenseite zieht, auf der längeren Diagonale gerade ein Drittel markiert?

860 138. Im Endpunkte A eines Durchmessers $AB = 2r$ eines Kreises ist eine Tangente gezeichnet. Vom anderen Endpunkte B aus wird eine Sekante so gezogen, daß das innerhalb des Kreises liegende Stück ebensolang ist wie das zwischen Kreis und Tangente gelegene Stück. Wie groß ist jedes?

861 †*139. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, in dem zwei parallele Sehnen die Längen a und b und den Abstand c haben? (Besondere Werte: $a = 48$ cm, $b = 14$ cm, $c = 17$ cm.)

862 †*140. In einem Kreise mit dem Halbmesser r ist eine gewisse Sehne um d länger als ihr Mittelpunktsabstand. Sehne und Mittelpunktsabstand sind zu berechnen. (Besondere Werte: $r = 25$ cm, $d = 41$ cm.)

863 †*141. In einem Kreise mit 25 cm Halbmesser sind zwei Sehnen gezogen, die sich um 10 cm unterscheiden. Wie lang sind sie, wenn ihre Abstände vom Kreismittelpunkte sich wie 3 : 4 verhalten?

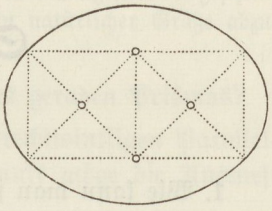
*142. Ein Punkt P hat vom Mittelpunkt eines Kreises, dessen Halbmesser 15 cm ist, eine Entfernung von 41 cm. Durch P ist eine Sekante gezogen, deren innerhalb des Kreises liegendes Stück 24 cm lang ist. Wie groß ist der außerhalb des Kreises liegende Teil? **864**

*143. Von einem Punkte, der 10 cm vom Mittelpunkt eines Kreises entfernt ist, sind an letzteren die Tangenten gezogen, so daß die Berührungssehne 9·6 cm lang ist. Wie groß ist der Kreishalbmesser? **865**

*144. Von einem Punkte ist an einen Kreis eine Tangente von der Länge t und eine Sekante gezogen, deren innerhalb des Kreises liegender Abschnitt um d länger ist als der außerhalb des Kreises liegende. Wie lang sind beide Abschnitte? (Besondere Werte: $t = 12$ cm, $d = 2$ cm.) **866**

†*145. Von einem Kreisausschnitte ist der Inhalt f und der Umfang u. Wie lang ist der Halbmesser und der Bogen? (Besondere Werte: $f = 18\ cm^2$, $u = 18$ cm; für diese ist auch der zugehörige Zentriwinkel zu berechnen.) **867**

Fig. 82.



†146. Man berechne den Umfang und den Inhalt des in Fig. 82 gezeichneten Ovales aus der Diagonale eines der beiden Grundquadrate! **868**

†147. Man berechne den Inhalt der in Fig. 83 schraffierten Fläche, wenn die beiden Diagonalen D und d des die Figur bestimmenden Rhombus gegeben sind!*) **869**

Fig. 83.

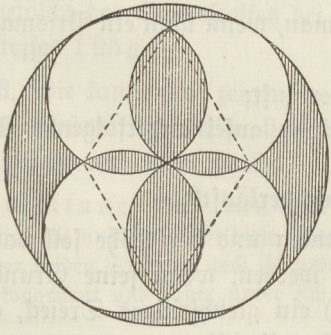
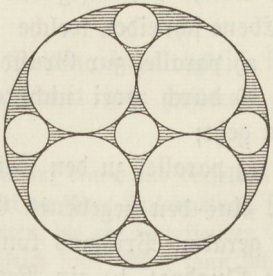


Fig. 84.



†148. Aus dem Halbmesser des Hauptkreises ist die in Fig. 84 schraffierte Fläche zu berechnen. **870**

*) Man berechne auch den Flächeninhalt des nicht schraffierten Teiles der Figur und vergleiche sodann beide Berechnungen mit den Ergebnissen von Nr. 632 und 633.

871 †149. In einen Halbkreis hat man einen möglichst großen Kreis eingezeichnet und in die beiden freibleibenden Teile des Halbkreises gleichfalls möglichst große Berührungskreise konstruiert. In welchem Verhältnisse stehen die Halbmesser des Halbkreises und der eingezeichneten Berührungskreise? Welche Fläche lassen die drei Berührungskreise unbedeckt?

872 †*150. Die Zentrale zweier gleicher Kreise mit dem Halbmesser r ist 2 a. In welcher Entfernung vom Mittelpunkte M der Zentrale ist ein Punkt anzunehmen, damit die von ihm an beide Kreise gelegten Tangenten einen rechten Winkel bilden?*) (Besondere Werte: 2 a = 175 cm, r = 60 cm.)

Zweiter Teil.

Stereometrie.

XIV. Das Prisma.

873 1. Wie kann man sich ein Prisma entstanden denken?

874 2. Wovon wird ein Prisma begrenzt?

875 3. Wie kann man die Prismen einteilen?

876 4. Was sind Parallelepipede? Was ist ein Quader?

877 5. Welche Schnittfiguren erhält man, wenn man ein Prisma durch eine Ebene schneidet, welche

a) parallel zur Grundfläche verläuft;

b) durch zwei nicht unmittelbar aufeinanderfolgende Seitenkanten geht;

c) parallel zu den Seitenkanten verläuft?

878 6. Aus den gegebenen Grundkanten und der Höhe soll das Netz eines geraden Prismas konstruiert werden, wenn seine Grundfläche a) ein Quadrat, b) ein Rechteck, c) ein gleichseitiges Dreieck, d) ein schiefwinkliges Dreieck, e) ein Rhombus ist.**)

*) Man benütze die Ähnlichkeit der beiden entstehenden Dreiecke!

**) Aus mehrfachen Gründen empfiehlt sich die Anfertigung von stereometrischen Modellen aus Kartonpapier. Man verwendet dafür am besten die bei den bekannten Modellierkartons verwendete Methode.

7. Man konstruiere das Netz eines geraden und regelmäßigen Prismas, von dem der Durchmesser des der Grundfläche umgeschriebenen Kreises und die Höhe gegeben ist, wenn die Grundfläche ist: a) ein Fünfeck, b) ein Sechseck, c) ein Achteck, d) ein Zwölfeck! *) **879**

8. Man soll die in Nr. 6 und 7 angeführten Körper im Grundriß und im Aufriß darstellen. (Dabei sind die Körper immer auf der Grundrißebene aufzustellen.) **880**

†9. Man soll das Netz eines geraden und regelmäßigen achteckigen Prismas konstruieren, das schief zur Grundfläche durch eine Ebene geschnitten wird.**) **881**

Anleitung: Man zeichne sich Aufriß und Grundriß des gewünschten Prismas und nehme sodann die schneidende Ebene derart an, daß sie zur Grundrißebene schief verläuft, dagegen auf der Aufrißebene senkrecht steht! Die Vertikalprojektion der Schnittfigur ist dann eine Strecke. Die Längen der abgeschnittenen Seitenkanten sind sodann aus dem Aufrisse in natürlicher Größe abzunehmen.

10. Wie berechnet man die Oberfläche eines geraden Prismas? **882**

11. Wie berechnet man den Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedes (eines Quaders)? (Den Ausgangspunkt möge die Ausmessung des Schulzimmers bilden!) **883**

12. Man berechne das Gewicht des im Schulzimmer enthaltenen Sauerstoffes und Stickstoffes! (Sauerstoff 23%, Stickstoff 77% — Litergewicht des Sauerstoffes bei 0° C und 760 mm Druck 1·43 g, des Stickstoffes 1·26 g.) **884**

13. Wie kann man zeigen, daß jedes Prisma inhaltsgleich ist mit einem rechtwinkligen Parallelepipede, das mit dem ersteren gleiche Grundfläche und Höhe hat? **885**

Anleitung: Stellt man beide Prismen auf einer und derselben Ebene auf (Fig. 85) und verschiebt diese Ebene parallel zu ihrer Anfangslage, so wird jedes der beiden Prismen nach Figuren geschnitten, die zur betreffenden Grundfläche kongruent und daher unter sich inhaltsgleich sind. Man kann sich daher

*) Diese Modelle sollen so angefertigt werden, daß der Durchmesser der Grundfläche und die Höhe bei allen gleich angenommen wird.

**) Die Netze schiefer Prismen sind ohne etwas eingehendere Behandlung der Projektionslehre nicht zu konstruieren. Man wird übrigens bei aufmerksamer Betrachtung des zuerst in Grundriß und Aufriß dargestellten Prismas die nötigen Schritte selbst finden.

beide Prismen aus derselben Anzahl sehr niedriger Schichten aufgebaut denken, von denen je zwei inhaltsgleich sind. Es wird also die Gesamtheit der paarweise gleichen „Flächenerfüllungen" zwei Körper von gleicher „Raumerfüllung", das heißt von gleichem Inhalte geben.*)

886 14. Wie berechnet man den Inhalt eines beliebigen Prismas? (Die Regel ist auf Grundlage des Lehrsatzes in Nr. 13 abzuleiten.)

887 15. Wie berechnet man Oberfläche und Inhalt eines Würfels?

888 16. Man berechne Oberfläche, Inhalt und Gewicht eines eisernen Würfels von 3·6 cm Kantenlänge! (Eigengewicht des Eisens = 7·8.)

889 17. Wie lang ist die Kante eines Würfels, dessen Oberfläche 132 dm^2 54 cm^2 beträgt?

890 18. Wie groß ist der Inhalt eines Würfels von der Oberfläche von 1734 cm^2?

891 19. Aus der Kante s eines Würfels ist die Kante eines neuen Würfels zu berechnen, dessen Inhalt doppelt so groß ist als der Inhalt des ursprünglichen Würfels.**)

892 20. Ein oben offenes, würfelförmiges Gefäß von 15·6251 Inhalt soll aus Blech geformt werden; wieviel Blech ist nötig, wenn man zum eigentlichen Bedarfe noch 8% für Verschnitt und Falze zuschlägt?

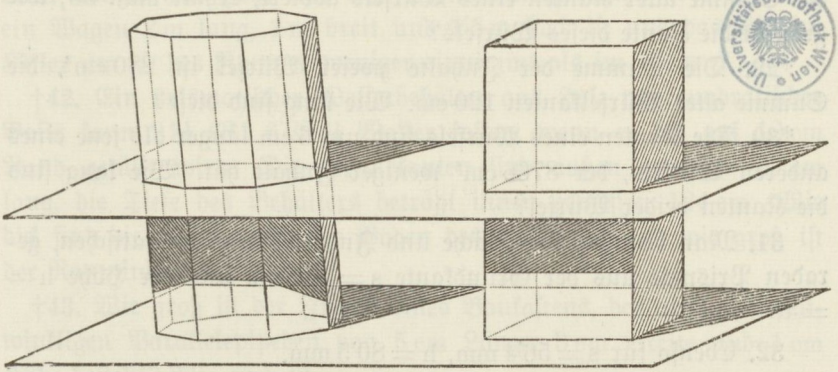
---

*) Der in Nr. 13 ausgesprochene Lehrsatz bildet einen besonderen Fall des Lehrsatzes von Cavalieri (geb. 1598 zu Mailand, gest. 1647 zu Bologna). Dieser Lehrsatz, der auch in der Folge Verwendung finden wird, lautet: Wenn zwei Körper sich in eine solche Lage bringen lassen, daß sie durch alle Ebenen, die zu einer bestimmten Ebene parallel sind, nach inhaltsgleichen Flächen geschnitten werden, so haben sie gleiches Volumen.

**) Diese Aufgabe gehört zu den interessantesten Problemen, die die altgriechischen Geometer beschäftigten. Ihre graphische Lösung ist mit alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal ebensowenig möglich wie die Dreiteilung des Winkels (vgl. Nr. 86) und die Quadratur des Kreises (vgl. Nr. 554). Das Problem der „Würfelverdopplung" wird auch als „delisches Problem" bezeichnet, weil das Orakel des Apollo zu Delos zur Besänftigung des Zornes der Gottheit über einen gewissen Vorfall einmal befohlen haben soll, den Altar des Apollo, der ein Würfel war, zu verdoppeln, wobei aber die Würfelgestalt beibehalten werden sollte. Über die hochinteressanten Lösungen, die das Problem durch Hippokrates von Chios (440 v. Chr.), Archytas, Eudoxus, Platon, Menächmus, Eratosthenes, Nikomedes, Diokles u. a. fand, siehe die in der Fußnote zu Nr. 86 zitierten Werke!

21. Ein Lehrer will sich als Anschauungsmittel aus Pappe sieben **893**
Würfel machen, die, mit entsprechendem Papier überzogen, je einen Würfel aus Eichenholz, Eisen, Kupfer, Blei, Silber, Gold und Platin

Fig. 85.



von je 1 kg Gewicht vorstellen sollen. Wie lang (auf 0·1 mm genau) muß er die Kanten wählen? (Die Eigengewichte sind: Eichenholz 0·92, Eisen 7·8, Kupfer 8·9, Blei 11·3, Silber 10·5, Gold 19·5, Platin 21·5.)

22. Wie groß wäre die Kante eines Würfels aus reinem Golde, **894**
der 1 Million Schilling im Werte hätte? (Eigengewicht des Goldes = = 19·5, 1 kg Gold ist 4667 S wert.)

23. Frankreich hatte nach dem Kriege im Jahre 1870/71 an **895**
Deutschland 5 Milliarden Franken zu bezahlen; wie lang wäre die Kante eines Würfels aus reinem Gold gewesen, der dem Wert dieser Summe entsprochen hätte, wenn 1 kg Gold = 3444⁴/₉ Franken war? Wieviel t Gewicht hätte er gehabt? Wieviel Waggons à 8 t Belastung hätten diese Goldlast fortführen können?

24. Aus der Diagonale eines Würfels ist seine Seite, die Ober- **896**
fläche und der Inhalt zu berechnen. (Allgemein, dann für D = 1·52 m.) Auch ist das Netz des Würfels zu konstruieren.

25. Wenn man die Kanten eines gegebenen Würfels um 3 cm ver- **897**
längert, wird seine Oberfläche um 486 cm² größer; wie groß ist Kante, Oberfläche und Inhalt des gegebenen Würfels?

26. Wie lang sind die Kanten dreier Würfel, deren Volumina sich **898**
verhalten wie 27 : 64 : 125 und die zusammen ebenso groß sind wie ein Würfel, dessen Oberfläche 864 cm² beträgt?

899 27. Ein Würfel von 12 cm Kantenlänge besteht aus zwei Platten, deren Dicke 4 cm und 8 cm ist und deren Dichte 1·5 und 0·5 ist; wie tief sinkt dieser Würfel auf Wasser schwimmend ein?

900 †28. Wenn man die Maßzahlen des Inhaltes, der Oberfläche und der Summe aller Kanten eines Würfels addiert, erhält man 56; wie groß ist die Kante dieses Würfels?

901 *29. Die Summe der Inhalte zweier Würfel ist 280 cm^3, die Summe aller Würfelkanten 120 cm. Wie lang sind diese?

902 *30. Die Kanten eines Würfels sind um 6 cm länger als jene eines anderen Würfels, der 8766 cm^3 weniger Inhalt hat. Wie lang sind die Kanten beider Würfel?

903 31. Man berechne Oberfläche und Inhalt eines quadratischen, geraden Prismas aus der Grundkante $s = 38{\cdot}5$ cm und der Höhe $h = 48{\cdot}8$ cm!

904 32. Ebenso für $s = 56{\cdot}4$ mm, $h = 80{\cdot}5$ mm.

905 33. Wie schwer ist einer der zwölf Granitquadern, die die Decke der sogenannten Königskammer der Cheopspyramide bilden, wenn sie bei 1 m^2 Querschnitt 7 m lang sind? (Eigengewicht des Granites = 2·78.)

906 34. Ein rechteckiges Blatt Papier von 56 cm Länge und 48 cm Breite soll die Mantelfläche eines geraden, quadratischen Prismas bedecken; wie groß sind Oberfläche und Inhalt des Prismas? (2 Lösungen.)

907 35. Man berechne die Oberfläche eines geraden, quadratischen Prismas, dessen Inhalt 19 dm^3 845 cm^3 und dessen Grundflächenumfang 84 cm beträgt!

908 36. Man berechne die Oberfläche eines geraden, quadratischen Prismas, dessen Höhe 23·25 cm und dessen Inhalt 5952 cm^3 beträgt!

909 37. Welche Abmessungen hat ein gerades, quadratisches Prisma, dessen Mantelfläche 1800 cm^2 und dessen Inhalt 8100 cm^3 beträgt?

910 38. Die Gesamtoberfläche eines geraden, quadratischen Prismas beträgt 648 cm^2; wie groß ist das Volumen, wenn die Mantelfläche im abgewickelten Zustande ein Quadrat bildet?

911 39. In einem geraden, quadratischen Prisma ist die Grundfläche 40·96 dm^2 und verhält sich zur Mantelfläche wie 1 : 6. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt?

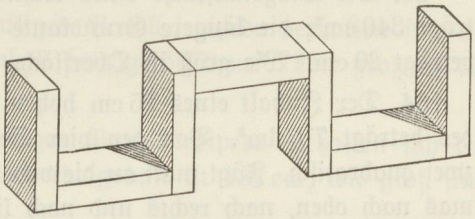
40. Ein zylindrischer Baumstamm aus Buchenholz von 6 m Länge und 56 cm Durchmesser wird nach quadratischem Querschnitt behauen. Wie groß ist sein Gewicht? (s = 0·74.) **912**

41. Wieviel Wagenladungen Eis können in ein Eismagazin von 30 m Länge, 6 m Höhe und 8 m Breite untergebracht werden, wenn ein Wagen 2 m lang, 1 m breit und 1·5 m hoch ist und das Eis im Keller um $^1/_4$ des Raumes weniger einnimmt als im Wagen? **913**

†42. Ein prismatischer Wasserbehälter aus Holz mit quadratischer Basis kann 9 hl 68 l 6·88 dl Wasser fassen, wenn er bis auf 12 cm Rand gefüllt wird. Die Grundkanten sind außen gemessen 97 cm lang, die Tiefe des Behälters beträgt innen gemessen 124 cm. Wie dick sind die Wände und der Boden des Behälters und wie groß ist der Rauminhalt des Holzes? **914**

†43. Wie groß ist der Inhalt eines Baukastens, der aus acht rechtwinkligen Parallelepipeden von 5 cm Länge, 3 cm Breite und 1 cm Höhe besteht? Wie groß ist die Oberfläche der aus sieben Steinen zusammengestellten Figur (Fig. 86)? **915**

Fig. 86.



44. Auf jede Fläche eines Würfels ist ein kongruenter Würfel aufgesetzt. Man soll den Körper perspektivisch darstellen und dessen Oberfläche und Inhalt berechnen. (Allgemein, dann für s = 12·4 cm.) **916**

45. Man berechne Oberfläche, Inhalt und Körperdiagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedes, dessen Kanten sind: l = 36 cm, b = = 27 cm, h = 28 cm! **917**

46. Wie Nr. 45 für l = 4·8 cm, b = 3·6 cm, h = 6·3 cm. **918**

47. Das echte Blattgold ist so dünn ausgeschlagen, daß 10.000 Blättchen aufeinander gelegt die Dicke eines Millimeters haben; wie groß ist das Gewicht eines quadratischen Blattgoldstückes von 5 cm Seitenlänge? Wie groß ist sein Wert, wenn 1 kg Gold 4667 S wert ist? (s = 19·5.) **919**

48. Von einem rechtwinkligen Parallelepipede sind die beiden Grundkanten 6 cm und 8 cm. Die Diagonalfläche ist ein Quadrat. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt? **920**

921 49. Der Umfang der Grundfläche eines Quaders beträgt 70 cm; beide Grundkanten a und b stehen zur Höhe des Prismas im Verhältnis $a : b : h = 3 : 4 : 12$; wie groß ist Oberfläche, Inhalt und Körperdiagonale des Quaders?

922 50. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein Rechteck, von dem eine Seite 16 cm, die Diagonale 20 cm lang ist; die Höhe des Prismas mißt 48 cm; wie groß ist Oberfläche, Inhalt und Diagonale?

923 51. Die Pyramide des Cheops hat einen Inhalt von 2,353.158 m^3; wie hoch könnte eine Mauer von 20 cm Dicke werden, die man aus dem Material dieser Pyramide um die ehemalige österreichisch-ungarische Monarchie bauen könnte, wenn deren Grenzentwicklung 10.244 km betrug?

924 52. Die Grundkanten eines rechtwinkligen Parallelepipedes sind 20 cm und 21 cm lang; die Oberfläche beträgt 3218 cm^2; wie groß ist das Volumen? Wie groß ist der Diagonalschnitt?

925 53. Die Diagonalfläche eines rechtwinkligen Parallelepipedes beträgt 340 cm^2; die längere Grundkante ist 15 cm lang und die Höhe beträgt 20 cm. Wie groß ist Oberfläche und Kubikinhalt?

926 †54. Der Inhalt eines 25 cm hohen, rechtwinkligen Parallelepipedes beträgt $7\frac{1}{2}$ dm^3. Von den vier Seitenflächen des Prismas sind zwei quadratisch. Fügt man an die vier schmalen Flächen dieses Prismas nach oben, nach rechts und nach links je zwei, nach unten drei kongruente Prismen an, so entsteht ein Kreuz; man berechne dessen Oberfläche und Inhalt!

927 55. In das Erdgeschoß eines Hauses führt eine Treppe; der Abstand der obersten Stufe vom Boden beträgt 2·4 m, die Höhe jeder Stufe ist 3 dm, ihre Breite 4 dm und ihre Länge 1·5 m; wieviel Stufen führen zum Erdgeschoß? Wie groß ist der Inhalt der ganzen massiv aufgebauten Treppe und die gesamte sichtbare Treppenfläche?

928 56. Ein rechtwinkliges Parallelepiped hat als Grundfläche ein Rechteck mit dem Verhältnisse 3 : 4 der Seiten und dem Grundflächenumfang 42 cm. Der Diagonalschnitt ist ein Quadrat; wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

929 57. Von einem rechtwinkligen Parallelepipede ist die Körperdiagonale 50 cm, die Diagonale der Grundfläche 30 cm und die längere Grundkante 24 cm; wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

58. Von einem rechtwinkligen Parallelepipede ist die Grundfläche 2688 cm², die Grundkanten verhalten sich wie 7 : 24 und die Körperdiagonale ist 260 cm; wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt? **930**

59. In einem rechtwinkligen Parallelepipede verhalten sich die Grundkanten wie 5 : 11; die Maßzahl der Mantelfläche ist das 64fache der Maßzahl der Höhe und der Inhalt beträgt 6600 Volum-Einheiten; wie groß sind die Abmessungen und die Gesamtoberfläche? **931**

60. Von einem rechtwinkligen Parallelepipede ist der Grundflächenumfang 13·8 dm; die längere Grundkante übertrifft die kürzere um 21 cm; die Höhe des Prismas ist um 1 cm kleiner als der halbe Grundflächenumfang; wie groß ist Inhalt und Oberfläche und wie groß ist die Körperdiagonale? **932**

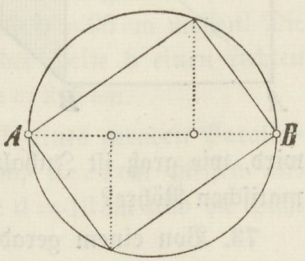
61. Ein Baumstamm von 6·5 m Länge und dem Durchmesser von 45 cm soll nach einem rechteckigen Querschnitte im Seitenverhältnisse 3 : 4 behauen werden; wie groß ist sein Gewicht, wenn das Eigengewicht der Holzart 1·25 beträgt? Wie groß ist seine Oberfläche? **933**

†62. Von einem rechtwinkligen Parallelepipede verhalten sich die Kanten wie 5 : 6 : 7; der Inhalt beträgt 5670 cm³. Wie groß ist die Oberfläche? **934**

†63. Von einem rechtwinkligen Parallelepipede verhalten sich die Kanten wie 8 : 9 : 12; die Körperdiagonale ist 187 cm; wie groß sind Inhalt und Oberfläche? **935**

†64. Von einem rechtwinkligen Parallelepipede verhalten sich die Kanten wie 12 : 9 : 8, die Oberfläche ist 552 cm²; wie groß sind die Abmessungen, die Diagonale und der Inhalt? **936**

Fig. 87.



†65. Um aus einem Baumstamme den rechteckigen Balken von größter relativer Tragfähigkeit herauszuschneiden, teilt man (Fig. 87) den Durchmesser $AB = 2r$ in drei gleiche Teile und errichtet in den Teilungspunkten zwei Senkrechte nach entgegengesetzten Richtungen, wodurch die vier Umfangspunkte gewonnen werden; wie verhält sich die Länge des Querschnittes zur Breite? Wie groß ist der Inhalt des Querschnittes? **937**

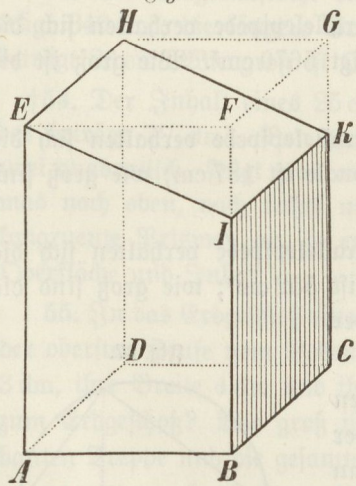
938 †66. Die an einem rechtwinkligen Parallelepipede vorkommenden drei Rechtecksflächen betragen 63 cm², 91 cm² und 117 cm²; wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

939 *67. Die Maßzahlen der drei Kanten eines Quaders sind durch drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen gegeben. Sein Inhalt ist um 85 cm³ größer als jener eines Würfels, der die kleinste Quaderseite als Kante hat. Wie groß ist der Inhalt des Quaders und des Würfels und um wieviel unterscheiden sich ihre Oberflächen?

940 †*68. Die Raumdiagonale eines Quaders ist 26 cm. Die längste der drei Kanten ist $1^5/_7$mal so lang wie die Summe der beiden anderen Kanten; endlich ist von diesen die eine um 2 cm länger als die andere. Wie groß sind die Kanten, die Oberfläche und der Inhalt des Körpers?

941 69. Die Kanten des in Fig. 88 gezeichneten schief geschnittenen Parallelepipedes sind AB = DC = 24 cm, BC = AD = IK = EH = = 12 cm, AE = DH = 20 cm, BI = = CK = 10 cm; wie groß ist Oberfläche und Inhalt des Stumpfes?

Fig. 88.



942 70. Wie Nr. 69 mit AB = = 45 cm, BC = 18 cm, AE = = 78 cm, BI = 50 cm.

943 71. Es ist Volumen und Oberfläche eines geraden, regelmäßigen dreiseitigen Prismas mit der Grundkante s = 10 cm und der Höhe h = 24 cm zu berechnen.

944 72. Wenn die Abmessungen des Prismas in Nr. 71 s = 5·6 dm, h = 15 dm sind und aus dem Prisma ein konzentrisches von halber Seitenlänge herausgeschnitten wird, wie groß ist Inhalt und Oberfläche der übrigbleibenden, prismatischen Röhre?

945 73. Von einem geraden Prisma ist die Grundfläche ein Dreieck mit a = b = 17 cm, c = 16 cm; die Höhe h ist 15·2 cm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

946 74. Wie Nr. 73 mit a = b = 65 cm, c = 32 cm und h = 2 m 4 dm.

75. Wie Nr. 73 mit $a = b = 193$ cm, $c = 190$ cm und dem Volumen $V = 3431\ dm^3\ 400\ cm^3$. **947**

76. Wie Nr. 73 mit $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm, $h = \frac{a+b+c}{2}$. **948**

77. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 8$ cm und $b = 15$ cm; wie groß ist Oberfläche und Inhalt, wenn die größte der drei Seitenflächen ein Quadrat ist? **949**

78. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein Rhombus mit den Diagonalen $D = 112$ cm und $d = 66$ cm; die Höhe ist $h = 320$ cm. Wie groß ist Oberfläche und Volumen? **950**

79. Wie Nr. 78, wenn $D = 560$ cm, $d = 126$ cm und $h = 125$ cm ist. **951**

80. Wie Nr. 78, wenn $D = 42$ cm, $d = 40$ cm ist und alle Kanten des Prismas gleich lang sind. **952**

81. Wie Nr. 80, wenn $D = 210$ cm und $d = 176$ cm ist. **953**

82. Wie Nr. 78, wenn jede Kante des Prismas 58 cm lang ist und $D = 84$ cm ist. **954**

83. Wie Nr. 78, wenn die Oberfläche $8244\ cm^2$ beträgt und die Diagonalen 72 cm und 30 cm lang sind. **955**

84. Wie Nr. 78, wenn das Volumen $V = 12.480\ cm^3$ beträgt und die Diagonalen 48 cm und 20 cm lang sind. **956**

85. Wie Nr. 78, wenn die Mantelfläche $M = 900\ cm^2$ beträgt und die Diagonalen 18 cm und 24 cm lang sind. **957**

86. Wie Nr. 78, wenn jede Kante 25 cm lang ist und die eine Diagonale der Grundfläche 1·4 dm mißt. **958**

87. Man berechne Oberfläche und Inhalt eines geraden Parallelepipedes, dessen Grundkanten $a = 193$ cm und $b = 95$ cm messen! Die Diagonale d der Grundfläche schließt mit der Seite b einen rechten Winkel ein und die Höhe des Prismas ist $h = 216$ cm. **959**

88. Man berechne Oberfläche und Inhalt eines geraden Parallelepipedes, wenn die Grundkanten $a = 15$ cm, $b = 4$ cm messen und wenn ferner die Diagonale der Grundfläche $d = 13$ cm und die Höhe des Prismas $h = 18$ cm ist. **960**

89. Wie Nr. 88, wenn $a = 15$ cm, $b = 9$ cm, ferner $d = h = \frac{a+b}{2}$ ist. **961**

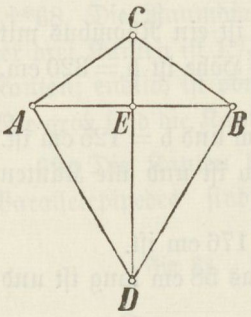
962 90. Wie Nr. 88, wenn $a = 39$ cm, $b = 25$ cm, $d = 40$ cm und $h = 54$ cm ist.

963 91. Wie Nr. 88, wenn $a = 26$ cm, $b = 10$ cm, $d = 24$ cm ist und die Oberfläche $O = 2280$ cm² beträgt.

964 92. Wie Nr. 88, wenn $a = 30$ cm, $b = 11$ cm, $d = 25$ cm beträgt und das Volumen $V = 10{\cdot}56$ dm³ ist.

965 93. Wie Nr. 88, wenn $a = 51$ cm, $b = 41$ cm, $d = 58$ cm ist und die Mantelfläche 230 dm² beträgt.

Fig. 89.



966 94. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein Deltoid (Fig. 89), in dem $AB = 48$ cm, $CE = 10$ cm und $ED = 70$ cm ist; die Höhe h des Prismas beträgt 90 cm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

967 95. Wie Nr. 94, wenn $AB = 120$ cm, $CD = 123$ cm, $AC = 68$ cm ist und die Mantelfläche 12.036 cm² beträgt.

968 96. Wie groß ist die Erdbewegung bei Aushebung eines Eisenbahneinschnittes von 42 m Länge, der an der Sohle 3 m breit und 4 m tief ist, wenn die Böschungen mit doppelter Anlage, d. h. als schiefe Ebenen angelegt sind, in denen sich die Höhe zur Basis wie 1 : 2 verhält?

969 97. Ein 25 m langes Stück eines Festungsgrabens, dessen Enden durch lotrechte Mauern abgegrenzt sind und der 8 m tief, oben 18 m und unten 8 m breit ist, soll durch 120 Mann, die alle zwei Stunden abgelöst werden, ausgehoben werden; in wieviel Tagen wird die Arbeit fertig, wenn täglich im ganzen 12 Stunden lang gearbeitet wird und ein Arbeiter stündlich $^1/_8$ m³ Erde aushebt.

970 98. Ein Wasserkanal hat als Querschnitt ein Trapez, dessen obere Breite 2·5 m, die untere 1·5 m und die Höhe 1·2 m beträgt. Wieviel Wasser liefert er in einer Stunde, wenn die Wassergeschwindigkeit 1·5 m/sek. und die Wasserhöhe gleichmäßig 60 cm ist?

971 99. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein Trapez, in dem die parallelen Seiten $a = 62$ cm, $b = 48$ cm sind, während die nichtparallelen Seiten $c = d = 25$ cm sind; die Höhe des Prismas ist $h = 140$ cm; wie groß ist Oberfläche und Inhalt?

100. Wie Nr. 99, wenn $a = 81$ cm, $b = 25$ cm, $c = d = 53$ cm ist und die zu c und d gehörigen Seitenflächen Quadrate sind. **972**

101. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein Antiparallelogramm, dessen Parallelseiten 40 cm und 16 cm lang sind; die beiden nichtparallelen Seiten sowie die Höhe des Prismas sind halb so lang wie die größere Parallelseite. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt? **973**

102. Die Parallelseiten eines Trapezes, dessen nichtparallele Seiten je 10 cm betragen, sind 24 cm und 12 cm lang; das Trapez bildet die Grundfläche eines geraden Prismas, dessen Volumen 4·608 dm^3 beträgt; wie groß ist die Oberfläche? **974**

103. Die Parallelseiten eines gleichschenkligen Trapezes, das die Grundfläche eines geraden Prismas von der Höhe von 28 cm bildet, sind 25 cm und 15 cm lang; wie groß ist die Oberfläche des Prismas, wenn sein Volumen 6720 cm^3 enthält? **975**

104. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein Trapez, dessen parallele Seiten 36 cm und 16 cm lang sind; jede der nicht parallelen Seiten ist so groß wie die Mittellinie des Trapezes. Wie groß ist das Volumen, wenn die Oberfläche des Prismas 87 dm^2 36 cm^2 beträgt? **976**

105. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein Trapez mit $a = 40$ cm, $b = 24$ cm, $c = 25$ cm, $d = 39$ cm, wobei $a \parallel b$ ist. Die Höhe des Prismas beträgt 32 cm; wie groß ist Inhalt und Oberfläche? **977**

106. Wie Nr. 105 mit $a = 6{\cdot}2$ dm, $b = 4{\cdot}8$ dm, $c = 1{\cdot}3$ dm, $d = 1{\cdot}5$ dm und $h = 14$ dm. **978**

107. Wie Nr. 105 mit $a = 64$ cm, $b = 20$ cm, $c = 39$ cm, $d = 17$ cm und $h = 42$ cm. **979**

108. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite $s = 10$ cm; die Höhe des Prismas beträgt 28 cm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche? **980**

109. Wie Nr. 108 mit $s = 1{\cdot}8$ cm, $h = 4{\cdot}5$ cm. **981**

110. Ein Bleistift ist 20 cm lang und regelmäßig sechseckig mit der Seitenlänge von 4 mm; wie groß ist seine Oberfläche? Wie groß ist der Inhalt der Holzschichte, wenn die gleichfalls sechseckige Graphitmine 1 mm Seitenlänge hat? **982**

†111. Man berechne Volumen und Oberfläche eines geraden Prismas, dessen Höhe $h = 35$ cm und dessen Grundfläche ein regelmäßiges Achteck ist, das einem Kreise von 12·4 cm Halbmesser eingeschrieben ist! **983**

112. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein regelmäßiges Zwölfeck, dessen umgeschriebener Kreis einen Halbmesser von 15 cm **984**

hat; wie groß ist der Inhalt, wenn der Symmetrieschnitt ein Quadrat ist?

985 †113. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein regelmäßiges Zwölfeck, das einem Kreise vom Halbmesser $r = 18{\cdot}4$ cm eingeschrieben ist; die Höhe des Prismas beträgt $40{\cdot}5$ cm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

986 114. Ein rechtwinkliges Parallelepiped hat als Länge $l = 32$ cm, als Breite $b = 24$ cm und als Höhe $h = 144$ cm; es soll in einen inhaltsgleichen Würfel verwandelt werden. Wie verhalten sich die Oberflächen?

987 115. Eine prismatische Platte von 3 cm Dicke hat die Gestalt eines Trapezes, in dem die parallelen Seiten 48 cm und 20 cm betragen, während die nicht parallelen Seiten 17 cm und 25 cm lang sind; ein Würfel hat dieselbe Oberfläche. Man berechne Oberfläche und Inhalt beider Körper!

988 116. Ein oben offenes Blechgefäß mit rhombischer Grundfläche hat 2616 cm² innere Oberfläche; die Diagonalen seiner Grundfläche messen 18 cm und 24 cm. Es ist anfänglich bis zur Hälfte mit Wasser gefüllt; man wirft einen Würfel hinein, wodurch das Wasser derart steigt, daß es nun $^7/_{10}$ des Gefäßes ausfüllt. Wie groß ist die Kante des Würfels?

989 117. 54 Bleiwürfel von der Eigenschaft, daß bei jedem der Inhalt ebenso viele Kubikzentimeter beträgt, als seine Oberfläche Quadratzentimeter enthält, werden zu einem rechtwinkligen Parallelepipede umgegossen, in dem die Höhe 36 cm beträgt und die Grundkanten sich wie 4 : 9 verhalten. Um wieviel wird dadurch die Oberfläche kleiner?

990 †118. Eine regulär-zwölfseitige Platte von der Dicke von 4 cm, deren längste Diagonale 10 m 8 cm ist, hat gleichen Inhalt mit einem geraden Prisma, dessen Grundfläche ein Rhombus von der Seitenlänge von 7 dm 5 cm ist; die längere Diagonale des Rhombus beträgt 1 m 44 cm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des rhombischen Prismas?

991 †119. Zwei gerade Prismen haben als Grundfläche je ein gleichschenkliges Dreieck von demselben Flächeninhalte; die drei Seiten des ersteren sind $a = b = 37$ cm, $c = 24$ cm, die Höhe des zweiten Dreieckes beträgt 21 cm. Die Höhe des ersten Prismas beträgt 49 cm, die Höhe des zweiten 7 cm; man berechne Inhalte und Oberflächen beider Körper!

992 †120. Ein gerades Prisma von rechteckiger Grundfläche und ein zweites, dessen Grundfläche ein Rhombus ist, haben denselben Umfang. Die Höhen beider sind 40 cm und 25 cm; in dem ersten beträgt die

Diagonale der Grundfläche 50 cm, in dem zweiten 56 cm. Außerdem ist noch die eine Grundkante des ersten Prismas mit 40 cm gegeben; wie läßt sich Inhalt und Oberfläche beider Prismen berechnen?

†121. Zwei gerade Prismen haben dieselbe Oberfläche; die Grund- **993**
fläche des einen ist ein Trapez mit den parallelen Seiten $a = 43{\cdot}5$ cm und $b = 26{\cdot}5$ cm; die beiden anderen Seiten sind $c = 26$ cm und $d = 25$ cm. Die Grundfläche des zweiten ist ein Rechteck mit der Diagonale $D = 74$ cm und der Länge $L = 70$ cm; wie groß sind Oberflächen und Inhalte beider Prismen, wenn die Höhe des ersten Prismas 104 cm beträgt?

XV. Der Zylinder.

1. Wie kann man sich einen Zylinder entstanden denken?*) **994**

2. Welche Flächen begrenzen einen Zylinder? **995**

3. Was versteht man unter Achse, was unter Höhe eines Zylinders? Was ist das charakteristische Parallelogramm eines Zylinders? Wann ist der Zylinder ein gerader, wann ein schiefer? **996**

4. Was ist ein gleichseitiger Zylinder? **997**

5. Welche Schnittfiguren erhält man, wenn man einen Zylinder durch eine Ebene schneidet, die **998**

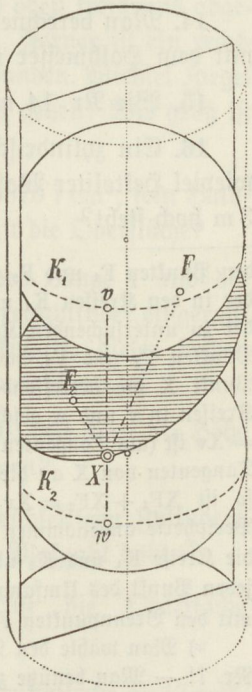
a) parallel zur Grundfläche verläuft;

b) durch die Achse gelegt ist;

c) parallel zur Achse verläuft;

d) zur Grundfläche geneigt ist?**)

Fig. 90.



*) Man benütze die Modelle, von denen in XIV, Nr. 7, die Netze zu konstruieren waren!

**) Zum Nachweise, daß dieser Schnitt eine Ellipse ist, erscheint am meisten geeignet die Methode von Quetelet und Dandelin (Mém. d l'Acad. de Bruxelles, t. II, 1822; t. III, 1826). Man sieht zunächst ein, daß die Fläche eines geraden Zylinders durch eine Ebene nach einer geschlossenen Kurve geschnitten wird. Um nachzuweisen, daß diese Kurve eine Ellipse sei, beschreibe man in den geraden oder Rotationszylinder jene beiden Kugeln, die die gegebene Ebene in

999 6. Aus dem gegebenen Durchmeſſer und der Höhe ſoll das Netz eines geraden Zylinders konſtruiert werden.*)

1000 7. Man konſtruiere das Netz eines gleichſeitigen Zylinders!

1001 8. Man ſtelle die in Nr. 6 und 7 angegebenen Zylinder in Grundriß und Aufriß dar!

1002 †9. Man konſtruiere das Netz eines geraden und ſchief zur Grundfläche geſchnittenen Zylinders! (Vgl. Nr. 881, S. 99!)

1003 10. Wie berechnet man die Oberfläche eines geraden Zylinders?

1004 11. Wie berechnet man das Volumen eines Zylinders?

1005 12. Man berechne die Oberfläche eines gleichſeitigen Zylinders aus dem Halbmeſſer!

1006 13. Man berechne das Volumen eines gleichſeitigen Zylinders aus ſeinem Halbmeſſer!

1007 14. Man berechne Oberfläche und Inhalt eines geraden Zylinders mit dem Halbmeſſer $r = 15$ cm und der Höhe $h = 26$ cm! **)

1008 15. Wie Nr. 14 mit $r = 48$ cm und $h = 3$ m.

1009 16. Ein zylindriſcher Brunnenſchacht hat 1 m 4 dm Durchmeſſer; wieviel Hektoliter Waſſer enthält der Brunnen, wenn das Waſſer darin 3 m hoch ſteht?

---

den Punkten F_1 und F_2 (Fig. 90) berühren. Dieſe Kugeln berühren den Zylinder in den Kreiſen K_1 und K_2. Betrachtet man nun einen beliebigen Punkt X der zu unterſuchenden Kurve, zieht einerſeits ſeine Verbindungslinien mit den Punkten F_1 und F_2, das iſt XF_1 und XF_2 und zeichnet anderſeits durch den Punkt X die betreffende Zylindererzeugende, die von den früher erwähnten Kreiſen in v und w geſchnitten wird, ſo ſieht man ein, daß (im Raume) $XF_1 = Xv$ iſt (als Tangenten von X an die obere Kugel) und ebenſo $XF_2 = Xw$ (als Tangenten von X an die untere Kugel). Addiert man dieſe beiden Gleichungen, ſo iſt $XF_1 + XF_2 = Xv + Xw = vw$; wo auch immer der Punkt X in der Peripherie angenommen wird, jedesmal ergibt ſich für vw dieſelbe Strecke, da die Kreiſe K_1 und K_2 überall gleich weit voneinander abſtehen; es iſt alſo für jeden Punkt des Umfanges $XF_1 + XF_2$ konſtant, d. h. die Kurve iſt eine Ellipſe mit den Brennpunkten F_1 und F_2.

*) Man wähle den Durchmeſſer ebenſo groß wie bei den Prismen in XIV, Nr. 7! — Man benütze zur graphiſchen Rektifikation des Grundkreiſes die Konſtruktion in Nr. 551, Seite 61!

**) Vgl. Anmerkung **) auf S. 59.

17. Man berechne Oberfläche und Inhalt eines geraden Zylinders, **1010**
dessen Halbmesser 14 cm und dessen Mantelfläche 21 dm² 99 cm² 11 mm² beträgt!

18. Man berechne den Inhalt eines geraden Zylinders, dessen **1011**
Halbmesser 2·4 dm und dessen Gesamtoberfläche 149·289 dm² beträgt!

19. Wieviel Blech braucht man für ein Literhohlmaß, bei dem die **1012**
Höhe doppelt so groß ist als der Durchmesser, wenn man für Henkel, Verstärkungen usw. um 25% mehr rechnet?

20. Ein Lehrer will sich als Anschauungsmittel ein Modell für ein **1013**
zylindrisches Hektolitermaß aus Pappe anfertigen; Durchmesser und Höhe sollen gleich groß werden. Welche Abmessungen muß er dem Modelle geben?

21. Ein quadratischer Turm hat als Seite 9 m, als Höhe 30 m, als **1014**
Wanddicke 1·5 m. Die Turmwand enthält in zwei Stockwerken im ganzen acht Fenster von 2 m Breite; sie sind nach oben kreisrund abgeschlossen und ihre höchste Abmessung beträgt 4 m. Ferner ist ein rechteckiges Tor von 2·5 m Breite und 2·8 m Höhe vorhanden. Wieviel Ziegel sind zum Aufbau nötig, wenn auf 1 m³ 400 Stück gehen? Wie groß ist die innere und die äußere Putzfläche?

22. Ein gerader Zylinder hat als Volumen 6870·7 cm³; sein Halb- **1015**
messer verhält sich zur Höhe wie 1 : 3. Wie groß ist die Oberfläche?

23. Ein rechtwinkliges Blatt Papier von der Länge l und der **1016**
Breite b kann auf zwei Arten zu einem geraden Kreiszylinder eingerollt werden; in welchem Verhältnisse stehen die Inhalte dieser beiden Zylinder? (Allgemein, dann für $l = 24$ cm und $b = 16$ cm.)

24. Von einem Zylinder ist die Oberfläche 201·061 dm²; die Höhe **1017**
ist gleich dem Halbmesser. Wie groß ist das Volumen?

25. Wie muß man die Abmessungen eines gleichseitigen Zylinders **1018**
annehmen, damit Inhalt und Oberfläche dieselbe Maßzahl haben?

26. Von einem gleichseitigen Zylinder ist die Oberfläche **1019**
108·573 dm². Wie groß ist das Volumen?

27. Von einem geraden Zylinder beträgt die Grundfläche 32·17 cm², **1020**
die Mantelfläche 150·796 cm². Wie groß ist das Volumen?

1021 28. Von einem geraden Zylinder beträgt die Mantelfläche 113·097 dm², das Volumen 169·646 dm³. Wie groß ist die Oberfläche?

1022 29. Man berechne das Gewicht eines eisernen Rohres von 3 m Länge, 1 cm Wanddicke und 3 cm lichtem Durchmesser! (s = 7·8.)

1023 30. Man berechne den Preis einer Röhrenleitung aus Blei von 28 m Länge, 1 cm lichtem Durchmesser und 5 mm Wandstärke! (Preis für 1 kg Bleirohr 50 g, Eigengewicht des Bleies 11·4.)

1024 †31. Wieviel beträgt das Volumen eines geraden Zylinders, dessen Höhe sich zum Durchmesser verhält wie m : n und dessen Mantelfläche M ist? (Zuerst allgemein, dann für m : n = 2 : 3, M = 2·0944, π = = 3·1416.)

1025 32. Zwei gerade Zylinder, welche dieselbe Höhe h = 32 cm haben und deren Halbmesser $r_1 = 15$ cm und $r_2 = 18$ cm sind, sind zu berechnen. Man rollt ihre Mantelflächen ab, setzt sie aneinander und rollt beide zu einem neuen Zylinder zusammen; es soll auch dessen Inhalt und Oberfläche berechnet werden.

1026 33. Um wieviel muß man die Höhe eines gegebenen Zylinders verlängern, damit die Mantelfläche des neuen Zylinders gleich der Gesamtoberfläche des ursprünglichen Zylinders werde?

1027 34. Man soll die Mantelflächen, die Oberflächen und die Inhalte von zwei geraden Zylindern berechnen, wenn von dem ersten $r_1 = 14$ cm und $h_1 = 28$ cm, von dem zweiten $r_2 = 28$ cm und $h_2 = 14$ cm ist; sodann ist das Verhältnis der gerechneten Größen zu bestimmen und zu untersuchen, wie sich die Sache gestellt hätte, wenn statt 14 cm und 28 cm allgemein a und b gesetzt worden wäre.

1028 35. Ein gleichseitiger Zylinder hat den Halbmesser r. Um wieviel muß man diesen vergrößern (natürlich dann auch die Höhe um das Doppelte), damit der neue, gleichseitige Zylinder die neunfache Oberfläche hat? Wie verhalten sich die Volumina?

1029 36. Von einem geraden Zylinder stimmen die Maßzahlen von Inhalt und Oberfläche überein; würde man vier solcher Zylinder aufeinander stellen, so würde ein gleichseitiger Zylinder entstehen. Wie groß sind die Abmessungen, die Oberfläche und der Inhalt *eines* solchen Zylinders?

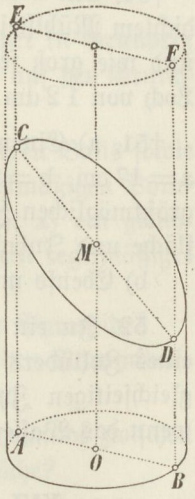
37. Wenn man die Grundfläche eines geraden Zylinders beibehält, aber seine Höhe um 1 dm vermehrt, so wächst sein Inhalt um 153·938 dm³; wenn man hingegen den Halbmesser um 1 dm vermindert und die Höhe beibehält, so vermindert sich der Inhalt um 367·57 dm³. Wie groß sind Oberfläche und Inhalt des ursprünglichen Zylinders? **1030**

38. Die Oberfläche eines geraden Zylinders beträgt 345·58 cm²; vergrößert man seine Höhe um 22 cm, so erhält man einen Zylinder von der dreifachen Oberfläche. Wie groß ist der Inhalt des ersten Zylinders? **1031**

†39. Die Summe der Oberflächen zweier ähnlicher Zylinder beträgt $(2890 \cdot \pi)$ cm²; ihre Höhen sind 12 cm und 48 cm. Wie groß sind ihre Oberflächen und wie verhalten sich ihre Inhalte? **1032**

†40. Ein gerader Zylinder hat als Halbmesser r, als Höhe h; konstruiert man nun zwei neue Zylinder, von denen der erste denselben Halbmesser r, aber eine um eine gewisse Größe x kleinere Höhe, der zweite die Höhe h, aber einen um x kleineren Halbmesser hat, und sollen die beiden neuen Zylinder gleichen Inhalt haben, wie groß muß x genommen werden? (Allgemein, dann für h = 300 mm, r = 420 mm.) **1033**

Fig. 91.



†41. Wie verhalten sich die Mantelflächen der beiden in Nr. 40 gegebenen Zylinder? **1034**

†42. Wie verhalten sich die Oberflächen der beiden in Nr. 40 gegebenen Zylinder! **1035**

*43. In einem geraden Zylinder ist die Höhe um 23 cm größer als der Halbmesser. Der Zylindermantel ist inhaltsgleich mit einem Kreise, dessen Halbmesser um 8 cm größer ist als der Halbmesser des Zylinders. Wie groß ist dieser, wie groß Oberfläche und Inhalt des Zylinders? **1036**

†44. Ein Rotationszylinder (Fig. 91) wird schief geschnitten; die Abmessungen sind: AE = 30 cm, AC = 26 cm, BD = 20 cm und AO = 4 cm. Man berechne Oberflächen und Inhalte beider Teile! **1037**

†45. Wie Nr. 44 mit AE = 140 cm, AC = 102 cm, BD = 80 cm, AO = 60 cm. **1038**

†46. Auf einer Mantellinie AB eines geraden Zylinders vom Halbmesser von 24 cm und der Höhe von 34 cm liegt ein Punkt, der **1039**

von der Deckfläche um 14 cm absteht; man legt durch ihn zwei Ebenen, die senkrecht auf dem Achsenschnitte durch AB stehen und durch die Endpunkte der Mantellinie CD gehen, die der Mantellinie AB diametral gegenüberliegt. Man berechne Oberfläche und Inhalt des von beiden Ebenen aus dem Zylinder herausgeschnittenen Teiles!

1040 †47. Ein zylindrisches Gefäß, in welchem 3·234 l Wasser Platz haben, wird um 45° geneigt, wodurch ein Teil des Wassers abfließt; nach dem Aufstellen des Gefäßes füllt das Wasser nur mehr $^2/_3$ des Gefäßes. Welche Abmessungen hat das Gefäß? ($\pi = 3^1/_7$.)

1104 †48. Ein gerades, quadratisches Prisma hat als Grundkante 18 cm, als Höhe 24 cm; man bestimme Oberfläche und Inhalt des Prismas sowie des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Zylinders!

1042 †49. Aus einem kreisrunden Baumstamme vom Durchmesser 68 cm, der Länge von 3 m 2 dm und der Dichte 0·72 soll ein rechteckiger Balken von 60 cm Breite herausgehauen werden. Wie groß ist das Gewicht des behauenen und wie groß dasjenige des unbehauenen Stammes?

1043 †50. Ein Mühlstein hat 1·4 m Durchmesser, 4 dm Höhe und ist aus dichtem Mühlsteinquarz von der Dichte 2·55. Wie groß ist sein Gewicht und wie groß seine Oberfläche, wenn in der Mitte ein quadratisches Loch von 1·2 dm Seitenlänge herausgemeißelt ist?

1044 †51. a) Einem geraden, dreiseitigen Prisma mit den Grundkanten $a = 17$ cm, $b = 28$ cm, $c = 39$ cm und der Höhe $h = 45$ cm sind die größtmöglichen Zylinder ein- und umgeschrieben. Man berechne Oberfläche und Inhalt des Prismas und der beiden Zylinder!

b) Ebenso mit $a = 78$ cm, $b = 66$ cm, $c = 120$ cm und $h = 75$ cm.

1045 52. In ein zum Teil mit Wasser gefülltes Gefäß von der Form eines Zylinders vom lichten Durchmesser von 16 cm wirft man einen gleichseitigen Zylinder aus Metall; wie groß ist dessen Halbmesser, wenn das Wasser dadurch um 2 cm gestiegen ist?

XVI. Die Pyramide und der Pyramidenstumpf.

1046 1. Wie kann man sich eine Pyramide entstanden denken?

1047 2. Wovon wird eine Pyramide begrenzt?

1048 3. Wie kann man die Pyramiden einteilen?

4. Was sind Tetraeder? **1049**

5. Welche Schnittfiguren erhält man, wenn man eine Pyramide **1050**
durch eine Ebene schneidet, die

a) parallel zur Grundfläche verläuft;

b) durch zwei nicht unmittelbar aufeinanderfolgende Seitenkanten geht;

c) durch die Spitze der Pyramide geht?

6. Aus den gegebenen Grundkanten und der Seitenkante soll das **1051**
Netz einer geraden*) Pyramide konstruiert werden, wenn ihre Grundfläche a) ein gleichseitiges Dreieck, b) ein Dreieck mit den Seiten a, b und c, c) ein Quadrat, d) ein Rechteck ist.

7. Man konstruiere das Netz einer geraden und regelmäßigen Pyra- **1052**
mide, von der der Durchmesser des Umkreises und die Höhe gegeben sind, wenn die Grundfläche ist: a) ein Fünfeck; b) ein Sechseck; c) ein Achteck; d) ein Zwölfeck!**)

8. Man konstruiere das Netz einer geraden Pyramide aus den ge- **1053**
gebenen Grundkanten und der Höhe, wenn die Grundfläche a) ein Quadrat, b) ein Rechteck ist.

9. Man soll die in Nr. 6 und 7 angeführten Körper in Grundriß **1054**
und Aufriß darstellen. (Dabei sind die Körper immer auf der Grundrißebene aufzustellen.)

10. Man soll aus den Kanten der oberen und unteren Basis sowie **1055**
aus den Seitenkanten das Netz eines geraden und regelmäßigen Pyramidenstumpfes konstruieren, wenn die Grundfläche ist a) ein gleichseitiges Dreieck; b) ein Quadrat; c) ein Rechteck; d) ein regelmäßiges Sechseck.

11. Wie berechnet man die Oberfläche einer geraden Pyramide? **1056**

12. Wie berechnet man die Oberfläche eines geraden Pyramiden- **1057**
stumpfes?

13. Welches Größenverhältnis besteht bei jeder Pyramide zwischen **1058**
der Grundfläche und einer zu ihr parallelen Schnittfläche?

14. Wie kann man zeigen, daß jede Pyramide inhaltsgleich ist mit **1059**

---

*) Jene Pyramide wird gewöhnlich als gerade bezeichnet, bei der die Seitenkanten alle gleich lang sind.

**) Diese Modelle sollen so angefertigt werden, daß der Durchmesser bei allen gleich genommen wird. (Vgl. XIV, 7.)

einer dreiseitigen Pyramide von gleicher Grundfläche und Höhe? Warum sind überhaupt Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe inhaltsgleich?

Anleitung: Der Beweis erfolgt ebenso wie in XIV, 13, unter Zuhilfename von Fig. 92.

Fig. 92.

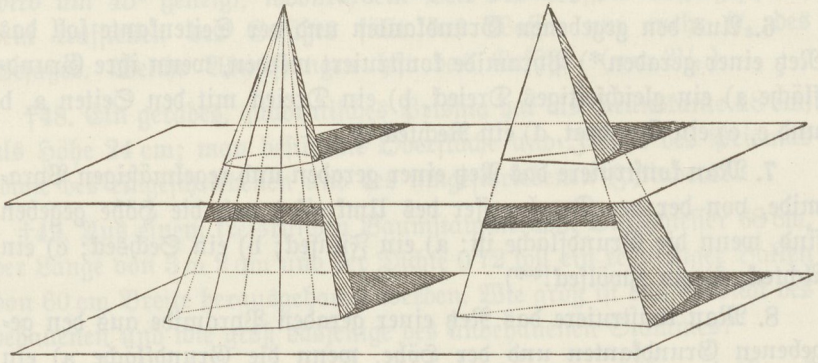
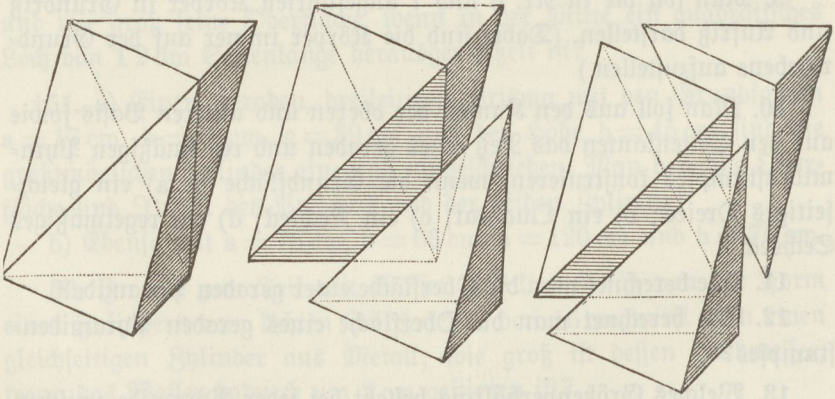


Fig. 93.



1060 15. Wie kann man zeigen, daß jede dreiseitige Pyramide der dritte Teil eines Prismas ist, welches mit der Pyramide gleiche Grundfläche und Höhe hat?

Anleitung: Der bekannte Nachweis erfolgt auf Grundlage von Fig. 93.

1061 16. Wie berechnet man das Volumen einer beliebigen Pyramide?

17. Wie berechnet man das Volumen eines Pyramidenstumpfes aus der Grundfläche G und der Deckfläche g, ferner aus der Höhe h des Stumpfes? Wie kann man die Formel $V = \frac{h}{3}(G + \sqrt{Gg} + g)$ in Worte kleiden? **1062**

18. Man berechne Oberfläche und Inhalt einer geraden, quadratischen Pyramide mit der Grundkante $s = 26\,cm$ und der Höhe $h = 84\,cm$! **1063**

19. Die Pyramide des Cheops (die größte der ägyptischen Pyramiden) mißt an der Seite der quadratischen Grundfläche 227 m und ist 137 m hoch. Wie groß ist ihr Inhalt? Wieviel Ziegel wären zu ihrer Erbauung nötig gewesen, wenn man auf $1\,m^3$ 400 Stück rechnet? (Vgl. XIV, 51!) **1064**

20. Wie Nr. 18, wenn $s = 20\,cm$ und $h = 24\,cm$ ist. **1065**

21. Wie Nr. 18, wenn $s = 24\,cm$ und $h = 35\,cm$ ist. **1066**

22. Die Oberfläche einer geraden, quadratischen Pyramide von 32 dm Grundkante beträgt $3200\,dm^2$. Wie groß ist der Inhalt? **1067**

23. Eine gerade, quadratische Pyramide hat zur Oberfläche $O = 5184\,cm^2$, zur Grundfläche $G = 1024\,cm^2$. Wie groß ist das Volumen? **1068**

24. Das Volumen einer geraden, quadratischen Pyramide beträgt $9{\cdot}68\,dm^3$, die Höhe ist 60 cm. Wie groß ist die Oberfläche? **1069**

25. Eine gerade, quadratische Pyramide hat als Oberfläche $3472\,cm^2$; ihre Grundkante verhält sich zur Seitenkante wie 14 : 25. Wie lang sind die Kanten? **1070**

†*26. Von einer geraden quadratischen Pyramide beträgt der Inhalt $1568\,cm^3$ ($3200\,cm^3$), die Oberfläche $896\,cm^2$ ($1440\,cm^2$). Wie groß sind Grundkante und Höhe? **1071**

27. Ein gläserner Briefbeschwerer hat die Form einer geraden, quadratischen Pyramide, deren Grundkante 5·6 cm mißt; das Gewicht ist 117·6 g, die Dichte 2·5. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche? **1072**

28. Das Gewicht einer geraden Pyramide aus Gußeisen ist 32·4 kg; die Kante der quadratischen Grundfläche mißt 18 cm. Wie hoch ist die Pyramide und wie groß ist ihre Oberfläche? ($s = 7{\cdot}5$.) **1073**

29. Die Grundfläche einer geraden, quadratischen Pyramide beträgt $10\,dm^2\ 24\,cm^2$; die Grundfläche verhält sich zur Mantelfläche wie 1 : 4·0625. Wie groß sind Inhalt und Oberfläche? **1074**

1075 †30. In einer geraden, quadratischen Pyramide soll sich die Grundkante zur Höhe wie 3 : 2 verhalten; wie groß muß man die Abmessungen wählen, damit die Maßzahlen von Oberfläche und Inhalt gleich groß ausfallen? (Probe.)

1076 †31. Über einem Quadrate von 60 cm² Inhalt soll eine gerade Pyramide errichtet werden, so zwar, daß das gegebene Quadrat $^1/_5$ der Gesamtoberfläche der Pyramide ausmacht. Wie hoch muß die Pyramide werden und wie groß wird ihr Inhalt und ihre Oberfläche?

1077 32. Die Oberflächen von zwei geraden, quadratischen Pyramiden von ähnlicher Gestalt unterscheiden sich um 480 cm²; ihre Grundkanten sind $s_1 = 18$ cm und $s_2 = 12$ cm. Wie groß sind die Oberflächen und Volumina?

1078 33. Die Volumina von zwei ähnlichen, geraden und quadratischen Pyramiden unterscheiden sich um 10.400 cm³; ihre Grundkanten sind $s_1 = 30$ cm und $s_2 = 10$ cm. Wie groß sind die Oberflächen und Inhalte?

1079 34. In welcher Beziehung muß die Höhe h einer geraden, quadratischen Pyramide zur Grundkante a stehen, damit die Maßzahlen von Oberfläche und Volumen übereinstimmen? Ist eine Formel gefunden, welche h durch a ausdrückt, so ist mit einem beliebigen Werte von a und dem zugehörigen Werte von h die Probe zu machen.

1080 35. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Rechteck mit den Seiten $a = 56$ cm und $b = 48$ cm; die Höhe der Pyramide beträgt 45 cm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

1081 36. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Rechteck mit dem Umfange von 168 cm; die Länge des Rechteckes übertrifft seine Breite um 24 cm. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt der Pyramide, wenn die Höhe 36 cm beträgt?

1082 37. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Rechteck von 22 cm Breite und 64 cm Länge; der Inhalt der Pyramide beträgt 28.160 cm³. Wie groß ist die Oberfläche?

1083 †38. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche einer geraden Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck von 8820 cm² Inhalt ist und bei der die Grundkanten a und b mit der Höhe h der Pyramide die Proportion $a : b : h = 9 : 5 : 6$ bilden?

1084 †39. In einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche von der Länge a und der Breite b, wobei $a > b$ sein soll, sind die zu a ge-

hörigen Seitendreiecke dem Inhalte nach größer als die zu b gehörigen. (Beweis.)

†40. Wie groß ist der Inhalt einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche von 40 cm Länge und 16 cm Breite, wenn die Oberfläche 1720 cm² beträgt und zwei benachbarte Seitendreiecke sich verhalten wie 17 : 10? (Vgl. Nr. 1084!) **1085**

41. Von einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche ist der Umfang der Grundfläche 42 cm; das Verhältnis der Grundkanten ist 3 : 4, der Inhalt des Diagonalschnittes 135 cm². Man berechne den Inhalt und die Länge einer Seitenkante! **1086**

†42. In einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche sind die Grundkanten a = 24 cm und b = 18 cm; jede Seitenkante mißt 39 cm. Man berechne Inhalt und Oberfläche! **1087**

†*43. In einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche ist die Summe aller Kanten gleich 384 cm, wobei die Grundkanten sich um 34 cm unterscheiden. Die Höhe der Pyramide ist 60 cm. Wie groß sind die Kanten und der Rauminhalt? **1088**

44. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a = 8·4 dm; die Höhe h der Pyramide beträgt 10·5 dm. Man berechne Inhalt und Oberfläche! **1089**

†45. Wie Nr. 44, wenn h = 2 a. (Allgemein, dann für a = (6 $\sqrt{3}$) cm.) **1090**

†46. Wie hoch müßte man eine regelmäßige, dreiseitige Pyramide mit der Grundkante a machen, damit die Mantelfläche doppelt so groß wie die Grundfläche werde? **1091**

†47. Von einer geraden Pyramide ist die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck; die drei Seitenkanten stoßen am Scheitel unter rechten Winkeln zusammen und sind 6 cm lang. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche? **1092**

48. Eine gerade Pyramide hat als Grundfläche ein Dreieck mit den Seiten a = 26 cm, b = 24 cm und c = 10 cm; die Höhe h der Pyramide beträgt 15 cm. Wie groß ist der Rauminhalt? **1093**

49. Die Grundfläche einer Pyramide ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b. Die durch den Scheitel des rechten Winkels gehende Seitenkante steht auf der Grundfläche senkrecht und die durch den anderen Endpunkt der Grundkante a gehende Seitenkante hat die **1094**

Länge c. Welchen Inhalt hat die Pyramide? (Allgemein, dann für a = 48 cm, b = 55 cm, c = 80 cm.)

1095 50. Wie Nr. 49 mit a = 7·2 dm, b = 6·5 dm, c = 15·3 dm.

1096 51. Die drei Grundkanten einer dreiseitigen Pyramide messen der Reihe nach 24 cm, 30 cm und 18 cm; die Höhe der Pyramide ist gleich dem Umfange der Grundfläche. Wie groß ist das Volumen?

1097 52. Eine dreiseitige Pyramide hat als Grundfläche ein Dreieck mit den drei Seiten a = 21 cm, b = 28 cm, c = 35 cm; der Fußpunkt der Höhe, die 24 cm beträgt, fällt in den Mittelpunkt des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises. Man berechne Oberfläche und Inhalt der Pyramide!

1098 53. Wie Nr. 52 mit a = 30 cm, b = 31·5 cm, c = 43·5 cm, h = = 40 cm.

1099 54. Die drei Grundkanten einer dreiseitigen Pyramide messen der Reihe nach 28 cm, 26 cm und 30 cm; wie groß ist das Volumen der Pyramide, wenn man weiß, daß der Fußpunkt der Pyramidenhöhe in den Mittelpunkt des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises fällt und die Gesamtoberfläche der Pyramide $10^1/_2$ dm² beträgt?

1100 55. Man berechne den Inhalt einer dreiseitigen Pyramide, von der jede Seitenkante 21·25 dm mißt und die drei Grundkanten der Reihe nach sind a = 5·2 dm, b = 5·6 dm, c = 6 dm!

1101 56. Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Rhombus, in dessen Mittelpunkt der Fußpunkt der Höhe fällt. Die Diagonalen des Rhombus sind 14 cm und 48 cm; die Höhe der Pyramide beträgt 23·04 cm. Wie groß sind Oberfläche und Inhalt der Pyramide?

1102 57. Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Antiparallelogramm, in das sich ein Kreis einschreiben läßt und in dem die Parallelseiten betragen: a = 98 cm und b = 50 cm; die Höhe der Pyramide beträgt 120 cm und ihr Fußpunkt fällt in den Mittelpunkt des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

1103 58. Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Deltoid, in dem die Symmetriediagonale 28 cm, die andere Diagonale 48 cm und eine Seite 30 cm mißt. Die Höhe der Pyramide beträgt 35 cm und ihr Fußpunkt fällt in den Mittelpunkt des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

59. Von einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide ist die Grundkante $s = 18\,cm$, die Höhe $h = 80\,cm$; man berechne zuerst das Volumen, dann die Seitenkante, endlich die Oberfläche! **1104**

†60. Wie groß ist die Grundkante einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide, wenn das Volumen V gegeben ist und bekannt ist, daß eine Seitenkante zweimal so lang ist wie eine Grundkante? (Allgemein, dann für $V = 40{\cdot}5\,cm^3$.) **1105**

†61. Die Summe aller Kanten einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide ist 9 m; die Grundkanten sind halb so lang als die Seitenkanten. Wie groß ist der Kubikinhalt? **1106**

62. Man berechne das Volumen einer regelmäßigen achtseitigen Pyramide mit dem Grundflächenhalbmesser $r = 8\,cm$ und der Höhe $h = (9\sqrt{2})\,cm$! **1107**

63. Man berechne den Inhalt einer regelmäßigen zwölfseitigen Pyramide, deren Seitenkanten 85 cm lang sind, wenn der Halbmesser des der Grundfläche umgeschriebenen Kreises 36 cm beträgt! **1108**

†64. Man berechne den Inhalt eines Schotterhaufens, der unten l Meter lang und b Meter breit und nach allen Seiten unter 45° abgeböscht ist! **1109**

†65. Von einem Würfel ist die Seite s gegeben; seine Grundfläche soll als Grundfläche einer Pyramide angenommen werden, deren Spitze a) in der Mitte der oberen Grundfläche des Würfels liegt, b) in der Mitte einer Kante der oberen Grundfläche angenommen wird, c) mit einer Ecke der oberen Grundfläche zusammenfällt. Man berechne für jeden dieser drei Fälle die Oberfläche! **1110**

66. Ein Würfel hat als Kante 6 cm; eine gerade, quadratische Pyramide ist dem Inhalte nach sechsmal so groß und es verhalten sich die Maßzahlen ihrer Grundfläche und Höhe wie 27 : 1. Man berechne Oberfläche und Inhalt beider Körper! **1111**

†67. Aus einem Würfel aus Ton, der $864\,cm^2$ Oberfläche hat, soll eine gerade, quadratische Pyramide geformt werden, deren Höhe $^3/_8$ von einer Grundkante beträgt. Wie groß ist die Oberfläche der Pyramide? **1112**

†68. Einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h ist ein Würfel so einzuzeichnen, daß er auf der Pyramidengrundfläche aufruht und seine oberen Ecken in die Seitenkanten der Pyramide fallen. Wie groß ist seine Kante? (Besondere Werte: $a = 48\,cm$, $h = 80\,cm$.) **1113**

1114 †69. Die Aufgabe 68 ist dahin abzuändern, daß die oberen Würfelecken in die Seitenhöhen der Pyramide fallen. (Besondere Werte: $a = 24$ cm, $h = 50$ cm.)

1115 †70. Ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite a ist gleichzeitig die Grundfläche eines geraden Prismas und einer geraden Pyramide von gleicher Höhe; wie hoch muß man beide Körper annehmen, damit ihre Mantelflächen gleich werden?

1116 71. Auf jede der sechs Flächen eines Würfels von 32 cm Kantenlänge ist eine gerade Pyramide von 30 cm Höhe aufgesetzt. Man berechne Oberfläche und Inhalt des neuen Körpers! (Zeichnerische Darstellung.)

1117 72. Die Kante eines Würfels mißt 16 cm; auf alle Würfelflächen werden kongruente, gerade Pyramiden aufgesetzt; die Oberfläche des neuen Körpers übertrifft nun die Oberfläche des Würfels um 17 dm² 28 cm². Man berechne den Inhalt und das Gewicht des Körpers, wenn er aus Gußeisen vom Eigengewichte von 7·8 hergestellt ist!

1118 †73. Auf die sechs Flächen eines Würfels mit der Kante a sind gerade Pyramiden aufgesetzt. Wie groß ist der Körperinhalt, wenn es möglich ist, durch alle Eckpunkte eine Kugelfläche zu legen?

1119 74. Die Grundkante eines geraden, quadratischen Prismas von der Höhe von 70 cm mißt 24 cm. Von seinen beiden Grundflächen ausgehend, sind aus ihm zwei pyramidenförmige Vertiefungen ausgehöhlt, deren Spitzen sich im Mittelpunkte des Prismas berühren. Man berechne Oberfläche und Inhalt des übrigbleibenden Teiles!

1120 75. Die Grundkante eines geraden, quadratischen Prismas mißt 40 mm, seine Höhe 46 mm. Auf die beiden Grundflächen des Prismas sind gerade Pyramiden von 21 mm Höhe aufgesetzt. Es ist Oberfläche und Inhalt des entstandenen Körpers zu berechnen und sein Gewicht zu bestimmen, wenn er aus Blei vom Eigengewichte von 11·5 besteht.

1121 76. Auf die beiden Grundflächen eines rechtwinkligen Parallelepipedes von der Länge von 56 cm, der Breite von 48 cm und der Höhe von 45 cm sind zwei ebenso hohe, gerade Pyramiden aufgesetzt; man berechne Inhalt und Oberfläche des entstandenen Körpers!

1122 †77. Über einem gleichseitigen Dreiecke mit der Seitenlänge a ist ein gerades Prisma und eine gerade Pyramide von gleicher Höhe aufgesetzt; wie hoch sind beide Körper zu wählen, damit ihre Mantelflächen gleich werden?

†78. Ein Prisma hat als Grundfläche ein Dreieck mit den Seiten **1123**
$a = 24$ cm, $b = 7$ cm und $c = 25$ cm; die Höhe des Prismas beträgt $4^4/_7$ cm. Wie groß ist die Oberfläche des Prismas und jener geraden, quadratischen Pyramide, die mit dem Prisma inhaltsgleich ist und eine Höhe von 8 cm hat?

†79. In einer geraden Pyramide von 24 cm Höhe ist die Grund- **1124**
fläche ein Rhombus; die beiden längeren Seitenkanten betragen je 30 cm, die beiden kürzeren um 4 cm weniger; die Pyramide ist inhaltsgleich mit einem rechtwinkligen Parallelepipede, dessen Höhe 32 cm ist und dessen Grundkanten sich wie 2 : 5 verhalten. Wie groß ist die Oberfläche des Parallelepipedes?

†80. Die drei Seiten eines Dreieckes messen der Reihe nach 37 cm, **1125**
12 cm und 35 cm; das Dreieck bildet die Grundfläche eines geraden Prismas, dessen Inhalt gleich ist dem Inhalte einer regelmäßigen, zwölfseitigen Pyramide von der Höhe $h = 15$ cm und dem Grundflächenhalbmesser $r = 14$ cm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Prismas?

†81. Ein gerades Prisma hat als Grundfläche einen Rhombus mit **1126**
den Diagonalen $D_1 = 12$ cm und $D_2 = 16$ cm; seine Oberfläche beträgt 4192 cm². Wenn man nun weiß, daß der Inhalt einer geraden, quadratischen Pyramide genau $^1/_3$ von dem Inhalte des Prismas beträgt und ihre Grundkante 20 cm lang ist, wie groß ist ihre Oberfläche?

†82. Eine gerade, quadratische Pyramide von 24 cm Höhe ist aus **1127**
Gußeisen von der Dichte 7·5 gegossen und wiegt 11 kg 760 g. Wie groß ist ihre Oberfläche? Die Pyramide soll mit einer Goldschichte von $^1/_{100}$ mm Dicke vergoldet werden. Was kostet diese Vergoldung, wenn ein Hundertschillingstück 21·172 g feines Gold enthält? (Eigengewicht des Goldes = 19·3.)

†83. Von einem geraden dreiseitigen Prisma ist die Höhe $h =$ **1128**
$= 95^5/_{21}$ cm; die Grundkanten sind $a = 28$ cm, $b = 26$ cm, $c = 30$ cm. Der Inhalt einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche ist doppelt so groß. Wie groß sind die Oberflächen beider Körper, wenn die Grundkanten der rechteckigen Pyramide 64 cm und 50 cm betragen?

†84. Wir haben ein gerades Prisma aus Karton gefertigt, dessen **1129**
Grundfläche ein Dreieck mit den Seiten $AB = 17$ cm, $BC = 28$ cm, $CA = 25$ cm ist; die Höhe des Prismas ist 42 cm. Wir schneiden nun dieses Prisma durch eine Ebene, die durch die über C gelegene Ecke der

Deckfläche geht und die beiden anderen Seitenkanten in Punkten A′ und B′ so schneidet, daß AA′ = 30 cm und BB′ = 36 cm ist. Welche Oberfläche und welchen Inhalt hat der nunmehr oben offene Prismenstumpf? *)

1130 85. Eine gerade, quadratische Pyramide mit der Grundkante s = 12 cm und der Höhe h = 8 cm ist in halber Höhe parallel zur Grundfläche zu schneiden; man soll Oberfläche und Inhalt des entstehenden Pyramidenstumpfes und der Ergänzungspyramide berechnen.

1131 86. Wie Nr. 85 mit s = 20 cm und h = 24 cm.

1132 87. Wie Nr. 85 mit s = 28 cm und h = 48 cm.

1133 88. Wie Nr. 85 mit s = 144 cm und h = 154 cm.

1134 89. Die Grundkanten beider Grundflächen eines geraden, quadratischen Pyramidenstumpfes sind S = 20 cm und s = 8 cm. Die Höhe h des Stumpfes beträgt 8 cm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

1135 90. Wie Nr. 89, wenn h = 15 cm, S = 24 cm und s = 8 cm ist.

1136 91. Die Mantelfläche eines geraden, quadratischen Pyramidenstumpfes beträgt 2300 cm²; die Kanten der Grundfläche und der Deckfläche des Stumpfes sind 30 cm und 16 cm lang. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt?

1137 92. Die Oberfläche eines geraden, quadratischen Pyramidenstumpfes beträgt 1760 cm²; die Kanten der Grundfläche und der Deckfläche sind 8 cm und 26 cm. Wie groß ist der Inhalt?

1138 93. Ein gerader, quadratischer Pyramidenstumpf hat als Volumen 12 dm³ 80 cm³. Wie groß ist die Oberfläche, wenn die Seiten der Grundfläche und der Deckfläche 20 cm und 36 cm lang sind?

1139 94. Von einem geraden, quadratischen Pyramidenstumpfe kennt man den Inhalt der Deckfläche, der 36 dm² beträgt, ferner die Höhe des Stumpfes, die 2 dm 4 cm mißt. Ferner weiß man, daß der Stumpf aus einer 9 dm 6 cm hohen Pyramide entstanden ist. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Stumpfes?

1140 95. Eine gerade, quadratische Pyramide von der Grundkante von 50 cm und der Höhe von 60 cm wird durch eine Ebene parallel zur

*) Behandelt man diese Aufgabe allgemein, indem man den Inhalt der dreieckigen Grundfläche mit f und die drei Seitenkanten mit k_1, k_2 und k_3 bezeichnet, so ergibt sich für das Volumen $V = f \cdot \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3}$.

Grundfläche so geschnitten, daß die Höhe des entstehenden Stumpfes sich zur Höhe der Ergänzungspyramide verhält wie 2 : 3. Man berechne Inhalte und Oberflächen beider Körper und ihr Verhältnis zueinander!

96. Eine gerade, quadratische Pyramide mit einer Oberfläche von 8 m² und der Grundkante von 160 cm wird durch eine Ebene parallel zur Grundfläche derartig geschnitten, daß die Höhe vom Scheitel an gerechnet in zwei Teile zerlegt wird, die sich verhalten wie 7 : 3. Man berechne die Inhalte und die Oberflächen beider Teile! **1141**

97. Jemand hält ein quadratisches Brettchen von 1 dm² Fläche im Abstande von 3 dm parallel zu einer schattenauffangenden Wand und bringt im Abstande von 1·5 dm von dem Brettchen eine Kerzenflamme so an, daß sie von den vier Ecken des Brettchens gleich weit absteht und nun auf dem Schirme ein quadratischer Schatten entsteht. Wie groß ist der Inhalt des beschatteten Raumes? **1142**

98. Eine gerade, quadratische Pyramide mit der Grundkante 30 cm und der Höhe 36 cm wird durch Ebenen, parallel zur Grundfläche, in drei Schichten von gleicher Höhe zerlegt. Wie verhalten sich ihre Inhalte? **1143**

99. Eine gerade, quadratische Pyramide mit der Grundkante 168 cm und der Höhe von 135 cm wird in drei Schichten von gleicher Höhe geteilt. Man berechne Oberfläche und Inhalte der drei Teile! **1144**

†**100.** In welchem Abstande vom Scheitel muß man a) eine gerade, quadratische Pyramide, b) eine beliebige Pyramide parallel zur Grundfläche schneiden, damit beide Teile inhaltsgleich werden? **1145**

†**101.** Man erkläre, wieso der in Nr. 100 gesuchte Abstand *nur* von der Höhe der Pyramide und nicht auch von ihrer Grundfläche abhängig ist. **1146**

†**102.** Wie in Nr. 100 ist die *Dreiteilung* einer Pyramide auszuführen. Wie groß sind die Abstände der Schnittebenen von Scheitel? **1147**

†**103.** Es ist ein Würfel durch seine Kante gegeben. Zwei quadratische Pyramiden haben zu Grundflächen zwei einander gegenüberliegende Würfelflächen und ihre Spitzen liegen in den Mitten derjenigen Würfelflächen, die den gewählten Grundflächen gegenüberliegen. Wie groß ist der Inhalt des aus zwei Pyramidenstumpfen gebildeten Körpers? **1148**

†**104.** Von einem geraden, quadratischen Pyramidenstumpfe ist das Volumen 7600 cm³. Die Grundkanten der unteren und der oberen **1149**

quadratischen Begrenzung sind S und s; die Höhe des Stumpfes ist h. Wie groß ist die Oberfläche, wenn $S : s : h = 15 : 10 : 6$ ist?

1150 †105. Ein massiv aus Eisen gegossener Obelisk besteht zunächst aus einem geraden, quadratischen Pyramidenstumpfe mit den Grundkanten von 172 mm und 90 mm; auf seiner Deckfläche steht eine gerade Pyramide von 24 mm Höhe. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche, wenn die Gesamthöhe des Obelisken 864 mm beträgt? Wie groß ist das Gewicht, wenn die Dichte 7·8 ist? — Wieviel würde eine Vergoldung von 0·01 mm Dicke kosten, wenn die Dichte des Goldes 19·3 ist und 1 kg Gold 4667 S wert ist?

1151 †106. Eine gerade Pyramide von 168 cm Höhe und rechteckiger Grundfläche, deren Grundkanten im Verhältnisse 5 : 12 stehen, sinkt, wenn man sie mit der Grundfläche auf Wasser setzt, mit $^1/_4$ ihrer Höhe ein. Ihr Gewicht beträgt 31·08 kg. Wie groß sind ihre Grundkanten und Seitenkanten? Welchen Inhalt hat die Pyramide? Welches Eigengewicht hat das Material der Pyramide?

1152 107. Von einem geraden, quadratischen Pyramidenstumpfe beträgt die Oberfläche 26 dm^2; die Grundkanten messen je 30 cm, die Kanten der Deckfläche je 20 cm. Wie groß ist der Inhalt des Pyramidenstumpfes und wie groß ist Inhalt und Oberfläche jener Pyramide, zu der der Pyramidenstumpf gehört?

1153 108. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Rechteck, in dem sich zwei anstoßende Seiten verhalten wie 5 : 9 und der Flächeninhalt $7^1/_5$ dm^2 beträgt. Die Pyramide ist 24 cm hoch und wird in der halben Höhe parallel zur Grundfläche geschnitten. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des entstehenden Pyramidenstumpfes?

1154 †109. Von einem geraden, rechteckigen Pyramidenstumpfe sind die Kanten der Grundfläche 60 cm und 42 cm; der Umfang der Grundfläche beträgt 136 cm. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt des Stumpfes, wenn seine Höhe 24 cm beträgt?

1155 110. Ein rechtwinkliges Parallelepiped von 178 cm Länge, 154 cm Breite und 45 cm Höhe ist gegeben. Auf der Deckfläche wird ein Rechteck gezeichnet, dessen Seiten parallel zu den Kanten in je 5 cm Abstand verlaufen; dieses Rechteck soll die Grundfläche eines geraden Pyramidenstumpfes bilden, dessen Deckfläche in der unteren Grundfläche des Parallelepipedes liegt und einen Umfang von 416 cm hat. Der Pyra-

midenſtumpf wird aus dem Prisma herausgeſchnitten. Wie groß iſt Inhalt und Oberfläche des übrigbleibenden Teiles?

111. Die drei Grundkanten einer dreiſeitigen Pyramide von der Höhe $h = 30$ cm betragen der Reihe nach: 26 cm, 10 cm und 24 cm; die Pyramide wird in halber Höhe parallel zur Grundfläche geſchnitten. Wie groß ſind die Inhalte beider Teile? **1156**

†112. Eine Pyramide hat als Grundfläche ein Trapez mit den parallelen Seiten $a = 96$ cm, $b = 40$ cm; die beiden anderen Seiten ſind $c = 34$ cm und $d = 50$ cm. Die Höhe der Pyramide beträgt 60 cm. Die Pyramide wird in halber Höhe parallel zur Grundfläche geſchnitten. Wie groß iſt der Inhalt des Pyramidenſtumpfes? **1157**

†113. Eine 24 cm hohe Pyramide hat als Grundfläche ein regelmäßiges Zwölfeck, das einem Kreiſe von Halbmeſſer $r = 10$ cm eingeſchrieben iſt. Die Pyramide wird in halber Höhe parallel zur Grundfläche geſchnitten. Wie groß iſt der Inhalt des Pyramidenſtumpfes? **1158**

†114. Von einem Pyramidenſtumpfe, deſſen Grundfläche ein Rhombus iſt, kennt man den einen Diagonalſchnitt vollſtändig; er iſt ein Antiparallelogramm, in dem die Parallelſeiten $a = 180$ cm, $b = 120$ cm lang ſind, während jede der beiden anderen Seiten 50 cm lang iſt. Von dem anderen Diagonalſchnitte kennt man nur die beiden nicht parallelen Seiten, von denen jede 41 cm mißt. Wie groß iſt der Rauminhalt des Pyramidenſtumpfes? **1159**

XVII. Der Kegel und der Kegelſtumpf.

1. Wie kann man ſich einen Kegel entſtanden denken?*) **1160**

2. Wovon wird ein Kegel begrenzt? **1161**

3. Was verſteht man unter Achſe, was unter Höhe eines Kegels? Was iſt das charakteriſtiſche Dreieck eines Kegels? Wann iſt ein Kegel ein gerader, wann ein ſchiefer? **1162**

4. Was iſt ein gleichſeitiger Kegel? **1163**

5. Welche Schnittfiguren erhält man, wenn man einen Kegel durch eine Ebene ſchneidet, die **1164**

a) durch die Achſe gelegt iſt,

b) durch die Spitze des Kegels geht,

*) Man benütze die Modelle, von denen in XVI, 7 die Netze zu konſtruieren waren!

c) schief zur Grundfläche gelegt ist und alle Seiten (Erzeugenden) schneidet,

d) zu einer Erzeugenden parallel ist,

e) zu zwei Erzeugenden parallel ist? *)

1165 6. Man konstruiere das Netz eines geraden Kegels aus dem gegebenen Halbmesser und der Seite!

1166 7. Man konstruiere das Netz eines geraden Kegels aus dem gegebenen Halbmesser und der Höhe! **)

1167 8. Man konstruiere das Netz eines gleichseitigen Kegels!

1168 9. Man soll die in Nr. 6—8 angeführten Körper im Grundriß und Aufriß darstellen. (Dabei sind die Körper immer auf der Grundrißebene aufzustellen.)

1169 10. Man konstruiere das Netz eines geraden Kegelstumpfes aus den beiden Halbmessern der Grundflächen und der Höhe!

1170 11. Wie berechnet man die Oberfläche eines geraden Kegels?

1171 12. Wie berechnet man das Volumen eines Kegels?

1172 13. Man berechne Oberfläche und Kubikinhalt eines gleichseitigen Kegels aus dem Halbmesser!

1173 14. Wie berechnet man die Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes aus den Halbmessern der Grundflächen und der Seite?

1174 15. Wie berechnet man das Volumen eines Kegelstumpfes aus den Halbmessern der Grundflächen und der Höhe? ***)

1175 16. Man berechne Inhalt und Oberfläche eines geraden Kegels aus dem Halbmesser $r = 7$ cm und der Höhe $h = 24$ cm!

1176 17. Wie Nr. 16 mit $r = 8$ cm und $h = 15$ cm.

1177 18. Wie Nr. 16 mit $r = 20$ cm und $h = 21$ cm.

1178 19. Wie Nr. 16 mit $r = 16$ cm und $h = 30$ cm.

1179 20. Wie Nr. 16 mit $r = 1{\cdot}6$ cm und $h = 6{\cdot}3$ cm.

1180 21. Wie Nr. 16 mit $r = 20$ cm und $h = 99$ cm.

1181 22. Wie Nr. 16 mit $r = 3{\cdot}3$ cm und $h = 5{\cdot}6$ cm.

---

*) Die für den elliptischen Zylinderschnitt auf Seite 111 angedeutete Beweismethode läßt sich ganz ähnlich auch für die einzelnen Gattungen der Kegelschnitte verwenden.

**) Man wähle den Durchmesser ebenso groß wie bei den Pyramiden in XVI, 7.

***) Die Ableitung kann entweder auf Grund der in XVI, 17 gewonnenen Formel über den Pyramidenstumpf ausgeführt oder unmittelbar mit Hilfe ähnlicher Dreiecke aus dem charakteristischen Dreiecke des Kegels gewonnen werden.

23. Man berechne Inhalt und Oberfläche eines geraden Kegels aus dem Halbmesser $r = 48$ cm und der Seite $s = 73$ cm! **1182**

24. Wie Nr. 23 mit $r = 1{\cdot}3$ cm und $s = 8{\cdot}5$ cm. **1183**

25. Wie Nr. 23 mit $r = 60$ cm und $s = 109$ cm. **1184**

26. Man berechne Inhalt und Oberfläche eines geraden Kegels aus der Höhe $h = 80$ cm und der Seite $s = 89$ cm! **1185**

27. Wie Nr. 26 mit $h = 14$ cm und $s = 14{\cdot}9$ cm. **1186**

28. Wie Nr. 26 mit $h = 1{\cdot}17$ cm und $s = 1{\cdot}25$ cm. **1187**

29. Der Inhalt V eines geraden Kegels beträgt 8482·3 cm³; seine Höhe h ist 36 cm. Wie groß ist die Oberfläche? **1188**

30. Wie Nr. 29 mit $V = 14$ dm³ 865 cm³ und $h = 84$ cm. **1189**

31. Wie Nr. 29 mit $V = 104$ dm³ 501 cm³ und $h = 77$ cm. **1190**

32. Von einem geraden Kegel beträgt die Höhe 45 cm; der Umfang eines Achsenschnittes ist 162 cm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche? **1191**

33. Ein eiserner Kegel vom Halbmesser von 6 cm wiegt 2 kg 375·04 g. Wie hoch ist er, wenn das Eigengewicht 7·5 ist? **1192**

34. Die Mantelfläche eines geraden Kegels beträgt 427·26 dm²; der Durchmesser ist 16 dm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche? **1193**

35. Von einem geraden Kegel ist die Mantelfläche 188·495 dm²; der Halbmesser verhält sich zur Höhe wie 3 : 4. Wie groß sind Oberfläche und Inhalt? **1194**

36. Von einem geraden Kegel stimmen die Maßzahlen von Inhalt und Oberfläche überein; der Halbmesser verhält sich zur Höhe wie 4 : 3. Wie groß sind die Abmessungen, wie groß ist Inhalt und Oberfläche? **1195**

†37. Man kennt von einem geraden Kegel die Höhe h und die Oberfläche O. Wie groß ist das Volumen? (Zuerst allgemein, dann für $h = 60$ cm, $O = 2488{\cdot}13$ cm².) **1196**

*38. Bei einem geraden Kegel von 75 cm Seitenlänge hat das Achsenschnittdreieck einen Inhalt von 27 dm². Wie groß sind Halbmesser und Höhe? **1197**

*39. Halbmesser und Seite eines geraden Kegels sind zu berechnen, dessen Höhe 24 cm und dessen Mantelfläche $(260\,\pi)$ cm² beträgt. **1198**

*40. Die Seite eines geraden Kegels ist um 9 cm größer als der Halbmesser. Wie groß sind beide und wie groß ist die Höhe des Kegels, wenn der Inhalt des Kegelmantels $(580\,\pi)$ cm² ist? **1199**

*41. In einem geraden Kegel sind Halbmesser und Höhe gleich groß. Verlängert man ersteren um 3 cm und vermindert man letztere um **1200**

ebensoviel, so wächst der Inhalt um $(171\,\pi)\,\mathrm{cm}^2$! Wie groß war der Inhalt des ursprünglichen Kegels?

1201 42. Wie groß muß der Halbmesser eines gleichseitigen Kegels genommen werden, damit die Maßzahlen des Inhaltes und der Oberfläche übereinstimmen?

1202 †43. In einem geraden Kegel ist die Mantelfläche doppelt so groß als die Grundfläche. Wie verhält sich der Halbmesser zur Seite? Welche Beziehung herrscht zwischen Grundfläche und Mantelfläche einer beliebigen dem Kegel umgeschriebenen Pyramide?

1203 †44. Die Mantelfläche eines geraden Kegels ist, in die Ebene ausgebreitet, ein Halbkreis vom Halbmesser r. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Kegels? (Allgemein und für $r = 40\sqrt{3}$ cm.)

1204 †45. Wie Nr. 44, wenn die Mantelfläche ein Viertelkreis ist. (Allgemein und für $r = 12\sqrt{15}$ cm.)

1205 †46. Von einem geraden Kegel mit der Seite $s = 9\sqrt{2}$ cm ist die Mantelfläche im abgerollten Zustande ein Kreisausschnitt mit dem Zentriwinkel $\alpha = 120°$. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

1206 †47. Ein Kegel soll mit der Spitze nach unten so im Wasser schwimmen, daß er mit $^3/_4$ seiner Höhe eintaucht. Wie groß muß sein Eigengewicht sein?

1207 †48. Wir haben einen hohlen, an der Grundfläche offenen Kegel aus Eisenblech, der als Durchmesser 50 cm und als Höhe 60 cm hat; er soll durch Eingießen von Quecksilber mit der Spitze nach unten stabil schwimmen, so daß $^4/_5$ der Höhe unter Wasser sind. Wieviel Quecksilber muß man eingießen, wenn der Kegelmantel selbst 5 kg 106·1 g wiegt?

1208 †49. Wie hoch wird in Nr. 48 das Quecksilber den Kegel füllen? ($s = 13{\cdot}6$.)

1209 50. Die längste Seite S eines schiefen Kegels ist 21 cm lang, die kürzeste Seite s mißt 13 cm und der Durchmesser d beträgt 20 cm. Wie groß ist sein Inhalt?

1210 51. Wie Nr. 50 mit $S = 29$ cm, $s = 25$ cm, $d = 6$ cm.

1211 52. Wie Nr. 50 mit $S = 136$ mm, $s = 122$ mm, $d = 86$ mm.

1212 †53. Ein gleichseitiger Zylinder und ein gleichseitiger Kegel sind inhaltsgleich. Wie verhalten sich ihre Oberflächen? Wie ihre Mantelflächen?

†54. Ein gleichseitiger Zylinder und ein gleichseitiger Kegel haben gleiche Oberfläche. Wie verhalten sich ihre Volumina? **1213**

†55. Ein gleichseitiger Zylinder und ein gleichseitiger Kegel haben gleiche Mantelfläche. Wie verhalten sich ihre Oberflächen und Volumina? **1214**

56. Die Grundkanten einer dreiseitigen Pyramide sind $a = 16$ cm, $b = 30$ cm, $c = 34$ cm, die Höhe ist $h = 36$ cm. Wie groß ist ihr Volumen und wie groß sind die Inhalte der beiden Kegel, die sich der Pyramide ein- und umschreiben lassen? **1215**

57. Wie Nr. 56 mit $a = 104$ mm, $b = 112$ mm, $c = 120$ mm, $h = 180$ mm. **1216**

58. Von einem geraden Zylinder enthält die Oberfläche $(4088 \cdot \pi)$ Flächeneinheiten; der Halbmesser beträgt 28 Längeneinheiten. Dem Zylinder ist ein gerader Kegel eingeschrieben; wie groß ist dessen Oberfläche und Inhalt? **1217**

59. Ein gerader Kegel mit dem Halbmesser $r = 9$ cm und der Höhe $h = 40$ cm hat dieselbe Oberfläche wie ein gerader Zylinder vom Durchmesser $d = 10$ cm; um wieviel unterscheiden sich ihre Volumina? **1218**

60. Aus einem eisernen Würfel vom Gewichte von 1 kg 180·98 g soll ein möglichst großer, gerader Kegel herausgedreht werden, dessen Grundfläche und Spitze in zwei einander gegenüberliegenden Würfelflächen liegen. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche dieses Kegels? (Eigengewicht des Eisens 7·5.) **1219**

†61. Ein gerader Zylinder und ein gerader Kegel haben gleiche Grundfläche und Höhe; zudem sind die Mantelflächen gleich. Wann kann dies der Fall sein und in welchen Beziehungen stehen dann die Inhalte und die Oberflächen? **1220**

62. Ein gerader Kegel vom Halbmesser $r = 12$ cm und der Höhe $h = 16$ cm hat eine Mantelfläche, die ebenso groß ist wie die Mantelfläche eines geraden Zylinders mit dem Halbmesser $r = 8$ cm. Wie groß sind Oberflächen und Inhalte beider Körper? **1221**

63. Von einem geraden Zylinder ist der Halbmesser $r = 28$ cm, die Höhe $h = 26·5$ cm. Ein gerader Kegel hat die gleiche Grundfläche wie der Zylinder; auch haben beide Körper gleiche Mantelflächen. Man soll die Oberflächen und Inhalte berechnen. **1222**

64. Von einem geraden Zylinder beträgt der Halbmesser 3·2 cm, die Höhe 12 cm; aus dem Zylinder sind zwei Kegel herausgebohrt, **1223**

deren Spitzen sich im Mittelpunkt des Zylinders berühren und deren Grundflächen mit seinen Grundflächen zusammenfallen. Man berechne Oberfläche und Inhalt des übrig bleibenden Körpers!

1224 65. Einem gleichseitigen Dreiecke von der Seite a ist ein Kreis umgeschrieben und ein zweiter eingeschrieben; der erstere bildet die Grundfläche eines geraden Kegels, der zweite die Grundfläche eines geraden Zylinders. Beide Körper sollen gleich hoch sein; wie groß wird man ihre Höhe annehmen müssen, damit der Mantel des Kegels doppelt so groß ist wie der Mantel des Zylinders? (Man mache die Probe für $a = 30$ cm!)

1225 66. Die Seite eines gleichseitigen Kegels beträgt 2 cm. Wie groß ist das Volumen und die Oberfläche der dem Kegel umgeschriebenen regelmäßigen dreiseitigen Pyramide?

1226 67. Die längste Seite eines schiefen Kegels ist gleich 17 cm, die kürzeste gleich 10 cm; der Durchmesser beträgt 21 cm. Wie groß ist die Oberfläche eines dem Kegel inhaltsgleichen, geraden Zylinders von der Höhe von 6 cm.

1227 68. Ein schiefer Kegel hat als längste und kürzeste Seite 20 cm und 13 cm; der Halbmesser beträgt 5·5 cm. Ein gerader Zylinder hat einen sechsmal so großen Inhalt, ist aber nur halb so hoch als der Kegel. Wie groß ist seine Oberfläche?

1228 69. Von einem schiefen Kegel mißt die längste Seite 29 cm, die kürzeste 25 cm, der Halbmesser 3 cm; sein Inhalt beträgt $^5/_8$ vom Inhalte eines anderen, jedoch geraden Kegels, dessen Höhe doppelt so lang ist wie die Differenz der längsten und der kürzesten Seite des schiefen Kegels. Man soll Inhalt und Oberfläche des geraden Kegels berechnen.

1229 70. Man hat einen hölzernen Kegel vom Halbmesser von 16 cm und der Höhe von 63 cm auf der Drehbank von der Grundfläche aus so lange konzentrisch ausgehöhlt, bis sein Gewicht nur mehr $87^1/_2\,\%$ des ursprünglichen Gewichtes betrug. Wie groß war dann die Oberfläche des ausgehöhlten Kegels?

1230 †71. Ein gerader Kegel hat den Durchmesser $d = 18$ cm und die Seite $s = 15$ cm. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt des Kegels sowie jenes gleichseitigen Zylinders, der in den Kegel eingeschrieben werden kann? (Vgl. S. 39, Nr. 367.)

1231 †72. Wie Nr. 71 mit $d = 110$ mm und $s = 143$ mm.

1232 †73. Wie Nr. 71 mit $d = 496$ mm und $s = 527$ mm

†74. Einem schiefen Kegel mit der längsten Seite S = 195 mm und der kürzesten s = 169 mm sowie mit dem Durchmesser 182 mm ist ein gleichseitiger Zylinder eingeschrieben; man soll das Volumen des Kegels sowie Inhalt und Oberfläche des Zylinders berechnen. **1233**

75. Man berechne Oberfläche und Inhalt eines geraden Kegelstumpfes, dessen Grundflächenhalbmesser R = 24 cm und r = 8 cm sind und dessen Höhe h = 30 cm ist! **1234**

76. Wie Nr. 75 mit R = 17 cm, r = 10 cm, h = 24 cm. **1235**

77. Wie Nr. 75 mit R = 29 cm, r = 20 cm, h = 40 cm. **1236**

78. Wie Nr. 75 mit R = 24 cm, r = 16 cm, h = 15 cm. **1237**

79. Wie Nr. 75 mit R = 30 cm, r = 20 cm, h = 24 cm. **1238**

80. Wie Nr. 75 mit R = 45 cm, r = 15 cm, h = 72 cm. **1239**

81. Man berechne Oberfläche und Inhalt eines geraden Kegelstumpfes mit der Seite s = 101 cm und den beiden Grundflächenhalbmessern R = 50 cm und r = 30 cm! **1240**

82. Wie Nr. 77, wenn s = 85 cm, R + r = 27 cm und R − r = = 13 cm ist. **1241**

83. Von einem geraden Kegel ist der Halbmesser r = 14 cm, die Höhe h = 48 cm; der Kegel wird in halber Höhe parallel zur Grundfläche geschnitten. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Kegelstumpfes? **1242**

84. Wie Nr. 83 mit r = 32 cm und h = 60 cm. **1243**

85. Die Seite eines geraden Kegels beträgt 20 cm, seine Mantelfläche 753·98 cm²; man schneidet den Kegel in halber Höhe parallel zur Grundfläche. Die Inhalte und Oberflächen beider Teile sind zu berechnen. **1244**

†86. Ein gerader Kegel vom Halbmesser r = 24 cm und der Höhe h = 45 cm wird durch zwei zur Grundfläche parallele Ebenen so geschnitten, daß die Höhe in drei gleiche Teile zerfällt. Man berechne die Inhalte und die Oberflächen der drei Teile und des ganzen Kegels! **1245**

87. Ein gerader Kegel von der Höhe h = 36 cm hat als Grundfläche einen Kreis mit dem Halbmesser r = 15 cm; der Kegel soll parallel zur Grundfläche derart geschnitten werden, daß der abgeschnittene Kegel 12 cm hoch ist. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Kegelstumpfes? **1246**

88. Ein gerader Kegel, dessen Achsenschnitt ein Dreieck von 5760 cm² Inhalt ist und dessen Höhe sich zum Durchmesser verhält wie 20 : 9, ist **1247**

durch eine Ebene nach einem Kreise geschnitten, dessen Inhalt $^1/_{16}$ vom Inhalte der Grundfläche beträgt. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt des entstandenen Kegelstumpfes?

1248 89. Ein schiefer Kegel, in dem die längste Seite $S = 68$ cm, die kürzeste $s = 40$ cm und der Durchmesser $d = 36$ cm ist, wird in halber Höhe parallel zur Grundfläche geschnitten. Wie groß sind die Inhalte beider Teile?

1249 †90. Die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes beträgt 439·82 cm², seine Seite mißt 10 cm, seine Höhe 8 cm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Stumpfes?

1250 †91. Die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes beträgt 314·159 cm²; die Seite ist 1 dm, die Differenz der beiden Grundflächenhalbmesser ist 6 cm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Stumpfes?

1251 †92. Die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes beträgt 612·61 cm²; das Verhältnis zwischen den Halbmessern der Begrenzungskreise und der Seite ist gegeben durch $R : r : s = 2 : 1 : 2{\cdot}6$. Wie groß sind die Abmessungen? Wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

1252 †93. Die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes beträgt 989 dm² 60 cm²; die Abmessungen des Stumpfes stehen im Verhältnisse von $R : r : h = 5 : 2 : 4$. Wie groß sind die Abmessungen, wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

1253 *94. Der Inhalt eines geraden Kegelstumpfes mit der Höhe 12 cm beträgt $(532\,\pi)$ cm³. Wie groß ist seine Oberfläche, wenn sich seine beiden Halbmesser um 5 cm unterscheiden?

1254 *95. Wie groß sind die Halbmesser der beiden Begrenzungskreise eines geraden Kegelstumpfes, von dem die Höhe 30 cm, die Seite 34 cm und der Kubikinhalt $(24{\cdot}16\,\pi)$ dm³ beträgt?

1255 †96. Die abgerollte Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes bildet einen Kreisringausschnitt vom Inhalte von 804·25 cm²; die Breite des Ringes ist 16 cm, der Zentriwinkel des Ausschnittes beträgt 90°. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Stumpfes?

1256 †97. Man findet häufig für die Inhaltsberechnung eines Kegelstumpfes, bei dem die Höhenausdehnung die Dicke weitaus übertrifft (wie dies z. B. bei Fichtenstämmen der Fall ist), die folgende Regel angegeben: „Man multipliziere den ‚Mittelschnitt' mit der Höhe des Stumpfes!" Wie groß ist der Fehler, den man dabei begeht?

†98. Man untersuche, wie groß der Fehler bei Berechnung eines Fichtenstammes ist, bei dem $2R = 48$ cm, $2r = 36$ cm und $h = 6$ m ist! **1257**

99. Ein gerader Kegel, der durch den Halbmesser r und die Höhe h bestimmt ist, schwimmt mit der Spitze nach oben so auf dem Wasser, daß er bis zur halben Höhe einsinkt. Wie groß muß seine Dichte sein? Wie groß müßte die Dichte gewählt werden, damit der Kegel mit der Spitze nach unten bis zur Hälfte der Höhe einsinke? **1258**

100. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, auf dem die untere Grundfläche eines umgeworfenen Kegelstumpfes mit den Abmessungen R, r und s beim Weiterrollen des Kegelstumpfes läuft? **1259**

†101. Man hat einem geraden, quadratischen Pyramidenstumpfe mit den Kanten S und s der beiden Grundflächen und mit der Höhe h je einen Kegelstumpf ein- und umgeschrieben; wie verhalten sich die Inhalte dieser drei Körper zueinander? **1260**

102. Ein gerader Kegel vom Halbmesser $r = 14$ cm ist in halber Höhe parallel zur Grundfläche geschnitten; der Inhalt des unteren Teiles ist viermal so groß wie der Inhalt eines gleichseitigen Zylinders vom Halbmesser $r' = 7$ cm. Man berechne die Inhalte und Oberflächen beider Körper! **1261**

103. Ein gerader Kegelstumpf mit den Halbmessern 14 cm und 6 cm und der Höhe 15 cm und ein gerader Zylinder haben gleiche Mantelflächen; die Höhe des Zylinders ist gleich der Seite des Kegelstumpfes. Wie groß sind die Oberflächen und Inhalte beider Körper? **1262**

†104. Ein gerader Kegel hat als Achsenschnitt ein gleichschenkliges Dreieck mit 660 cm² Inhalt; der Halbmesser ist 11 cm. Der Kegel wird in $^3/_4$ der Höhe, von der Spitze aus gerechnet, parallel zur Grundfläche geschnitten; man soll die Inhalte und Oberflächen beider Teile berechnen. Auch ist Inhalt und Oberfläche des größten Zylinders zu bestimmen, den man dem Stumpfe einschreiben kann. **1263**

†105. Die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes beträgt 16022·2 cm²; seine Seite mißt 85 cm und die beiden Halbmesser R und r verhalten sich wie 4 : 1. Man soll Oberfläche und Inhalt berechnen, ferner Oberfläche und Inhalt des größten Zylinders bestimmen, den man dem Stumpfe einschreiben kann. In welchem Verhältnisse stehen die Inhalte beider Körper? **1264**

†106. Wenn man den in Nr. 105 gegebenen Kegelstumpf aus Blech herstellen und ihn mit Wasser gefüllt auf die kleinere Kreisfläche auf- **1265**

stellen würde, wie groß wäre der Bodendruck? Wie groß wäre er, wenn der Kegelstumpf auf der größeren Kreisfläche stehen würde?

1266 †107. Ein gerader Kegelstumpf hat als Halbmesser der Begrenzungskreise 36 cm und 15 cm und sein Inhalt beträgt 60 dm^3 431 cm^3; die Mantelfläche eines geraden Kegels von der Seitenlinie $s = 17$ cm ist der siebente Teil der Mantelfläche des Stumpfes. Man berechne die Inhalte und Oberflächen beider Körper!

1267 †108. Ein Kreis mit dem Halbmesser $R = 21^3/_4$ cm ist gleichzeitig die Grundfläche eines geraden Zylinders und eines geraden Kegelstumpfes, dessen Deckfläche den Halbmesser $r = 15^3/_4$ cm hat; beide Körper sollen gleiche Höhe haben. Wie hoch muß diese angenommen werden, wenn sich die Mantelfläche des Zylinders zu jener des Kegelstumpfes verhalten soll wie 29 : 65?

1268 †109. In einem hohlen Glaskegel vom Halbmesser $r = 12$ cm und der Höhe $h = 24$ cm steht gefärbtes Wasser 6 cm hoch; wie hoch steht das Wasser, wenn man den Kegel auf die Spitze stellt?

1269 †110. Zehn Bleiklötze von der Form von Kegelstumpfen mit den Halbmessern $R = 6$ cm, $r = 4$ cm und der Höhe $h = 12$ cm sollen in eine zylindrische Röhre von der Wanddicke $d = 2$ cm und dem lichten Durchmesser $D = 30$ cm umgegossen werden. Wie lang wird sie ausfallen?

1270 †111. Ein zylindrischer Brunnenschacht vom Durchmesser $D = 1{\cdot}2$ m soll um $2{\cdot}1$ m tiefer gegraben werden. Zur Förderung des Erdreiches dient ein Eimer von der Form eines Kegelstumpfes, dessen oberer Durchmesser 36 cm, dessen unterer Durchmesser 18 cm und dessen Seite 41 cm beträgt. (Alle Abmessungen *innen* gemessen.) Wie oft wird dieser Eimer zu fördern sein, wenn vier Raumteile festen (gewachsenen) Erdreichs gleich fünf Raumteilen gelockerten (gegrabenen) Erdreichs sind?

1271 †112. Von einem geraden Zylinder ist der Halbmesser $r = 24$ cm, die Höhe $h = 70$ cm. In den Zylinder sind zwei Kegel derartig eingeschrieben, daß jeder auf einer Grundfläche aufruht und seine Spitze im Mittelpunkte der zweiten Grundfläche liegt. Beide schließen dadurch einen Doppelkegel ein, während ihre Mantelflächen einen Körper bilden, der aus zwei kongruenten Kegelstumpfen besteht, die mit den kleineren Grundflächen aufeinander aufruhen. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Doppelkegels? Wie verhält sich das Volumen des

Doppelkegels, des Doppelkegelstumpfes und des Zylinders? Wie verhalten sich die Mantelflächen der beiden ersten Körper?

†113. Ein gerader Kegelstumpf hat folgende Abmessungen $R = 84$ cm, $r = 33{\cdot}6$ cm, $h = 63$ cm; man hat in ihn zwei Kegel eingezeichnet, von denen jeder eine Grundfläche des Stumpfes als Grundfläche hat, während seine Spitze im Mittelpunkte der zweiten Grundfläche liegt. Man berechne Inhalt und Oberfläche des gemeinsamen Doppelkegels! **1272**

XVIII. Rotationskörper.

1. Es rotieren um ihre Symmetrielinien als Achsen: a) ein gleichschenkliges Dreieck, b) ein Rechteck, c) ein Antiparallelogramm, d) ein Deltoid. Was für Rotationskörper entstehen? *) **1273**

2. Man berechne Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers, den ein gleichschenkliges Dreieck mit den Seiten $a = 88$ cm, $b = c = 125$ cm bei der Rotation um die Symmetrielinie erzeugt! **1274**

3. Man berechne Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers, den ein Rechteck von 48 cm Länge und 26 cm Breite erzeugt, wenn es um die zur Länge parallele Symmetrielinie rotiert! **1275**

4. Man berechne Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers, den ein Antiparallelogramm mit den Seiten $a = 158$ cm, $b = 120$ cm, $c = d = 181$ cm erzeugt, wenn es um seine Symmetrielinie rotiert! **1276**

5. Man berechne Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers, den ein Deltoid mit den Seiten $AC = BC = 61$ cm, $AD = BD = 87$ cm und der Symmetrielinie $CD = 74$ cm bei der Rotation um die letztere erzeugt! **1277**

6. Ein Quadrat rotiert um eine Seite s; wie groß ist Oberfläche und Inhalt des Rotationskörpers? **1278**

7. Wie Nr. 6, wenn das Quadrat um eine Diagonale rotiert. **1279**

†8. Wie Nr. 6, wenn das Quadrat um eine Achse rotiert, die parallel zu einer Diagonale durch eine Ecke des Quadrates geht. **1280**

*) Bei der Behandlung von Aufgaben über Rotationskörper empfiehlt es sich, möglichste Sorgfalt auf die Darstellung solcher Körper zu legen. Es wird dadurch das Verständnis dieser Aufgaben wesentlich erhöht und die Lösung gelingt dadurch auch in schwierigeren Fällen. Besonders anschaulich wirken perspektive Bilder des in der Mitte durch einen Achsenschnitt halbierten Körpers, wie die zu den Aufgaben Nr. **1316, 1322** und **1325** beigegebenen Figuren zeigen.

1281 9. Ein Rechteck mit den Seiten $a = 38$ cm und $b = 22$ cm rotiert um seine beiden Symmetrielinien; man berechne Inhalte und Oberflächen der beiden Rotationskörper!

1282 10. In einen Kreis vom Halbmesser $r = 16$ cm ist ein gleichseitiges Dreieck eingeschrieben; der Kreis wird um den auf einer Dreieckseite senkrechten Durchmesser gedreht. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers, den das Dreieck beschreibt?

1283 †11. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite s rotiert um eine Achse, die parallel zur Höhe des Dreieckes durch eine Ecke geht; man berechne Oberfläche und Inhalt des Rotationskörpers! *)

1284 †12. Man berechne Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers, der entsteht, wenn sich ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite s um eine Achse dreht, die durch eine Ecke parallel zur gegenüberliegenden Seite verläuft!

1285 †13. Von einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Höhe $h = 176$ cm, der Inhalt $f = 1\,m^2\ 32\,cm^2$; das Dreieck rotiert um eine Achse, die durch einen Eckpunkt der Grundlinie parallel zur Höhe verläuft. Man berechne Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers!

1286 14. Ein Trapez hat als Parallelseiten $a = 30$ cm, $b = 18$ cm, eine der nicht parallelen Seiten c steht senkrecht auf der Grundlinie und mißt 35 cm. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des Rotationskörpers, der bei der Drehung um c beschrieben wird?

1287 15. Wie Nr. 14, wenn $a = 45$ cm, $b = 30$ cm, $c = 36$ cm und wenn als Rotationsachse die Seite a verwendet wird.

1288 16. Ein Deltoid, in dem die Seiten 10 cm und 17 cm lang sind, rotiert um die Symmetriediagonale; wie groß ist Oberfläche und Inhalt des Rotationskörpers, wenn die zweite Diagonale 16 cm lang ist?

---

*) Zur Berechnung von Rotationskörpern hat Guldin (geb. 1577 zu St. Gallen, gest. 1643 zu Wien) folgende Regeln angegeben:

1. „Man findet den Rauminhalt eines Rotationskörpers, wenn man den Flächeninhalt der Figur, die den Rotationskörper erzeugt, mit dem Wege multipliziert, den der Schwerpunkt der erzeugenden Figur bei der Rotation beschreibt."

2. „Man findet die Oberfläche eines Rotationskörpers, wenn man die Summe der Seiten, die die Rotationsflächen erzeugen, mit dem Wege multipliziert, den der Schwerpunkt des erzeugenden Umfangstückes bei der Rotation beschreibt."

Über den Gang des Beweises für diese Sätze siehe später unter Nr. **1316!** Vorläufig prüfe man die „Guldinschen Regeln" an den Ergebnissen der Aufgaben dieses Abschnittes auf ihre Richtigkeit!

17. Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten a und b bekannt sind, rotiert einmal um a, das anderemal um b; wie verhalten sich die Mantelflächen und wie die Inhalte beider Rotationskörper? **1289**

†18. Ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite a rotiert um eine Winkelsymmetrale; man berechne Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers! **1290**

†19. Wie Nr. 18, wenn das Sechseck um eine Seitensymmetrale rotiert. **1291**

20. Ein Dreieck mit den Seiten $a = 25$ cm, $b = 20$ cm und $c = 15$ cm rotiert um a; man berechne Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers! **1292**

21. Wie Nr. 20, wenn $a = 21$ cm, $b = 10$ cm, $c = 17$ cm ist. **1293**

22. Wie Nr. 20, wenn $a = 39$ cm, $b = 41$ cm, $c = 50$ cm ist. **1294**

23. Wie Nr. 20, wenn $a = 124$ cm, $b = 111$ cm, $c = 137$ cm ist. **1295**

24. Ein gleichschenkliges Dreieck mit den Seiten $AB = 30$ cm, $AC = BC = 25$ cm rotiert einmal um AB und dann um AC. Wie verhalten sich die Inhalte und wie die Oberflächen beider Rotationskörper? **1296**

†25. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete $a = 580$ mm; die Summe der beiden anderen Seiten beträgt 1450 mm. Man berechne Seiten und Inhalt des Dreieckes, ferner Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers, der durch Drehung des Dreieckes um die Hypotenuse entsteht! **1297**

26. Die drei Seiten eines Dreieckes betragen der Reihe nach $a = 70$ cm, $b = 75$ cm, $c = 65$ cm; das Dreieck rotiert zuerst um die Seite a und dann um die Seite b. Wie groß sind die Oberflächen und Inhalte der beiden Rotationskörper und in welchem Verhältnisse stehen sie zueinander? **1298**

†27. Ein Dreieck mit den Seiten $AB = 48$ cm, $BC = 91$ cm und $CA = 85$ cm rotiert um eine durch B auf AB senkrechte Achse. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers? **1299**

28. Ein Antiparallelogramm mit den Seiten $a = 40$ cm, $b = 20$ cm, $c = d = 26$ cm rotiert um a. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt des Rotationskörpers? **1300**

29. Wie Nr. 28, wenn $a = 48$ cm, $b = 30$ cm, $c = d = 41$ cm ist. **1301**

1302 30. Ein Trapez mit den Seiten $a = 30$ cm, $b = 16$ cm, $c = 13$ cm und $d = 15$ cm, wobei $a \parallel b$ ist, rotiert um a. Man berechne Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers!

1303 31. Wie Nr. 30 mit $a = 46$ cm, $b = 25$ cm, $c = 20$ cm, $d = 13$ cm.

1304 32. Wie Nr. 30 mit $a = 123$ mm, $b = 72$ mm, $c = 58$ mm, $d = 41$ mm.

1305 †33. Ein Rhombus mit der Seite $s = 25$ cm und der längeren Diagonale $D = 40$ cm rotiert um die Seite s. Man berechne Inhalt und Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers!

1306 †34. Ein Rhomboid mit den Seiten $s = 33$ cm und $s' = 34$ cm, dessen längere Diagonale $d = 65$ cm mißt, rotiert um s. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers?

1307 †35. Auf ein Quadrat mit der Seitenlänge $s = 30$ cm sind vier gleichschenklige Dreiecke von der Höhe $h = 36$ cm aufgesetzt; das Ganze rotiert um eine Mittellinie des Quadrates als Achse. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers?

1308 †36. Wie Nr. 35 mit $s = 18$ cm und $h = 40$ cm.

1309 37. Ein Rhombus mit den Diagonalen $D = 30$ cm, $d = 16$ cm rotiert einmal um D, ein zweitesmal um d; wie verhalten sich die Oberflächen, wie die Inhalte beider Körper?

1310 38. Wie Nr. 37 mit $D = 48$ cm und $d = 14$ cm.

1311 †39. Ein Rhombus ABCD, dessen Diagonalen $AC = 40$ cm und $BD = 30$ cm sind, rotiert um eine Achse XX', die durch C senkrecht auf CD errichtet wurde; man soll Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers berechnen.

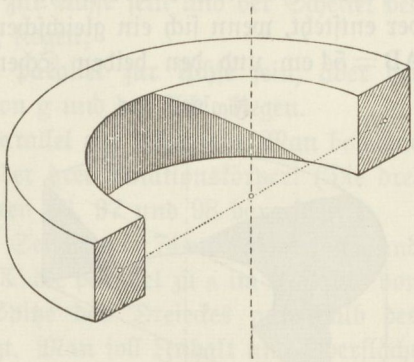
1312 †40. Die Aufgabe Nr. 39 ist durchzuführen, wenn ABCD ein Parallelogramm (Rhomboid) ist, in dem die Längen der Seiten $AB = 92$ cm, $AD = 29$ cm gegben sind und die kürzere Diagonale $BD = 75$ cm ist.

1313 †41. Ein Rechteck, in dem die Länge $l = 156$ cm, die Breite $b = 65$ cm ist, rotiert um eine Achse, die parallel zu einer Diagonale durch eine Ecke geht; man berechne Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers!

1314 †42. Ein Rechteck mit der Länge $l = 320$ cm und der Breite $b = 240$ cm rotiert um eine Diagonale; man berechne Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers!

†43. Ein gleichschenkliges Trapez (Antiparallelogramm), in dem AB = 221 cm, DC = 91 cm, AD = BC = 169 cm ist, rotiert um die Seite BC. Man berechne Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers! **1315**

Fig. 94.



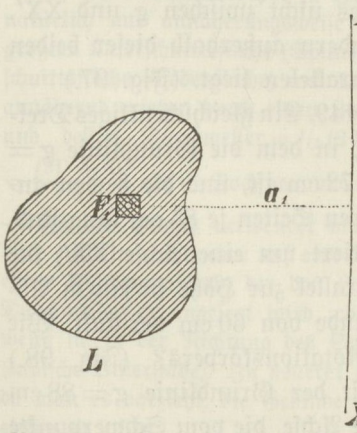
44. Ein Quadrat mit der Seite s rotiert um eine Achse, die parallel zu einer Seite des Quadrates verläuft, wobei sie vom Mittelpunkt des Quadrates einen Abstand a hat (Fig. 94). Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers? (Zuerst allgemein, dann für s = 30 cm, a = 50 cm.) *) **1316**

45. Die Aufgabe ist ebenso für ein Rechteck mit der Länge l = 70 cm und der Diagonale d = 74 cm durchzuführen, wenn die Rotationsachse **1317**

---

*) Für diesen Fall ist der Nachweis der „Guldinschen Regel" sehr einfach zu geben. — Mit Hilfe eines Satzes der Mechanik kann aber dann der Beweis verallgemeinert werden. Es sei F der Inhalt einer beliebigen, ebenen Figur L, die um die Achse XX′ rotiert (Fig. 95), so kann man F in sehr viele unendlich kleine Quadrate wie (F_1) zerlegen; ist a_1 der Abstand des Mittelpunktes von F_1 von der Achse XX′, so ist der Inhalt des betreffenden Ringes $V_1 = F_1 . 2\,a_1\pi$; ebenso rechnet man einen zweiten Ring V_2, einen dritten V_3 usw., bis man dergestalt alle die unendlich kleinen Quadratelemente von F benützt hat; es ist dann der Gesamtinhalt des Ringes $V = F_1 . 2\,a_1\pi + F_2 . 2\,a_2\pi + F_3 . 2\,a_3\pi + \ldots\ldots\ldots = (F_1a_1 + F_2a_2 + F_3a_3 + \ldots\ldots\ldots) . 2\pi$. Nach Sätzen der Mechanik ist aber der Wert der in der Klammer stehenden Summe identisch mit (F . a), wobei a den Abstand des Schwerpunktes der Fläche F von der Achse XX′ bezeichnet; somit ist $V = F . 2a\pi$. Ähnlich erfolgt der Beweis der zweiten Guldinschen Regel.

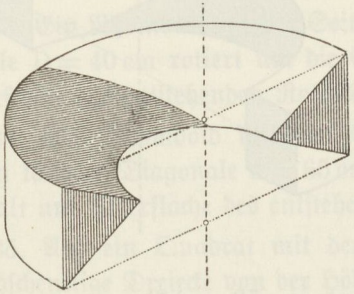
Fig. 95.



parallel zur Länge des Rechteckes verläuft und einen Abstand von 28 cm von der zunächst liegenden Rechteckseite hat.

1318 †46. Man berechne Oberfläche und Inhalt eines Rotationskörpers, der entsteht, wenn sich ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie AB = 54 cm und den beiden Schenkeln AC = BC = 45 cm um eine Achse XX′ dreht, die parallel zu AB in einem Abstande a = = 16 cm von der Spitze C des Dreieckes verläuft, wobei C zwischen XX′ und AB liegt! (Fig. 96.)

Fig. 96.



1319 †47. Wie Nr. 46, wenn AC = = BC = 53 cm, AB = 56 cm und

1320 a = 70 cm ist.

†48. Man soll Inhalt und Oberfläche eines Rotationskörpers berechnen, der durch Rotation eines gleichschenkligen Dreieckes mit der Grundlinie g = 40 cm und der Höhe h = = 99 cm entsteht, wobei die Drehung um eine Achse XX′ erfolgt, die parallel zu g in einem Abstande von 27 cm verläuft, wobei aber die Spitze des Dreieckes nicht zwischen g und XX′, sondern außerhalb dieser beiden Parallelen liegt. (Fig. 97.)

Fig 97.

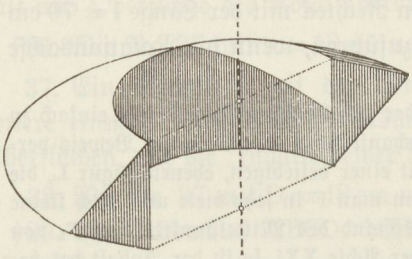
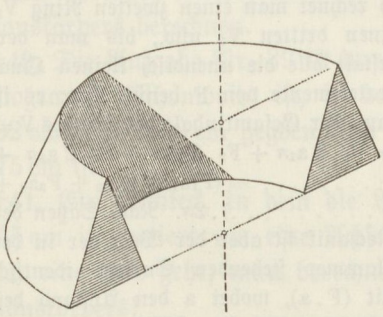


Fig. 98.



1321 †49. Ein gleichschenkliges Dreieck, in dem die Grundlinie g = = 72 cm ist, und die beiden anderen Seiten je 85 cm lang sind, rotiert um eine Achse XX′, die parallel zur Höhe in einem Abstande von 60 cm verläuft. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers? (Fig. 98.)

1322 †50. Ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie g = 88 cm und der Höhe h = 117 cm rotiert um eine Achse, die vom Schwerpunkte

des Dreieckes um 100 cm absteht; dabei sind dem Dreiecke drei Lagen zu geben; es soll nämlich

a) die Grundlinie g parallel zur Achse sein und der Scheitel des Dreieckes zwischen der Achse und g liegen;

b) die Grundlinie g wieder parallel zur Achse sein, aber der Scheitel des Dreieckes außerhalb von g und der Achse liegen.

c) die auf g errichtete Höhe parallel zur Achse sein. Man berechne die Inhalte und die Oberflächen der drei Rotationskörper! (Die drei Rotationskörper sind in den Figuren 96, 97 und 98 dargestellt.)

†51. Ein Dreieck mit den drei Seiten $a = 74$ cm, $b = 61$ cm und $c = 87$ cm rotiert um eine Achse XX' die parallel zu a im Abstande von $p = 80$ cm verläuft, wobei die Spitze des Dreieckes außerhalb des Streifens zwischen a und XX' liegt. Man soll Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers berechnen. **1323**

†52. Wie Nr. 51, wobei aber statt des Dreieckes ein Trapez mit $a = 46$ cm, $b = 25$ cm, $c = 20$ cm, $d = 13$ cm $(a \parallel b)$ und $p = 15$ cm zu nehmen ist, von dem die Seite b außerhalb des Streifens zwischen a und XX' liegt. **1324**

†53. Ein Rhombus mit den Diagonalen $D = 60$ cm und $d = 32$ cm rotiert um eine Achse XX', die parallel zu D im Abstande $a = 60$ cm verläuft. Man berechne Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers (Fig. 99)! **1325**

†54. Wie Nr. 53, wenn $D = 90$ cm, $d = 56$ cm und $a = 60$ cm ist.*) **1326**

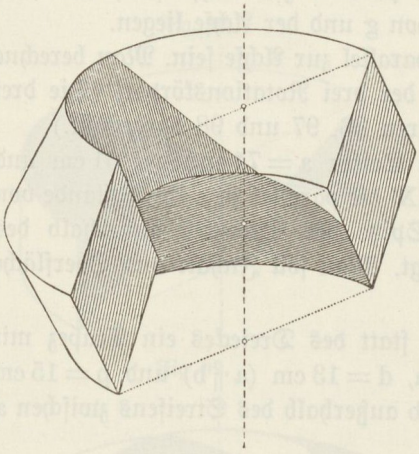
*) Als Rotationskörper zu betrachten sind auch Fässer, deren Berechnung natürlich nur annäherungsweise geschehen kann. Ist D der Durchmesser der größten Querschnittsfläche (Spundfläche), d der Durchmesser der kleinsten Querschnittsfläche (Bodenfläche) und L die Länge des Fasses, so kann man das Faß annähernd ersetzen durch einen Zylinder, dessen Höhe gleichkommt der Faßlänge und dessen Durchmesser $= {}^1/_3 (2D + d)$ ist. Es ergibt sich daraus $V = \left(\frac{2D + d}{6}\right)^2 \pi L$. — Noch genauer ist die Formel $V = \frac{L\pi}{60} (8D^2 + 4Dd + 3d^2)$. — In der Praxis verwendet man zu diesem Zwecke sogenannte Visierstäbe; diese enthalten entweder auf einer Seite einen Längenmaßstab, auf der anderen einen Flächenmaßstab, der den Inhalt eines Kreises direkt angibt, an dessen Durchmesser er angelegt wird, oder sie geben unmittelbar den Faßinhalt an, wenn sie in der Richtung des Spunddurchmessers in das Faß gesenkt werden (kubische Visierstäbe). In neuerer Zeit sind diese Hilfsmittel wenig in Gebrauch, da man es vorzieht, die Gebinde amtlich (u. zw. durch Ausfüllen mit Wasser) eichen zu lassen.

XIX. Die Kugel.

1327 1. Wie entsteht eine Kugelfläche? Was ist eine Kugel?

1328 2. Welche Eigenschaften hat die Kugelfläche?

Fig. 99.



1329 3. Welche Schnittfiguren erhält man, wenn man eine Kugel durch eine Ebene schneidet?

1330 4. Man erkläre die Ausdrücke: größter Kugelkreis, Achse, Pole, Meridian, Parallelkreis, Äquator!

1331 5. Was versteht man unter Kugelmütze, Kugelhaube (Kalotte), Zone, sphärischem Zweieck und Dreieck?

1332 6. Was versteht man unter Kugelabschnitt (Kugelsegment), Kugelschicht, Kugelausschnitt (Kugelsektor)?

1333 7. Man soll die Kugel in Grundriß und Aufriß darstellen.

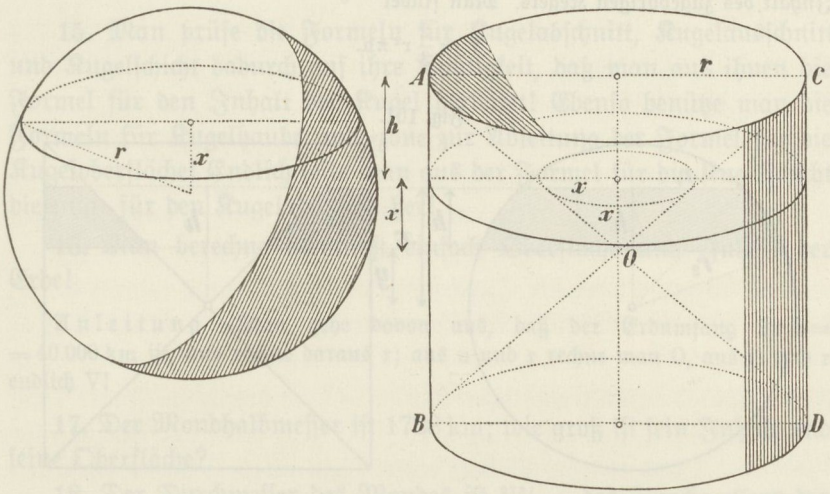
1334 8. Wie berechnet man das Volumen einer Kugel aus ihrem Halbmesser?

Anleitung: Die einfachste Ableitung der gesuchten Regel geschieht in Benützung des Satzes von Cavalieri (siehe S. 100, Anm.). Konstruiert man nämlich (Fig. 100) ein Quadrat, dessen Seite gleich ist dem Durchmesser der Kugel, zieht darin beide Diagonalen und läßt nun die Figur um ein Mittellinie rotieren, so beschreibt das Dreieck ABO einen Rotationskörper, von dem man zeigen kann, daß er mit der Kugel inhaltsgleich ist. Verschiebt man nämlich die Äquatorebene beider Körper bis auf einen beliebigen Abstand x vom Mittelpunkte, so schneidet sie die Kugel in einem Kreise, dessen Inhalt $f_1 = (r^2 - x^2)\,\pi$ ist; den Rotationskörper schneidet sie dagegen in einem Kreisringe, dessen Inhalt $f_2 = r^2\pi - x^2\pi$ ist; da also in beliebiger Lage der schneidenden Ebene immer $f_1 = f_2$ ist, so sind beide Körper nach dem Satze von Cavalieri inhaltsgleich. Um also den Inhalt der Kugel zu erfahren, berechnet man den Inhalt des gleich großen Rotationskörpers und findet

$$V = \frac{4}{3}\,r^3\,\pi = \frac{d^3\,\pi}{6} \quad \text{wobei } d = 2\,r \text{ ist.}$$

9. Wie berechnet man die Oberfläche der Kugel? **1335**

Fig. 100.



Anleitung: Zerlegt man die Oberfläche der Kugel in unendlich kleine Vielecke und verbindet die Ecken dieser Vielecke alle mit dem Kugelmittelpunkte, so erhält man unzählig viele Pyramiden, die als Höhe den Kugelhalbmesser haben; es ist also ihre Summe $V = O \cdot \frac{r}{3}$*), woraus $O = \frac{3V}{r}$ ist; mit Zuhilfenahme des oben erlangten Ergebnisses für V findet man $O = 4\,r^2\pi = d^2\pi$.

10. Wie berechnet man den Inhalt eines Kugelabschnittes aus dem Kugelhalbmesser r und der Höhe h des Abschnittes? **1336**

Anleitung: Die Ableitung geschieht nach dem in Nr. 8 angewandten Verfahren. Es ist demnach das Volumen des Abschnittes gleich der Differenz aus dem Volumen eines Zylinders mit dem Basishalbmesser r und der Höhe h des Kugelabschnittes, vermindert um den Inhalt eines Kegelstumpfes mit den Grundflächenhalbmessern r und $r - h$ und der Höhe h; die sehr einfache Rechnung ergibt

$$V = \frac{h^2\pi}{3}(3r - h).$$

---

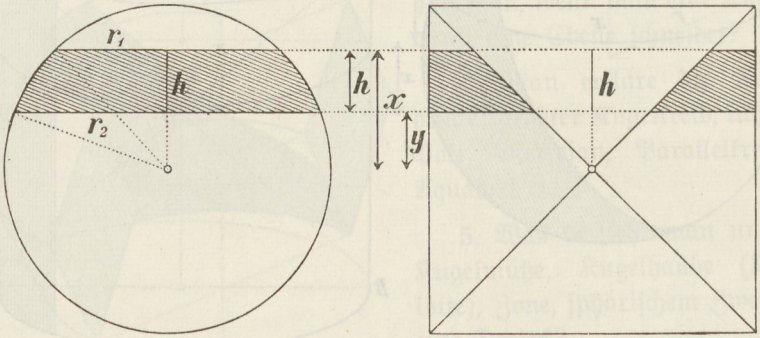
*) Man benütze die Formel $V = O \cdot \frac{r}{3}$ in allen Fällen, wo die Oberflächenberechnung der Volumberechnung vorausgeht! — Die Formel $V = O \cdot \frac{r}{3}$ gilt auch für alle Körper, denen sich eine Kugel einschreiben läßt. Warum?

1337 **11. Wie berechnet man den Inhalt eines Kugelausschnittes?**

Anleitung: Man vermehre den Inhalt des Kugelabschnittes um den Inhalt des zugehörigen Kegels. Man findet

$$V = \frac{2}{3} r^2 \pi h.$$

Fig. 101.



1338 **12. Wie berechnet man den Flächeninhalt einer Kugelhaube?**

Anleitung: Mit Hilfe der Überlegung in Nr. 9 findet man aus dem Volumen des Kugelausschnittes

$$C = 2 r \pi h.$$

1339 **13. Wie berechnet man den Flächeninhalt einer Kugelzone?**

Anleitung: Man berechnet die Zone als Differenz zweier Kugelhauben mit den Höhen h_1 und h_2, wobei die Differenz von h_1 und h_2 der Zonenhöhe h gleichkommt. Man findet

$$Z = 2 r \pi h.$$

1340 **14. Wie berechnet man den Inhalt einer Kugelschicht?**

Anleitung: Die Ableitung geschieht wieder nach der in Nr. 8 und 10 angewandten Methode. Sind die Halbmesser der Schnittkreise mit r_1 und r_2 bezeichnet (Fig. 101), sind ferner ihre Abstände von der Ebene des Äquators x und und y, so ist $V = r^2\pi h - \frac{h\pi}{3}(x^2 + xy + y^2)$. Nun ist aber $x^2 + xy + y^2 = x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2 - (x-y)^2}{2} = x^2 + y^2 + \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{(x-y)^2}{2} = \frac{3}{2}(x^2+y^2) - \frac{h^2}{2}$ und wegen $x^2 = r^2 - r_1^2$ und $y^2 = r^2 - r_2^2$ auch, $V = h\pi\left\{r^2 - \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}\left(2r^2 - r_1^2 - r_2^2\right) - \frac{h^2}{2}\right]\right\}$, woraus sich durch einfache Ausführung der angezeigten

Rechnungen ergibt

$$V = \frac{h\pi}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).*)$$

15. Man prüfe die Formeln für Kugelabschnitt, Kugelausschnitt und Kugelschicht dadurch auf ihre Richtigkeit, daß man aus ihnen die Formel für den Inhalt der Kugel herleitet! Ebenso benütze man die Formeln für Kugelhaube und -zone zur Ableitung der Formel für die Kugeloberfläche! Endlich leite man aus der Formel für die Kugelschicht diejenige für den Kugelabschnitt her! **1341**

16. Man berechne möglichst einfach Oberfläche und Inhalt der Erde! **1342**

Anleitung: Man gehe davon aus, daß der Erdumfang $2r\pi = 40.000$ km ist, und rechne daraus r; aus u und r rechne man O, aus O und r endlich V!

17. Der Mondhalbmesser ist 1738 km; wie groß ist sein Inhalt und seine Oberfläche? **1343**

18. Der Durchmesser des Mondes ist $^{273}/_{1000}$ des Durchmessers der Erde; wie verhalten sich die Oberflächen und wie die Inhalte beider Himmelskörper? **1344**

†**19.** Der Durchmesser der Sonne ist 110mal so groß als der Durchmesser der Erde. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt der Sonne? (Man benütze die Ergebnisse von Nr. **1342**!) Zur Versinnlichung der großen Zahl für den Inhalt untersuche man, wie lange eine Million Maschinen, deren jede in 1 Sekunde einen Würfel von 1 m³ Größe formen und ohne Zeitverlust diese Würfel übereinanderschichten könnte, zu tun hätte, um eine Masse gleich der Sonnenmasse aufzubauen! **1345**

20. Eine Seifenblase hat 8 cm Durchmesser; welchen Luftdruck hat sie auszuhalten? (1 Atmosph. per cm² = 1·033 kg.) **1346**

---

*) Man kann diese Formel auch in der Form darstellen: $V = \frac{r_1^2 \pi h + r_2^2 h\pi}{2} + \frac{h^2\pi}{6}$, wodurch sich für die Volumberechnung der Kugelschicht folgende, leicht im Gedächtnis zu behaltende Regel ergibt: „Das Volumen einer Kugelschicht ist gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Zylinder, die der Schicht ein- und umschrieben werden können (besser: welche ebenso hoch sind als die Schicht und als Grundflächen den unteren oder den oberen Begrenzungskreis der Schicht haben), vermehrt um das Volumen der Kugel, die der Schicht einbeschrieben werden kann.

1347 21. Wie schwer ist eine Billardkugel von 6 cm Durchmesser, wenn das Eigengewicht des Elfenbeins 1·92 ist?

1348 22. Es gab einstens Kanonen von 24 cm Kaliber (die sogenannten 24-cm-Küstenhaubitzen), die Vollkugeln von 23·6 cm Durchmesser schossen; wie schwer war ein solches Geschoß? (s = 7·8.)

1349 23. Wieviel Kugeln von 1·6 cm Durchmesser können aus 30 kg Blei vom Eigengewichte s = 11·38 gegossen werden?

1350 24. Wieviel Kugeln von 5 mm Durchmesser können aus 3 kg Blei vom Eigengewichte s = 11·38 gegossen werden?

1351 25. Wie groß wäre der Durchmesser einer Kugel aus reinem Golde, deren Wert eine Million Schilling betragen würde? (1 kg Gold = = 4667 S.)

1352 †26. Die Größe der englischen Nationalschuld betrug im Jahre 1896 rund 15.000 Millionen Kronen ö. W.; wie groß wäre der Durchmesser einer Kugel aus reinem Silber, deren Wert obige Summe vorstellen würde, wenn das Eigengewicht des Silbers 10·47 ist und das kg Silber damals 100 K ö. W. wert war. Wie lang wäre ein Eisenbahnzug, auf den diese Silbermasse verladen werden könnte, wenn ein Waggon 8 m lang ist und 10 t Belastung erhält?

1353 †27. Man berechne zu Nr. 26 den Durchmesser einer goldenen Kugel, die den damaligen Wert der englischen Nationalschuld vorstellen würde, und ermittle, wie viele Waggonladungen Gold à 10 t obige Summe ergibt! (s = 19·5; 1 kg Feingold entsprach 3280 K.)

1354 †28. Ein kugelförmiger Luftballon von 5 m Durchmesser ist mit Wasserstoff gefüllt, dessen Dichte $^7/_{100}$ von jener der atmosphärischen Luft ist; wenn man nun weiß, daß das Gewicht der Luft nur den 770. Teil von dem des Wassers beträgt, ferner der Ballon samt Gondel 24 kg 5 dkg wiegt, so ist zu entscheiden, ob er aufsteigen kann und wieviel Belastung er gegebenenfalls noch tragen könnte. (Der Auftrieb der Gondel ist zu vernachlässigen.)

1355 †29. Die Kuppel der St. Peterskirche in Rom hat als äußeren Halbmesser 23·6 m und ist halbkugelförmig. a) Wie groß ist ihre Oberfläche? b) Wieviel Kupferblechplatten, à $^1/_2$ m² groß, würde man benötigen, um sie zu decken, wenn man wegen Verschnitt und Falze noch 9 % zurechnen muß? c) Wie teuer würde nach unserem Gelde die Bedachung kommen, wenn 1 m² 10 kg wiegt und 1 kg 2 S 50 g kostet?

30. Eine Kegelbahn ist $28^1/_4$ m lang; eine hinausrollende Kugel dreht sich 75mal; wie schwer ist sie? (s = 2·1.) **1356**

31. Das Gewicht einer eisernen Kugel ist 12 kg; wieviel Umdrehungen macht sie, wenn sie 60 m weit rollt? (s = 7·5.) **1357**

32. Zwei Kugeln, deren Oberflächen sich verhalten wie 16 : 9, haben zusammen 10.291·8 cm^3 Inhalt; wie groß sind ihre Halbmesser? **1358**

33. Es ist das Gewicht einer eisernen Hohlkugel zu berechnen, deren äußerer Durchmesser D = 18 cm und deren Wandstärke 3 cm beträgt. (s = 7·5.) **1359**

34. Eine hohle Bleikugel von 48 mm Durchmesser hat als inneren Fassungsraum 38·792 cm^3; wie groß ist ihr Gewicht? (s = 11·35.) **1360**

†**35.** Die Bomben, die aus einem glatten Mörser von 24 cm Kaliber geworfen wurden, hatten einen Durchmesser von 23·6 cm und ein mittleres Gewicht von 31·9 kg, wovon auf die Sprengladung 1·96 kg kam; wie groß war ihre Wandstärke auf mm genau? (s = 7·6.) **1361**

†**36.** Beim 30-cm-Mörser hatten die Bomben 29·7 cm Durchmesser und wogen 64·1 kg, wovon 4·48 kg auf die Sprengladung kam; wie groß war die Wandstärke? (s = 7·6.) **1362**

†**37.** Zur Ausführung des Foucaultschen Pendelversuches hat man eine kugelförmige 15-cm-Granate (Durchmesser = 14·5 cm) von 7·48 kg Gewicht (ungefüllt) im Hohlraume mit Blei ausgießen lassen; wie groß ist ihr Gewicht auf dkg genau? (Eigengewicht des Eisens 7·6, des Bleies 11·4.) **1363**

Universitätsbibliothek Wien

***38.** Um wieviel muß man den Halbmesser einer Kugel verlängern, damit die Oberfläche der neuen Kugel nmal so groß werde wie jene der ursprünglichen? (Besonderer Wert: n = 100.) **1364**

***39.** Der Inhalt einer Hohlkugel, deren Wanddicke 3 cm beträgt, ist $(684\,\pi)$ cm^3. Wie groß sind die beiden Halbmesser? **1365**

40. Ein rechtwinkliges Parallelepiped hat als Kanten a = 6 cm und b = 8 cm und c = 24 cm; wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Prismas und wie groß ist Inhalt und Oberfläche jener Kugel, die durch die Eckpunkte des Parallelepipedes hindurchgelegt werden kann? **1366**

41. Eine Kugel vom Halbmesser r = 25 cm wird im Abstande von 7 cm vom Mittelpunkte durch eine Ebene geschnitten; in den Schnittkreis ist ein Quadrat gezeichnet, das die Basis einer Doppelpyramide bildet, deren Spitzen in den Endpunkten des auf der schneidenden Ebene senkrechten Durchmessers liegen. Wie groß ist ihr Volumen? **1367**

1368 42. Ein Würfel von 600 cm^2 Oberfläche wird in eine Kugel umgegossen; wie groß ist ihr Durchmesser? Wie verhalten sich die Oberflächen beider Körper?

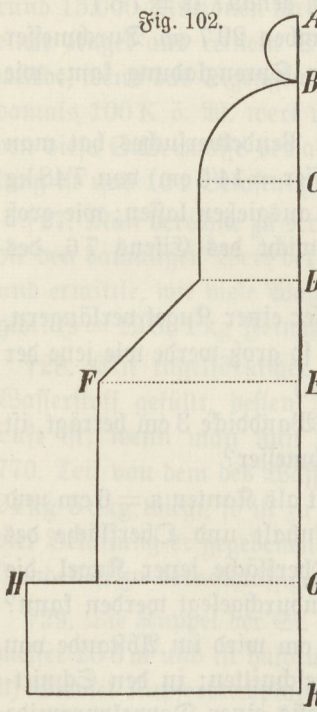
1369 43. Wie verhalten sich die Oberflächen jener drei Kugeln, die aus dem Mittelpunkte eines Würfels so beschrieben werden, daß die erste die Flächen des Würfels berührt, die zweite durch die Kantenmitten und die dritte durch die Eckpunkte geht?

1370 44. Wie verhalten sich die Inhalte und wie die Oberflächen jener gleichseitigen Kegel, die um und in eine gegebene Kugel gelegt werden können?

1371 45. Man will auf die Grundfläche einer Halbkugel einen geraden Kegel aufsetzen, so daß der neue Körper ebensoviel wiege wie früher die ganze Kugel. Wie hoch muß der Kegel werden?

1372 46. Die Profilverhältnisse eines Pfeilers aus Porphyr sind aus der Skizze (Fig. 102) zu entnehmen;*) es ist AB = 6 cm, BC = CD = DE = 9 cm, EF = EG = 18 cm, GK = 10 cm, GH = = 24 cm. Wie groß ist das Gewicht, wenn die Dichte des Materials 2·75 ist?

Fig. 102.



1373 †47. Die Höhe eines gleichseitigen Kegels aus Blei ist 5·2 dm; er wird in eine Kugel umgegossen. Um wieviel verkleinert sich dabei seine Oberfläche?

1374 48. Ein gleichseitiger Kegel hat als Volumen 9·42477 cm^3; wie groß ist der Halbmesser jener Kugel, die die gleiche Oberfläche besitzt wie der Kegel?

1375 49. Die Seite eines gleichseitigen Kegels ist 4 cm lang; wenn nun eine Kugel die dreifache Oberfläche besitzt, wie groß ist ihr Halbmesser? Wie groß ist ihr Volumen?

1376 50. Ein Rechteck hat als Grundlinie 3 cm, als Höhe 12 cm; parallel zur Höhe verläuft in einem Abstande von 12 cm

*) Der Pfeiler stellt einen Rotationskörper vor, der entsteht, wenn sich die gezeichnete Figur um die Achse AK dreht.

vom Rechtecke eine Gerade, um die das Rechteck rotiert. Wie verhält sich die Oberfläche des Rotationskörpers zur Oberfläche einer raumgleichen Kugel?

51. Ein zylindrisches Gefäß von 8 cm Durchmesser und 12 cm Höhe ist $11\frac{1}{3}$ cm hoch mit Wasser gefüllt. Man wirft eine Kugel hinein und das Wasser füllt nun das ganze Gefäß; wie groß ist der Halbmesser und die Oberfläche der Kugel? **1377**

52. In ein zylindrisches, zum Teile mit Wasser gefülltes Gefäß von 8 cm Durchmesser wirft man 24 Bleikugeln von 2 cm Durchmesser; um wieviel steigt dadurch das Wasser? **1378**

53. Um wieviel würde das Wasser steigen, wenn der Durchmesser des Gefäßes 16 cm gewesen wäre und man 42 Kugeln von 4 cm Durchmesser hineingeworfen hätte? **1379**

54. Eine silberne Kugel von 3 cm Halbmesser wird zu einer kreisrunden Platte von 1·6 mm Dicke ausgehämmert; wie groß ist ihr Umfang und welches Gewicht hat sie? ($s = 10{\cdot}2$.) **1380**

55. Die Seite eines gleichseitigen Zylinders ist 6 cm lang; wie groß ist der Halbmesser, die Oberfläche und der Inhalt jener Kugel, deren Oberfläche sechsmal so groß ist wie die Gesamtoberfläche des Zylinders? Wie verhalten sich die Volumina beider Körper? **1381**

56. Der Halbmesser einer Kugel mißt 2 cm; wenn man 12 solcher Kugeln aus Blei zu einem gleichseitigen Zylinder zusammenschmelzen würde, wie groß würde dessen Oberfläche und Inhalt sein? **1382**

57. Man gießt 18 Kugeln, deren Halbmesser $r = \sqrt{3}$ ist, zu einem gleichseitigen Kegel um; um wieviel ändert sich dabei die Oberfläche? **1383**

58. Von einem geraden Kegel aus Blei ist die Oberfläche 282·743 cm², wovon 204·203 cm² auf die Mantelfläche entfallen; 45 solcher Kegel gießt man in eine Kugel um. Um wieviel wird dadurch die Oberfläche kleiner? **1384**

†***59.** Man soll in eine Kugel vom Halbmesser 20 cm einen geraden Zylinder einschreiben, dessen Oberfläche $\frac{4}{5}$ der Kugeloberfläche beträgt. Welche Abmessungen muß der Zylinder erhalten? **1385**

†**60.** Die Basis eines geraden Zylinders ist gleich dem größten Kreise einer Kugel, deren Oberfläche sich zur Gesamtoberfläche des Zylinders verhält wie m : n; wie verhalten sich die Inhalte beider Körper? (Allgemein, dann für m : n = 2 : 3.) Welchen Wert muß m : n haben, damit beide Körper inhaltsgleich werden? **1386**

1387 †61. Die Oberfläche einer Kugel beträgt 615·75 cm²; die Kugel soll in einen Zylinder von gleichem Inhalte verwandelt werden, dessen Mantelfläche gleich ist der Oberfläche der Kugel. Wie verhält sich die Oberfläche des Zylinders zur Oberfläche der Kugel?

1388 62. Ein gerader Kegel hat als Basishalbmesser $r = 16$ cm; seine Höhe verhält sich zur Seite wie 15 : 17. Eine Kugel hat doppelt so große Oberfläche. Wie verhalten sich die Inhalte der beiden Körper?

1389 63. Von einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 35$ cm ist die Oberfläche 28mal so groß als die Mantelfläche eines geraden Kegels mit der Seitenlänge 25 cm; wie groß ist der Inhalt des Kegels?

1390 64. Der Inhalt einer Kugel vom Halbmesser $r = 6$ cm ist dreimal so groß als der Inhalt eines geraden Kegels von 8 cm Höhe; wie groß ist die Oberfläche des Kegels?

1391 65. Die Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser $R = 15$ cm ist $6^2/_3$mal so groß als die Mantelfläche eines geraden Kegels vom Basishalbmesser $r = 9$ cm; wie groß ist Oberfläche und Inhalt des Kegels?

1392 66. Die Seite eines gleichseitigen Zylinders ist 8 cm lang; wie groß ist der Halbmesser jener Kugel, deren Oberfläche $^1/_6$ von jener des Zylinders beträgt? Wie verhalten sich die Inhalte beider Körper?

1393 67. Ein gerader Kegel, in dem der Halbmesser 16 cm beträgt und die Seite 34 cm lang ist, wird in halber Höhe parallel zur Grundfläche geschnitten. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Stumpfes und wie groß ist Inhalt und Oberfläche jener Kugel, deren Inhalt $^1/_{210}$ vom Inhalte des Stumpfes beträgt?

1394 68. Ein gerader Kegel vom Halbmesser $r = 36$ cm und der Höhe $h = 48$ cm wird in halber Höhe parallel zur Grundfläche geschnitten; die Oberfläche einer Kugel ist fünfmal so groß wie die Mantelfläche des Stumpfes. In welchem Verhältnisse stehen Oberflächen und Inhalte beider Körper?

1395 69. Von einem geraden Kegel ist der Halbmesser $r = 15$ cm, die Höhe $h = 36$ cm; man berechne Inhalt und Oberfläche des Kegels sowie der ein- und umgeschriebenen Kugel!

1396 70. Wie Nr. 69 mit $r = 24$ cm und $h = 32$ cm.

1397 71. Wie Nr. 69 mit $r = 24$ cm und $h = 45$ cm.

1398 †72. In eine Halbkugel hat man einen Würfel so eingeschrieben, daß vier Eckpunkte in der Grundfläche, die vier anderen in der Halb-

kugelfläche liegen; man soll aus dem Halbmesser der Halbkugel die Seite, die Oberfläche und den Inhalt des Würfels bestimmen. (Zuerst allgemein, dann für $r = \sqrt{6}$.)

†73. Wenn dem Würfel in Nr. 72 eine Kugel eingeschrieben wird, in welcher Beziehung steht die Oberfläche dieser Kugel zur Halbkugelfläche und wie verhalten sich die Inhalte beider Körper? **1399**

†74. Eine Kugel und ein Kegel haben gleiche Oberfläche; die Höhe des Kegels ist gerade so groß wie der Durchmesser der Kugel. In welchem Verhältnisse stehen seine Grundfläche und Mantelfläche zur Oberfläche der Kugel? **1400**

75. In ein Quadrat ist ein gleichschenkliges Dreieck und ein Kreis eingezeichnet; die Figur rotiert um die gemeinsame Symmetrieachse. In welcher Beziehung stehen die Inhalte und die Oberflächen der drei entstehenden Rotationskörper? **1401**

76. Man hat einem Kreise ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck so umgeschrieben, daß eine Seite des Dreieckes und des Quadrates ineinander fallen; in welcher Beziehung stehen die Inhalte und die Oberflächen der drei Rotationskörper, die entstehen, wenn sich die Figur um ihre gemeinsame Symmetrieachse dreht? **1402**

77. In einem gleichseitigen Kegel ist eine Kugel und in diese ein gleichseitiger Zylinder eingeschrieben; wie verhalten sich die Oberflächen der drei Körper? **1403**

78. Wie verhalten sich die Inhalte eines gleichseitigen Zylinders und einer Kugel, wenn sich die Oberflächen dieser Körper verhalten wie 2 : 3? **1404**

79. Wie verhalten sich die Inhalte und Oberflächen eines gleichseitigen Kegels und der ihm eingeschriebenen Kugel? **1405**

80. Wie verhalten sich die Inhalte und Oberflächen eines gleichseitigen Kegels und einer Kugel, wenn der Halbmesser der letzteren $^2/_3$ von der Höhe des Kegels beträgt? **1406**

81. Der Inhalt einer Kugel beträgt $^2/_3$ vom Inhalte eines gleichseitigen Zylinders; wie verhalten sich ihre Oberflächen? **1407**

82. Ein gleichseitiger Kegel und eine Kugel haben gleiche Halbmesser; wie verhalten sich ihre Oberflächen und wie ihre Inhalte? **1408**

83. Ein gleichseitiger Kegel und eine Kugel haben gleiche Oberflächen; wie verhalten sich ihre Inhalte? **1409**

1410 84. Der Durchmesser einer Kugel ist ebenso groß wie die Höhe eines gleichseitigen Kegels; wie verhalten sich die Inhalte und die Oberflächen beider Körper?

1411 85. Die Oberflächen einer Kugel und eines gleichseitigen Kegels verhalten sich wie 4 : 1; in welchem Verhältnisse stehen ihre Inhalte?

1412 86. Die Oberflächen einer Kugel und eines gleichseitigen Kegels verhalten sich wie 1 : 3; wie verhalten sich ihre Inhalte?

1413 *87. In eine Kugel soll ein gerader Zylinder eingeschrieben werden, dessen Oberfläche $^3/_4$ von der Kugeloberfläche beträgt. Wie muß der Halbmesser des Zylinders angenommen werden?

1414 88. Man berechne den Inhalt und die Oberfläche eines Kugelausschnittes, der einer Kugel mit dem Halbmesser $R = 30$ cm angehört und bei dem der Grundkreis der Kugelmütze einen Durchmesser von 36 cm hat!

1415 89. Man berechne Inhalt und Oberfläche eines Kugelausschnittes, wenn gegeben ist der Kugelhalbmesser r und der Zentriwinkel α des Ausschnittes, wobei α anzunehmen ist a) mit 60°, b) mit 90°, c) mit 120°!

1416 90. Von einem Kugelausschnitte hat der Grundkreis der zugehörigen Kugelhaube einen Halbmesser von $r = 21$ cm; die Höhe der Kugelhaube beträgt 3 cm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Kugelausschnittes?

1417 91. Ein Achtelkreis dreht sich um einen seiner Begrenzungshalbmesser; wie verhält sich der Inhalt des Rotationskörpers zum Inhalte der Kugel?

1418 92. In einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 87$ cm verhält sich der Inhalt eines Kugelausschnittes zum Inhalte der ganzen Kugel wie 4 : 29; wie verhalten sich die Oberflächen?

1419 *93. In welchem Abstande vom Mittelpunkte muß eine Kugel geschnitten werden, damit der Kugelabschnitt die Hälfte des zugehörigen Kugelausschnittes ist?

1420 94. Wie hoch muß man eine Kugelhaube annehmen, damit ihre Oberfläche gleich sei einem größten Kreise der Kugel?

1421 95. In welchem Abstande vom Mittelpunkte muß man eine Kugelfläche schneiden, damit die Kugelhaube des entstehenden Kugelabschnittes 1½mal so groß sei wie der Grundkreis?

*96. In welchem Abstande vom Kugelmittelpunkte ist ein ebener Schnitt zu legen, damit die Gesamtoberfläche des kleineren Kugelabschnittes halb so groß ist wie die ganze Kugeloberfläche? **1422**

*97. Wenn man in der Entfernung d cm vom Mittelpunkte einer Kugel eine Ebene legt, ist der Flächeninhalt der dadurch begrenzten Kugelhaube um $(b^2\pi)$ cm² größer, als wenn man diesen Schnitt durch die Mitte eines Kugelhalbmessers legt. Wie groß ist der letztere? (Besondere Werte: d = 8, b = 6.) **1423**

*98. Der Inhalt einer Kugelhaube, deren Höhe um 6 cm kleiner ist als der Halbmesser ihres Grundkreises, ist $(90\,\pi)$ cm². Welchen Bruchteil der ganzen Kugeloberfläche macht die Kugelhaube aus? **1424**

*99. Für eine Kugel mit dem Halbmesser 15 cm soll ein Kugelabschnitt so bestimmt werden, daß sein Inhalt sich zum Inhalte jenes Kegels, der auf dem Grundkreis des Abschnittes aufruht und seine Spitze im Kugelmittelpunkte hat, verhält wie 7 : 18. Wie hoch ist der Abschnitt anzunehmen? **1425**

†*100. Auf der Zentrale zweier kongurenter Kugeln vom Halbmesser r ist eine Lichtquelle so anzubringen, daß die Summe der beiden beleuchteten Kugelhauben gleich ist der halben Oberfläche einer Kugel. In welchem Abstande von dem einen Kugelmittelpunkte ist die Lichtquelle aufzustellen? (Zuerst allgemein, dann für c = 25 cm, r = = 5·76 cm.) **1426**

101. Eine Kugel vom Halbmesser r = 15 cm wird im Abstande a = 12 cm vom Mittelpunkte geschnitten; man berechne Inhalt und Oberfläche des kleineren Kugelabschnittes! **1427**

102. Wie Nr. 101 mit r = 18 cm und a = 15 cm. **1428**

103. Wie Nr. 101 mit r = 21 cm und a = 6 cm. **1429**

104. Eine Kugel vom Halbmesser R = 25 cm wird durch eine Ebene derartig geschnitten, daß der Halbmesser r des Schnittkreises 24 cm beträgt; wie groß ist Inhalt und Oberfläche des kleineren Kugelabschnittes? **1430**

105. Wie Nr. 104 mit R = 65 cm und r = 33 cm. **1431**

106. Der Inhalt eines Kugelabschnittes beträgt 3562·6 cm³, seine Höhe 9 cm; man berechne seine Gesamtoberfläche! **1432**

1433 107. Man soll aus dem gegebenen Inhalte $V = 452{\cdot}38\,cm^3$ eines Kugelabschnittes, dessen Kugelhaube zweimal so groß ist wie der Grundkreis, den Kugelhalbmesser berechnen.

1434 *108. Der Inhalt eines Kugelabschnittes soll ebenso groß (doppelt so groß) sein wie der Inhalt jenes geraden Kegels, der über demselben Grundkreise, aber im anderen Kugelabschnitte errichtet wird. Wie hoch ist der Abschnitt anzunehmen?

1435 109. Von zwei kongruenten Kugeln liegt der Mittelpunkt der einen auf der Oberfläche der anderen; man soll berechnen, in welchem Verhältnisse die Oberflächen und Inhalte der entstehenden bikonvexen Linse und einer der beiden Kugeln stehen?

1436 *110. Zwei Kugeln berühren sich von innen. Der Abstand ihrer Mittelpunkte ist $d = 2\,m$. Der Raum zwischen den beiden Kugelflächen ist so groß wie der Inhalt eines geraden Kegels von 26 m Höhe und 2 m Halbmesser. Wie groß sind beide Kugelhalbmesser?

1437 111. Durch die Höhenmitte einer Halbkugel legt man eine Ebene parallel zum Grundkreise der Halbkugel; wie verhalten sich die Oberflächen und wie die Inhalte beider Teile?

1438 112. Eine Halbkugel, deren Halbmesser $r = 6\,cm$ mißt, wird in halber Höhe parallel zum Grundkreise geschnitten; man berechne Inhalte und Oberflächen beider Teile!

1439 113. Wie verhalten sich die Inhalte der beiden Kugelabschnitte, in die eine Kugel vom Durchmesser $d = 10\,cm$ durch eine Ebene derartig geschnitten wird, daß der auf der Ebene normal stehende Durchmesser im Verhältnis 1 : 4 geteilt wird?

1440 114. Eine Kugel wird so geschnitten, daß die schneidende Ebene a) um $^1/_3$, b) um $^1/_4$ des Halbmessers vom Kugelmittelpunkte absteht; wie verhalten sich in jedem Falle die Inhalte beider Teile?

1441 115. Eine Halbkugel wird in $^2/_3$ ihrer Höhe, vom Grundkreise ab gerechnet, parallel zu diesem geschnitten; wie verhalten sich die Inhalte und wie die Oberflächen beider Teile?

1442 116. Man berechne die Gesamtoberfläche eines Kugelabschnittes a) aus dem Kugelhalbmesser und der Höhe, b) aus dem Halbmesser des Schnittkreises und der Höhe des Kugelabschnittes!

117. Wie groß ist im Falle b) der vorigen Aufgabe die Oberfläche der Kugelhaube? Wie groß ist der Halbmesser eines inhaltsgleichen Kreises? Man soll die Bestimmung dieses Kreises auch konstruktiv durchführen. **1443**

118. Eine Kugel vom Halbmesser $R = 3$ dm wird durch eine Ebene in zwei Abschnitte geteilt, deren Höhen im Verhältnisse von 5 : 1 stehen; wie verhalten sich die Gesamtoberflächen und wie die Inhalte beider Teile? **1444**

119. Wie verhält sich der Inhalt eines Kugelabschnittes zum Inhalte der ihm eingeschriebenen Kugel? (Allgemein, dann für $r = 8$ cm und $h = 3$ cm.) **1445**

*120. Wie hoch muß man einen Kegel annehmen, der einer Kugel vom Durchmesser d eingeschrieben ist und dessen Oberfläche so groß ist wie die ihn einhüllende Kugelhaube? **1446**

†121. In welchem Abstande vom Mittelpunkt muß man eine Halbkugel parallel zum Grundkreise schneiden, damit die Gesamtoberflächen beider Teile gleich werden? (Probe.) Wie verhalten sich dann die Inhalte beider Teile? Wenn man aus dem Mittelpunkte des Schnittkreises eine Kugel beschreibt, die die Halbkugel berührt, wie verhalten sich die Inhalte dieser Kugel und des größeren Teiles der Halbkugel? **1447**

†122. Aus einer Kugel mit dem Halbmesser r wird ein zylindrischer Kern herausgebohrt, dessen Mantellinien die Länge h haben; wie groß ist der Inhalt des übriggebliebenen Teiles?*) **1448**

†123. Eine Kugel mit dem Halbmesser r wird von einem Punkte aus beleuchtet, dessen Entfernung von der Kugeloberfläche mit H bezeichnet werden soll; wie groß ist die beleuchtete Fläche? **) **1449**

---

*) Die sich ergebende Formel enthält nur die Größe h; was folgt daraus?

**) Die Aufgabe kann auch Verwendung finden zur Berechnung derjenigen Fläche der Erde, die man von einer bestimmten Höhe aus überblickt. Hier gelangt man, wie der Verfasser in Seiberts „Zeitschrift für Schulgeographie", XIV. Jahrgang, XII. Heft, 1893, gezeigt hat, zu einem sehr einfachen Ergebnisse. Da nämlich im Nenner des erhaltenen Ausdruckes $F = \frac{2r^2\pi H}{r + H}$ die Größe H gegen r vernachlässigt werden kann (warum?), so ergibt sich $F = 2r\pi H$; da aber $2r\pi$ nahezu 40.000 km ist und H gewöhnlich in m ausgedrückt ist, so erhält man die in km^2 ausgedrückte Fläche F durch Multiplikation der

1450 †124. Wie weit sieht man auf dem Meere von der 45 m hohen Mastspitze eines Schiffes aus (vgl. Nr. **410**) und wie groß ist die überblickte Fläche? *)

1451 †125. Den wievielten Teil der Erdoberfläche konnte Glaisher am 5. September 1862 bei seiner Ballonfahrt, bei der er eine Höhe von 8823 m erreichte, überblicken? (Erdhalbmesser = 6,368.150 m.)

1452 †126. Niederösterreich hat einen Flächeninhalt von 19.853 km²; wie hoch müßte man mit einem Luftballon aufsteigen, um die ganze Fläche zu überblicken? *)

1453 †127. Österreich-Ungarn hatte einschließlich des Okkupationsgebietes einen Inhalt von 676.667 km²; wie hoch müßte man sich mit einem Luftballon erheben, um die ganze Fläche zu überblicken? *)

1454 †128. Wie weit muß ein leuchtender Punkt von einer Kugel mit dem Halbmesser r abstehen, damit er gerade $^1/_3$ der Kugeloberfläche beleuchte?

---

in m ausgedrückten Höhe mit der Zahl 40. Wie genau dieses überraschend einfache Verfahren die gesuchte Fläche gibt, zeigt für verschiedene Höhen folgende kleine Tabelle:

Aussichtspunkt	Seehöhe (in m)	Genauer Wert der übersehenen Fläche, gerechnet nach der Formel $F = \frac{2r^2\pi H}{r+H}$ (in km²)	Näherungswert der übersehenen Fläche, gerechnet nach der Formel $F = 40 . H$ (in km²)	Fehler des zweiten Resultates gegen das erste (in km²)	Fehler des zweiten Resultates in Prozenten des ersten
Gaurisankar	8840	353.217	353.600	+383	0·1084
Chimborasso	6310	252.227	252.400	+173	0·0686
Montblanc	4810	192.313	192.409	+ 87	0·0452
Ortler	3902	156.032	156.080	+ 48	0·0308
Großglockner	3797	151.836	151.880	+ 44	0·0289
Ätna	3313	132.491	132.520	+ 29	0·0219
Schneeberg	2075	82.998	83.000	+ 2	0·0024
Ötscher	1892	75.681	75.680	— 1	— 0·0013
Schöpfel	893	35.726	35.720	— 6	— 0·0168
Kahlenberg (Stephaniewarte) . .	458	18.324	18.320	— 4	— 0·0213
Stephansturm (Höchste Spitze; relative Höhe)	138	5.522	5.520	— 2	— 0·0362

*) Nach dem in der Anmerkung zu Nr. **1449** mitgeteilten Näherungsverfahren.

129. Welche Dichte muß eine auf Wasser schwimmende Vollkugel haben, damit sie bis zum Äquator einsinke? **1455**

130. Welche Dichte muß eine auf Wasser schwimmende Kugel vom Halbmesser $R = 10$ cm haben, damit der Kreis, in dem die Berührung mit dem Wasserspiegel erfolgt, den Halbmesser $r = 8$ cm habe? (Zwei Lösungen.) **1456**

131. Wie Nr. 130 mit $R = 17$ cm und $r = 8$ cm. **1457**

132. Ein hohle Kugel von 10 cm Halbmesser und 2 cm Wanddicke schwimmt so auf Wasser, daß sie bis zum Äquator eintaucht; wie groß ist ihre Dichte? **1458**

†133. Wie groß darf die Wanddicke einer eisernen Kugel von 40 cm äußerem Durchmesser und der Dichte $d = 7{\cdot}2$ angenommen werden, damit sie auf Wasser schwimmend bis zum Äquator einsinke? **1459**

†134. Wie dick darf man die Wand einer eisernen Hohlkugel von 50 kg Gewicht und der Dichte $d = 7{\cdot}5$ machen, damit sie auf Wasser schwimmend bis zum Äquator einsinke? **1460**

†135. Eine hohle Halbkugelschale vom äußeren Halbmesser r soll auf Wasser so schwimmen, daß sie bis zur Hälfte des lotrechten Halbmessers einsinke; wie groß darf die Wanddicke genommen werden, wenn das Eigengewicht des Materials s ist? (Zuerst allgemein, dann für $r = 10$ cm und $s = 4$.) **1461**

†136. Eine hohle Metallhalbkugel vom äußeren Halbmesser $r = 40$ cm und der Wanddicke $d = 1$ mm schwimmt auf Wasser; mit wieviel kg muß man sie belasten, damit sie bis zu $^3/_4$ der Höhe einsinke? ($s = 8$.) **1462**

†137. Eine Hohlkugel mit dem äußeren Halbmesser $R = 27$ cm und der Wanddicke $d = 3$ cm soll im Abstande von 18 cm vom Mittelpunkte durch eine Ebene geschnitten werden. Man berechne Inhalt und Oberfläche der beiden Teile! **1463**

†138. Eine Hohlkugel hat als Halbmesser R und r, wobei $R > r$ ist. Wir schneiden diese Kugel im Abstand x vom Mittelpunkte durch eine Ebene, wobei $0 \leq x \leq r$ ist. Man berechne die Größe der Schnittfläche! Die erhaltene Formel ist zu diskutieren. **1464**

139. Um einen geraden Zylinder vom Halbmesser 16 cm und der Höhe 60cm soll eine Kugel beschrieben werden; wie verhält sich die Mantelfläche des Zylinders zur Fläche der ihn umgebenden Zone? **1465**

1466 †140. Eine Halbkugel wird durch zwei Ebenen im gegenseitigen Abstande von 68 cm nach zwei Kreisen geschnitten, deren Halbmesser sich verhalten wie 7 : 24 und deren Inhalte sich um 264 dm^2 89·8 cm^2 unterscheiden; wie groß ist der Kugelhalbmesser?

1467 141. Eine Kugel vom Halbmesser $r = 30$ cm wird auf einer Seite vom Mittelpunkt durch zwei parallele Ebenen geschnitten, die vom Kugelmittelpunkte um 18 cm und 24 cm entfernt sind; man soll Oberfläche und Inhalt der Kugelschicht bestimmen.

1468 142. Man soll die Oberfläche einer Zone berechnen, die zu einer Kugel vom Halbmesser $r = 20$ cm gehört und von der die Halbmesser der Begrenzungskreise $r_1 = 12$ cm und $r_2 = 16$ cm sind.*)

1469 143. Man soll die Oberfläche einer Kugelzone aus den Halbmessern der Begrenzungskreise $r_1 = 15$ cm, $r_2 = 20$ cm und der Höhe der Zone $h = 5$ cm berechnen.*) (Vgl. Nr. 411!)

1470 144. Wie Nr. 143 mit $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 24$ cm, $h = 14$ cm.

1471 145. Die Aufgabe Nr. 143 ist allgemein mit den Werten r_1, r_2 und h durchzuführen.

1472 146. Man soll Inhalt und Oberfläche einer Kugelschicht berechnen, die zu einer Kugel mit dem Halbmesser $R = 15$ cm gehört und als Endflächen Kreise mit den Halbmessern $r_1 = 12$ cm und $r_2 = 9$ cm hat, die auf entgegengesetzten Seiten vom Kugelmittelpunkte liegen.

1473 147. Die Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser $r = 18$ cm ist durch parallele Ebenen in sechs inhaltsgleiche Teile zerlegt; man berechne die Inhalte der entstehenden Teile und ihr Verhältnis zueinander!

1474 148. Wie verhält sich Inhalt und Oberfläche einer Kugelschicht von der Höhe $h = 6$ dm, die durch einen größten Kreis vom Halbmesser 4 dm der zugehörigen Kugel halbiert wird, zum Inhalt und zur Oberfläche eines Abschnittes derselben Kugel, der ebenfalls die Höhe $h = 6$ dm hat?

1475 149. Ein gleichseitiger Kegel hat als Basishalbmesser $r = 4$ cm; seine Oberfläche ist gleich der Fläche einer Kugelhaube, die zu einer Kugel mit dem Halbmesser $R = 8$ cm gehört. Wie groß ist das Volumen des zugehörigen Kugelabschnittes?

1476 150. Von einer Kugelfläche von 13 cm Halbmesser wird eine Kugelhaube von 5 cm Höhe abgeschnitten. Die Mantelfläche eines geraden

*) Die beiden Begrenzungskreise der Zone liegen auf derselben Seite vom Kugelmittelpunkte.

Kegels von 10 cm Halbmesser ist doppelt so groß wie die Kugelhaube; wie groß ist der Inhalt des Kegels?

151. Die Mantelfläche eines geraden Zylinders, dessen Halbmesser 20 cm und dessen Höhe 27 cm beträgt, ist inhaltsgleich mit einer Kugelhaube von 15 cm Höhe; wie groß ist der Inhalt des zu ihr gehörigen Kugelabschnittes? **1477**

152. Eine Kugel vom Halbmesser $R = 30$ cm wird so geschnitten, daß der Halbmesser des Schnittkreises $r = 18$ cm ist; wenn nun der kleinere der beiden Teile inhaltsgleich ist mit einem geraden Zylinder von der Höhe 28 cm, wie groß ist die Oberfläche des Zylinders? **1478**

153. Eine Kugel wird im Abstande $a = {}^2/_3\, r$ vom Mittelpunkte geschnitten und der Schnittkreis als Grundfläche eines geraden Kegels angenommen, dessen Inhalt fünfmal so groß wie der Inhalt der Kugel; wie hoch ist dieser Kegel? **1479**

154. Ein Kugelabschnitt hat als Höhe ${}^1/_3$ des Kugelhalbmessers, der 39 cm mißt. Wie verhält sich sein Inhalt zum Inhalte des zugehörigen Kegels? **1480**

155. Eine Kugel vom Halbmesser $R = 35$ cm wird im Abstande von 25 cm vom Mittelpunkte geschnitten; die kleinere Kugelhaube ist gleich der Mantelfläche eines geraden Kegels vom Halbmesser $r = 14$ cm. Wie groß sind die Inhalte und die Oberflächen von Kugelabschnitt und Kegel? **1481**

†156. Auf einen geraden Zylinder vom Halbmesser $r = 40$ cm und der Höhe $h = 174$ cm sind beiderseits gerade Kegel von 9 cm Höhe aufgesetzt; man soll Inhalt und Oberfläche dieses Körpers berechnen. — Wie groß ist Oberfläche und Inhalt eines 24 cm hohen Abschnittes einer Kugel, deren Inhalt gleich dem Inhalte des eben berechneten Körpers ist? **1482**

†157. Durch eine Kugel mit dem Durchmesser $D = 101{\cdot}4$ cm ist eine Ebene gelegt, die die Kugelfläche im Verhältnisse von 25 : 144 teilt; wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des kleineren Kugelabschnittes und wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche jenes Doppelkegels, dessen Grundfläche der Schnittkreis der Kugel mit der Ebene ist und dessen Spitzen in den Endpunkten des auf diese Ebene senkrechten Durchmessers liegen? **1483**

1484 158. Ein schiefer Kegel hat als längste Seite 45 cm, als kürzeste 39 cm; sein Durchmesser beträgt 42 cm; sein Inhalt ist dreimal so groß wie der Inhalt eines Kugelabschnittes von der Höhe $h = 6$ cm. Wie groß ist die Oberfläche der zugehörigen Kugelhaube?

1485 159. Ein gerader Kegelstumpf hat als Halbmesser der Begrenzungskreise $R = 12$ cm und $r = 6$ cm und als Höhe $h = 8$ cm; seine Mantelfläche ist halb so groß wie die Fläche einer Kugelhaube von der Höhe von 6 cm. Wie groß ist der Inhalt des zugehörigen Kugelabschnittes?

1486 160. Eine Kugel vom Halbmesser $r = 18$ cm wird durch eine Ebene im Abstande vom Mittelpunkte $a = 13$ cm geschnitten; der kleinere der beiden Teile ist inhaltsgleich mit einem geraden Kegelstumpfe, dessen Halbmesser 10 cm und 5 cm lang sind. Wie groß ist die Höhe des Stumpfes?

1487 161. Die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes, dessen Begrenzungshalbmesser 30 cm und 15 cm sind, ist ebenso groß wie eine Kugelhaube, deren Höhe 39 cm beträgt und die zu einer Kugel vom Durchmesser von 45 cm gehört. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Kegelstumpfes und des Kugelabschnittes?

1488 162. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche eines Kegelstumpfes, dessen Grundflächen die Halbmesser $R = 27$ cm und $r = 18$ cm haben und der inhaltsgleich ist mit einem 6 cm hohen Abschnitte einer Kugel vom Halbmesser $r = 173$ cm?

1489 163. Ein gerader Kegelstumpf hat als Grundflächenhalbmesser 45 cm und 30 cm, als Höhe 36 cm; sein Inhalt ist 15mal so groß wie ein 6 cm hoher Kugelabschnitt. Man berechne Inhalte und Oberfläche beider Körper!

1490 164. Ein gerader Kegelstumpf, dessen Endflächen Kreise von 24 cm und von 8 cm Halbmesser sind, hat 54 dm^3 889 cm^3 Inhalt. Seine Mantelfläche ist ebenso groß wie eine Kugelzone, die zu einer Kugel von 4 dm Halbmesser gehört. Wie hoch ist diese Kugelzone?

1491 †165. a) Zu einer Kugel mit dem Halbmesser $R = 6$ cm gehört ein Abschnitt von der Höhe $h = 3$ cm. Über seinem Grundkreise ist ein gerader Kegelstumpf so errichtet, daß seine Seiten Tangenten an die Kugelhaube sind und die Deckfläche eine Tangentialebene an deren Pol ist. Um wieviel ist der Inhalt dieses Kegelstumpfes größer als jener des Kugelabschnittes?

b) Man löse die vorstehende Aufgabe allgemein, wenn R und h gegeben ist!

166. In einem Kugelabschnitt, der durch die Höhe h und den Kugelhalbmesser r gegeben ist, wird ein möglichst großer, gerader Kegel eingeschrieben; wie verhalten sich die Rauminhalte beider Körper? (Allgemein, dann für $r = 25$ cm und $h = 15$ cm.) **1492**

167. Eine Kugel mit dem Halbmesser $r = 24$ cm wird durch eine Ebene derart geschnitten, daß der größere Teil 36 cm hoch ist. In diesen Teil wird ein möglichst großer Kegel eingeschrieben. Wie verhalten sich a) die Mantelflächen, b) die Oberflächen, c) die Inhalte von Kegel und Kugelabschnitt? **1493**

168. Von einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 30$ cm ist ein Abschnitt von 24 cm Höhe abgetrennt; gleichzeitig hat man eine Kugel konstruiert, deren Halbmesser gleich ist der Höhe des Kugelabschnittes. Wie verhalten sich a) die Oberflächen, b) die Inhalte beider Körper? **1494**

169. Ein hohler, gerader Kegel mit dem Durchmesser $d = 16$ cm und der Höhe $h = 32$ cm ist mit der Spitze nach unten gekehrt und bis zur Höhenmitte mit Wasser gefüllt; wenn man sieben gleich große Bleikugeln hineinwirft, steigt das Wasser bis zum Rande; man berechne Halbmesser, Oberfläche und Inhalt einer dieser Kugeln! **1495**

†**170.** Ein gerader Kegelstumpf hat als Halbmesser R und r; wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, die diesem Kegelstumpfe eingeschrieben ist? Zuerst allgemein, dann soll für $R = 9$ cm und $r = 4$ cm Volumen und Oberfläche des Kegelstumpfes und der Kugel berechnet werden.*) **1496**

†**171.** Die Abmessungen eines Holzgefäßes von der Gestalt eines auf der Deckfläche stehenden Kegelstumpfes sind: $R = 48$ cm, $r = 30$ cm, $h = 24$ cm. Es ist zuerst ganz mit Wasser gefüllt; dann wirft man 633 kongruente Bleikugeln hinein, wodurch ein Teil des Wassers ausfließt. Nachdem man sodann die Kugeln wieder herausgenommen hat, steht das Wasser nur mehr bis zur Höhenmitte; man soll Inhalt und Oberfläche einer solchen Kugel berechnen. **1497**

†**172.** In einem zylindrischen Gefäße vom Basishalbmesser $R = 2{\cdot}1$ dm und der Höhe $H = 5$ dm befinden sich $68{\cdot}876$ Liter Wasser; man senkt in das Gefäß eine Kugel, die im Gleichgewichte schwimmt, **1498**

*) Warum ist in dieser Aufgabe sowohl bei dem Kegelstumpfe als bei der Kugel die Maßzahl des Volumens das Doppelte von der Maßzahl der Oberfläche?

wenn sie 3 cm tief ins Wasser eintaucht, wobei das Gefäß dann bis zum Rande mit Wasser voll erscheint; wie groß ist der Halbmesser der Kugel, wie groß ihr Eigengewicht?

1499 †173. Eine Kugel mit dem Halbmesser $R = 13$ cm soll durch eine Ebene so geschnitten werden, daß die Fläche der kleineren Kugelhaube einem größten Kugelkreise gleichkommt. Wenn nun die Gesamtoberfläche des kleineren Kugelabschnittes $^1/_4$ von der Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes mit den Halbmessern $r_1 = 43$ cm und $r_2 = 48$ cm beträgt, wie groß ist der Inhalt dieses Kegelstumpfes?

1500 †174. In einem gleichseitigen, auf der Spitze stehenden, hohlen Blechkegel liegt eine Kugel vom Halbmesser $r = \sqrt[3]{225}$ cm; man gießt nun so viel Wasser ein, daß die Kugel gerade mit Wasser bedeckt ist. Wie hoch wird das Wasser stehen, wenn die Kugel aus dem Kegel herausgenommen wird?

1501 175. Wenn man aus einem gleichseitigen Zylinder den größtmöglichen, geraden Kegel herausbohrt, so ist der Inhalt des übrigbleibenden Teiles so groß wie der Inhalt einer Kugel, die ebensoviele Kubikdezimeter Inhalt hat, als auf ihrer Oberfläche Quadratdezimeter Platz haben; wie verhalten sich die Inhalte und die Oberflächen der Kugel und des ganzen Zylinders?

1502 †176. Die Grundkanten eines geraden, dreiseitigen Prismas sind $a = 26$ dm, $b = 30$ dm, $c = 28$ dm; die Seitenkanten betragen 210 dm; wie groß ist der Halbmesser der umgeschriebenen Kugel?

1503 †177. Der Halbmesser eines geraden Kegels ist $r = 105$ cm, seine Höhe $h = 140$ cm; die Mitte seiner Grundfläche ist zugleich die Spitze eines zweiten Kegels, dessen Seiten auf den Seiten des ersten Kegels senkrecht stehen. In den so entstehenden Doppelkegel ist eine Kugel eingeschrieben; wie verhält sich ihr Inhalt zum Inhalte des Doppelkegels?

1504 †178. Ein Antiparallelogramm, dessen Parallelseiten $AB = 2a$ und $CD = 2b$ sind und in das ein Kreis eingeschrieben ist, rotiert um seine Symmetrielinie; dabei erzeugt eines der beiden Dreiecke, das gebildet ist von einer der nicht parallelen Seiten und den anliegenden Abschnitten der Diagonalen, einen Rotationskörper, dessen Inhalt zu vergleichen ist mit dem Inhalte der Kugel, die der Kreis beschreibt. (Allgemein, dann für $2a = 234$ cm und $2b = 104$ cm.)

1505 †179. Der Zentralabstand zweier kongruenter Kugeln von 51 cm Halbmesser beträgt 90 cm; wie groß ist Inhalt und Oberfläche der ent-

ſtandenen bikonvexen Linſe? Wie groß iſt ihr Durchmeſſer und ihre Dicke?

†180. Man führe die Aufgabe Nr. 179 für zwei verſchiedene Kugeln mit 75 cm und 87 cm Halbmeſſer und 108 cm Zentralabſtand aus! 1506

†181. Eine hohle Halbkugelſchale vom Halbmeſſer $r = 30$ cm iſt bis zur halben Höhe mit Waſſer gefüllt; man wirft 66 kongruente gerade Kegel vom Durchmeſſer $d = 15$ cm hinein, wodurch das Waſſer bis zum Rande ſteigt. Wie groß iſt Inhalt und Oberfläche eines ſolchen Kegels? 1507

182. Ein gerader Kegel ſteht mit einer Halbkugel auf demſelben Grundkreiſe auf. Die Oberflächen beider ſind gleich. Wie verhält ſich der Inhalt der gemeinſamen Grundfläche zum Inhalte des auf der Kugelfläche ausgeſchnittenen Kreiſes? 1508

†183. Über einem Kreiſe von gegebenem Halbmeſſer r iſt nach einer und derſelben Seite ein gleichſeitiger Kegel und eine Halbkugel errichtet; wie groß iſt Inhalt und Oberfläche der durch den Kegel ausgebohrten Halbkugel? Wie verhält ſich das Volumen dieſes Körpers zum Volumen des gleichſeitigen Kegels? 1509

†184. Aus einer Kugelſchicht von 6 cm Höhe, deren Begrenzungskreiſe als Halbmeſſer $r_1 = 12$ cm und $r_2 = 16$ cm haben, wird ein möglichſt großer quadratiſcher Pyramidenſtumpf herausgeſchnitten; wieviel beträgt der Abfall? 1510

†185. Eine Kugel vom Halbmeſſer $r = 51$ cm wird durch zwei Parallelkreiſe geſchnitten, die zu verſchiedenen Seiten vom Mittelpunkte in Abſtänden von 24 cm und 45 cm gelegt ſind. Durch die beiden Parallelkreiſe iſt die Mantelfläche eines geraden Kegelſtumpfes beſtimmt, der aus der Kugel herausgebohrt iſt; wie groß iſt der Inhalt des übrigbleibenden, ringförmigen Teiles der Kugel? 1511

XX. Die regulären Polyeder.

1. Wie entſteht eine körperliche Ecke? 1512

2. Was verſteht man unter Scheitel, Kanten, Kantenwinkeln, Seitenflächen und Flächenwinkeln einer körperlichen Ecke? 1513

3. Man zeichne das Netz a) einer dreiſeitigen körperlichen Ecke; b) einer vierſeitigen körperlichen Ecke; c) einer fünfſeitigen körperlichen Ecke uſw.! 1514

1515 4. Wie kann man mit Hilfe des Netzes einer dreiseitigen körperlichen Ecke begründen, daß in jeder solchen Ecke die Summe zweier Kantenwinkel größer ist als der dritte?

1516 5. Warum ist die Summe aller Kantenwinkel an einer körperlichen Ecke immer kleiner als vier Rechte?

1517 6. Was ist ein regelmäßiger Körper (ein reguläres Polyeder)? *)

1518 7. Man zeige auf Grund des in Nr. 5 ausgesprochenen Satzes, daß es nur fünf reguläre Körper geben kann!

1519 8. Wie heißen die fünf regulären Polyeder? Man soll in jedem die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten angeben.

1520 9. Man zeichne das Netz eines regulären Tetraeders!

1521 10. Man berechne die Oberfläche eines regulären Tetraeders aus seiner Kante!

1522 11. Man berechne den Inhalt eines regulären Tetraeders aus seiner Kante!

1523 12. Wieso kann man einem regulären Tetraeder sowohl eine Kugel einschreiben als auch eine Kugel umschreiben?

1524 13. Man berechne die Halbmesser r und R der dem Tetraeder ein- und umgeschriebenen Kugeln aus der gegebenen Kante des Tetraeders! In welcher Beziehung steht r zu R? Warum ist der Mittelpunkt der beiden Kugeln zugleich der Schwerpunkt des Körpers?

1525 14. Man zeichne das Netz eines regulären Oktaeders!

1526 15. Man berechne die Oberfläche eines regulären Oktaeders aus seiner Kante!

1527 16. Man berechne den Inhalt eines regulären Oktaeders aus seiner Kante!

1528 17. Warum läßt sich dem Oktaeder eine Kugel einschreiben und eine Kugel umschreiben?

1529 18. Man berechne die Halbmesser r und R der beiden Kugeln, die man einem Oktaeder ein- und umschreiben kann!

1530 19. Man denke sich ein regelmäßiges Oktaeder auf eine seiner Dreieckflächen gelegt und durch die Mittelpunkte jener sechs Körperkanten, die zur oberen Deckfläche verlaufen, eine Schnittebene gelegt. Was für eine Schnittfigur entsteht und wie groß ist ihr Inhalt?

---

*) Die regulären Körper heißen auch „platonische Körper", weil sich die platonische Schule mit ihnen eingehend beschäftigte; ihre Entdeckung wird der pythagoreischen Schule zugeschrieben.

20. Man konstruiere das Netz eines Ikosaeders! **1531**

21. Man berechne die Oberfläche eines Ikosaeders aus seiner Kante! **1532**

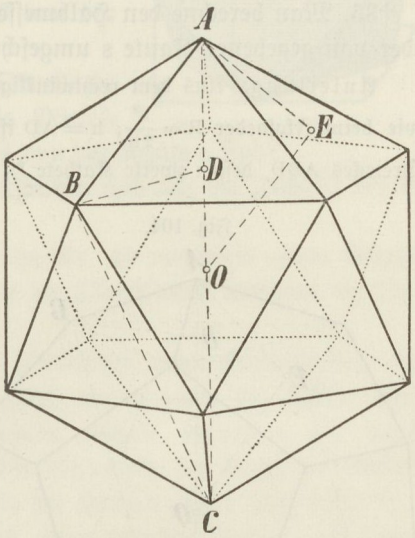
†22. Warum kann man einem Ikosaeder eine Kugel umschreiben? **1533**

†23. Man berechne den Halbmesser R einer Kugel, die einem Ikosaeder mit gegebener Kante s umgeschrieben ist! **1534**

Anleitung: Da das Dreieck ABC (Fig. 103) ein rechtwinkliges ist, so ist $s^2 = 2R \cdot h$, wobei die Strecke AD mit h bezeichnet wurde, und $R = \frac{s^2}{2h}$; h ist aber aus dem rechtwinkligen Dreiecke ABD zu berechnen, in dem die Kathete BD der Halbmesser eines Kreises ist, der einem regulären Fünfecke mit der Seite s umgeschrieben ist. (Man benütze das Ergebnis von Nr. 512!) Nach einigen Umformungen findet man

$$R = \frac{s}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Fig. 103.



†24. Man berechne den Halbmesser r jener Kugel, die sich einem Ikosaeder mit gegebener Kante s einschreiben läßt! **1535**

Anleitung: Aus dem rechtwinkligen Dreiecke AOE ergibt sich

$$r = \frac{s}{12}\sqrt{42 + 18\sqrt{5}}.$$

†25. Man berechne den Inhalt eines Ikosaeders aus der Kante s des Körpers! **1536**

Anleitung: Man benütze die Anmerkung zu Nr. 1335! Es ergibt sich

$$V = \frac{5s^3}{12}\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = \frac{5s^3}{12}\sqrt{9 + 6\sqrt{5} + 5} = \frac{5s^3}{12}\sqrt{(3 + \sqrt{5})^2} = \frac{5s^3}{12}(3 + \sqrt{5}).$$

26. Man konstruiere das Netz eines Hexaeders! **1537**

27. Man berechne die Oberfläche eines Hexaeders aus seiner Kante! **1538**

28. Man berechne den Inhalt eines Hexaeders aus seiner Kante! **1539**

29. Man berechne die Halbmesser r und R der beiden Kugeln, die sich einem Hexaeder ein- und umschreiben lassen! **1540**

†30. Wie muß ein Würfel von der Kantenlänge s geschnitten werden, damit die Schnittfigur ein regelmäßiges Sechseck werde? Wie groß ist sie und wie groß sind Inhalt und Oberfläche des restlichen Körpers? **1541**

1542 †31. Durch die drei Eckpunkte der drei von einer Würfelecke ausgehenden Kanten ist eine Ebene gelegt. In welchem Verhältnisse teilt sie die auf ihr normal stehende Körperdiagonale?

1543 32. Man konstruiere das Netz eines Dodekaeders!

1544 †33. Man berechne die Oberfläche eines Dodekaeders aus seiner Kante!

Anleitung: Man benütze Nr. **512**, wodurch sich ergibt

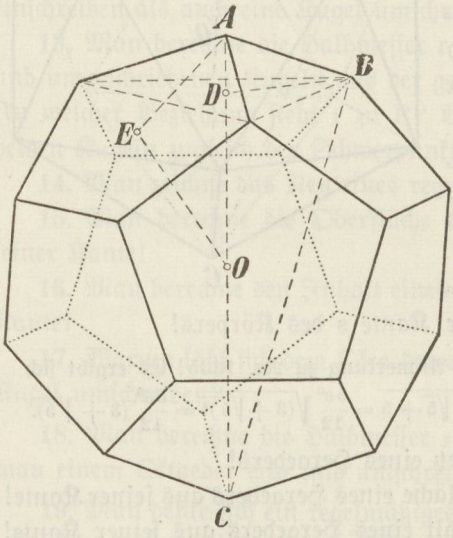
$$O = 3s^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}.$$

1545 †34. Warum kann man einem Dodekaeder eine Kugel umschreiben?

1546 †35. Man berechne den Halbmesser R der Kugel, die einem Dodekaeder von gegebener Kante s umgeschrieben werden kann!

Anleitung: Aus dem rechtwinkligen Dreiecke ABC (Fig. 104) ergibt sich wie beim Ikosaeder $R = \frac{s^2}{2h}$; $h = AD$ ist wieder eine Kathete des rechtwinkligen Dreieckes ABD, dessen zweite Kathete $^2/_3$ der Höhe eines gleichseitigen Dreieckes ist, dessen Seite gleichkommt der Diagonale d eines regulären Fünfeckes mit der Seite s. Unter Benützung von Nr. **513** findet man $R = \frac{s}{4}\sqrt{6(3+\sqrt{5})}$.

Fig. 104.



1547 †36. Man berechne den Halbmesser r der Kugel, die sich einem Dodekaeder von gegebener Kantenlänge s einschreiben läßt!

Anleitung: Aus dem rechtwinkligen Dreiecke AOE ergibt sich

$$r = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$$

1548 †37. Man berechne den Inhalt eines Dodekaeders aus der Kante s des Körpers!

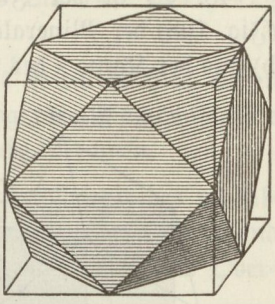
Anleitung: Wie beim Ikosaeder ergibt sich $V = \frac{s^3}{4}\sqrt{470+210\sqrt{5}} =$

$$= \frac{s^3}{4}\sqrt{225+210\sqrt{5}+245} = \frac{s^3}{4}\sqrt{(15+7\sqrt{5})^2} = \frac{s^3}{4}(15+7\sqrt{5}).$$

1549 †38. Ein Tetraeder, ein gleichseitiger Kegel und eine Kugel haben gleiche Oberfläche; wie verhalten sich ihre Inhalte?

†39. Es ist der Inhalt und die Oberfläche des Tetraeders zu bestimmen, das aus einem Würfel von gegebener Kantenlänge entsteht, wenn man durch zwei sich kreuzende Diagonalen zweier Gegenflächen und durch die entsprechenden Eckpunkte des Würfels Ebenen legt. Man vergleiche Inhalt und Oberfläche des Tetraeders und des Würfels! 1550

Fig. 105.



†40. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche jenes Oktaeders, dessen Ecken die Mittelpunkte der Flächen eines Würfels von der Kante s sind? 1551

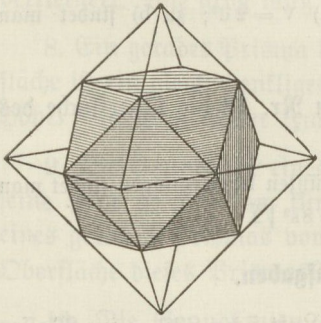
†41. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche jenes Hexaeders, dessen Ecken die Mittelpunkte der Flächen eines Oktaeders von der Kante s sind? 1552

†42. Wie verhalten sich die Oberflächen und wie die Inhalte der in Nr. 41 bestimmten Körper? 1553

†43. Wenn man dem Oktaeder in Nr. 40 nochmals einen Würfel einschreibt, wie verhalten sich dann die Oberflächen und wie die Inhalte der beiden Würfel? 1554

†44. Man berechne Inhalt und Oberfläche einer Kombination aus Hexaeder und Oktaeder, die entsteht, wenn man die Ecken eines Hexaeders, dessen Kante s ist, durch Ebenen abstumpft, die durch die Mittelpunkte der Kanten gehen (Fig. 105)! *) 1555

Fig. 106.



†45. Man berechne Inhalt und Oberfläche einer Kombination aus Oktaeder und Hexaeder, die entsteht, wenn man die Ecken eines Oktaeders, dessen Kante s ist, durch Ebenen abstumpft, die durch die Mittelpunkte der Kanten des Oktaeders gehen (Fig. 106)! 1556

†46. Von einem Hexaeder mit der Kante s sind die Ecken soweit abgestumpft, daß aus den Flächen des Hexaeders regelmäßige Achtecke werden. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des entstehenden Körpers? 1557

*) In den Aufgaben Nr. 44—47 sind einige halbreguläre (oder archimedische) Körper behandelt.

1558 †47. Von einem Oktaeder mit der Kante s sind die Ecken soweit abgestumpft, daß aus den Flächen des Oktaeders regelmäßige Sechsecke werden. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des entstehenden Körpers?

1559 †48. Es ist der Inhalt des Rhombendodekaeders (Granatoeder) (Fig. 108) der Mineralogie a) aus der kürzeren Rhombusdiagonale d, b) aus der Kante s des Dodekaeders zu berechnen.

Fig. 107.

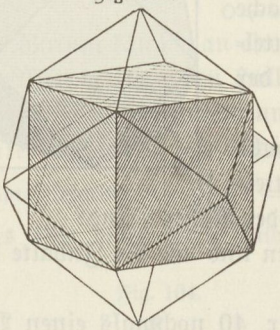
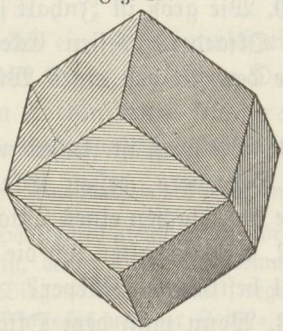


Fig. 108.



Anleitung: Das Rhombendodekaeder entsteht aus dem Würfel, wenn man durch alle seine Kanten Ebenen legt (Fig. 107), die zu den Flächen des Würfels unter 45° geneigt sind. Man kann daher das Dodekaeder auch so entstanden denken, daß man auf die Flächen des Würfels Pyramiden aufsetzt, deren Höhe gleich ist der Hälfte der Würfelkante. Aus diesen sechs Pyramiden läßt sich aber ein zweiter, dem ursprünglichen Würfel kongruenter Würfel zusammensetzen, wenn man die Pyramiden so anordnet, daß ihre Scheitel in einen Punkt zusammenfallen. Es ist also die Lösung zu a) $V = 2\,d^3$; zu b) findet man

$$V = \frac{16}{9}\,s^3\sqrt{3}.$$

1560 †49. Man berechne aus den Angaben in Nr. 48 die Oberfläche des Rhombendodekaeders!

Anleitung: Auf Grund der in Nr. 48 benützten Überlegungen findet man a) $O = 6\sqrt{2}\,.\,d^2$; b) $O = 8s^2\sqrt{2}$.

XXI. Wiederholungsaufgaben.

1561 1. Ein Würfel aus Stahl wiegt an der Luft 5 kg 832 g; im Wasser nur 5 kg 103 g; wie groß ist seine Kante, wie groß ist sein Eigengewicht?

1562 2. Wie groß ist das Gewicht eines Korkwürfels von 1 m Seitenlänge, wenn die Dichte des Korkes $^1/_4$ beträgt? — Wie groß sind die

Kanten zweier Würfel aus diesem Stoffe, deren Gewicht 100 kg und 1 kg beträgt?

1563 3. Wie groß ist die Kante eines Würfels aus reinem Silber, dessen Wert 1 Million Schilling beträgt? (Dichte des Silbers = 10·47; 1 kg Silber ist 150 Schilling wert.)

1564 4. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein Rechteck, dessen Diagonale 25 cm und dessen Länge 24 cm beträgt; die Diagonalschnitte sind Quadrate. Man soll Inhalt und Oberfläche berechnen.

1565 5. Die Grundkanten eines rechtwinkligen Parallelepipedes verhalten sich wie 45 : 28; der Umfang der Grundfläche beträgt 146 cm und die Diagonalschnitte sind Quadrate. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

1566 6. In einem rechtwinkligen Parallelepipede stehen die drei an einer Ecke zusammenstoßenden Kanten im Verhältnisse von 2 : 3 : 4; die Gesamtoberfläche beträgt 4212 cm². Wie groß sind die Abmessungen und das Volumen des Parallelepipedes?

1567 7. Die Kanten eines Quaders sind 3, 4 und 5 cm lang. Verlängert man jede um ein und dasselbe Stück und bildet daraus einen neuen Quader, so ist er um den $25^1/_2$fachen Inhalt des über diesem Stück errichteten Würfels größer als jener Quader, den man erhält, wenn man jede der Kanten des ursprünglichen Quaders um das gleiche Stück verkleinert. Wie groß muß dieses Stück genommen werden?

1568 8. Ein gerades Prisma hat 39 dm² 20 cm² Oberfläche; seine Grundfläche ist ein gleichschenkliges Dreieck von 14 cm Grundlinie und 24 cm Höhe. Wie groß ist der Inhalt dieses Prismas?

1569 9. Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes ist 32 cm lang; seine Höhe ist um 2 cm kürzer. Dieses Dreieck bildet die Grundfläche eines geraden Prismas von 34 dm³ 560 cm³ Inhalt; wie groß ist die Oberfläche dieses Prismas?

1570 10. Die Grundkanten eines geraden, dreiseitigen Prismas sind: a = 52 cm, b = 60 cm, c = 56 cm; die Höhe des Prismas ist h = 96 cm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

1571 11. Von einem Würfel werden parallel zu den vier Vertikalkanten dreiseitige Prismen derartig abgeschnitten, daß die Grundfläche des

übrigbleibenden geraden Prismas ein regelmäßiges Achteck ist. Man soll den Inhalt und die Oberfläche des Restkörpers durch die Würfelkante s ausdrücken.

1572 12. Ein gerades Prisma hat als Grundfläche einen Rhombus, dessen Diagonalen $D = 42\,cm$ und $d = 40\,cm$ sind; alle Kanten sind gleich lang. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche?

1573 13. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein Rhombus von 25 cm Seitenlänge und $6\,dm^2$ Inhalt. Wie groß ist Oberfläche und Volumen dieses Prismas, wenn der kleinere Diagonalschnitt ein Quadrat ist?

1574 14. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein Parallelogramm, dessen Seiten $s_1 = 68\,cm$ und $s_2 = 32\,cm$ sind. Der eine Diagonalschnitt des Prismas ist ein Quadrat von $36\,dm^2$ Inhalt; wie groß ist Oberfläche und Volumen des Körpers?

1575 15. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein Parallelogramm, dessen Seiten $s_1 = 41\,cm$ und $s_2 = 9\,cm$ lang sind; eine Diagonale d des Parallelogrammes beträgt 40 cm. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Prismas, wenn die Mantelfläche $50\,dm^2$ beträgt?

1576 16. Wie Nr. 15, wenn $s_1 = 16\,cm$, $s_2 = 34\,cm$, $d = 3\,dm$ ist und statt der Mantelfläche das Volumen $V = 24\,dm^2$ gegeben ist.

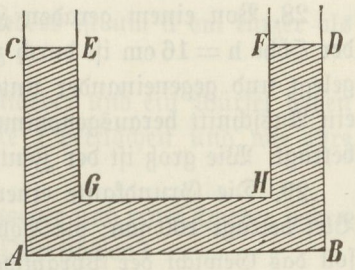
1577 17. Die beiden Parallelseiten eines gleichschenkligen Trapezes von 8 cm Höhe messen 32 cm und 20 cm; wie groß ist Inhalt und Oberfläche eines 3·6 dm hohen, geraden Prismas, dessen Grundfläche das obige Trapez bildet?

1578 18. Ein 25 m langes Stück eines Eisenbahndammes wird von den lotrechten Mauern zweier Bahndurchlässe begrenzt. Oben ist der Damm 8 m breit, die beiderseitigen Böschungen haben je 7·3 m lange Fallinien und die Dammhöhe beträgt $5^1/_2$ m; wie groß ist der Inhalt des Dammes?

1579 19. Die Grundfläche eines 105 cm hohen, graden Prismas ist ein Rhombus mit den Diagonalen $D = 16\,cm$ und $d = 12\,cm$; dieses Prisma ist inhaltsgleich mit einem rechtwinkligen Parallelepipede, dessen Grundkanten 7 cm und 24 cm sind. Man soll Inhalte und Oberflächen beider Prismen und die Körperdiagonale des Parallelepipedes berechnen.

†20. Ein Gebäude hat den in Fig. 109 dargestellten Grundriß. Seine Höhe beträgt bis zum Dache 15 cm; die Wand AB ist 60 m lang, die Wände AC, BD sind jede 34 m lang. Die Tiefe des Gebäudes CE beträgt überall 14 m. Es soll Gassen- und Hofwand frisch angestrichen werden; wieviel Fläche ist da zu überstreichen, wenn die Wand AB 26 Fenster, AC und BD je 10 Fenster, GH 14 Fenster, endlich GE und FH je 6 Fenster haben und jedes Fenster 1 m breit und 2 m hoch, jedes der beiden Tore aber 2 m breit und 3 m hoch ist? **1580**

Fig. 109.



21. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt eines zylindrischen Rohrstückes von 48 cm Länge, 20 cm lichtem Durchmesser und 16 cm Wandstärke? **1581**

22. Ein gerader Zylinder hat 904·77 cm² Oberfläche; vermehrt man seine Höhe um 36 cm, so erhält man einen Zylinder von der dreifachen Oberfläche. Wie groß ist das Volumen des ursprünglichen Zylinders? **1582**

23. Wie groß sind die Oberflächen und Inhalte der beiden geraden Zylinder, die dem Prisma in Nr. **1570** ein- und umschrieben werden können? **1583**

24. Die Aufgabe Nr. **1037** ist mit den Zahlenwerten: AE = = 100 cm, AC = 64 cm, BD = 40 cm, AO = 35 cm durchzuführen. **1584**

25. Ein gerader Zylinder wird durch eine Ebene derart geschnitten, daß nur eine der Erzeugenden des Zylinders ihre ursprüngliche Länge von 86 cm behält. Das Volumen des entstehenden Zylinderstumpfes ist 142 dm³ 955 cm³ und der Halbmesser beträgt 24 cm; wie groß ist die Oberfläche des Zylinderstumpfes? **1585**

26. Der Triumphbogen des Titus zu Rom (erbaut im Jahre 81 n. Chr.) besteht im wesentlichen aus einem parallelepipedischen Mauerkörper von 13·4 m Breite, 4·75 m Tiefe und 14·6 m Höhe, der durch eine 5·4 m breite und ebenso hohe Toröffnung durchbrochen ist, die nach oben durch ein Tonnengewölbe (halber Kreiszylinder) abgeschlossen ist. Wieviel Kubikmeter Mauerwerk enthält der Bogen? Wie groß ist die reichverzierte Oberfläche? **1586**

1587 27. Ein gerader Zylinder mit dem Halbmesser $r = 8$ cm und der Höhe $h = 4$ cm wird so lange auf der Drehbank abgedreht, bis sein Volumen nur mehr $^9/_{16}$ des ursprünglichen Inhaltes beträgt. Um wieviel Prozente verkleinert sich dabei die Oberfläche?

1588 28. Von einem geraden Zylinder vom Halbmesser $r = 6$ cm und der Höhe $h = 16$ cm ist durch zwei Ebenen, die durch die Zylinderachse gelegt und gegeneinander unter einem gewissen Winkel geneigt sind, ein Ausschnitt herausgenommen, dessen Gesamtoberfläche 295·673 cm² beträgt. Wie groß ist der Zentriwinkel dieses Ausschnittes?

1589 29. Die Grundkante einer geraden, quadratischen Pyramide aus Blei beträgt 100 mm; die Höhe eines Seitendreieckes ist 13 cm. Man soll das Gewicht der Pyramide berechnen. ($s = 11{\cdot}35$.)

1590 30. Die Oberfläche einer geraden, quadratischen Pyramide beträgt 72 dm², die Grundkante ist 48 cm lang. Wie groß ist das Volumen?

1591 31. Die Grundkante einer geraden, quadratischen Pyramide mißt 40 cm und ihr Inhalt beträgt 52·8 dm³; wie groß ist die Oberfläche?

1592 32. Die Grundkanten einer geraden, rechteckigen Pyramide von 24 cm Höhe sind 36 cm und 14 cm lang; wie groß ist Inhalt und Oberfläche der Pyramide?

1593 *33. Von einer geraden, quadratischen Pyramide beträgt die Oberfläche 360 cm², der Rauminhalt 400 cm³. Grundkante und Höhe sind zu ermitteln.

1594 34. Das Volumen eines Würfels beträgt 110 dm³ 592 cm³; auf jede seiner Flächen wird eine gerade Pyramide aufgesetzt, deren Höhe sich zur Würfelkante verhält wie 0·9375 : 1. Wie groß ist die Oberfläche und das Volumen des entstehenden Körpers?

1595 35. Die Grundkanten einer dreiseitigen Pyramide sind $a = 51$ cm, $b = 41$ cm, $c = 58$ cm; die Höhe ist gleich dem halben Umfange der Grundfläche. Wie groß ist der Inhalt?

1596 36. Die Grundkanten einer dreiseitigen Pyramide sind $a = 24$ cm, $b = 90$ cm, $c = 78$ cm; die Pyramidenhöhe trifft in den Mittelpunkt des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises und mißt 40 cm; wie groß ist Inhalt und Oberfläche der Pyramide?

1597 37. Wie verhält sich der Inhalt einer regelmäßigen, dreiseitigen Pyramide, deren Höhe mit den drei Seitenkanten Winkel von 30° bildet, zum Inhalte eines regulären Tetraeders von gleicher Höhe?

38. Durch die Endpunkte dreier in einer Ecke zusammenstoßenden Würfelkanten s ist ein ebener Schnitt gelegt. Es ist der Inhalt der Schnittfigur sowie Oberfläche und Inhalt des vom Würfel übrigbleibenden Teiles zu berechnen. **1598**

39. Die Höhe eines regulären Tetraeders ist um d cm kürzer als seine Kante. Wie groß ist diese? **1599**

40. Ein reguläres Tetraeder, ein Oktaeder und ein Würfel haben gleiche Kanten. Wie verhalten sich ihre Oberflächen und wie ihre Inhalte? **1600**

41. Ein reguläres Tetraeder, ein Hexaeder und ein Oktaeder haben gleichen Inhalt; wie verhalten sich ihre Oberflächen? **1601**

42. Ein reguläres Tetraeder, ein Hexaeder und ein Oktaeder haben gleiche Oberflächen; wie verhalten sich ihre Inhalte? **1602**

†43. Das Netz eines regulären Tetraeders besteht aus vier kongruenten, gleichseitigen Dreiecken, die zusammen wieder ein gleichseitiges Dreieck bilden. Man füge nun ähnlich vier kongruente, spitzwinklige und ungleichseitige Dreiecke zu einem Körpernetze zusammen und stelle daraus das Modell dieses Körpers zusammen. Er führt den Namen „Sphenisk". Es soll sein Volumen durch die Längen a, b, c der drei Dreiecksseiten ausgedrückt werden.*) **1603**

44. Ein gerades Prisma hat als Grundflächen Rechtecke mit den Seiten $a = 54$ cm und $b = 30$ cm; seine Höhe beträgt 36 cm. Auf die Grundflächen des Prismas sind zwei gerade Pyramiden aufgesetzt, die ebenso hoch sind wie das Prisma; man soll Inhalt und Oberfläche des neuen Körpers berechnen. **1604**

45. Eine gerade, quadratische Pyramide mit der Grundkante $s = 28$ cm und der Höhe $h = 48$ cm wird in halber Höhe parallel zur Grundfläche geschnitten; wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Stumpfes? **1605**

*) Wenn man in zwei gegenüberliegenden Würfelflächen zwei sich kreuzende Diagonalen zieht, so bestimmen ihre Endpunkte die vier Ecken eines regulären Tetraeders. (Vgl. Nr. 1550.) Durch dasselbe Verfahren erhält man aus einem Quader den Sphenisk. Man stelle eine entsprechende Zeichnung her, drücke die drei Kanten x, y und z dieses Quaders durch die Dreiecksseiten a, b und c aus und berechne den Sphenisk als Restkörper des Quaders. Welche Probe ergibt sich, wenn man $a = b = c$ setzt?

1606 46. Man soll Oberfläche und Inhalt eines geraden, 40 cm hohen Pyramidenstumpfes berechnen, dessen quadratische Grundflächen 42 cm und 24 cm als Seite haben.

1607 47. Die Grundkanten einer geraden, 48 cm hohen Pyramide mit rechteckiger Grundfläche sind 40 cm und 28 cm lang; die Pyramide wird in halber Höhe parallel zur Grundfläche abgestumpft. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt des Stumpfes?

1608 48. Eine gerade, quadratische Pyramide mit der Grundkante 18 cm und der Höhe 12 cm wird durch zwei zur Grundfläche parallele Ebenen so geschnitten, daß die Höhe in drei gleiche Teile zerfällt; wie groß sind die Oberflächen und Inhalte der drei Teile und der ganzen Pyramide?

1609 49. Die Oberfläche eines geraden, quadratischen Pyramidenstumpfes beträgt 2592 cm^2; seine Grundkanten sind $S = 30$ cm und $s = 14$ cm; wie groß ist der Inhalt?

1610 50. Um eine Kugel vom Halbmesser r läßt sich ein quadratischer, gerader Pyramidenstumpf umschreiben, in dem die Diagonale der Grundfläche 4 r ist. Wie groß ist Volumen und Oberfläche des Pyramidenstumpfes? (Zuerst allgemein, dann für $r = 3$ cm.)

1611 51. Die Seiten eines Dreieckes sind $a = 11$ cm, $b = 13$ cm und $c = 20$ cm; wie groß ist Inhalt und Oberfläche jenes Oktaeders, dessen Kante gleich ist dem Halbmesser des in das gegebene Dreieck eingeschriebenen Kreises?

1612 52. Von einem geraden Kegel beträgt der Durchmesser $12^1/_2$ cm und die Höhe 15 cm; wie groß ist die Oberfläche des Kegels und wie groß ist der Halbmesser eines mit ihr flächengleichen Kreises?

1613 53. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche eines geraden Kegels mit der Seite 109 cm und der Höhe 91 cm?

1614 54. Der Umfang des Achsenschnittes eines geraden Kegels beträgt 64 cm; die Seite ist um 3 cm kleiner als der doppelte Durchmesser. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des Kegels und wie groß ist der Zentriwinkel der abgewickelten Mantelfläche?

1615 55. Bei einem geraden Kegel von der Höhe h verhält sich die Grundfläche zur Mantelfläche wie $p : q$. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Kegels? (Allgemein, dann für $p : q = 8 : 17$ und $h = 45$ cm.)

1616 *56. Die Seite eines geraden Kegels ist um 25 cm größer als der Halbmesser und der Mantel des Kegels hat $(444\,\pi)$ cm^2 Inhalt. Berechne Halbmesser, Höhe, Oberfläche und Inhalt des Kegels!

*57. Um wieviel muß die Höhe eines geraden Kegels größer sein als der Halbmesser der Grundfläche, damit der ausgebreitete Mantel ein Viertelkreis wird? **1617**

58. Ein gerader Kegel soll mit der Spitze nach unten so im Wasser schwimmen, daß er mit $^9/_{10}$ der Höhe eintaucht; wie groß ist seine Dichte zu nehmen? **1618**

59. Ein gerader Zylinder von 565·48 cm² Oberfläche und 6 cm Halbmesser ist inhaltsgleich mit einem geraden Kegel von 18 cm Durchmesser; wie groß ist die Oberfläche des Kegels? **1619**

60. Von einem schiefen Kegel ist die längste Seite 35 cm, die kürzeste nur 29 cm; der Halbmesser beträgt 4 cm. Wie groß ist die Oberfläche eines um 3 cm höheren, geraden Kegels, dessen Inhalt $3^1/_2$mal so groß ist wie jener des schiefen Kegels? **1620**

61. Die längste Seite eines schiefen Kegels ist um 7 cm größer als die kürzeste; der Umfang des charakteristischen Dreieckes beträgt 48 cm, der Durchmesser mißt 21 cm. Dieser Kegel ist inhaltsgleich mit einem geraden Zylinder, dessen Höhe nur $^3/_4$ von der Höhe des Kegels beträgt. Wie groß ist die Oberfläche des Zylinders? **1621**

62. In einen geraden Zylinder vom Halbmesser r ist ein gleichseitiger Kegel so eingeschrieben, daß die Achsen beider Körper aufeinander senkrecht stehen und der Grundkreis des Kegels die beiden Grundflächen und den Mantel des Zylinders berührt, während die Spitze des Kegels im Zylindermantel liegt. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Kegels? **1622**

63. In einem geraden Kegelstumpfe beträgt der Halbmesser der Deckfläche 15 cm und ist ebenso groß wie die Seite des 12 cm hohen Stumpfes. Wie groß ist sein Inhalt und seine Oberfläche? **1623**

64. Ein gerader Kegel mit der Seite $s = 51$ cm und dem Halbmesser $r = 24$ cm wird in $^1/_3$ der Höhe (gerechnet von der Grundfläche ab) parallel zu dieser geschnitten; wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Stumpfes? **1624**

65. Ein gerader Kegelstumpf von 42 cm Höhe wird durch Kreise begrenzt, deren Halbmesser 4 cm und 2 cm betragen; der Kegelstumpf ist inhaltsgleich mit einem geraden Kegel von 24 cm Höhe. Wie groß ist die Oberfläche des Kegels? **1625**

66. Einer Kugel von 6 cm Halbmesser ist ein gerader Kegelstumpf umgeschrieben, dessen größerer Halbmesser ebenso groß ist als der **1626**

Kugeldurchmesser. Wie groß sind Oberflächen und Inhalte beider Körper und in welchem Verhältnisse stehen sie zueinander?

1627 †67. Ein dem Zentriwinkel 288° entsprechender Ausschnitt eines Kreisringes mit den Halbmessern R und r wird zu einem geraden Kegelstumpfe gebogen. Wie groß ist dessen Inhalt und Oberfläche?

1628 68. Ein Dreieck mit den Seiten a = 99 cm, b = 148 cm, c = 149 cm rotiert um a; wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers?

1629 69. Ein Trapez mit den Seiten a = 120 cm, b = 68 cm, c = 53 cm, d = 51 cm (wobei a ∥ b ist) rotiert um die Seite a; wie groß ist Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers?

1630 70. Die beiden Diagonalen D und d eines Rhombus sind 40 cm und 30 cm lang. Der Rhombus rotiert einmal um D, ein anderesmal um d. Man berechne die Inhalte und Oberflächen der beiden Rotationskörper sowie der in sie eingeschriebenen Kugeln!

1631 71. Ein Dreieck mit den Seiten a = 98 cm, b = 91 cm und c = = 105 cm rotiert um die Seite a. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt des Rotationskörpers und wie groß ist die Oberfläche jener Kugel, deren Inhalt $^1/_{63}$ vom Inhalte des Rotationskörpers beträgt?

1632 72. Ein Deltoid, dessen Seiten 13 cm und 20 cm messen und dessen Symmetriediagonale 21 cm lang ist, rotiert um eine Achse, die parallel zur Symmetriediagonale durch eine Ecke geht. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt des Rotationskörpers?

1633 †73. Zwei kongruente Rhomben mit den Diagonalen D = 69 cm und d = 36·8 cm sind so aufeinander gelegt, daß ihre Mittelpunkte zusammenfallen und die kürzere Diagonale des einen Rhombus mit der längeren Diagonale des anderen Rhombus zusammenfällt. Die so gebildete Figur rotiert um eine der längeren Diagonalen. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers?

1634 74. Wie groß ist der innere Durchmesser des glatten Laufes einer Kanone, deren kugelförmiges, eisernes Vollgeschoß 3 kg wiegt? (Eigengewicht des Eisens = 7·207.)

1635 75. Wie groß ist das Gewicht einer Korkkugel von 2 m Durchmesser? (s = 0·24.)

1636 76. Wie groß ist der Halbmesser einer silbernen Kugel, deren Wert eine Million Schilling beträgt? (s = 10·47; 1 kg Silber ist 150 Schilling wert.)

77. Eine Kugel rollt 18·84 m weit und dreht sich dabei 50mal um; wie schwer ist sie, wenn die Dichte 0·88 beträgt? ($\pi = 3{\cdot}14$.) **1637**

78. Eine massive Bleikugel von der Dichte 11·35 wiegt, wenn sie vollständig in Wasser getaucht wird, 599·324 g. Wie groß ist ihr Durchmesser und wie schwer ist sie in der Luft? **1638**

79. Wenn eine Million sehr kleiner, unter sich kongruenter kugelförmiger Wassertröpfchen zu einem einzigen kugelförmigen Wassertropfen zusammenfließen, auf welchen Bruchteil sinkt dann die Oberfläche herab? (Wachstum des Elektrizitätsgrades bei Bildung von Gewitterwolken.) **1639**

80. Eine metallene Hohlkugel hat den äußeren Durchmesser von 20 cm und eine Wanddicke von 9 cm; aus dieser Hohlkugel wird eine andere gegossen, deren Durchmesser um 4 cm größer ist. Wie groß wird ihre Wandstärke werden? **1640**

†81. Einer geraden, quadratischen Pyramide ist eine Kugel vom Halbmesser r eingeschrieben. Die Diagonale der Grundfläche ist dreimal so groß als der Kugelhalbmesser. Man berechne Oberfläche und Inhalt der Pyramide! **1641**

82. Ein zylindrisches Gefäß vom Halbmesser $7^1/_9$ cm und der Höhe von 10 cm ist bis auf 2 cm vom Rande mit Wasser gefüllt. Wird dieses ausfließen, wenn man eine Kugel vom Halbmesser $2^2/_3$ cm hineinwirft? **1642**

83. Von einem geraden Kegel beträgt die Oberfläche $(200\,\pi)$ mm², die Mantelfläche $(136\,\pi)$ mm²; 900 solcher Kegel aus Blei werden in eine Kugel umgegossen. Wie groß ist deren Oberfläche, Inhalt und Gewicht? (s = 11·4.) **1643**

84. Die Mantelfläche eines geraden Kegels mit der Seite von 20 cm ist 15mal so groß wie die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser 2 cm beträgt. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt des Kegels? **1644**

85. Der Rauminhalt einer Kugel beträgt 7 dm³ 238·22 cm³. Diese Kugel ist inhaltsgleich mit einem geraden Zylinder, dessen Höhe $1^1/_2$mal so groß ist wie der Kugeldurchmesser. Wie groß ist die Oberfläche der Kugel? Wie verhalten sich die Oberflächen beider Körper? **1645**

86. Die Oberfläche eines geraden Kegels vom Halbmesser 15 cm beträgt 2544·688 cm²; der Inhalt des Kegels verhält sich zum Inhalte einer Kugel wie 3 : 5. Wie groß ist derHalbmesser dieser Kugel und wie verhalten sich die Oberflächen beider Körper? **1646**

1647 †87. Die Gesamtoberfläche eines geraden Kegels beträgt $^3/_{128}$ von der Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser gleich dem Umfange des Achsenschnittes am Kegel ist; die Fläche des Achsenschnittes beträgt 588 cm². Wie groß ist der Halbmesser und wie groß sind Oberfläche und Inhalt des Kegels?

1648 *88. Auf die Grundflächen eines geraden Zylinders von der Höhe h = 9 cm sind nach außen Halbkugeln errichtet. Der Inhalt des so gebildeten Körpers verhält sich zum Inhalte eines geraden Zylinders, dessen Halbmesser der Höhe und dessen Höhe dem Halbmesser des ersten Zylinders gleichkommt wie 34 : 27. Wie groß ist der Halbmesser des ursprünglichen Zylinders?

1649 †89. Zwei Kugeln mit den Halbmessern a und b berühren sich von außen. Man berechne den Inhalt jenes geraden Kegelstumpfes, der den beiden Kugeln umgeschrieben werden kann!

1650 †90. Auf einer waagrechten Ebene liegen drei verschieden große Kugeln, von denen jede die beiden anderen von außen berührt. Die Seiten des Dreieckes, das durch die drei Berührungspunkte der Kugeln mit der Ebene bestimmt ist, sind a, b und c. Wie kann man daraus die drei Kugelhalbmesser berechnen? (Allgemein, dann für a = 360 mm, b = 480 mm, c = 600 mm.)

1651 †91. Auf einer waagrechten Ebene liegen drei kongruente Kugeln, von denen jede die beiden anderen von außen berührt. Wir legen eine vierte kongruente Kugel auf die drei anderen darauf. Wie weit steht ihr Mittelpunkt von der Ebene ab?

1652 92. Eine Kugel, deren Halbmesser 30 cm beträgt, wird im Abstande von 18 cm vom Mittelpunkte geschnitten; wie groß sind Oberflächen und Inhalte beider Teile?

1653 93. Eine Kugel, deren Halbmesser 30 cm beträgt, wird im Abstande von 24 cm vom Mittelpunkte geschnitten; wie verhalten sich die Oberflächen und die Inhalte der beiden Teile?

1654 †94. Man soll die Oberfläche einer Kugelzone aus den Radien r_1 und r_2 der beiden Begrenzungskreise und aus der Höhe der Zone h berechnen. (Allgemein, dann für $r_1 = 28$ cm, $r_2 = 21$ cm, h = 7 cm.) (Vgl. Nr. 411 und 1469.)

1655 95. Eine Kugel mit dem Halbmesser r ist in der Mitte des letzteren durch eine auf ihm senkrechte Ebene geschnitten. In den Schnittkreis ist ein Quadrat eingezeichnet, dessen Ecken mit den Endpunkten des

auf der Schnittebene normalen Durchmessers geradlinig verbunden sind. Wie groß ist der Inhalt der entstehenden Doppelpyramide?

1656 **96.** Eine Kugel vom Halbmesser $r = 18$ cm wird durch eine Ebene so geteilt, daß sich die Höhen beider Abschnitte verhalten wie 1 : 5; wie groß sind die Inhalte und die Oberflächen beider Abschnitte?

1657 **97.** Auf einer Kugel von 75 cm Halbmesser ist ein Kreis von 144 cm Durchmesser gezeichnet; man zieht jenen Kugeldurchmesser, der auf der Ebene des Schnittkreises normal steht. Vom erwähnten Kreise aus wird in die Kugel eine trichterförmige Vertiefung eingedreht, deren Spitze in jenem Endpunkte des früher erwähnten Durchmessers liegt, der von der Ebene des Schnittkreises weiter absteht. Man berechne Oberfläche und Inhalt des übrigbleibenden Teiles der Kugel!

1658 **98.** Eine Kugel vom Halbmesser 15 cm sinkt im Wasser schwimmend so tief ein, daß der Halbmesser des Begrenzungskreises 12 cm ist; wie groß ist ihre Dichte? (2 Lösungen.)

1659 **99.** Eine Kugel vom Halbmesser 5 a wird durch eine Ebene derartig geschnitten, daß der Halbmesser des Schnittkreises 4 a beträgt. Man vergleiche den sphärischen Teil der Oberfläche des zugehörigen Kugelausschnittes mit dem konischen Teile!

1660 **100.** Aus jeder von zwei Kugeln, deren Halbmesser sich wie 10 : 7 verhalten, wird ein Kugelausschnitt ausgebohrt, so zwar, daß die beiden zugehörigen Kugelabschnitte gleiche Höhe haben und das Volumen des Ausschnittes aus der zweiten Kugel 147 cm³ ist; wie groß ist das Volumen des aus der ersten Kugel ausgebohrten Ausschnittes?

1661 **101.** Ein Kreisausschnitt mit dem Zentriwinkel $\pi = 60°$ rotiert um einen seiner Begrenzungshalbmesser; wie groß ist der Inhalt des Kugelausschnittes? Wie verhält er sich zur ganzen Kugel? Wie verhält sich seine Oberfläche zur Oberfläche der ganzen Kugel?

1662 **102.** Eine Kugel vom Halbmesser von 12 cm wird im Abstande von 8 cm vom Mittelpunkte geschnitten; die entstehende Kugelhaube ist ebenso groß wie die Mantelfläche eines geraden Zylinders von der Höhe von 8 cm. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt dieses Zylinders?

1663 *103. In welchem Abstande vom Mittelpunkt muß eine Kugel vom Halbmesser r durch eine Ebene geschnitten werden, damit die Kugelhaube des größeren Abschnittes gleich ist der Gesamtoberfläche der kleineren?

1664 104. Einer Kugel vom Halbmesser r ist ein gerader Kegel von der Höhe h eingeschrieben. In welchem Abstande von der Spitze zur Grundfläche ist er zu schneiden, wenn die Inhalte der Schnittkreise an Kegel und Kugel sich wie 1 : 3 verhalten sollen? (Besondere Werte: r = 12 cm, h = 20 cm.)

1665 †*105. In welchem Abstande vom Mittelpunkt muß eine auf einer Ebene liegende Kugel von einer punktförmigen Lichtquelle beleuchtet werden, damit der kreisrunde Schlagschatten auf der Ebene und die Kugelhaube des Selbstschattens inhaltsgleich sind?

1666 †106. Einer Kugel vom Halbmesser r ist ein gerader Kegel eingeschrieben, dessen Mantelfläche m-mal so groß ist wie seine Grundfläche. Wie groß ist sein Inhalt? (Allgemein, dann für r = 2 cm, m = 2.)

1667 †107. Einer Kugel ist ein gerader Kegel umgeschrieben; sein Durchmesser ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Kugeldurchmesser und der Kegelhöhe. In welchem Verhältnisse stehen die Oberflächen und die Inhalte der beiden Körper?

1668 †108. Eine Kugel, deren Halbmesser 30 cm ist, soll so geschnitten werden, daß sich der Inhalt des kleineren Abschnittes zum Inhalt des ihm eingeschriebenen Kegels von gleicher Höhe verhält wie 14 : 9; wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des Abschnittes? In welchem Verhältnisse stehen die Inhalte des größeren Abschnittes und des ihm eingeschriebenen Kegels?

1669 †109. Eine Kugel vom Halbmesser von 12 cm wird im Abstande von 9 cm vom Mittelpunkt geschnitten; der Inhalt des entstehenden kleineren Kugelabschnittes verhält sich zum Inhalt eines geraden Kegels wie 33 : 32, der Durchmesser des Kegels ist so groß wie der Kugelhalbmesser; wie groß ist Oberfläche und Inhalt der beiden Körper?

1670 †110. In einem Kugelabschnitt ist ein möglichst großer, gerader Kegel eingeschrieben, dessen Mantelfläche gerade die Hälfte der einhüllenden Kugelhaube beträgt. Wie verhält sich die Höhe des Abschnittes zum Durchmesser der Kugel und wie verhält sich der Inhalt des Abschnittes zum Inhalte der ganzen Kugel?

†111. Die Achse eines geraden Kegels ist zugleich der Durchmesser einer Kugel, die die Grundfläche des Kegels berührt. Wie groß ist der Inhalt des dem Kegel und der Kugel gemeinsamen Körperstückes, wenn der Halbmesser der Kugel 3 cm, jener des Kegels 2 cm mißt? **1671**

†112. Eine Halbkugel vom Halbmesser $R = 75$ cm wird im Abstande von 72 cm, vom Grundkreise ab gerechnet, parallel zu diesem geschnitten. Man berechne Oberfläche und Inhalt a) des Kugelabschnittes, b) der Kugelschicht, c) des in die Kugelschicht eingeschriebenen Kegelstumpfes! **1672**

†113. Zwei Kreise mit den Halbmessern $r = 6$ cm und $R = 10$ cm berühren sich von außen. An beide ist eine der äußeren Tangenten gezogen. Die drei Berührungspunkte sind die Ecken einer dreiseitigen Figur, die von einer geraden Linie und von zwei Kreisbogen begrenzt wird. Man soll den Inhalt und die Oberfläche jenes Rotationskörpers berechnen, den die dreiseitige Figur bei der Rotation um die Zentrale der Kreise beschreibt.*) **1673**

Dritter Teil.

Ebene Trigonometrie.

XXII. Winkelfunktionen. — Auflösung des rechtwinkligen Dreieckes (I. Teil).

1. Womit beschäftigt sich die Trigonometrie? **1674**

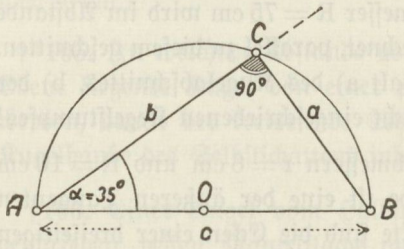
2. Wie kann man zeigen, daß zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen Dreieckes ABC (der rechte Winkel liegt bei C) ein gewisser (metrischer) Zusammenhang besteht? **1675**

---

*) Die allgemeine Lösung der Aufgabe führt auf die Formeln $V = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{R^2 r^2}{R+r}$, $O = 8Rr\pi$. Legt man an die beiden Kugeln im Berührungspunkte eine gemeinsame Tangentialebene, so teilt sie als Grundfläche den Körper in zwei napfförmige Teile, die trotz der verschiedenen Form inhaltsgleich sind; jeder dieser beiden Näpfe ist gleich einem Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe. Der Kegelmantel des Rotationskörpers ist ebenso groß wie die Summe der beiden gleich tiefen konkaven Flächen und ist gleich einem Kreise, der die Tangente zum Halbmesser hat. Was erhält man für $R = r$?

Anleitung: Man zeichne über dem Durchmesser $AB = c = 15$ cm (Fig. 110) einen Halbkreis und trage in seinem Endpunkte A mit Hilfe eines Winkelmessers einen Winkel $\alpha = 35°$ auf. In dem hiedurch bestimmten rechtwinkligen Dreiecke ABC messe man möglichst genau (auf Zehntelmillimeter) die beiden Katheten a und b ab und bestimme den Quotienten der Maßzahlen von a und c sowie von b und c. Man findet dabei stets Näherungswerte der zwei (unvollständigen) Dezimalzahlen 0·57358 und 0·81915. — Hierauf wiederhole man diesen Versuch mit einem zweiten rechtwinkligen Dreiecke, das man auf demselben Wege über der Hypotenuse $c = 12$ cm aufbaut. Man findet trotz der ungleichen Größe beider Dreiecke für die obigen Seitenverhältnisse a : c und b : c wieder Näherungswerte derselben beiden oben angegebenen Dezimalzahlen. — Auf welchen Lehrsatz der Planimetrie geht dieses Ergebnis zurück?

Fig. 110.



1676 3. Wenn der Wert des Verhältnisses zwischen den Seiten a und c eines rechtwinkligen Dreieckes — der also eine unbenannte Zahl ist — für einen gewissen Winkel, z. B. für $\alpha = 35°$ irgendwie genau berechnet und mit $a : c = 0{\cdot}57358$ gefunden wurde, wie kann man dies benützen, um in einem rechtwinkligen Dreiecke mit dem Winkel $\alpha = 35°$ aus der Hypotenuse $c = 10$ cm die Kathete a zu finden?

1677 4. Der Wert des in Nr. 2 und 3 verwendeten Verhältnisses zwischen der dem Winkel α gegenüberliegenden Kathete und der Hypotenuse (also a : c) führt den Namen des „Sinus von α“ (sin α), jener zwischen der dem Winkel α anliegenden Kathete und der Hypotenuse (also b : c) den Namen „Cosinus von α“ (cos α). Außerdem bezeichnet man als „Tangente von α“ (tang α) das Verhältnis der dem Winkel α gegenüberliegenden zu der ihm anliegenden Kathete und als „Cotangente von α“ (cotang α) das Verhältnis der dem Winkel α anliegenden zu der ihm gegenüberliegenden Kathete. — Warum bezeichnet man diese Verhältnisse als „Winkelfunktionen“? Welche von ihnen nennt man „Hauptfunktionen“ oder kurzweg „Funktionen“ und welche „Cofunktionen“?

1678 5. Welche Beziehung besteht zwischen tang α und cotang α? — Herrscht dieselbe Beziehung auch etwa zwischen sin α und cos α?

6. Beweise die wichtigen Beziehungen: a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, **1679**
$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und $\operatorname{cotang}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; b) $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$, $\operatorname{tang}\alpha = \operatorname{cotang}(90° - \alpha)$, $\operatorname{cotang}\alpha = \operatorname{tang}(90° - \alpha)$; c) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tang}(-\alpha) = -\operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{cotang}(-\alpha) = -\operatorname{cotang}\alpha$!

7. Zwischen welchen Grenzen bewegen sich die Werte der vier in **1680**
Nr. 4 genannten Winkelfunktionen, wenn der Winkel α von 0° bis 90° wächst? — Welche Werte nehmen sie im besonderen für $\alpha = 0°$ und für $\alpha = 90°$ an?

8. Berechne die Werte der vier Winkelfunktionen für $\alpha = 30°$ und **1681**
$\alpha = 60°$, sowie für $\alpha = 45°$!

9. Wie erweitert man die Definition der vier Winkelfunktionen **1682**
für stumpfe Winkel? Begründe die Beziehungen $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$; $\operatorname{tang}(180° - \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha$; $\operatorname{cotang}(180° - \alpha) = -\operatorname{cotang}\alpha$! — Wie ändern sich die Werte der vier Winkelfunktionen, wenn der Winkel α von 90° bis 180° wächst? Welche Werte nehmen sie insbesondere für $\alpha = 180°$ an?

10. Wie findet man die Werte der Winkelfunktionen (und wie jene **1683**
ihrer Logarithmen) aus der trigonometrischen Tafel? *)

11. In Nr. 507 (auf Seite 53) wurde für die Seite des regel- **1684**
mäßigen Zehneckes die Formel gefunden: $s_{10} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).r$; berechne hiernach s_{10} für $r = 6$ cm! Zeichne in einen Kreis mit $r = 6$ cm ein regelmäßiges Zehneck und miß nach, wie weit unsere Rechnung stimmt! Viel einfacher als die Auswertung der obigen Formel gestaltet sich die Berechnung auf trigonometrischem Wege. Wie wäre sie durchzuführen?

Anleitung: Aus dem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Hypotenuse der Halbmesser des Umkreises und dessen Katheten der Halbmesser des Inkreises und die halbe Zehnecksseite sind, ergibt sich, da der Winkel, der der letzteren gegenüberliegt, 18° beträgt, die Gleichung $\frac{s_{10}}{2} : R = \sin 18°$, woraus s_{10} berechnet wird.

12. Der Halbmesser des Inkreises eines regelmäßigen Siebeneckes **1685**
beträgt 14·112 cm; wie groß ist der Halbmesser des Umkreises?

*) Die „Ergebnisse" der in den folgenden Abschnitten stehenden Aufgaben wurden unter Benützung der fünfstelligen log.-trig. Tafeln von L. Jelinek (Wien, Hölder-Pichler-Tempsky A. G.) gewonnen.

1686 13. In einem Quadrate mit der Seite $s = 34\,\text{cm}$ ist von einer Ecke aus unter einem Winkel von 36° eine Gerade gezogen, die das Quadrat in zwei Flächenstücke teilt. Wie groß sind die Inhalte?

1687 14. Wie hoch ist ein Turm, der bei einem Sonnenstande von 35° (d. h. wenn die Sonnenstrahlen unter einem Winkel von 35° gegen den Erdboden einfallen) einen Schatten von 34 m 27·5 cm Länge wirft?

1688 15. Ein Luftballon ist bei völliger Windstille lotrecht emporgestiegen. Wir standen von seinem Aufstiegsorte 1280 m weit entfernt und messen den Höhenwinkel, unter dem er uns erscheint, mit 65° und einige Zeit später mit 72°. Um wieviel ist der Ballon während dieser Zeit gestiegen?

1689 16. Um die Breite eines Flusses zu messen, haben wir unmittelbar an dem einen Ufer eine Standlinie AB von 48 m Länge abgesteckt. Am jenseitigen Ufer wird ein Punkt C so bestimmt, daß $CA \perp AB$ ist und dort eine Meßstange lotrecht aufgestellt. Vom Punkte B aus wird endlich nach C visiert und der Winkel ABC mit 32° gemessen. Wie berechnet sich daraus die Breite des Flusses?

1690 17. Die Plattform eines Hafenturmes ist 58·36 m über dem Seespiegel gelegen. Wir messen von dort aus den Senkungs- (Depressions-) Winkel, unter dem die Wasserlinie eines Schiffes erscheint, mit 1° 45′. Wie weit ist das Schiff (gemessen in der Horizontalen) vom Ufer entfernt?

1691 18. Unter welchem Winkel fallen die Sonnenstrahlen gegen den Erdboden ein, wenn eine 2·3 m lange, lotrechte Stange einen 4·2 m langen Schatten wirft?

1692 19. Für Eisenbahnen soll die Steigung (h : b) im flachen Lande 1 : 200, im Hügellande 1 : 100, im Gebirge 1 : 40 nicht übersteigen. Welche Neigungswinkel entsprechen diesen Steigungen?

1693 20. Wie groß ist der durchschnittliche Steigungswinkel einer Bergbahn, die bei einer Geleiselänge von 3529 m eine lotrechte Höhe von 655 m gewinnt?

1694 21. Wie groß sind die Halbmesser a) der Wendekreise, b) der Polarkreise der Erde? (Die Erde soll als Kugel mit einem mittleren Halbmesser von 6370 km, die geographische Breite der Wendekreise mit 23° 27′, jene der Polarkreise mit 66° 33′ angenommen werden.)

22. Wie groß ist die Geschwindigkeit, mit der Wien (geographische Breite 48° 12′ 35″) an der Achsendrehung der Erde teilnimmt? (Erdhalbmesser 6370 km; Dauer des Sterntages 23 Stunden 56 Minuten 4 Sekunden.) **1695**

23. Zwei Orte der Erde liegen auf demselben Meridian; ihre geographischen Breiten sind 26° 15′ und 39° 28′. Wie groß ist ihre Entfernung, gemessen längs der Erdoberfläche? (Erdhalbmesser 6370 km.) Wie groß ist dagegen ihre Entfernung, wenn beide eine geographische Breite von 48° 12′ 35″ haben und ihre östlichen Längen 26° 15′ und 39° 28′ betragen? **1696**

* * *

24. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist gegeben eine Kathete $b = 77$ cm und der ihr anliegende Winkel $\alpha = 25° 3′ 27″$. Das Dreieck ist aufzulösen, d. h. die übrigen Bestimmungspunkte (Winkel, Seiten, Flächeninhalt) sollen ermittelt werden. **1697**

25. Ein rechtwinkliges Dreieck ist aufzulösen aus der Hypotenuse $c = 173$ cm und einem Winkel $\alpha = 17° 29′ 32″$. **1698**

26. Ein rechtwinkliges Dreieck ist aufzulösen aus den beiden Katheten $a = 88$ cm, $b = 105$ cm. **1699**

27. Ebenso aus einer Kathete $a = 104$ cm und der Hypotenuse $c = 185$ cm. **1700**

28. Die folgende Tabelle enthält weiteren Übungsstoff zur Auflösung rechtwinkliger Dreiecke. Man nehme zwei voneinander unabhängige Bestimmungsstücke als gegeben an und berechne daraus die übrigen: **1701**

	a	b	c	α	β	f
1	4	3	5	53° 7′ 48″	36° 52′ 12″	6
2	12	5	13	67° 22′ 49″	22° 37′ 11″	30
3	8	15	17	28° 4′ 21″	61° 55′ 39″	60
4	24	7	25	73° 44′ 23″	16° 15′ 37″	84
5	12	35	37	18° 55′ 28″	71° 4′ 32″	210
6	56	33	65	59° 29′ 24″	30° 30′ 36″	924
7	48	55	73	41° 6′ 44″	48° 53′ 16″	1320
8	60	91	109	33° 23′ 55″	56° 36′ 5″	2730

29. Wie groß ist die Seite des einem Kreise mit dem Halbmesser $R = 11{,}5$ cm eingeschriebenen regelmäßigen Fünfzehneckes? **1702**

1703 30. Wie groß ist die Resultierende zweier gleich großer Kräfte von der Stärke von je 365 kg, die unter einem Winkel von 8° 29′ 4″ auf einen Punkt einwirken?

1704 31. Wie groß ist der Zentriwinkel in einem Kreise mit dem Halbmesser 233 cm, wenn die zugehörige Sehne 210 cm beträgt? —

1705 32. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist der Halbmesser des Inkreises 40 cm, ein Winkel 63° 12′ 54″. Das Dreieck ist aufzulösen.

* * *

1706 33. Ein quadratisches Prisma, das aus zwei Würfeln von je 20 cm Kantenlänge aufgebaut ist, soll durch eine Ebene geschnitten werden, die durch eine Kante der Deckfläche hindurchgeht, die Grundfläche schneidet und eine Schnittfigur von 820 cm^2 Inhalt hervorbringt. Unter welchem Neigungswinkel ist sie zu legen und wie groß sind Inhalt und Oberfläche des kleineren Prismenabschnittes?

1707 34. Durch die Grundkante eines Würfels mit der Kantenlänge a ist eine Ebene unter dem Winkel α gelegt. Wie groß ist der Rauminhalt des kleineren Teiles? (Allgemein, dann für $a = 48$ cm, $\alpha = 36° 28' 34''$.)

1708 35. Ein gerader Zylinder vom Halbmesser $r = 12$ cm und der Höhe $h = 40$ cm, wird durch eine Ebene geschnitten, die durch einen Punkt des Umfanges der Deckfläche geht und gegen sie unter einem Winkel $\alpha = 22° 37' 11''$ geneigt ist. Oberfläche und Inhalt des übrigbleibenden Teiles ist zu berechnen.

1709 36. Einem gleichseitigen Zylinder ist ein regelmäßiges n-seitiges Prisma mit der Grundkante a eingeschrieben. Wie groß ist seine Mantelfläche und sein Inhalt? (Allgemein, dann für $n = 9$, $a = 30$ cm.)

1710 37. Wie groß ist der Inhalt eines regelmäßigen n-seitigen Prismas, das einem geraden Zylinder vom Rauminhalt V eingeschrieben ist. (Allgemein, dann für $n = 12$, $V = 67{\cdot}488$ cm^3.)

1711 38. Wie groß ist der Rauminhalt eines geraden Zylinders von der Höhe h, in dem die einem Zentriwinkel α angehörende Sehne s ist? (Allgemein, dann für $h = 46$ cm, $\alpha = 26° 32' 46''$, $s = 9{\cdot}6$ cm.)

1712 39. Höhe und Inhalt eines schiefen Zylinders vom Basishalbmesser $r = 50$ cm sind zu berechnen, wenn dessen Mantellinien 125 cm

lang sind und gegen die Grundfläche unter dem Winkel $\alpha = 69° 23' 25''$ geneigt sind.

†40. Man berechne die Achse eines schiefen Zylinders, von dem das Volumen V und der Neigungswinkel α der Achse gegen die Grundfläche gegeben sind, wenn man noch weiß, daß die Höhe ebenso groß ist wie der Umfang der Grundfläche! (Allgemein, dann für $V = 71808\ cm^3$, $\alpha = 42° 18' 24''$.) **1713**

†41. Man berechne den Rauminhalt eines schiefen Zylinders, wenn gegeben ist die Fläche des charakteristischen Parallelogrammes f, ferner der Neigungswinkel α der Achse gegen die Grundfläche und wenn die Achse so lang ist wie die kürzere Diagonale des charakteristischen Parallelogrammes. (Allgemein, dann für $f = 389{,}184\ cm^2$, $\alpha = 34° 12' 20''$.) **1714**

42. Die Höhe und der Rauminhalt der Cheopspyramide sind zu berechnen aus ihrer Grundkante $a = 230{,}348\ m$ und dem Neigungswinkel der Seitenflächen $\alpha = 51° 52'$. **1715**

43. In einer geraden quadratischen Pyramide ist die Grundkante 26 cm, die Höhe 84 cm. Wie groß ist der Neigungswinkel der Seitenflächen zur Grundfläche und die Oberfläche der Pyramide? **1716**

44. Berechne den Neigungswinkel zweier unmittelbar aneinanderstoßenden Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders! **1717**

45. Wie Nr. 44 für ein regelmäßiges Oktaeder. **1718**

46. Der Rauminhalt eines geraden Kegels ist aus dem Basishalbmesser r und dem Öffnungswinkel α an der Spitze zu berechnen. (Besondere Werte: $r = 30$ cm, $\alpha = 87° 14' 20''$.) **1719**

47. Oberfläche und Inhalt eines geraden Kegels sind aus dem Basishalbmesser $r = 16$ cm und dem Neigungswinkel der Seiten zur Basis $\beta = 75° 45'$ zu berechnen. **1720**

48. Welche Beziehung besteht zwischen dem Winkel α, den eine Seite eines geraden Kegels mit der Achse bildet, und dem Zentriwinkel β des Kreisausschnittes, den der in die Ebene ausgebreitete Kegelmantel bildet? (Im besonderen für den gleichseitigen Kegel zu untersuchen.) **1721**

49. Wie groß ist der Öffnungswinkel α an der Spitze eines geraden Kegels, wenn gegeben ist die Grundfläche g und die Höhe h? (Besondere Werte: $h = 63$ cm, $g = 804{,}25\ cm^2$.) **1722**

1723 50. Von einem geraden Kegel sind Mantelfläche und Grundfläche gegeben. Man berechne den Winkel zwischen Kegelachse und Seite! (Besondere Werte: $M = 27{\cdot}143\ cm^2$, $G = 21{\cdot}696\ cm^2$.)

1724 51. Der Inhalt eines schiefen Kegels ist zu berechnen aus der Achse a, ihrem Neigungswinkel α zur Grundfläche und dem Halbmesser r der letzteren.

1725 52. Wie groß ist die Grundfläche eines schiefen Kegels, wenn sein Rauminhalt V, seine längste Seite s und deren Neigungswinkel α zur Grundfläche gegeben sind? (Besondere Werte: $s = 13$ cm, $\alpha = 67° 22' 28''$, $V = 50{\cdot}266\ cm^3$.)

1726 53. Man berechne Höhe, Inhalt und Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes aus dem Grundflächenhalbmesser $R = 20$ cm, der Seite $s = 61$ cm und ihrem Neigungswinkel $\alpha = 79° 36' 40''$ zur Grundfläche!

1727 54. Berechne den Inhalt eines geraden Kegelstumpfes aus den Halbmessern R und r seiner Begrenzungskreise und dem Neigungswinkel α der Seiten zur Grundfläche! (Besondere Werte: $R = 56$ cm, $r = 36$ cm, $\alpha = 67° 22' 49''$.)

1728 55. Die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes soll berechnet werden aus der Differenz d der Inhalte seiner Begrenzungskreise und aus dem Neigungswinkel α der Seiten zur Grundfläche. (Besondere Werte: $d = 36\ cm^2$, $\alpha = 44° 29' 17''$.)

1729 56. In einem geraden Kegelstumpfe ist die Grundfläche 16mal und der Mantel 25mal so groß wie die Deckfläche. Wie groß ist der Neigungswinkel der Seiten zur Grundfläche? Läßt sich diesem Kegelstumpfe eine Kugel einschreiben? Wie verhalten sich im bejahenden Falle die Oberflächen und die Inhalte beider Körper?

1730 57. Der Zentriwinkel eines Kugelausschnittes, der zu einer Kugel vom Halbmesser $r = 185$ cm gehört, beträgt $68° 24' 39''$. Man berechne die zugehörige Kugelhaube und den Inhalt des zugehörigen Kugelabschnittes!

1731 *58. Einer Kugel ist ein gerader Kegel umgeschrieben, dessen Grundfläche so groß ist wie die Kugeloberfläche. Wie verhalten sich die Rauminhalte von Kegel und Kugel und wie groß ist der Öffnungswinkel des Kegels?

1732 59. Aus dem Rauminhalt V und dem Zentriwinkel α eines Kugelausschnittes soll der Kugelhalbmesser berechnet werden. (Besonderer Wert: $\alpha = 120°$.)

60. Wie groß ist der sphärische und wie groß der konische Teil der Oberfläche eines Kugelausschnittes, dessen Zentriwinkel 106° 15′ 36″ beträgt, wenn der Kugelhalbmesser 30 cm mißt? **1733**

XXIII. Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes (I. Teil).

1. Zur Auflösung schiefwinkliger Dreiecke benötigt man vier Sätze, die, in das Gewand von Formeln gekleidet, lauten: **1734**

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\alpha} \text{ oder } a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma \text{ (Sinussatz)},$$

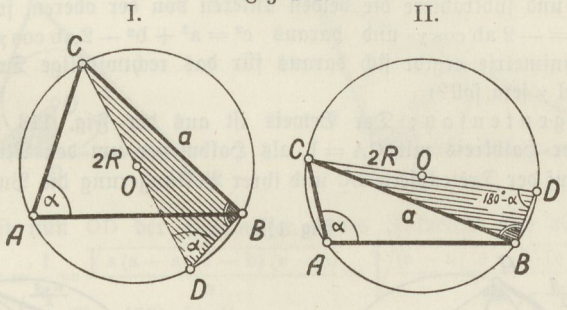
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \text{ (Cosinussatz)},$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} \text{ oder } \tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\gamma}{2} \text{ (Tangentensatz) und } \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \text{ (Halbwinkelsatz)}.$$

Wie werden diese Sätze (Formeln) abgeleitet?

Anleitung: 1. Sinussatz: Zieht man im Dreiecke ABC (Fig. 111, I) den durch den Mittelpunkt O des Umkreises hindurchgehenden Durchmesser CD, so folgt aus dem Hilfsdreiecke CDB, da die Winkel bei D und A beide gleich α

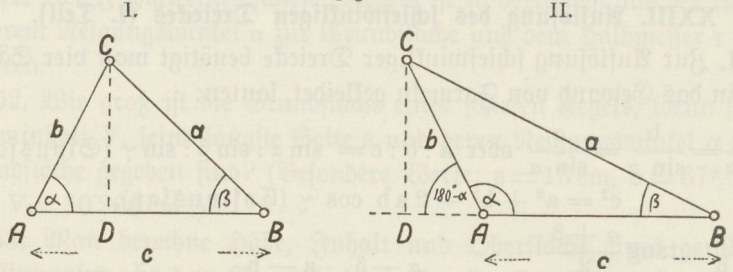
Fig. 111.



sind (Peripheriewinkel auf demselben Bogen) $\frac{a}{2R}=\sin\alpha$. Ganz ebenso ist $\frac{b}{2R}=\sin\beta$ und $\frac{c}{2R}=\sin\gamma$, woraus sich die Formel des Sinussatzes ergibt. — Ist das Dreieck bei A stumpfwinklig (Fig. 111, II), so bleibt der Gang der Ableitung derselbe, nur enthält jetzt das Hilfsdreieck CBD bei D den Winkel $(180°-\alpha)$ (Nr. 485) und ist $\frac{a}{2R}=\sin(180°-\alpha)$. Da aber $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ ist, ergibt sich wie früher $\frac{a}{2R}=\sin\alpha$.

2. Cosinussatz: Zu seinem Beweise dient ein „Hilfssatz", der aus Fig. 112 unmittelbar abzulesen ist. Zieht man nämlich im △ ABC von C aus die Höhe, so ist $AB = BD + AD$ oder $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$. Dies gilt auch,

Fig. 112.



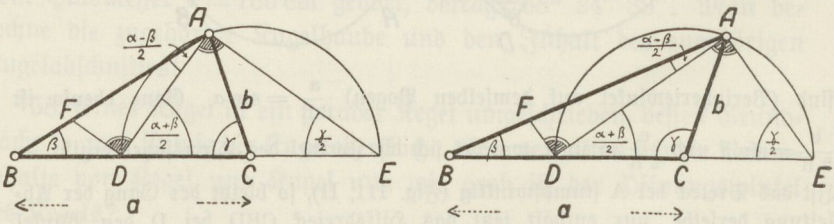
wenn der Dreieckswinkel bei A ein stumpfer ist (Fig. 112 II); dann ist $AB = BD - DA$ oder $c = a\cos\beta - b\cos(180° - \alpha)$; da aber $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ — vgl. Nr. **1679** c — ist, ergibt sich wieder $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$. Ganz ebenso erhält man zwei entsprechende Gleichungen für a und b*), so daß — und zwar für jede Form schiefwinkliger Dreiecke — die drei Gleichungen bestehen:

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha,$$
$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta,$$
$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma.$$

Nun multipliziere man die erste Gleichung mit c, die zweite mit a, die dritte mit b und subtrahiere die beiden unteren von der oberen, so ergibt sich $c^2 - a^2 - b^2 = -2ab\cos\gamma$ und daraus $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. (Welcher Satz der Planimetrie ergibt sich daraus für das rechtwinklige Dreieck, dessen rechter Winkel γ sein soll?)

3. Tangentensatz: Der Beweis ist aus der Fig. 113 unmittelbar abzulesen. Der Halbkreis mit $CA = b$ als Halbmesser um den Mittelpunkt C ergibt stets auf der Dreiecksseite BC und ihrer Verlängerung die Punkte D und

Fig. 113.



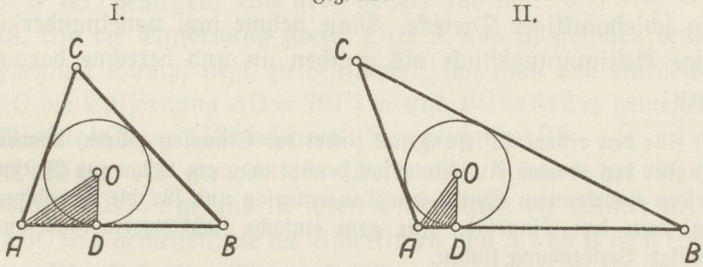
E und ist $BE = a + b$ und $BD = a - b$. Ferner ist $\sphericalangle ADE = 90° - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$

*) Am einfachsten durch sogenannte „zyklische Vertauschung".

und $\sphericalangle$ BAD $= \frac{\alpha+\beta}{2} - \beta = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Zieht man nun noch DF $\parallel$ EA, so folgt aus $\triangle$ BEA $\sim$ BDF BE : BD = AE : FD. Da aber $AE = AD \cdot \tan\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $FD = AD \cdot \tan\frac{\alpha-\beta}{2}$, so folgt nach Einsetzen der Werte $(a+b):(a-b) =$ $= AD \cdot \tan\frac{\alpha+\beta}{2} : AD \cdot \tan\frac{\alpha-\beta}{2}$, also der Tangentensatz $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$. Da $\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{cotang}\left(90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ — vgl. Nr. **1679** b — und $90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} =$ $= \frac{\gamma}{2}$ ist, ergibt sich auch die zweite Form des Tangentensatzes. Ein Blick auf Fig. 113 II zeigt, daß die Ableitung genau die gleiche bleibt, auch wenn $\sphericalangle\ \gamma$ ein stumpfer Winkel ist.

4. Halbwinkelsatz. Zeichnet man den Inkreis des Dreieckes ABC (Fig. 114), so folgt ebensowohl für ein spitzwinkliges wie für ein stumpfwinkliges Dreieck (Fig. 114, I und II) aus dem Hilfsdreieck ADO $\tan\frac{\alpha}{2} =$ $= \frac{OD}{AD}$.

Fig. 114.



Es ist nun OD der Halbmesser r des Inkreises und als solcher nach Nr. **462** $r = \frac{f}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$. Ferner ist AD $= s - a$ (Nr. **480**), somit

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Alle vier Sätze gelten, wie gezeigt wurde, für jedes beliebige schiefwinklige Dreieck. — Man stelle den Cosinussatz und die weiteren Sätze auch für die übrigen Seiten (und Winkel) des Dreieckes auf!

2. Beweise die Richtigkeit der Formel für den Flächeninhalt eines **1735** beliebigen Dreieckes $f = \frac{ab}{2} \sin\gamma$!

1736 3. Entsprechend den vier Kongruenzsätzen der Planimetrie (Nr. 73, a bis d) ergeben sich vier Auflösungsfälle des schiefwinkligen Dreieckes. Welche sind es?

Man löse folgende schiefwinklige Dreiecke auf:

1737 4. (1. Auflösungsfall.) $a = 533$ cm, $\beta = 35° 18' 1''$, $\gamma = 68° 23' 7''$.*)

1738 5. $a = 200$ cm, $\beta = 117° 8' 27''$, $\gamma = 44° 29' 53''$.

1739 6. (2. Auflösungsfall.) $a = 221$ cm, $b = 149$ cm, $\gamma = 70° 42' 30''$.**)

1740 7. $a = 221$ cm, $b = 149$ cm, $\gamma = 30° 40' 35''$.

1741 8. (3. Auflösungsfall.) $a = 25$ cm, $b = 26$ cm, $\beta = 73° 44' 23''$.***)

1742 9. $a = 445$ cm, $b = 205$ cm, $\alpha = 24° 11' 22''$.

1743 10. $a = 241$ cm, $b = 169$ cm, $\beta = 29° 51' 46''$.†)

1744 11. $a = 445$ cm, $b = 85$ cm, $\beta = 10° 52' 50''$.

1745 12. (4. Auflösungsfall.) $a = 109$ cm, $b = 61$ cm, $c = 102$ cm.††)

1746 13. $a = 409$ cm, $b = 169$ cm, $c = 272$ cm.

1747 14. Die folgende Tabelle enthält weiteren Übungsstoff zur Auflösung schiefwinkliger Dreiecke. Man nehme drei voneinander unabhängige Bestimmungsstücke als gegeben an und berechne daraus die übrigen:

---

*) Für den ersten Auflösungsfall findet der Sinussatz (allein) Anwendung.

**) Für den zweiten Auflösungsfall benützt man am besten zur Bestimmung der beiden unbekannten Winkel den Tangentensatz und für die Berechnung der dritten Seite den Sinussatz. Für ganz einfache Zahlenwerte kann auch der Cosinussatz Verwendung finden.

***) Für den dritten Auflösungsfall findet wieder der Sinussatz (allein) Anwendung.

†) Man beachte, daß hier — wie auch in der nächsten Aufgabe — der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben ist, also die Berechnung ebenso wie die Konstruktion Nr. 74) zwei verschiedene Dreiecke ergibt.

††) Für den vierten Auflösungsfall berechnet man am besten mittels des Halbwinkelsatzes die drei Dreieckswinkel und gewinnt durch Zusammenzählen der Werte eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung. Der Halbwinkelsatz wird dabei am bequemsten in die Form $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$ gebraucht, worin r den Halbmesser des Inkreises bedeutet und nach der Formel $r = \frac{f}{s}$ berechnet wird. Wenn die Maßzahlen der Seiten sehr kleine Zahlenwerte sind, kann auch der Cosinussatz verwendet werden.

Nr.	a	b	c	α	β	γ	f
1	14	15	13	59° 29′ 23″	67° 22′ 49″	53° 7′ 48″	84
2	200	85	205	74° 36′ 28″	24° 11′ 22″	81° 12′ 10′	8400
3	312	109	229	131° 24′ 44″	15° 11′ 22″	33° 23′ 54″	9360
4	318	181	349	64° 58′ 38″	31° 2′ 54″	83° 58′ 28″	28620
5	510	169	409	117° 41′ 56″	17° 3′ 42″	45° 14′ 22″	30600
6	520	193	457	97° 55′ 8″	21° 34′ 6″	60° 30′ 46″	43680
7	390	373	277	72° 1′ 43″	65° 28′ 13″	42° 30′ 4″	49140
8	370	541	421	43° 1′ 24″	86° 3′ 2″	50° 55′ 34″	77700

1748 15. Man berechne ein schiefwinkliges Dreieck aus R, α, β. (Besondere Werte: $R = 34\,cm$, $\alpha = 61°\ 55'\ 40''$, $\beta = 81°\ 12'\ 9''$.)

1749 16. Ebenso aus f, α, β. (Besondere Werte: $f = 7560\,cm^2$, $\alpha = 36°\ 52'\ 11''$, $\beta = 61°\ 55'\ 40''$.)

* * *

1750 17. Zwei Orte A und B sind voneinander 9196 m weit entfernt. Um ihre Entfernung von einem dritten unzugänglichen Orte C zu bestimmen, hat man die beiden Winkel $CAB = 32°\ 15'\ 17''$ und $CBA = 73°\ 5'\ 38''$ gemessen. Wie groß ist AC und BC?

1751 18. Um die Entfernung zweier Orte A und B, zwischen denen ein ausgedehnter Sumpf liegt, zu bestimmen, hat man von einem dritten Orte C die Entfernung $AC = 707{\cdot}1\,m$ und $BC = 519\,m$ gemessen und den Winkel $ACB = 153°$ bestimmt. Wie groß ist AB?

1752 19. Längs des geradlinigen Ufers eines Flusses hat man eine Standlinie $AB = c\,m$ und in ihren Endpunkten die Winkel $BAC = \alpha$ und $ABC = \beta$ gemessen, die die Visierlinien von A und B nach einer am anderen Ufer stehenden Stange C bilden. Wie breit ist der Strom an dieser Stelle? (Allgemein, dann für $c = 618\,m$, $\sphericalangle\,\alpha = 71°\ 13'\ 10''$, $\sphericalangle\,\beta = 68°\ 4'\ 13''$.)

1753 20. Um die Höhe eines Antennenmastes zu bestimmen, zu dessen Fußpunkt man nicht gelangen kann, hat man in der Richtung nach diesem Punkte hin eine Standlinie von $c\,m$ Länge abgesteckt und von ihren Endpunkten die Höhenwinkel zur Mastspitze gemessen. Wie hoch ist der Mast? (Allgemein, dann für $c = 65\,m$, $\sphericalangle\,\alpha = 28°\ 55'\ 37''$, $\sphericalangle\,\beta = 25°\ 59'\ 21''$.)

1754 †21. Von einer geraden Straße geht unter einem Winkel von 30° eine zweite gerade Straße nach links und 1·65 km weiter eine dritte gerade Straße unter einem Winkel von 60° nach rechts ab. Auf der

ersten trifft man in einer Entfernung von 4·4 km auf einen Ort A, auf der zweiten nach einem Wege von 2·75 km auf einen Ort B. Wie weit sind beide Orte in der Luftlinie voneinander entfernt?

1755 †22. Von den Endpunkten A und B einer 2250 m langen Standlinie visiert man nach den Kirchtürmen X und Y zweier unzulänglicher Orte und findet die vier Winkel $BAY = \alpha = 52° 40'$, $ABX = \beta = 57° 1'$, $BAX = \gamma = 96° 40'$ und $ABY = \delta = 87° 15'$. Wie groß ist die Entfernung XY?

1756 23. An zwei gegenüberliegenden Stellen der Ufer eines Flusses stehen zwei Türme von verschiedener Höhe. Von dem Fußpunkte und von der Plattform des niedrigen Turmes, dessen Höhe $h = 68$ m beträgt, mißt man nach der Spitze des größeren die Höhenwinkel $\alpha = 36° 52' 12''$ und $\beta = 22° 37' 11''$. Es ist die Höhe des größeren Turmes und die Breite des Flusses zu berechnen.

1757 24. An den Endpunkten A und B einer 53 m langen Standlinie hat man nach dem Fußpunkte C eines unzugänglichen Turmes die Winkel $CAB = \alpha = 31° 53' 27''$ und $CBA = \beta = 139° 56' 17''$ und im Punkte A noch den Höhenwinkel $SAC = \gamma = 16° 15' 37''$ nach der Turmspitze S gemessen. Wie hoch berechnet sich daraus die Turmhöhe SC?

* * *

1758 25. Es ist der Rauminhalt des Rotationskörpers zu berechnen, der entsteht, wenn sich ein Dreieck, von dem zwei Winkel α und β sowie die Seite c gegeben sind, um die Seite c dreht. (Allgemein, dann für $c = 57$ cm, $\alpha = 67° 22' 49''$, $\beta = 61° 55' 39''$.)

1759 26. Über einem gemeinsamen Grundkreise erheben sich nach einer und derselben Seite zwei gerade Kegel, deren Spitzen um c voneinander abstehen und deren Mantellinien gegen die Grundfläche unter den Winkeln α und β geneigt sind. Wie groß ist der Rauminhalt des von beiden Kegelflächen begrenzten Körpers? (Allgemein, dann für $c = 33$ cm, $\alpha = 75° 45'$, $\beta = 61° 55' 39''$.)

1760 27. Ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel β an der Grundlinie und dem Schenkel b dreht sich um diesen. Wie groß ist der Inhalt des Rotationskörpers? (Allgemein, dann für $b = 20$ cm, $\beta = 53° 7' 49''$.)

28. Man berechne den Inhalt des Rotationskörpers, der entsteht, wenn sich ein schiefwinkliges Dreieck mit dem Inhalte f, der Seite b und dem Winkel α um die Seite c dreht. (Allgemein, dann für $b = 34$ cm, $\alpha = 81° 12' 10''$, $f = 336$ cm^2.) **1761**

†29. Von einem schiefwinkligen Dreiecke sind eine Seite $a = 63$ cm und die anliegenden Winkel $\beta = 22° 37' 10''$ und $\gamma = 53° 7' 48''$ bekannt. An dieses Dreieck ist ein kongruentes so angelegt, daß die Seite a gemeinsam ist und beide Dreiecke ein schiefwinkliges Parallelogramm bilden. Dieses Parallelogramm rotiert um eine Achse, die parallel zu a im Abstande von 30 cm verläuft. Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers sind zu berechnen. **1762**

30. Wie groß ist der Rauminhalt eines schiefen Kegels, von dem der Durchmesser der Grundfläche 26 cm, die längste Seite 74 cm und die kürzeste 60 cm lang sind? Zunächst ist auch der Neigungswinkel der längsten Seite zur Grundfläche zu berechnen. **1763**

31. Von einem schiefen Kegel fällt die Projektion der Spitze in die Grundfläche. Es ist der Rauminhalt aus dem Grundflächenhalbmesser r und den Neigungswinkeln α und β der längsten und kürzesten Seite zur Grundfläche zu berechnen. **1764**

32. Von einem schiefen Kegelstumpfe kennt man die Halbmesser R und r der beiden Begrenzungskreise, ferner die Neigungswinkel α und β der längsten und der kürzesten Mantellinie. Man berechne den Rauminhalt! (Allgemein, dann für $R = 30$ cm, $r = 18$ cm, $\alpha = 35° 17' 28''$, $\beta = 48° 9' 12''$.) **1765**

XXIV. Goniometrische Transformationen.

1. Wie beweist man die Richtigkeit der „ersten Form der goniometrischen Additionstheoreme“ **1766**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad (1),$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad (2),$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad (3),$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad (4)?$$

Anleitung: Beim Beweise des Cosinussatzes (S. 194) wurde der „Hilfssatz“ $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$ benützt. Setzt man darin für a, b und c die beim Beweise des Sinussatzes erhaltenen Werte $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$ (S. 193), so erhält man $\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. Nehmen wir nun zunächst an, daß die Summe der Winkel α und β kleiner als 180° wäre,

so würde in einem Dreiecke ABC, das bei A und B diese Winkel α und β enthielte, der dritte Winkel $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ und daher $\sin\gamma = \sin[180^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta)$ sein. Setzen wir dies in die letzte für $\sin\gamma$ erhaltene Gleichung ein, so erhalten wir die Formel (1).

Setzt man in (1) statt β $-\beta$, so folgt die Formel (2).

Da ferner $\cos(\alpha + \beta) = \sin[90^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin[(90^\circ - \alpha) - \beta]$ ist und dies nach Formel (2) ergibt: $\sin(90^\circ - \alpha) \cdot \cos\beta - \cos(90^\circ - \alpha)\sin\beta$ und da ferner $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ ist, erscheint die Richtigkeit der Formel (3) nachgewiesen. Formel (4) folgt aus Formel (3), wenn man wieder β durch $-\beta$ ersetzt.

Ist aber $\alpha + \beta > 180^\circ$, so würden die Nebenwinkel $\alpha' = 180^\circ - \alpha$, $\beta' = 180^\circ - \beta$ ein Dreieck bilden, in dem $\gamma' = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = (\alpha + \beta) - 180^\circ$ sein müßten. Setzen wir diese Werte in die entsprechende Formel $c = a\cos\beta' + b\cos\alpha'$ ein, so folgt daraus wieder die Gleichung (1).

1767 2. Man prüfe das Zutreffen der Formeln (1) bis (4), indem man für α und β Werte annimmt, für die man die Werte des Sinus und Cosinus bereits kennt (z. B. 0°, 30°, 45°, 60°, 90°).

1768 3. Wie erhält man aus (1) und (3) die Formeln

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (5),$$

und

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad (6)?$$

1769 4. Wie erhält man aus (5) und (6) die Formeln

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad (7),$$

und

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (8)?$$

1770 5. Aus der bereits früher bewiesenen Formel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (1679 a) und aus der Formel (6) ergibt sich:

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha \qquad (9),$$

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha \qquad (10).$$

Inwiefern?

1771 6. Warum ist dann auch

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \quad (11) \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (13),$$

und

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha \quad (12) \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad (14)?$$

7. Beweise nun auch die Richtigkeit der beiden Formeln **1772**

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad (15),$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \qquad (16)!$$

8. Ebenso die Richtigkeit der Formel: **1773**

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad (17).$$

9. Wie läßt sich aus der ersten Form der Additionstheoreme (Formel 1 bis 4) die „zweite Form der Additionstheoreme" herleiten, und zwar **1774**

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (18),$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (19),$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (20),$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (21)?$$

Bibliothek Wien · Universitätsbibliothek

Anleitung: Man addiere die Formeln (1) und (2), so erhält man $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$. Setzt man darin für $(\alpha+\beta)\ldots\alpha'$, für $(\alpha-\beta)\ldots\beta'$, so muß man für α setzen $\frac{\alpha'+\beta'}{2}$ und für $\beta\ldots\frac{\alpha'-\beta'}{2}$. Man erhält also $\sin\alpha'+\sin\beta'=2\sin\frac{\alpha'+\beta'}{2}\cdot\cos\frac{\alpha'+\beta'}{2}$ oder nach Weglassung der Indexstriche die Formel (18). Ebenso lassen sich die Formeln (19) bis (21) aus den Formeln (1) bis (4) ableiten.*)

10. Inwiefern ist die zweite Form der Additionstheoreme für die Logarithmenrechnung besonders wertvoll? **1775**

11. Aus $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ sind die drei übrigen Winkelfunktionen zu berechnen. **1776**

12. Ebenso aus $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. **1777**

13. Ebenso aus $\tan 45^\circ=1$. **1778**

*) Die in diesem Abschnitte bisher angeführten Formeln (1) bis (21) müssen zu voller Sicherheit dem Gedächtnis eingeprägt werden.

In logarithmisch brauchbare Form zu bringen:

1779 14. $\sin \alpha + \cos \alpha = ?$

1780 15. $\sin \alpha - \cos \alpha = ?$

1781 16. $\text{tang } \alpha + \text{tang } \beta = ?$

1782 17. $\text{tang } \alpha - \text{tang } \beta = ?$

1783 18. $\text{cotang } \alpha + \text{cotang } \beta = ?$

1784 19. $\text{cotang } \alpha - \text{cotang } \beta = ?$

1785 20. $\text{tang } \alpha + \text{cotang } \beta = ?$

1786 21. $\text{tang } \alpha + \text{cotang } \alpha = ?$

1787 22. $\text{cotang } \alpha - \text{tang } \alpha = ?$

1788 23. $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = ?$

1789 24. $\text{tang}^2 \alpha - \text{tang}^2 \beta = ?$

1790 25. $\dfrac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = ?$

1791 26. $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = ?$

1792 27. $\dfrac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = ?$

1793 28. $\dfrac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = ?$

1794 29. $\dfrac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = ?$

1795 30. $\dfrac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = ?$

1796 31. $\dfrac{1 + \text{tang } \alpha}{1 - \text{tang } \alpha} = ?$

1797 32. $\sin (x + 2y) + \sin (x - 2y) = ?$

1798 33. $\sin 3x \pm \sin x = ?$

1799 34. $\dfrac{\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)} = ?$

1800 †35. $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin^3 \alpha}{\cos 3\alpha - \cos^3 \alpha} = ?$

1801 36. $\dfrac{2}{\text{tang } \alpha + \text{cotang } \alpha} = ?$

1802 37. $\dfrac{2 \text{ cotang } \alpha}{\text{cotang}^2 \alpha - 1} = ?$

1803 38. $\dfrac{1 - \text{tang}^2 \alpha}{1 + \text{tang}^2 \alpha} = ?$

39. $\frac{\text{tang } \alpha}{1 - \text{tang } \alpha} + \frac{\text{tang } \alpha}{1 + \text{tang } \alpha} = ?$ **1804**

40. $\frac{\text{tang } \alpha}{\text{tang } 2\alpha - \text{tang } \alpha} = ?$ **1805**

Zu verwandeln in ein Produkt:

41. $A = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$, wenn $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ist. **1806**

†42. $A = \text{tang } \alpha + \text{tang } \beta + \text{tang } \gamma$, wenn $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ist. **1807**

43. $A = \text{cotang } \frac{\alpha}{2} + \text{cotang } \frac{\beta}{2} + \text{cotang } \frac{\gamma}{2}$, wenn $\alpha + \beta + \gamma =$ **1808**

$= 180°$ ist.

Bestimme die Winkel aus folgenden „goniometrischen Gleichungen“:*)

44. $5 \sin x = 2 \cos x$. **1809**

45. $2 \sin x = \text{tang } x$. **1810**

46. $3 \text{ tang } x = 5 \sin x$. **1811**

*47. $\cos x = \text{tang } x$. **1812**

48. $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$. **1813**

49. $2 \sin 2x = 3 \sin x$. **1814**

50. $\sin (a - x) = \cos (a + x)$. **1815**

51. $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$. **1816**

52. $(\cos x + \sin x)^2 = 3 \sin 2x$. **1817**

53. $2 (1 - \cos 2x) = 3 \sin 2x$. **1818**

54. $a \cos 2x + b \sin 2x = a$. **1819**

55. $\cos x = \frac{1}{2} \sin x \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$. **1820**

56. $\text{tang } x + \text{cotang } x = 2$. **1821**

57. $\frac{1 - \text{tang } x}{1 + \text{tang } x} = \text{tang } \alpha$. **1822**

58. $\text{cotang } (180° - 3x) = \text{tang } (x - 180°)$. **1823**

*59. $\sin x + 2 \cos x = 2$. **1824**

*60. $2 \sin x + \cos x = 2$. **1825**

*61. $\sin x \,.\, \sqrt{3} = \sqrt{3} - \cos x$. **1826**

*) Es sind nur jene Lösungen anzugeben, die Winkeln in den beiden ersten Quadranten entsprechen (also $\leqq 180°$ sind).

1827 *62. $\cos \frac{x}{2} : \cos x = -1.$

1828 *63. $\operatorname{tang} x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3.$

1829 *64. $(\cos x + \sin x)^2 = \cos 2x.$

1830 *65. $\sin(2x + \alpha) - \sin(2x - \alpha) + \sin(x + \alpha) - \sin(x - \alpha) = 0.$

1831 *66. $3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = \frac{13}{2} \sin 2x.$

1832 67. $\operatorname{tang} x (1 + \cos 2\alpha) = \cos 2\alpha \,.\, \operatorname{tang} 2x.$

1833 68. $\cos x - \operatorname{tang} x = \frac{1}{16} \cos x.$

1834 *69. $\sin x + \operatorname{cotang} x = \frac{1}{\sin x}.$

1835 *70. $3 \,.\, \frac{1 + \operatorname{tang} x}{1 - \operatorname{tang} x} = 8 \,.\, \operatorname{tang} 2x.$

1836 *71. $\operatorname{cotang} 2x = 1 + \operatorname{tang} x.$

1837 †*72. $\operatorname{tang}^2 (120° + x) - \operatorname{tang}^2 (120° - x) = \operatorname{tang} 120° \,.\, \operatorname{tang} x.$

1838 †*73. $\operatorname{cotang} x \,.\, \operatorname{tang} 2x - \operatorname{tang} x \,.\, \operatorname{cotang} 2x = 2.$

1839 74. $\sin 4x + \sin 2x = \cos x$

1840 75. $\cos x - \cos 3x = \cos 5x.$

1841 *76. $\sin 2x + \sin 3x = 3 \sin x.$

1842 77. $\cos^3 x - \cos 3x = 3 \cos x.$

1843 78. $\sin 3x + \sin^3 x = \sin 2x.$

1844 †79. $\sin 3x - \cos 3x = (\sin x + \cos x)^3.$

1845 80. $\operatorname{tang} 3x = \sin 6x.$

1846 *81. $\operatorname{tang} 4x = \operatorname{tang} x.$

1847 †82. $\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} 2x + \operatorname{tang} 3x = 0.$

1848 83. $x + y = 60°$
$\sin x + \sin y = 0{\cdot}98481.$

1849 84. $x - y = 20°$
$\sin x - \sin y = 0{\cdot}266044.$

1850 †85. Die trigonometrischen Tangenten der Winkel eines Dreieckes verhalten sich wie 4 : 8 : 13. Wie groß sind die Winkel?

XXV. Auflösung des rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreieckes (II. Teil).*)

1851 1. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe der Katheten 137 cm und ein Winkel 47° 55′ 30″; das Dreieck ist aufzulösen.

1852 2. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe aus einer Kathete und der Hypotenuse 169 cm, ein Winkel 20° 36′ 35″; das Dreieck ist aufzulösen.

1853 3. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist der Unterschied der Katheten 1 cm und ein Winkel 45° 14′ 23″; das Dreieck ist aufzulösen.

1854 4. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse um 49 cm länger als die eine Kathete und ein Winkel 49° 33′ 1″; das Dreieck ist aufzulösen.

1855 5. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist der Umfang 700 cm und ein Winkel 76° 18′ 52″; das Dreieck ist aufzulösen.

1856 6. Ein rechtwinkliges Dreieck auflösen aus dem Flächeninhalt f und einem Winkel α. (Besondere Werte: $f = 11970\ cm^2$, $\alpha = 39° 18' 27''$.)

1857 7. Ebenso ein gleichschenkliges Dreieck aus dem Flächeninhalt f und dem Winkel am Scheitel α. (Besondere Werte: $f = 17940\ cm^2$, $\alpha = 29° 43' 32''$.)

1858 8. Von einem schiefwinkligen Dreieck sind gegeben der Umfang u und zwei Winkel α und β; das Dreieck ist aufzulösen.

Anleitung: Diese Aufgabe (wie auch viele der folgenden) kann auf zwei Wegen gelöst werden. Das erste „arithmetische" Verfahren geht vom Sinussatze aus. Schreibt man diesen in Form einer fortlaufenden Proportion $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ auf, so ergibt sich daraus nach dem „Korrespondenzsatze" $(a + b + c) : a = (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) : \sin\alpha$; nach den Formeln in Nr. **1769** und **1806** folgt daraus $a = \dfrac{2u \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}}{4 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}$ und daher $a = \dfrac{u \sin\frac{\alpha}{2}}{2 \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}$; ähnliche Formeln ergeben sich für b und c (am einfachsten durch zyklische Vertauschung). — Auf dieselbe Endformel führt uns aber auch ein „geometrisches" Verfahren. Dabei knüpft man zunächst an die geometrische Analysis der Konstruktion an, die im Beginn des Abschnittes V (auf S. 13) ausführlich be-

*) Während die Lösung der Aufgaben der Abschnitte XXII und XXIII unter alleiniger Benützung der Sätze in Nr. **1679**, **1682** und in Nr. **1734**, **1735** gelingt, erfordern die nachfolgenden Aufgaben die Kenntnis der in Abschnitt XXIV angeführten goniometrischen Formeln und Transformationen.

sprochen wurde. Wendet man auf das Hilfsdreieck CDE (Fig. 7, II) den Sinussatz an, so ergibt sich $CE : u = \sin\frac{\alpha}{2} : \sin\left(\gamma + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Wegen $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$ ist $\left(\gamma + \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 180° - (\alpha+\beta) + \frac{\alpha+\beta}{2} = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2}$ und daher $\sin\left(\gamma + \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\gamma}{2}$. Es ist also $CE = u \cdot \sin\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\gamma}{2}$. Aus einem der beiden rechtwinkligen Dreiecke, in die das gleichschenklige Dreieck BCE durch die Streckensymmetrale der CE zerfällt, folgt aber $\frac{CE}{2} : BC = \cos\frac{\beta}{2}$ und somit $BC = a = \frac{CE}{2\cos\frac{\beta}{2}}$. Setzt man darin für CE den oben gefundenen Wert, so folgt $a = \frac{u \sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$, also dieselbe Endformel. — Man versuche, die Aufgaben **1859** bis **1862** auf beiden Wegen allgemein zu lösen. Für die Durchführung mit besonderen Werten mögen die nötigen Angaben der Tabelle bei Nr. **1747** auf Seite 197 entnommen werden.

Man löse ein schiefwinkliges Dreieck auf, von dem gegeben ist:

1859 9. $a + b = s, \alpha, \beta$.

1860 10. $a - b = d, \alpha, \beta$.

1861 11. $a, b + c = s, \alpha$.

1862 12. $a, b - c = d, \alpha$.

1863 13. Ebenso aus dem Halbmesser des Inkreises r und den Winkeln α und β. (Besondere Werte: $r = 18$ cm, $\alpha = 81° 12' 9''$, $\beta = 36° 52' 11''$.)

1864 †14. Es ist zu beweisen, daß der Inhalt eines Dreieckes mit den Winkeln α, β, γ und den Halbmessern R und r des Umkreises und Inkreises sich ausdrücken läßt durch die Formeln $f = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$, $f = r^2 \cdot \operatorname{cotang}\frac{\alpha}{2} \operatorname{cotang}\frac{\beta}{2} \operatorname{cotang}\frac{\gamma}{2}$ und $f = 4Rr \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$.

1865 †15. Es ist zu beweisen, daß für jedes Dreieck die Beziehung $r = 4R \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$ besteht.

1866 †16. Einem Dreieck mit den Winkeln α, β und γ ist ein Kreis umgeschrieben; an diesen werden in den Eckpunkten die Tangenten gelegt. Wie verhält sich der Inhalt dieses Tangentendreieckes zu jenem des ursprünglichen Dreieckes? (Besondere Werte: $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 80°$.)

†17. Von einem Dreieck kennt man das Verhältnis zweier Seiten **1867**
$a : b = m : n$, die Höhe zu einer der beiden h_b und den Winkel γ. Das Dreieck ist aufzulösen. (Besondere Werte: $m : n = 29 : 5$, $h_b = 144$ cm, $\gamma = 96° 43' 59''$.)

18. Wie Nr. 17 aus $a : b = m : n$, $\sphericalangle(\alpha - \beta) = \delta$ und h_c. (Be- **1868**
sondere Werte: $m : n = 37 : 13$, $\sphericalangle \delta = 48° 27' 20''$, $h_c = 24$ cm.)

†19. Von einem Dreiecke kennt man die Differenz zweier Seiten **1869**
$a - b = d$, die Differenz ihrer Projektionen auf die dritte Seite, d. i. $m - n = \delta$ und den Winkel γ. Das Dreieck ist aufzulösen. (Besondere Werte: $d = 21$ cm, $\delta = 33$ cm, $\gamma = 75° 45'$.)

†20. Ein schiefwinkliges Dreieck ist aufzulösen aus c, h_c und R. (Be- **1870**
sondere Werte: $c = 126$ cm, $h_c = 72$ cm, $R = 65$ cm.)

†21. Die Seiten eines Dreieckes sind 13 cm, 14 cm, 15 cm. Man **1871**
berechne $\tan\frac{\alpha}{2} \cdot \tan\frac{\beta}{2}$ und $\tan\frac{\gamma}{2}$ und daraus $\tan\alpha$, $\tan\beta$ und $\tan\gamma$ und überzeuge sich davon, daß die in Nr. 1807 angegebene Beziehung zutrifft.

†22. In einem Dreiecke verhält sich $\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma = 1 : 2 :$ **1872**
$: 3$. In welchem Verhältnisse stehen die Seiten des Dreieckes?

23. Zwei Kreise mit den Halbmessern $R = 20{\cdot}2$ cm und $r = 5{\cdot}8$ cm **1873**
schneiden sich derartig, daß der Winkel der beiden Tangenten in jedem der beiden Schnittpunkte $55° 1' 26''$ beträgt. Wie lang ist die Zentrale? (Man beachte, daß die Aufgabe zwei Lösungen liefert!)

24. Welche Winkel bilden die Zentralen dreier Kreise mit den **1874**
Halbmessern r_1, r_2 und r_3, die sich paarweise von außen berühren? (Besondere Werte: $r_1 = 30$ cm, $r_2 = 35$ cm, $r_3 = 40$ cm.)

†25. Drei Kreise mit $r_1 = 363$ cm, $r_2 = 147$ cm und $r_3 = 170$ cm **1875**
berühren sich von außen. Es soll die zwischen ihnen liegende Fläche berechnet werden.

26. Von einer Anhöhe, die $h = 386$ m über einem Seespiegel liegt, **1876**
sehen wir einen Luftballon unter einem Höhenwinkel $\alpha = 11° 37' 30''$ und sein Spiegelbild im Wasser unter einem Tiefenwinkel von $\beta =$ $= 19° 16' 30''$ Wie hoch schwebt der Ballon über dem See?

†27. Ein Fabrikschornstein ist $a = 125$ m hoch. In unzugänglicher **1877**
Höhe zeigt er einen lotrechten, geraden, nicht bis zur Mündung reichenden Sprung. Um dessen Länge l und seine Höhe h über dem Erdboden zu bestimmen, hat man von einem Punkte der Ebene drei Höhenwinkel

gemessen, und zwar nach der Spitze des Schornsteines $\sphericalangle \alpha = 68° 29' 48''$, nach dem oberen Ende des Risses $\sphericalangle \beta = 53° 16' 5''$ und nach dem Beginn des Risses $\sphericalangle \gamma = 48° 47' 12''$. Was ergibt sich?

1878 †28. Wie breit ist ein Strom, von dessen einem Ufer wir nach drei am geradlinig verlaufenden anderen Ufer liegenden Kilometersteinen visieren, wobei wir den Winkel der Visierlinien zwischen dem ersten und zweiten Steine mit $84° 53' 46''$ und jenen zwischen dem zweiten und dritten Stein mit $38° 47' 37''$ finden?

* * *

1879 29. Die Grundfläche einer Pyramide ist ein rechtwinkliges Dreieck, von dem die Hypotenuse $c = 35$ cm und der Winkel $\alpha = 56° 33' 47''$ beträgt. Die von dieser Ecke A ausgehende Seitenkante ist $s = 55{\cdot}28$ cm lang und zur Grundfläche unter dem Winkel $\delta = 69° 32'$ geneigt. Wie groß ist der Rauminhalt der Pyramide?

1880 30. Die Grundfläche einer Pyramide ist ein gleichseitiges Dreieck; eine ihrer Seitenkanten steht senkrecht zur Grundfläche. Man soll aus dem Rauminhalt V der Pyramide und dem Neigungswinkel δ der einen Seitenfläche deren Flächeninhalt berechnen. (Besondere Werte: $V = 40{\cdot}32$ cm^3, $\sphericalangle \delta = 30° 4' 18''$.)

1881 †31. Von einer regelmäßigen n-seitigen Pyramide ist die Grundkante a und der Neigungswinkel δ der Seitenflächen zur Grundfläche gegeben. Oberfläche und Inhalt dieser Pyramide sind durch die gegebenen Größen auszudrücken. (Besondere Werte: $n = 15$, $a = 32$ cm, $\delta = 28° 42' 16''$.)

1882 32. In welchem Verhältnisse stehen die Inhalte zweier regelmäßiger Pyramiden, wenn der Neigungswinkel der Seitenflächen zur Grundfläche bei der einen Pyramide halb so groß ist wie bei der anderen? Welches Verhältnis besteht im besonderen, wenn die beiden Neigungswinkel $\alpha = 30°$ und $2\alpha = 60°$ sind?

1883 33. Oberfläche und Inhalt eines geraden Kegels sind aus der Länge der Seite s und dem Winkel α, den die Seite mit der Achse einschließt, zu berechnen.*)

*) Man prüfe die erhaltene Formel auf ihre Richtigkeit, indem man sie für den Fall des gleichseitigen Kegels anwendet, für den bekanntlich (Nr. 1172)

$$O = 3r^2\pi \text{ und } V = \frac{r^3\pi}{3}\sqrt{3} \text{ ist.}$$

†34. Der Rauminhalt eines geraden Kegels ist aus der Oberfläche O und dem Neigungswinkel α der Seiten zur Grundfläche zu berechnen.*) 1884

†35. Die Oberfläche eines geraden Kegels ist aus dem Rauminhalt V und dem Winkel α zwischen Seite und Achse des Kegels zu berechnen.*) 1885

†36. Die Mantelfläche und der Rauminhalt eines geraden Kegels sollen aus dem Flächeninhalt f eines Achsenschnittes und dem Öffnungswinkel α an der Spitze berechnet werden.*) 1886

37. Die Achse eines schiefen Kegels ist so lang wie der Halbmesser der Grundfläche und seine längste Seite s ist zu dieser unter dem Winkel α geneigt. Man soll den Rauminhalt des Kegels aus s und α berechnen. 1887

†38. Von einem geraden Kegelstumpf ist das Verhältnis $G : g : M = 21 : 6 : 10\sqrt{3}$ bekannt. Welchen Neigungswinkel schließen seine Erzeugenden mit der Grundfläche ein? 1888

39. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC rotiert um die eine Kathete AC. Man soll Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers aus $AB = c$ und $\sphericalangle BAC = \alpha$ berechnen. (Besondere Werte: $c = 24$ cm, $\sphericalangle \alpha = 57°$.) 1889

40. Wie Nr. 39, wenn das Dreieck um eine zur Kathete $AC = 55$ cm im Abstande von 40 cm parallele Achse rotiert und $\sphericalangle \alpha = 48° 53' 16''$ ist. 1890

41. Ein Rhombus, der gegeben ist durch seinen Inhalt f und den spitzen Winkel α rotiert um eine Seite. Oberfläche und Inhalt des Rotationskörpers sind zu berechnen. (Besondere Werte: $f = 210$ cm^2, $\alpha = 46° 22' 50''$.) 1891

42. Inhalt und Oberfläche eines Rotationskörpers sind zu berechnen, der entsteht, wenn sich ein Rhombus mit der Seite s und dem spitzen Winkel 2α um eine Achse dreht, die zur längeren Diagonale parallel verläuft und durch eine Rhombusecke hindurchgeht. (Besondere Werte: $s = 16$ cm, $2\alpha = 72° 36' 18''$.) 1892

43. Oberfläche und Inhalt des Rotationskörpers eines Dreieckes, das sich um eine Seite c dreht, sind durch die Länge dieser Seite c und 1893

*) Man prüfe die erhaltene Formel auf ihre Richtigkeit, indem man sie für den Fall des gleichseitigen Kegels anwendet, für den bekanntlich (Nr. 1172)

$$O = 3r^2\pi \text{ und } V = \frac{r^3\pi}{3}\sqrt{3} \text{ ist.}$$

die anliegenden Winkel α und β auszudrücken. (Besondere Werte: $c = 24$ cm, $\alpha = 97° 12'$, $\beta = 13° 18'$.) (Vgl. Nr. 1758!)

1894 44. Über einem gemeinsamen Grundkreise sind nach einer und derselben Seite zwei gerade Kegel errichtet, deren Spitzen um a cm voneinander entfernt sind und deren Öffnungswinkel am Scheitel α und β ist ($\alpha > \beta$). Man berechne den Inhalt des von beiden Kegelmänteln begrenzten Körpers. (Vgl. Nr. 1759.) (Besondere Werte: $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$.)

1895 45. Welcher Bruchteil der Gesamtfläche des gestirnten Himmels bleibt für einen Beobachtungsort von der geographischen Breite β immer unsichtbar? Was sagt uns die erhaltene Formel für den Pol, was für den Äquator aus?

1896 46. In einem Kreise schließen zwei Durchmesser miteinander den Winkel α ein. Rotiert nun die Kreislinie und der eine Durchmesser um den anderen als Achse, so entstehen zwei Kegelmäntel. Wenn nun beide zusammen so groß sind wie die außerhalb der Kegel gebildete Kugelzone, wie groß ist dann $\sphericalangle \alpha$?

1897 47. Einer Kugel vom Rauminhalte V ist ein gerader Kegel eingeschrieben, dessen Achsenschnitt an der Spitze den Winkel 2α hat. Wie groß ist der Rauminhalt des Kegels? Was ergibt die erhaltene Formel für $2\alpha = 120°$ und für $2\alpha = 60°$?

1898 48. Man berechne den Rauminhalt eines Kugelausschnittes aus dem Kugelhalbmesser und dem Zentriwinkel 2α. Wie verhält sich der sphärische Teil seiner Oberfläche zum konischen Teil?

1899 49. Aus dem Rauminhalt einer Kugel V soll der Inhalt eines Kugelausschnittes mit dem Zentriwinkel 2α berechnet werden.

1900 50. In einem Kreisausschnitt mit dem Zentriwinkel α ist ein Halbmesser gezeichnet. Wenn nun der Kreisausschnitt um einen seiner beiden Begrenzungshalbmesser rotiert, beschreibt der gezeichnete Kreishalbmesser eine Kegelfläche. Unter welchem Winkel muß der Kreishalbmesser gezeichnet werden, damit diese Kegelfläche deren ganzen Kugelausschnitt halbiert? Was ergibt die erhaltene Formel für $\alpha = 90°$?

1901 51. Ein Kreisausschnitt vom Flächeninhalte f dreht sich um einen der beiden Schenkel seines Zentriwinkels α. Wie groß ist der Inhalt des entstehenden Kugelausschnittes? (Besondere Werte: $f = 720$ cm^2, $\alpha = 45°$.)

52. Wie groß ist der Zentriwinkel im Achsenschnitte eines Kugelausschnittes, dessen konische Oberfläche gleich ist seiner sphärischen? 1902

†*53. Wie groß ist der Zentriwinkel eines Kugelausschnittes, für den der Kugelabschnitt und der Kegel gleichen Rauminhalt haben? 1903

†*54. Wie groß ist der Zentriwinkel eines Kugelausschnittes, bei dem sich Kegel und Kugelabschnitt wie 1 : 3 verhalten? In welchem Verhältnisse teilt der Grundkreis des Kegels die Achse des Kugelausschnittes? 1904

*55. Wie groß ist der Zentriwinkel eines Kugelausschnittes, dessen kegelförmiger Teil $^3/_5$ des zugehörigen Kugelabschnittes ist? 1905

*56. Welcher Zentriwinkel gehört zu einem Kugelabschnitte, dessen Gesamtoberfläche gleich einem größten Kugelkreise ist? 1906

57. Wie groß ist die Oberfläche einer der gemäßigten Zonen unserer Erde? (Erdhalbmesser = 6368 km, Breite des Wendekreises 23° 27′, des Polarkreises 66° 33′.) 1907

58. Wie groß ist jenes Stück der als vollständige Kugelfläche betrachteten Erdoberfläche, das zwischen den Parallelkreisen von der geographischen Breite $\beta_1 = 35° 59' 53''$ und $\beta_2 = 71° 10'$ und zwischen den Meridianen von $\lambda_1 = 9° 31'$ westlicher und $_2 = 67°$ östlicher Länge liegt? *) (Erdhalbmesser = 6368 km.) 1908

†59. An einen Kreis mit dem Halbmesser r sind zwei Tangenten gezogen, die miteinander einen Winkel 2α einschließen. Es rotieren nun die Kreislinie und die Tangenten um die Symmetrielinie der Figur. Wie groß ist Inhalt und Oberfläche des aus einem Kegel und einem Kugelabschnitte bestehenden Rotationskörpers? Was ergeben die erhaltenen Formeln für $2\alpha = 60°$? 1909

†60. Über der Grundfläche eines geraden Kegels mit dem Grundflächenhalbmesser r und dem Öffnungswinkel $2\alpha < 90°$ ist eine Halbkugel errichtet. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche der durch den Kegel ausgebohrten Halbkugel? Was ergeben die erhaltenen Formeln für $2\alpha = 60°$? (Vgl. Nr. 1509!) 1910

XXVI. Wiederholungsaufgaben.

Bringe folgende Ausdrücke in eine logarithmisch brauchbare Form:

1. $\dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = ?$ 1911

*) Dieses Stück schließt das europäische Festland ein.

1912 2. $\frac{\text{cotang}^2\,\alpha - 1}{\text{cotang}^2\,\alpha + 1} = ?$

1913 3. $\frac{\text{tang}\,\alpha}{1 - \text{tang}^2\,\alpha} \cdot \frac{\text{cotang}^2\,\alpha - 1}{\text{cotang}\,\alpha} = ?$

1914 4. $\frac{\text{tang}\,2\alpha \,.\, \text{tang}\,\alpha}{\text{tang}\,2\alpha - \text{tang}\,\alpha} = ?$

Bestimme die Winkel aus nachfolgenden „goniometrischen Gleichungen": *)

1915 5. $\sin 2x = \text{tang}\,x.$

1916 6. $3 \sin 2x = \text{cotang}\,x.$

1917 7. $12 \sin x = \frac{5}{\cos x}.$

1918 8. $2(1 - \cos x) = \sin \frac{x}{2}.$

1919 9. $(\cos x - \sin x)^2 = \sin 2x.$

1920 10. $a \sin x = b \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}.$ (Besonderer Wert: $a = b.$)

1921 11. $a(1 + \cos 2x) = \frac{b \cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}.$ (Besonderer Wert: $a = b.$)

1922 12. $2 \sin x - \cos x = 1.$

1923 *13. $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}.$

1924 *14. $\cos 2x + \frac{7}{2} \cos x = 0.$

1925 15. $\text{tang}^2\,x + 6 \cos 2x = 1.$

1926 16. $(\cos x \pm \sin x)^2 = \cos 2x.$

1927 17. $c \,.\, \cos x : (1 + \cos 2x) = d \sin x : (1 - \cos 2x).$ (Besonderer Wert: $c = d.$)

1928 *18. $\cos^2 x - \sin^2 x + \text{tang}^2\,x = \frac{5}{6}.$

1929 *19. $\text{cotang}\,x - \text{tang}\,x = \frac{1 + \sin 2x}{\sin 2x}.$

1930 20. $2 \cos 4x + 3 \sin^2 2x + 2 \cos 2x = 1.$

1931 †21. $\cos 3x - \sin 3x = (\cos x - \sin x)^3.$

1932 †*22. $\text{tang}\,2x + \text{tang}\,3x = 3\,\text{tang}\,x.$

*) Vgl. Fußnote auf Seite 203.

†23. $x - y = 15°$ **1933**

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}\sqrt{6} = 0{\cdot}61237.$$

24. Wie groß ist die Seite des regelmäßigen Sechzehneckes, das man einem Kreise mit dem Halbmesser $r = 9{\cdot}66$ cm umschreiben kann? **1934**

25. Wie groß ist die Resultierende zweier Kräfte $P_1 = 250$ kg und $P_2 = 150$ kg, die unter einem Winkel von 70° wirken? **1935**

26. Die Resultierende zweier Kräfte $P_1 = 195$ kg und $P_2 = 102$ kg ist $R = 279$ kg; unter welchem Winkel wirken diese Kräfte? **1936**

27. Ein Dreieck aufzulösen aus $f = 8190$ cm², $\sphericalangle \alpha = 61° 55' 39''$ und $\sphericalangle \beta = 46° 23' 50''$. **1937**

28. Von einem Dreieck kennt man den Flächeninhalt und die Winkel. Wie groß ist der Inhalt eines Rechteckes, dessen Seiten so groß sind wie die Durchmesser der dem Dreiecke ein- und umgeschriebenen Kreise? Was ergibt die erhaltene Formel für ein gleichseitiges Dreieck? **1938**

29. Man bestimme mit Hilfe der Trigonometrie, welches von allen Dreiecken, die zwei gegebene Seiten haben, den größten Flächeninhalt besitzt. **1939**

30. Unter welchem Gesichtswinkel erscheint uns eine 91 m lange Häuserreihe, wenn wir von dem einen ihrer Endpunkte 65 m, von dem anderen 104 m entfernt sind? **1940**

†31. In einem schiefwinkligen Dreiecke verhalten sich die Tangenten der Winkel α, β und γ wie $55 : 70 : 99$. In welchem Verhältnisse stehen die Seiten des Dreieckes? **1941**

32. Man berechne den Flächeninhalt eines Parallelogrammes aus den Seiten a und b und dem eingeschlossenen Winkel γ. (Besondere Werte: $a = 218$ cm, $b = 122$ cm, $\sphericalangle \gamma = 66° 59' 25''$.) **1942**

33. Es sind die Seiten eines Parallelogrammes zu berechnen aus der Diagonale d und den beiden Winkeln α und β, die diese Diagonale mit den Seiten bildet. (Besondere Werte: $d = 52{\cdot}55$ cm, $\alpha = 39° 10' 30''$, $\beta = 62° 25' 10''$.) **1943**

34. Aus den beiden Diagonalen D und d eines Parallelogrammes und einer Seite a sind die andere Seite und die Winkel zu berechnen. (Besondere Werte: $D = 14$ cm, $d = 10$ cm, $a = 6$ cm.) **1944**

35. Der Inhalt eines gleichschenkligen Trapezes ist zu berechnen aus den beiden Parallelseiten a und b und dem Winkel an der Grundlinie α. (Besondere Werte: $a = 106$ cm, $b = 40$ cm, $\alpha = 59° 29' 23''$.) **1945**

1946 36. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist zu berechnen aus den Parallelseiten a und b, einer der beiden anderen Seiten c und dem Winkel α zwischen c und a. (Besondere Werte: $a = 408$ cm, $b = 192$ cm, $c = 41$ cm, $\alpha = 77° 19' 11''$.)

1947 †37. Über der kleinsten Seite c eines schiefwinkligen Dreieckes, dessen größte Seite a ist, wird ein diesem ähnliches Dreieck so gezeichnet, daß c darin die größte Seite ist, über dessen kleinster Seite wieder ein ähnliches Dreieck und so fort ohne Ende. Wie groß ist die Inhaltssumme aller dieser Dreiecke, wenn die Winkel als bekannt angenommen werden dürfen?

1948 †38. Ein gleichschenkliges Dreieck ist gegeben durch die Höhe und den Winkel α an der Grundlinie. Es wird ein Kreis eingezeichnet, in den freibleibenden Raum darüber ein zweiter und so fort ohne Ende. Wie groß ist die Summe der Flächeninhalte aller dieser Kreise? Was ergibt die Formel für $\alpha = 60°$?

1949 †*39. Ein Dreieck, dessen Seiten a, b und c sind, soll durch eine schräge Strecke zwischen a und b so in zwei Teile geteilt werden, daß sowohl die Inhalte wie auch die Umfänge beider Teile gleich werden. Wie groß sind die Abschnitte auf a und b zu wählen und wie lang ist die schräge Teilungsstrecke?

1950 40. Wie Nr. 1751 mit $c = 412$ m, $\sphericalangle \alpha = 71° 13' 10''$ und $\sphericalangle \beta = 68° 4' 13''$.

1951 41. Wie Nr. 1751 mit $c = 480{\cdot}714$ m, $\sphericalangle \alpha = 86° 57' 45''$ und $\sphericalangle \beta = 74° 16'$, wenn die Standlinie im Abstande $d = 30{\cdot}066$ m parallel zum Ufer angenommen wurde.

1952 42. Wie Nr. 1755, wenn $AB = 766{\cdot}5$ m, $\sphericalangle \alpha = 47° 20'$, $\sphericalangle \beta = 38° 10'$, $\sphericalangle \gamma = 102° 35'$, $\sphericalangle \delta = 99° 35'$ ist.

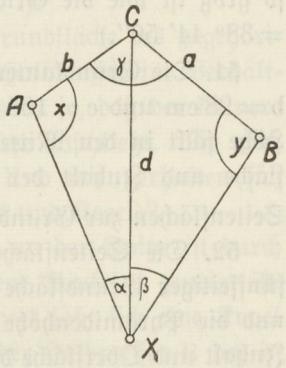
1953 43. Wie Nr. 1757, wenn $AB = 933$ m, $\sphericalangle \alpha = 123° 57' 8''$, $\sphericalangle \beta = 27° 13' 8''$ und $\sphericalangle \gamma = 8° 30' 31{\cdot}4''$ ist.

1954 †44. Auf ebenem Gelände sind drei Punkte A, B und C (Fig. 115) ausgesteckt und $BC = a$, $AC = b$ sowie $\sphericalangle ACB = \gamma$ abgemessen. Von einem vierten Punkte X wird nach den drei (unzulänglichen) Punkten A, B und C visiert und die Größe der beiden Winkel $AXC = \alpha$ und $BXC = \beta$ bestimmt. Wie läßt sich daraus die Entfernung des Punktes X von A, B und C berechnen? (Pothenotsche „Aufgabe des Rück-

wärtseinschneidens".) (Besondere Werte: $a = 3000$ m, $b = 1950$ m, $\sphericalangle \gamma = 163° 41' 52''$, $\sphericalangle \alpha = 35° 27' 23''$ und $\sphericalangle \beta = 30° 26' 28''$.)

Anleitung: Bezeichnet man CX mit d und die beiden Winkel XAC und XBC mit x und y, so ist $\sphericalangle x + y = 360° - (\alpha + \beta + \gamma)$, ferner aus $\triangle$ ACX und $\triangle$ BCX $\sin x : \sin \alpha = d : b$ und $\sin y : \sin \beta = d : a$ oder $\sin x = \frac{d \sin \alpha}{b}$ und $\sin y = \frac{d \sin \beta}{a}$; daraus folgt aber $\sin x : \sin y = a \sin \alpha : b \sin \beta$.

Fig. 115.



Man bildet daraus

$(\sin x + \sin y) : (\sin x - \sin y) = (a \sin \beta + b \sin \alpha) : (a \sin \beta - b \sin \alpha)$ und daher $\tan \frac{x+y}{2} : \tan \frac{x-y}{2} = (a \sin \beta + b \sin \alpha) : (a \sin \beta - b \sin \alpha)$ woraus $\sphericalangle \frac{x-y}{2}$ und daher $\sphericalangle x$ und y berechnet werden kann. Die gesuchten Entfernungen lassen sich dann aus den Dreiecken ACX und BCX mit Hilfe des Sinussatzes finden.

* * *

45. Die Grundfläche eines schiefen Prismas ist ein Rhombus mit der Seite a und dem Winkel α. Die Länge der Seitenkanten ist s, ihr Neigungswinkel zur Grundfläche δ. Wie läßt sich der Rauminhalt des Prismas aus diesen Angaben berechnen? (Besondere Werte: $a = 52$ cm, $\alpha = 45°$, $s = 170$ cm, $\delta = 67°$.) **1955**

†**46.** Auf den drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten eines Würfels hat man von der Ecke aus die Strecken 1 dm, 2 dm und 3 dm aufgetragen und ihre Endpunkte paarweise verbunden. Wie groß sind die Seiten, die Winkel und der Inhalt des so entstehenden Dreieckes? **1956**

47. Durch eine Grundkante eines Würfels wird eine Ebene unter $\alpha°$ Neigung gegen die Grundfläche gelegt. Wie groß ist der Inhalt des Würfels, wenn die Schnittfläche f Flächeneinheiten mißt? **1957**

48. Welchen Neigungswinkel bildet die Schnittebene in Nr. 1598 mit der Würfelbasis? **1958**

†**49.** In einem geraden Zylinder mit dem Halbmesser 85 cm ist ein dreiseitiges Prisma konstruiert, dessen Seitenflächen die Winkel $\alpha = 25° 3' 27''$, $\beta = 118° 4' 26''$ einschließen. Die Höhe beider Körper ist die vierte Proportionale der Dreiecksseiten (also $a : b = c : h$). Inhalt und Oberfläche beider Körper sind zu berechnen. **1959**

1960 50. Wie groß ist der Rauminhalt eines schiefen Zylinders, wenn dessen Achse a und deren Neigungswinkel zur Grundfläche α gegeben sind und die Fläche des charakteristischen Parallelogrammes viermal so groß ist wie die Grundfläche? (Besondere Werte: $a = 98$ cm, $\alpha = 38^\circ\ 44'\ 50''$.)

1961 51. Die Grundkanten einer dreiseitigen Pyramide sind $a = 91$ cm, $b = 98$ cm und $c = 105$ cm, ihre Höhe $h = 96$ cm. Der Fußpunkt der Höhe fällt in den Mittelpunkt des Inkreises der Grundfläche. Oberfläche und Inhalt der Pyramide sowie der Neigungswinkel ihrer Seitenflächen zur Grundfläche sind zu berechnen.

1962 52. Die Seitenflächen einer geraden Pyramide mit regelmäßig fünfseitiger Grundfläche haben eine Höhe von 28·58 cm; die letztere und die Pyramidenhöhe schließen einen Winkel von $47^\circ\ 45'\ 22''$ ein. Inhalt und Oberfläche der Pyramide sind zu berechnen.

1963 53. Man drücke den Rauminhalt eines geraden Kegels durch die Länge s seiner Erzeugenden und deren Neigungswinkel zur Grundfläche aus! (Besondere Werte: $s = 45$ cm, $\alpha = 53^\circ\ 7'\ 49''$.)

1964 54. Aus dem Umfange u der Grundfläche und dem Öffnungswinkel 2α an der Spitze eines geraden Kegels soll die Mantelfläche und der Rauminhalt berechnet werden.

1965 55. Wie groß ist der Halbmesser eines geraden Kegels, wenn dessen Rauminhalt V und der Öffnungswinkel an der Spitze 2α gegeben sind? (Besondere Werte: $V = 78{\cdot}542\ \mathrm{dm}^3$, $2\alpha = 171^\circ\ 25'\ 18''$.)

1966 56. Ein rechtwinkliges Dreieck, von dem der Inhalt f und der Winkel $BAC = \alpha$ bekannt sind, rotiert um die Seite AC. Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers sind durch die gegebenen Größen f und α auszudrücken.

1967 57. Ein Dreieck, von dem eine Seite a und die Winkel α und β bekannt sind, rotiert um die Seite c. Oberfläche und Inhalt des Rotationskörpers sind zu berechnen. (Besondere Werte: $a = 197$ cm, $\alpha = 31^\circ\ 53'\ 27''$, $\beta = 8^\circ\ 10'\ 16''$.)

1968 58. Aus einem geraden Kegel vom Halbmesser r und dem Neigungswinkel α der Erzeugenden zur Grundfläche wird von der letzteren aus ein kegelförmiger Teil so herausgedreht, daß seine Erzeugenden den Winkel β ($\beta < \alpha$) bilden. Oberfläche und Inhalt des Restkörpers sind zu berechnen.

59. Von einem geraden Kegel ist die Höhe H und der Öffnungswinkel 2α an der Spitze gegeben. Man soll den Rauminhalt jenes Kugelausschnittes berechnen, zu dem der gegebene Kegel gehört. (Besondere Werte: $H = 84$ cm, $2\alpha = 17^\circ\ 35'\ 41{\cdot}4''$.) **1969**

†*60. In einem Kugelausschnitt teilt die Grundfläche des zugehörigen Kreiskegels den darauf normalstehenden Halbmesser im Verhältnisse des goldenen Schnittes (Nr. 505), und zwar so, daß der kleinere der beiden Abschnitte an den Pol der Kugelmütze anschließt. Wie groß ist der Zentriwinkel des Kugelausschnittes? Und wie verhalten sich die Inhalte seiner beiden Teile (Kugelabschnitt und Kegel)? **1970**

†61. Ein gerader Kegel mit dem Winkel α an der Spitze ist durch eine Ebene geschnitten, die zur Achse unter dem Winkel δ geneigt ist. In den der Spitze angrenzenden Teil des Kegels läßt sich eine Kugel vom Halbmesser r einschreiben. Wie groß ist der Halbmesser R der in den übrigen Teil des Kegels eingeschriebenen Kugel? (Vgl. Nr. **1164** c!) **1971**

†62. Eine Kugel vom Halbmesser r, die auf einer waagrechten Ebene liegt, wird von einer über ihrem lotrechten Durchmesser liegenden punktförmigen Lichtquelle beleuchtet, wobei die Erzeugenden des die Kugel berührenden Kegelmantes der Lichtstrahlen mit der Ebene den Winkel α bilden. Wie verhalten sich die Rauminhalte jener beiden Teile dieses Lichtkegels, von denen der eine vom Licht erfüllt, der andere aber beschattet ist? Was ergibt sich für $\alpha = 60^\circ$? **1972**

Ergebnisse der Rechnungsaufgaben.

Erster Teil.

Planimetrie.

VI. Flächenberechnung.

159. 4 m² 1 dm² 94 cm²; ungefähr 3135, beziehungsweise 313480 Blätter. **161.** 25 m; 625 m². **162.** 721 S 28 g. **163.** 128·7 m. **164.** Das Quadrat ist um 36 cm² größer. **165.** 765 m². **166.** 1440 S. **167.** 122000 Würfel; 109800 S. **168.** 251 Fässer; 34605 S 66 g. **169.** 8260 m²; 1520 m². **170.** 192 m; 96 m. **171.** 28 cm; 784 cm². **172.** 36 cm; 1296 cm². **173.** 192 cm. **175.** 150·5 cm². **176.** 348·48 m². **177.** 180 cm. **178.** 1251 S 36 g. **179.** a) 230·55 m²; b) 3 m² 92 dm² 56·65 cm². **180.** 253 dm². **181.** 2·184 m; 2·52 m. **182.** 344 m. **185.** $^1/_2\ s^2$. **186.** $^6/_5$ von der Höhe des Rechteckes. **188.** 2620 dm² 88 cm². **189.** 16·02 cm. **190.** 582·25 cm². **191.** 1724·25 mm². **193.** a) 830·5 cm²; b) 96 m² 52$^1/_2$ dm². **194.** 17 cm. **195.** 420·3 cm. **196.** 60 m. **197.** 64·5 m². **198.** Wie $(3\,a + b) : (3\,b + a)$, worin a und b die Parallelseiten des Trapezes bedeuten. **200.** 509·78 m². **201.** 497·2 m². **202.** 22 a 56·5 dm². **204.** c = 19·3 m; u = 45·6 m; f = 79·8 m². **205.** c = 197 cm; u = 420 cm; f = 27·3 dm² **206.** b = = 15·6 dm; f = 103 dm² 74 cm²; u = 49·4 dm. **207.** b = 3·08 m; f = 1·155 m²; u = 7 m. **209.** $\frac{m^2 + 1}{2}$. **210.** 104 m. **211.** 174 km.

212. $f = h_a\left(\sqrt{c^2 - h_a^2} - \sqrt{m_a^2 - h_a^2}\right)$; 132 cm². **213.** 58 cm (36 cm). **214.** a) d = 137 m; u = 386 m; f = 9240 m²; b) b = 16 dm; u = 158 dm; f = 1008 dm²; c) l = 8 m; u = 23·8 m; f = 31·2 m²; d) b = 105 cm; d = 233 cm; u = 626 cm. **215.** f = 588 cm²; u = 98 cm. **216.** 9·6 dm²; 5·2 dm. **217.** $\frac{1}{2}(l - b)^2$. **218.** a) h = 99 cm; u = 242 cm; f = 1980 cm²; b) h = 63 cm; u = 162 cm; f = 1008 cm²; c) s = 97 cm; h = 72 cm; u = 324 cm; d) h = 13·2 dm; s = 15·7 dm; u = 48·4 dm. **219.** b = 24 cm; s = 37 cm; f = 420 cm². **220.** $u_1 = 56$ cm; $f_1 = 84$ cm²;

$u_2 = 60$ cm; $f_2 = 150$ cm². **221.** $^1/_4 b \cdot \sqrt{16 m^2 - 9 b^2}$; 224 cm². **222.** $^1/_3 h \sqrt{4 m^2 - h^2}$; 560 cm². **223.** $u = b + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - h_s^2}}$, $f = \frac{b^2 h_s}{\sqrt{b^2 - h_s^2}}$; 468 cm, 10140 cm². **224.** $u = \frac{2h(h_s + 2h)}{\sqrt{4h^2 - h_s^2}}$, $f = \frac{h^2 h_s}{\sqrt{4h^2 - h_s^2}}$; 80 cm, 300 cm. **225.** a) $s = 20$ cm; $u = 80$ cm; $f = 384$ cm²; $h = 19{\cdot}2$ cm; b) $f = 840$ cm²; $s = 37$ cm; $u = 148$ cm; $h = 22{\cdot}7$ cm; c) $d = 40$ cm; $s = 29$ cm; $u = 116$ cm; $h = 28{\cdot}97$ cm; d) $d = 70$ cm; $s = 91$ cm; $u = 364$ cm; $h = 64{\cdot}62$ cm; e) $d = 7{\cdot}2$ cm; $f = 55{\cdot}44$ cm²; $u = 34$ cm; $h = 6{\cdot}52$ cm; f) $d = 40$ mm; $f = 3960$ mm²; $u = 404$ mm; $h = 39{\cdot}2$ mm; g) $s = 169$ mm; $u = 676$ mm; $f = 2$ dm² 2 cm² 80 mm²; $d = 130$ mm; h) $f = 21$ m²; $s = 6{\cdot}25$ m; $u = 25$ m; $D = 12$ m. **226.** $d = 30$ cm; $D = 40$ cm. **227.** $d = 7{\cdot}38$ cm; $D = 32{\cdot}8$ cm. **228.** a) $h = 24$ cm; $f = 600$ cm²; $u = 100$ cm; b) $h = 35$ m; $f = 1715$ m²; $u = 172$ m; c) $a = 144$ dm; $u = 342$ dm; $f = 54$ m²; d) $b = 40$ cm; $c = 85$ cm; $u = 276$ cm. **229.** $f = 9408$ cm²; $d = 140$ cm. **230.** $f = 50{\cdot}4$ dm²; $u = 31$ dm. **231.** $u = 170$ cm; $f = 1200$ cm². **232.** $u = 304$ cm; $f = 47$ dm² 88 cm². **233.** 72 dm. **234.** $f_1 = 3432$ cm²; $u_1 = 338$ cm; $f_2 = 10296$ cm²; $u_2 = 434$ cm. **235.** $f_1 = 3780$ cm²; $u_1 = 294$ cm; $f_2 = 11340$ cm²; $u_2 = 438$ cm. **236.** $f = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$; $f = 9$ dm² (genauer 9 dm² 39 mm²). **237.** a) $f = \frac{s^2}{2}\sqrt{3} = 15{\cdot}28$ cm²; b) $f = \frac{s^2}{2}\sqrt{2} = 12{\cdot}47$ cm²; c) $f = \frac{s^2}{2} = 8{\cdot}82$ cm². **238.** a) $f = \frac{ss'}{2}\sqrt{3} = 439{\cdot}59$ cm²; b) $f = \frac{ss'}{2}\sqrt{2} = 358{\cdot}93$ cm²; c) $f = \frac{ss'}{2} = 253{\cdot}8$ cm². **239.** $f_1 = 7980$ cm²; $u_1 = 456$ cm; $f_2 = 20244$ cm²; $u_2 = 602$ cm. **240.** $f_1 = 84$ cm²; $u_1 = 56$ cm; $f_2 = 36$ cm²; $u_2 = 54$ cm; $f_3 = 456$ cm²; $u_3 = 88$ cm. **241.** $f_1 = 270$ cm²; $u_1 = 90$ cm; $f_2 = 216$ cm²; $u_2 = 96$ cm; $f_3 = 810$ cm²; $u_3 = 126$ cm. **242.** $u_1 = 180$ cm; $u_2 = 160$ cm; $u_3 = 186$ cm; $f_1 = 1350$ cm²; $f_2 = 960$ cm²; $f_3 = 1290$ cm². **243.** $u = 156$ cm; $f = 1521$ cm². **244.** $\frac{s}{\sqrt{5}} = \frac{s}{5}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ cm $= 4{\cdot}47$ cm. **245.** $4\sqrt{3} : 9$. **246.** Umfang des Quadrates : Umfang des gleichseitigen Dreieckes $= 2\sqrt{\sqrt{3}} : 3$. **247.** 34 cm. **248.** 21 cm. **249.** AX = 15 cm, EX $= \sqrt{601}$ cm $= 24{\cdot}515$ cm. **250.** $f_1 = 21168$ cm²; $f_2 = 10584$ cm²; $u_1 = 596$ cm; $u_2 = 420$ cm. **251.** $f_1 = 1728$ cm²; $f_2 = 864$ cm²;

$u_1 = 174$ cm; $u_2 = 120$ cm; $D = 60$ cm. **252.** Das Rechteck ist um 360 cm² größer. **253.** 27 dm. **254.** Der Umfang des Dreieckes ist um 32 cm größer. **255.** Beide Umfänge betragen 98 cm. **256.** Der Umfang des Rechteckes ist um 10 cm größer. **257.** $f_1 = 86{\cdot}64$ cm²; $f_2 = 14{\cdot}44$ cm²; $u_1 = 38$ cm; $u_2 = 15{\cdot}2$ cm. **258.** Das Rechteck ist um 24 cm² größer. **259.** $h = 12$ cm; $f = 84$ cm². **260.** $h = 15$ cm; $f = 330$ cm². **262.** 294 cm². **263.** 780 cm². **264.** 540 cm². **265.** 29·4 cm. **266.** 43 a 44 m². **267.** 35 a 28 m². **268.** 660 cm². **269.** 840 m². **270.** $F = 648$ cm²; $f_1 = 348$ cm²; $f_2 = 300$ cm²; $u_1 = 84$ cm; $u_2 = 80$ cm. **271.** 96 dm². **272.** 21·6 dm². **273.** 2016 cm². **274.** $f = 6$ dm²; $s' = 2{\cdot}5$ dm, d. h. das Parallelogramm ist ein Rhombus. **275.** a) 768 cm²; b) 624 cm²; c) 26 dm²; d) 2214 cm²; e) 91·8 dm²; f) 2916 cm²; g) 1 m² 97 dm² 64 cm². **276.** 8010 cm², 156 cm. **277.** 720·9 dm²; 46·8 dm. **278.** $F = 960$ cm²; $u = 104$ cm, $f = 480$ cm². **279.** $F = 15360$ mm²; $u = 416$ mm, $f = 7680$ mm². **280.** Wie 70 : 81. **281.** 924 cm². **282.** 21 dm².

VIII. Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren.

337. 19·5 cm, 22·5 cm; 351 cm², 405 cm². **338.** 42 cm, 28 cm. **339.** 56 cm, 70 cm; 63 cm, 105 cm; 90 cm, 120 cm. **344.** 70 cm, 75 cm; 336 cm², 2100 cm²; 4 : 25. **345.** 703·06 m². **346.** 908·28 m². **347.** 95 m. **348.** 150·2 cm, 967·68 cm². **349.** Die Seiten des Dreieckes sind: 35 cm, 32·5 cm und 37·5 cm; der Flächeninhalt beträgt 525 cm². **351.** Das Viereck ist ein Rhomboid; sein Inhalt verhält sich zu jenem des ursprünglichen wie 1 : 9. **354.** 20 cm oder 15 cm. **355.** $\frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{h\sqrt{2}}{2}$.

356. $\frac{g}{\sqrt{2}} = \frac{g\sqrt{2}}{2}$. **359.** 8 cm; 12 cm. **360.** Ein Quadrat; 96 cm, 576 cm². **361.** Ein Rechteck; 336 cm, 6912 cm². **362.** $u_1 = 468$ cm, $u_2 = 280$ cm; $f_1 = 10140$ cm², $f_2 = 4800$ cm². **363.** 13 cm; 5·2 cm; 7·8 cm. **364.** $u_1 = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$, $u_2 = \frac{4ab}{a+b}$; $f_1 = \frac{ab}{2}$, $f_2 = \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$; $u_1 = 287$ cm, $u_2 = 168$ cm; $f_1 = 3530{\cdot}1$ cm², $f_2 = 1764$ cm². **365.** 28 cm, 21 cm. **366.** 3 cm, 4 cm, 5 cm. **367.** $x = \frac{gh}{g+h} = 7{\cdot}2$ cm. **368.** $x = 60$ cm. **369.** $x = 2{\cdot}4$ cm. **370.** $x = 84$ cm. **371.** $x = 30$ cm. **372.** $\frac{3g}{4}$ oder $\frac{g}{4}$. **373.** Entweder $\frac{D}{3}$ und

$\frac{2d}{3}$ oder $\frac{2D}{3}$ und $\frac{d}{3}$. **375.** 15 cm, 20 cm, 25 cm. **379.** $a = 35$ cm, $b = 120$ cm, $c = 125$ cm, $f = 21$ dm². **380.** $b = 156$ cm, $c = 169$ cm, $f = 5070$ cm². **381.** $a = 45$ cm, $b = 60$ cm. **382.** $a = 136$ mm, $b = 255$ mm; $f = 173{\cdot}4$ cm². **383.** $u = 36{\cdot}9$ cm; $f = 3025{\cdot}8$ cm². **384.** $p = \frac{1}{2}(c \pm \sqrt{c^2 - 4h^2})$, $q = \frac{1}{2}(c \mp \sqrt{c^2 - 4h^2})$; 9 6 cm, 5·4 cm. **385.** 203 cm, 1766·1 cm². **388.** $f_1 = 1890$ cm²; $f_2 = f_3 = 1701$ cm²; $f_4 = f_5 = 525$ cm². **389.** $x = 120$ mm; $f_1 : f_2 = 289 : 120$. **390.** $l_1 = 132$ mm, $b_1 = 66$ mm; $l_2 = 120$ mm, $b_2 = 60$ mm. **391.** I = 42 dm², II = III = 21 dm², IV = V = 8·4 dm², VI = VII = 52·5 dm².

IX. Der Kreis.

395. $S = 2r = 146$ cm; $s = 2\sqrt{r^2 - a^2} = 2\sqrt{(r + a)(r - a)} = 110$ cm. **403.** $a = 125$ cm. **404.** $t = 91$ cm. **405.** $t = 16{\cdot}4$ dm, $s = 7{\cdot}2$ dm. **406.** 25·5 cm, 24 cm; 270 cm². **407.** $r\sqrt{5}$. **408.** 12 cm. **409.** 8 cm. **410.** $x = \sqrt{(2r + h) \cdot h}$; a) 335·5 km; b) 247·5 km; c) 222·9 km; d) 162·6 km. **411.** $r = \frac{1}{2h}\sqrt{4a^2h^2 - (a^2 - b^2 - h^2)^2}$; 13 cm (29 cm). **427.** 40 cm, 18 cm. **430.** $\frac{Rc}{R - r} = 330$ cm; $\frac{Rc}{R + r} = 30$ cm*). **435.** 65 cm. **436.** 388 cm. **437.** 384 cm; 112 dm, 768 dm². **438.** Um 4 cm; wie ist die negative Wurzel (— 9) zu deuten? **439.** 18 cm, 8 cm. **440.** 65 cm. **441.** 56 cm, 48 cm.

X. Der Kreis und das Vieleck.

465. $r = 18$ cm, $R = 65$ cm. **466.** $r = 252$ mm, $R = 625$ mm. **467.** 6 cm; 40 cm, 24 cm, 10 cm; 17 cm. **468.** 9 cm; 18 cm, 99 cm, 22 cm; 32·5 cm. **470.** 28 cm; 54 cm, 108 cm, 126 cm; 65 cm. **471.** 20 cm; 36 cm, 270 cm, 54 cm; 85 cm. **472.** 32 cm; 5376 cm²; 104 cm, 112 cm, 120 cm; 65 cm. **473.** 20 cm; 3360 cm²; 48 cm, 140 cm, 148 cm; 74 cm. **474.** 432 cm; 195 cm; 18144 cm²; 96 cm, 378 cm, 390 cm.

*) Die in der Fußnote zu Nr. **430** angeführte Berechnung ergibt: Länge des Erdschattens etwa 216·6 . r. Länge des Mondschattens etwa 58·6 . r. Da letzterer Wert ein Mittelwert ist, so erreicht die Spitze des Mondschattens die Erde zumeist nicht mehr (mittlere Entfernung der Erde vom Monde = 60 . r). Nur wenn die Sonne in ihrer Erdferne und der Mond in der Erdnähe ist, wird die Länge des Mondkernschattens größer als der Abstand der Erde vom Monde sein.

475. $r = \frac{s}{6}\sqrt{3}$, $R = \frac{s}{3}\sqrt{3}$, $r_a = r_b = r_c = \frac{s}{2}\sqrt{3}$. **477.** $\gamma - \beta$. **480.** 16 cm, 14 cm, 12 cm (24 cm, 96 cm, 15 cm). Die Abschnitte auf der Seite a sind (s — b) und (s — c), jene auf b sind (s — a) und (s — c), jene auf c sind (s — a) und (s — b). (Gedächtnisregel dafür?). **481.** 1 : 4. **482.** 34 cm, 30 cm, 16 cm; 6 cm, 17 cm. **483.** 9 cm, 18·75 cm. **484.** Die Grundlinie ist entweder $8\sqrt{21}$ cm oder 48 cm, der Schenkel entsprechend $10\sqrt{21}$ cm oder 40 cm. **486.** 87°, 69°, 93°, 111°. **489.** $r = \frac{a}{2} = 1{\cdot}35$ dm, $R = \frac{a}{2}\sqrt{2} = 1{\cdot}909$ dm. **490.** 18·5 cm. **491.** a) $r = 12$ cm; b) $r = 30$ cm. **492.** a) 31·2 cm; b) 16·9 cm, 12 cm; c) 72 cm²; d) 16·9 : 6. **493.** 2688 dm²; 50 dm; 1344 dm²; 13·44 dm. **494.** 672 cm²; 12 cm. **495.** $R = 22{\cdot}1$ cm. **496.** 147 cm²; 17·5 cm, 16·8; 6 cm, 8·75 cm. **498.** 24 cm, 7 cm, 20 cm, 15 cm. (60 cm, 25 cm, 52 cm, 39 cm.) **502.** $a(2 - \sqrt{2})$. **505.** Wegen DX ∥ CB ist AX : XB = AD : DC (1); ferner ist $AB^2 = AD \cdot AC$, oder AD : AB = AB : AC oder, da AB = DC ist, auch AD : DC = AB : AC (2); in Berücksichtigung von (1) und (2) ist also AX : XB = AB : AC; da aber aus der Figur ersichtlich ist, daß AB : AC = XB : DC = XB : AB, so folgt AX : XB = XB : AB. — Eine zweite Konstruktion ergibt sich durch dieselbe Anordnung der Figur; nur beschreibt man, statt BC und DX zu ziehen, aus A mit AD als Halbmesser einen Bogen, der die Strecke AB im Punkte Y schneiden möge. Dieser Punkt ist der gesuchte Teilungspunkt. Die Begründung ergibt sich aus $AD \cdot AC = AB^2$, daher auch AB : AC = AD : AB, AB : (AC — AB) = AD : (AB — AD); es ist aber AC — AB = AD = AY und AB — AD = BY; daher AB : AY = AY : BY. **521.** $s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$; $s_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$ usw. **522.** 2 : 3. **523.** $r^2\sqrt{3}$; $4r^2(2 - \sqrt{2})$; $4r^2(\sqrt{2} - 1)$.

XI. Kreismessung.

529. 3 m 1·6 cm; 331½ mal. **530.** a) 2 m 714·3 mm; b) 990·7 m. **531.** 104158 mal. **532.** 1·061 m. **533.** 859·44 geogr. Meilen. **534.** 6366 km. **535.** 4526 km. **536.** 5357 km. **537.** 10364 km. **538.** 6 Monate (genauer 178·6 Tage). **539.** 57° 17′ 45″. **540.** 2·01852 m. **541.** a) 34641 km; b) 28284 km; c) 20000 km. **543.** 1·3314 m². **544.** 0·0919 m². **545.** 78·9172 m². **546.** f = 452·39 m², u = 75·398 m; über 13 mal. **547.** 19939 kg. **548.** a) 352 cm, b) 1024 cm, c) 1589·64 cm. **549.** 564·19 mm;

3544·9 mm. **550.** 1·748 m. **551.** Die Länge der konstruierten Strecke ist $\left(3+\frac{1}{10}\sqrt{2}\right) . 2r = 3{\cdot}1414 \ldots\ldots (2r)$. **552.** Es ergibt sich die gefundene Strecke $= \sqrt{\frac{40}{3}-2\sqrt{3}} . 2r = 3{\cdot}1415 \ldots (2r)$. **553.** AG = $= (0{\cdot}26\sqrt{146})\ 2r = 3{\cdot}141592 \ldots (2r)$. **554.** 3·125; 3·16. **555.** Aus der Konstruktion folgt $s = r(\sqrt{0{\cdot}3}+\sqrt{1{\cdot}5}) = r . 1{\cdot}7724 \ldots$ und anderseits ist $s = r\sqrt{\pi} = r . 1{\cdot}7724 \ldots$ **556.** $1:\sqrt{2}$; 1 : 2. **557.** 15 cm. **558.** 7 cm, 5 cm (8 cm, 6 cm). **559.** 256·85 cm². **561.** 0·0172 m. **562.** 39 cm; 245 cm; 4778·3 cm². **563.** 53 cm; 333 cm; 8824·6 cm². **564.** 4 : 1. **565.** $6:\pi\sqrt{3} = 2\sqrt{3}:\pi$. **566.** $9:\pi\sqrt{3}:2\sqrt{6}$; $3\sqrt{3}:\pi:2$. **567.** 1225 cm²; 625 cm². **568.** 26405 cm²; 684·86 cm. **569.** 6011·2 cm². **571.** 2·1 cm, 1·4 cm. **572.** 5·6 cm, 4·9 cm. **573.** 4·2 dm, 3·5 dm. **574.** 49 mm, 42 mm. **575.** 801·3 cm². **576.** Die quadratische Grasfläche ist um 3·44 m² größer. **577.** $\frac{s^2\pi}{4}$. **578.** 2 : 9. **579.** Der gesuchte Flächenraum ist $\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$, also ebenso groß wie das Sechseck. **580.** a) 21·21 cm, b) 10 cm. **581.** 15 : 16. **582.** 40 cm und 70 cm. **583.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2} . r$. **584.** 24 cm, 40 cm. **585.** $\frac{r^2\pi\alpha}{360}$; 5 cm² 50 mm². **586.** 114° 35′ 30″ (genauer 29·6″). **588.** $r^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$; 41·097 cm². **589.** a) $r^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$; b) $r^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$; c) $r^2\left(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\right)$; d) $r^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$. **590.** $F_1 = r^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$, $F_2 = r^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$; $F_1 =$ $= 19{\cdot}755\ m^2$, $F_2 = 197{\cdot}71\ m^2$. **591.** $r^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$; 25·6507 dm². **593.** 1256·64 cm². **594.** $\frac{6-\sqrt{2}}{2} . r\pi$; $[(3-\sqrt{2})\pi - 1].r^2$. **596.** $r_1 r_2 \pi$; die Fläche ist ein Maximum für $r_1 = r_2$. **597.** $(r_1+r_2)^2\pi$; die Fläche ist ein Maximum für $r_1 = 0$ und $r_2 = \frac{AD}{2}$, ein Minimum für $r_1 = \frac{AD}{4}$, $r_2 = 0$ (Arbelos). **598.** Die Fläche des Pelekoides ist $^1/_4$ der Kreisfläche. — Der Umfang des Pelekoides ist ebenso groß wie der Umfang des ganzen Kreises. **599.** Die Fläche der Sichel ist ebenso groß wie die Dreiecksfläche. **600.** Die Summe beider Sichelflächen ist ebenso groß wie die Dreiecksfläche. **601.** Die Summe der vier Sichelflächen ist gleich dem Inhalte des Quadrates. **602.** Die Summe der vier Sichelflächen ist gleich dem Inhalte des Rechteckes,

beträgt demnach 1080 cm². **603.** 62380 cm². **604.** $(\sqrt{2}-1)\,r$; $(3-2\sqrt{2})\,r^2\pi$. **605.** $s^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **606.** $f_1=f_3=r^2$; $f_2=r^2\,(\pi-2)$. **607.** $(2\pi-3\sqrt{3})\,r^2$. **608.** $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right).r^2$; $r\pi$. **609.** $(36\sqrt{3}-62).r^2\pi$. **610.** $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=\frac{a}{2}$, $\overline{OD}=\frac{a}{4}$, $\overline{O_1E}=\frac{2\sqrt{3}-3}{4}\,.\,a$. **611.** $\frac{s}{4}(\sqrt{3}-1)$. **612.** $(8\sqrt{2}-11)\,.\,r^2\pi$. **613.** $\frac{r^2\pi}{3}$. **614.** $\frac{5r^2\pi}{18}$; 125·66 cm². **615.** $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)s^2$. **616.** 9353 cm². **617.** $\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right).\,r^2$. **618.** $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right).2r^2$. **619.** $\left(\frac{\pi}{2}-1\right).\,s^2$. **620.** $\left(2\sqrt{2}-1-\frac{\pi}{2}\right).\,s^2$. **621.** $\left(1-\pi+\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\right)s^2$. **622.** $\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).\,s^2\pi$. **623.** $\left(1-\frac{\pi}{8}\right).\,s^2$. **624.** $\frac{r^2}{4}\,.\left(3\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}\right)$. **625.** $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\right)r^2$. **626.** $(\pi-2)\,r^2$. **627.** $2r^2$. **628.** $\left(5\pi-6\sqrt{3}\right).\,\frac{s^2}{24}$. **629.** $\frac{3r^2}{2}\sqrt{3}$. **630.** $\frac{r^2\pi}{2}$. **631.** $2r^2\pi$. **632.** $(\pi-2)\,.\,r^2$. **633.** $2r^2$.

XII. Kegelschnittslinien.

670. 113·097 dm². **671.** 8325 Stück. **672.** 5654·8 cm². **673.** 3·2963 dm². **674.** 2563·53 cm². **675.** 8 cm. **676.** 615·74 cm². **677.** 4410·8 cm².

XIII. Wiederholungsaufgaben.

723. 15 cm². **724.** 65°, 25°. **725.** $2\,s^2$. **726.** 6 cm. **727.** 5 cm. **728.** 72°, 63°, 45°. **729.** 78°, 54°, 48°. **730.** $g=15{\cdot}5$ cm, $h=23{\cdot}5$ cm, $f=182{\cdot}125$ cm². **731.** 18 cm und 15 cm. **732.** 14 cm; 8 cm. **733.** $4\,\Delta_1$; 4 : 1. **734.** 45° bezw. 135°; $\frac{c}{2}\,(a+b+c)$, wobei $c=\sqrt{a^2+b^2}$; 1 m² 13 dm² 49 cm². **735.** Die beiden Dreiecke sind $^1/_4\,bh$; die Trapeze $^1/_8\,(3a-b)\,.\,h$ und $^1/_8\,(a+b)\,.\,h$. **736.** 7·13 dm. **737.** 12 cm; 72 cm². **738.** 24·5 cm. **739.** Um 45 cm oder um 21 cm; beides ergibt ein Rechteck mit den Seiten 36 cm und 60 cm. **740.** 45 cm, 35 cm. **741.** 28 cm, 35 cm. **742.** $\sqrt[4]{3}:2$; $2\sqrt[4]{3}:3$. **743.** 210 cm; 2700 cm²; 300 cm; 5400 cm². **744.** 29 cm. **745.** 1260 cm². **746.** 16 cm, 5 cm. **747.** 8 cm, 5 cm. **748.** 5 cm. **749.** 6 m. **750.** 40 m. **751.** 23 cm. **752.** Entweder in 2 cm (oder

in $2^2/_9$ cm) von der Länge und in 5 cm (oder in $4^1/_2$ cm) von der Breite. **753.** $\frac{1}{4}(u \pm \sqrt{8d^2 - u^2})$, $\frac{1}{4}(u \mp \sqrt{8d^2 - u^2})$, $\frac{1}{8}(u^2 - 4d^2)$; 35 cm, 12 cm, 420 cm². **754.** $\frac{1}{4}(u \pm \sqrt{u^2 - 16f})$, $\frac{1}{4}(u \mp \sqrt{u^2 - 16f})$, $\frac{1}{2}\sqrt{u^2 - 8f}$; 45 cm, 28 cm, 53 cm². **755.** Grundlinie $= 17\sqrt{2}$ cm, Schenkel $= 25$ cm. **756.** 24 cm. **757.** $2a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $a^2(2\sqrt{3} - 3)$. **758.** 21 dm². 336 mm. **759.** 13 dm, 16·9 dm, 12 dm. **760.** 5880 cm². **761.** 18 cm, 25 cm. **762.** 1 m. **763.** 212 cm. **764.** 9·6 cm. **765.** Um 24 cm. **766.** 72 cm, 30 cm. **767.** 12·75 dm, 6·12 dm, 9 dm. **769.** 840 cm², 140 cm, **770.** 30 cm, 28 cm, 26 cm. **771.** 39 cm, 42 cm, 45 cm. **772.** 16 cm, 30 cm, 34 cm. **773.** 20 cm, 21 cm, 29 cm (12 cm, 35 cm, 37 cm). **774.** 42 cm, 60 cm. **775.** $\frac{h_c}{6}(\sqrt{4m_a^2 - h_c^2} + \sqrt{4m_b^2 - h_c^2})$; 1008 cm². **776.** $w_a = \sqrt{bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]}$, analog w_b und w_c; $\frac{6}{7}\sqrt{15}$, $\sqrt{6}$, $\frac{3}{5}\sqrt{6}$. **777.** 1848 cm². **778.** 2520 cm², 40 cm. **779.** 486 cm². **780.** 35 dm². **781.** 24·3 cm². **782.** 8 dm. **784.** 50 cm. **786.** 175 cm, 600 cm, 625 cm; 525 dm². **787.** 8 cm, 15 cm, 17 cm. **788.** 4 m. **789.** 45 mm, 28 mm. **790.** Der Umfang wird um 1 dm größer. **791.** Der Umfang wird um 36 cm größer. **792.** 17 cm, 15 cm, 8 cm. **793.** 15 cm, 20 cm, 25 cm; 150 cm²; 5 cm. **794.** 16 cm, 30 cm, 34 cm. **795.** 15 cm, 36 cm, 39 cm; 270 cm²; 6 cm. **796.** $\frac{3d}{2}$, 2 d, $\frac{5d}{2}$; 15 cm, 20 cm, 25 cm. **797.** 8 cm, 15 cm. **798.** 25 cm, 25 cm, 30 cm. **799.** 60 cm². **800.** $\frac{1}{4u}(4f + u^2 \pm \sqrt{16f^2 - 24u^2f + u^4})$, $\frac{1}{4u}(4f + u^2 \mp \sqrt{16f^2 - 24u^2f + u^4})$, $\frac{u^2 - 4f}{2u}$; 20 cm, 15 cm, 25 cm. **801.** $a = 2\sqrt{\frac{1}{3}(4m_c^2 - m_a^2)}$, $b = 2\sqrt{\frac{1}{3}(m_a^2 - m_c^2)}$, $c = 2m_c$; 10 cm, 24 cm, 26 cm. **802.** $a = 2\sqrt{\frac{1}{15}(4m_b^2 - m_a^2)}$, $b = 2\sqrt{\frac{1}{15}(4m_a^2 - m_b^2)}$, $c = 2\sqrt{\frac{1}{5}(m_a^2 + m_b^2)}$; 6 cm, 8 cm, 10 cm. **803.** 39 dm. **804.** $a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2 + 2ch} \pm \sqrt{c^2 - 2ch}\right)$, $b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2 + 2ch} \mp \sqrt{c^2 - 2ch}\right)$; 24 cm, 7 cm. **805.** $a = \frac{1}{2}(s \pm \sqrt{s^2 - 8f})$,

$b = \frac{1}{2}(s \mp \sqrt{s^2 - 8f})$, $c = \sqrt{s^2 - 4f}$; 24 cm, 7 cm, 25 cm. **806.** $a = \frac{1}{2}(d + \sqrt{2c^2 - d^2})$, $b = \frac{1}{2}(-d + \sqrt{2c^2 - d^2}$, $f = \frac{1}{4}(c^2 - d^2)$; 21 cm, 20 cm, 210 cm² (56 cm, 33 cm, 924 cm²). **807.** 12 Sekunden nach Abgang des zweiten Körpers. **808.** Da den Angaben zwei gleichschenklige Dreiecke entsprechen, gibt es zwei Quadrate, deren Inhalte sind: $f_1 = 3600$ cm², $f_2 = 2071{\cdot}8$ cm². **809.** 794·82 cm². **810.** 32 cm, 65 cm, 84 cm, 96 cm, 112 cm. **811.** 16 cm, 30 cm, 34 cm; 240 cm². **812.** 24 cm, 32 cm, 40 cm; 384 cm². **813.** $a = r + R + \sqrt{R^2 - 2Rr - r^2}$, $b = r + R - \sqrt{R^2 - 2Rr - r^2}$, $c = 2R$; 16 cm, 12 cm, 20 cm. **814.** $a = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2} + r \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - 3ru + r^2}\right)$, $b = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2} + r \mp \sqrt{\frac{u^2}{4} - 3ru + r^2}\right)$, $c = \frac{u}{2} - r$, $f = \frac{ru}{2}$; 24 cm, 18 cm, 30 cm, 216 cm². **816.** 42·22 cm, 141·87 cm². **817.** 36 : 9 : 4. **818.** 595·5 cm². **819.** 1673·96 cm². **820.** 9 cm, 25 cm, 17 cm, 17 cm. **821.** 84·95 cm². **822.** 42 dm², 120 cm, 30 cm. **823.** $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \cdot s^2$. **824.** Beide verhalten sich wie 1 : 2 : 3. **825.** Das Dreizehneck (Siebzehneck). **826.** Zehneck und Siebeneck (Zwölfeck und Achteck). **827.** Fünfzehneck und Zwölfeck (Zwanzigeck und Vierzehneck). **828.** Fünfzehneck und Zehneck (Zwanzigeck und Elfeck). **829.** Zwanzigeck (Dreißigeck). **830.** 12 (15). **831.** Das Elfeck. **832.** Im Sechseck. **833.** 7 Punkte. **834.** 7 Seiten (10 Seiten). **835.** Neuneck und Siebeneck. **836.** Ein Zehneck und ein Sechseck. **837.** Im Zwölfeck. **838.** Zehneck und Achteck. **839.** 10 Seiten. **840.** 96·13 m. **841.** 6 m 283 mm. **842.** 1017·87 cm². **843.** 5·278 m, 2·2167 m². **844.** 5·4 cm. **845.** $^{27}/_{16}\, a^2\sqrt{3}$. **846.** 327 m in der Sekunde. **847.** 96 m; 4 m. **848.** 113·097 cm; 1017·87 cm²; 40 cm. **849.** 14 m, 525 dm²; 471·23 cm; 17671·4 cm². **851.** 56 mm. **852.** $R = \frac{1}{2}\left(\frac{s^2 + 4d^2}{4d}\right)$; $r = \frac{1}{2}\left(\frac{s^2 - 4d^2}{4d}\right)$. **853.** $^1/_4 \cdot (2 - \sqrt{2}) \cdot r^2\pi$. **854.** 56 cm, 42 cm, 49 cm. **855.** s — a, s — b, s — c. **856.** 70 cm, 42 cm; 3 : 10; 3 : 5; 28 cm. **857.** $\sqrt{2}\ (\sqrt{3} - 1) \cdot s$*); $(2\sqrt{3} - 3) \cdot s^2$. **858.** $8\ (\sqrt{2} - 1) \cdot s$; $2\ (\sqrt{2} - 1) \cdot s^2$. **859.** $^1/_2\, s\sqrt{3}$.

*) Man führe die Höhe des gleichseitigen Dreieckes als Unbekannte ein.

660. $r\sqrt{2}$. 861. $r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{8c} - \frac{c}{2}\right)^2}$; 25 cm. 862. $\frac{2}{5}(2d + \sqrt{5r^2 - d^2})$, $\frac{1}{5}(-d + 2\sqrt{5r^2 - d^2})$; 48 cm, 7 cm. 863. 40 cm, 30 cm. 864. 28 cm. 865. Ergibt zwei Lösungen, u. zw. $r_1 = 8$ cm, $r_2 = 6$ cm. 866. Der äußere Abschnitt $\frac{1}{4}(-d + \sqrt{d^2 + 8t^2})$, der innere $\frac{1}{4}(3d + \sqrt{d^2 + 8t^2})$; 8 cm, 10 cm. 867. $r = \frac{1}{4}(u \pm \sqrt{u^2 - 16f})$, $b = \frac{1}{2}(u \mp \sqrt{u^2 - 16f})$; $r = 6$ cm oder 3 cm, $b = 6$ cm oder 12 cm, 57° 17′ 45″ oder 229° 11′ 0″. 868. $^3/_2 d\pi$; $^1/_8 d^2 . (5\pi - 2)$. 869. $^1/_4\pi(D^2 + d^2) - dD$; die nicht schraffierte Fläche ist Dd. 870. $4(17\sqrt{2} - 24) . r^2\pi$. 871. 4 : 2 : 1; $^1/_4$ von der Fläche des Halbkreises. 872. $\sqrt{a^2 + r^2 - r\sqrt{4a^2 + r^2}}$; 12·5 cm.

Zweiter Teil.

Stereometrie.

XIV. Das Prisma.

888. 77·76 cm²; 46·656 cm³; 363·9168 g. 889. 4·7 dm. 890. 4 dm³ 913 cm³. 891. $s\sqrt[3]{2}$. 892. 33·75 dm². 893. 10·29 cm; 5·04 cm; 4·83 cm; 4·46 cm; 4·57 cm; 3·72 cm; 3·60 cm. 894. 2·223 dm. 895. 4 m 206·7 mm; 1451·613 t Gold; 182 Waggons, von denen jedoch der letzte nur 3·613 t Gold enthält. 896. $s = \frac{D\sqrt{3}}{3}$; $O = 2D^2$; $V = \frac{D^3\sqrt{3}}{9}$; 0·8776 m; 4·621 m²; 0·6759 m³. 897. 12 cm, 864 cm², 1728 cm³. 898. 6 cm, 8 cm, 10 cm. 899. 10 cm. 900. 2 Längeneinheiten 901. 6 cm, 4 cm. 902. 25 cm, 19 cm. 903. 10479·7 cm²; 72333·8 cm³. 904. 2 dm² 45 cm² 22·72 mm²; 256 cm³ 67·28 mm³. 905. 19·46 t. 906. $O_1 = 3080$ cm², $O_2 = 2976$ cm²; $V_1 = 9408$ cm³, $V_2 = 8064$ cm³. 907. 4662 cm². 908. 20 dm². 909. $s = 18$ cm, $h = 25$ cm. 910. 864 cm³. 911. 327·68 dm²; 393·216 dm³. 912. 696·192 kg. 913. 640 Wagenladungen. 914. 2 cm; 113 dm³ 58 cm³. 915. 120 cm³; 286 cm². 916. 30 s²; 7 s³; 4612·8 cm²; 13346·368 cm³. 917. 5472 cm², 27216 cm³; 53 cm. 918 140·4 cm²; 108·864 cm³; 8·7 cm. 919. 4·875 mg; etwa

$2^1/_4$ g. **920.** 376 cm²; 480 cm³. **921.** 48 dm²; 18 dm³; 6·5 dm. **922.** 3072 cm²; 9216 cm³, 52 cm. **923.** 1 m 15 cm. **924.** 12180 cm³; 841 cm². **925.** 1160 cm²; 2400 cm³. **926.** 191 dm²; 75 dm³. **927.** 8 Stufen; 6 m³ 480 dm³; 8 m² 40 dm². **928.** 1620 cm³; 846 cm². **929.** 17280 cm³; 4224 cm². **930.** 64896 cm²; 645120 cm³. **931.** Grundkanten 10 und 22 Längeneinheiten; Höhe 30 Längeneinheiten; Oberfläche 2360 Flächeneinheiten. **932.** 73440 cm³; 11544 cm²; 85 cm. **933.** 789·75 kg; 838·44 dm². **934.** 1926 cm². **935.** 1149·984 dm³; 667·92 dm². **936.** 12 cm, 9 cm, 8 cm; 17 cm; 864 cm³. **937.** $l : b = \sqrt{2} : 1$; $f = \frac{4}{3} r^2 \sqrt{2}$. **938.** 819 cm³; 542 cm². **939.** 210 cm³, 125 cm³; 64 cm². **940.** 8 cm, 6 cm, 24 cm; 768 cm²; 1152 cm³. **941.** 1680 cm²; 4320 cm³. **942.** 9828 cm²; 51840 cm³. **943.** 1039·23 cm³; 806·60 cm². **944.** 152·767 dm³; 398·369 dm². **945.** 1824 cm³; 10 dm². **946.** 241 dm³ 920 cm³; 408 dm² 96 cm². **947.** 1557·6 dm². **948.** 1764 cm³; 1050 cm². **949.** 800 cm²; 1020 cm³. **950.** 90592 cm², 1182·72 dm³. **751.** 2140·60 dm²; 4410 dm³. **952.** 5044 cm²; 24360 cm³. **953.** 112036 cm²; 2531760 cm³. **954.** 20176 cm²; 194880 cm³. **955.** 42120 cm³. **956.** 3664 cm². **957.** 1332 cm²; 3240 cm³. **958.** 3172 cm²; 8400 cm³. **959.** 156336 cm²; 3447360 cm³. **960.** 780 cm²; 864 cm³. **961.** 792 cm²; 1296 cm³. **962.** 87 dm² 84 cm²; 50 dm³ 544 cm³. **963.** 6 dm³. **964.** 3808 cm². **965.** 270·8 dm²; 255 dm³. **966.** 172·8 dm³; 218·4 dm². **967.** 250·92 dm³; 267·96 dm². **968.** 1848 m³. **969.** In 6 Tagen, wobei am sechsten Tage nur 5 Stunden lang gearbeitet wird. **970.** 5670 m³. **971.** 25040 cm²; 184·8 dm³. **972.** 16006 cm²; 126405 cm³. **973.** 2816 cm²; 8960 cm³. **974.** 2080 cm². **975.** 2328 cm². **976.** 44928 cm³. **977.** 15360 cm³; 5056 cm². **978.** 92·4 dm³; 206·4 dm². **979.** 26460 cm³; 7140 cm². **980.** 7 dm³ 274 cm³ 614 mm³; 21 dm² 99 cm² 62 mm². **981.** 37·88 cm³; 65·44 cm². **982.** 4883 mm²; 7794 mm³. **983.** 15221·47 cm³, 3527·15 cm². **984.** 20 dm³ 250 cm³. **985.** 41135·04 cm³; 6660·29 cm². **986.** 23 : 18. **987.** 1350 cm²; 1530 cm³, 3375 cm³. **988.** 12 cm. **989.** Um 8208 cm². **990.** 3048192 cm³; 308448 cm². **991.** 20580 cm³, 2940 cm³; 5642 cm², 1526 cm². **992.** 48 dm³, 29·4 dm³; 80 dm², 58·52 dm². **993.** 14264 cm²; 87360 cm³, 97440 cm³.

XV. Der Zylinder.

1005. $6r^2\pi$. **1006.** $2r^3\pi$. **1007.** 3864·1 cm²; 18378·2 cm³. **1008.** 104953 cm²; 2171·46 dm³. **1009.** 46·181 hl. **1010.** 3430·6 cm²; 15393·7 cm³. **1011.** 135·716 dm³. **1012.** 653·88 cm². **1013.** r =

$= 2{\cdot}51$ dm; $h = 5{\cdot}03$ dm. **1014.** 499460 Stück Ziegel; $652{\cdot}43$ m², $1012{\cdot}43$ m². **1015.** $2035{\cdot}74$ cm². **1016.** b : l; 2 : 3. **1017.** $201{\cdot}061$ dm³. **1018.** Der Halbmesser muß 3 Längeneinheiten betragen. **1019.** $86{\cdot}858$ dm³. **1020.** $241{\cdot}28$ cm³. **1021.** $169{\cdot}646$ dm². **1022.** $29{\cdot}405$ kg. **1023.** 37 S 60 g. **1024.** $\frac{M}{4} \cdot \sqrt{\frac{Mn}{m\pi}}$; $0{\cdot}5236$ Vol.-Einheiten. **1025.** $V_1 = 22619{\cdot}4$ cm³, $O_1 = 4429{\cdot}6$ cm²; $V_2 = 32571$ cm³, $O_2 = 5654{\cdot}8$ cm²; $V_3 = 109477$ cm³, $O_3 = 13477{\cdot}4$ cm². **1026.** Um r. **1027.** $M_1 = M_2 = 2463$ cm²; $O_1 = 3694{\cdot}5$ cm²; $O_2 = 7389$ cm²; $V_1 = 17241$ cm³; $V_2 = 34482$ cm³; $M_1 = M_2$; $O_1 : O_2 = 1 : 2$; $V_1 : V_2 = 1 : 2$; $M_1 = M_2$; $O_1 : O_2 = V_1 : V_2 = a : b$. **1028.** Um $2r$; $V_1 : V_2 = 1 : 27$. **1029.** $r = 6$ Längeneinheiten; $h = 3$ Längeneinheiten; $O = 339{\cdot}29$ Flächeneinheiten; $V = 339{\cdot}29$ Volumeinheiten. **1030.** $703{\cdot}71$ dm²; $1385{\cdot}44$ dm³. **1031.** $471{\cdot}23$ cm³. **1032.** $O_1 = 534{\cdot}06$ cm²; $O_2 = 8545{\cdot}1$ cm²; $V_1 : V_2 = 1 : 64$. **1033.** $\frac{r\,(2h - r)}{h} = 252$ mm. **1034.** $M_1 : M_2 = (r - h) : h = 2 : 5$. **1035.** $O_1 : O_2 = h : (r - h) = M_2 : M_1 = 5 : 2$. **1036.** 2 cm; $339{\cdot}29$ cm², $314{\cdot}159$ cm³. **1037.** $O_1 = 691{\cdot}15$ cm²; $O_2 = 289{\cdot}03$ cm²; $V_1 = 1156{\cdot}1$ cm³; $V_2 = 351{\cdot}86$ cm³. **1038.** $O_1 = 571{\cdot}13$ dm²; $O_2 = 412{\cdot}8$ dm²; $V_1 = 1029{\cdot}18$ dm³; $V_2 = 554{\cdot}17$ dm³. **1039.** $O = 6408{\cdot}8$ cm²; $V = 30762{\cdot}3$ cm³. **1040.** $r = 7$ cm, $h = 21$ cm. **1041.** Prisma: 2376 cm², 7776 cm³; eingeschriebener Zylinder: $1866{\cdot}1$ cm², $6107{\cdot}1$ cm³; umgeschriebener Zylinder: $2937{\cdot}2$ cm², $12214{\cdot}2$ cm³. **1042.** $442{\cdot}368$ kg; $836{\cdot}73$ kg. **1043.** $1555{\cdot}5$ kg; $500{\cdot}12$ dm². **1044.** a) Prisma: 4200 cm², 9450 cm³; eingeschriebener Zylinder: $1570{\cdot}8$ cm², $3534{\cdot}3$ cm³; umgeschriebener Zylinder: $9317{\cdot}2$ cm²; 69046 cm³. b) Prisma: 24552 cm², $178{\cdot}2$ dm³; eingeschriebener Zylinder: 10518 cm², $76{\cdot}340$ dm³; umgeschriebener Zylinder: 57176 cm², $995{\cdot}48$ dm³. **1045.** 4 cm.

XVI. Die Pyramide und der Pyramidenstumpf.

1063. 5096 cm², 18928 cm³. **1064.** $2353157{\cdot}6$ m³; 941,263.067 Stück Ziegel. **1065.** 1440 cm²; $3{\cdot}2$ dm³. **1066.** 2352 cm²; 6720 cm³. **1067.** 10240 dm³. **1068.** 21504 cm³. **1069.** $31{\cdot}68$ dm². **1070.** $g = 28$ cm, $s = 50$ cm. **1072.** $47{\cdot}04$ cm³; $90{\cdot}72$ cm². **1073.** 4 dm; 18 dm². **1074.** 21504 cm³; 5184 cm². **1075.** $g = 12$ Längeneinheiten; $h = 8$ Längeneinheiten. **1076.** 15 cm; 300 cm³, 300 cm². **1077.** 864 cm², 384 cm²; 1296 cm³, 384 cm³. **1078.** 3240 cm², 360 cm²; 10800 cm³, 400 cm³. **1079.** $h = \frac{6a^2}{a^2 - 36}$;

die Aufgabe ist also nur möglich, wenn $a > 6$ ist. **1080.** 40320 cm³; 8088 cm². **1081.** 5076 cm², 19440 cm³. **1082.** 6808 cm². **1083.** 246960 cm³; 27636 cm². **1085.** 3200 cm³. **1086.** 648 cm³; 19·5 cm. **1087.** 5184 cm³, 2005·65 cm². **1089.** 106·94 dm³; 166·33 dm². **1090.** $\frac{1}{6}\, a^3\sqrt{3} = 324$ cm³; $2a^2\sqrt{3} = 374{\cdot}12$ cm². **1091.** $\frac{1}{2}$ a. **1092.** 36 cm³; 85·18 cm². **1093.** 600 cm³. **1094.** $\frac{1}{6}$ ab. $\sqrt{c^2 - a^2} = 28{\cdot}16$ dm³. **1095.** 105·3 dm³. **1096.** 5184 cm³. **1097.** 1344 cm², 2352 cm³. **1098.** 2625 cm², 6300 cm³. **1099.** 1680 cm³. **1100.** 94·08 dm³. **1101.** 1536 cm², 2580·48 cm³. **1102.** 207·2 dm³, 236·8 dm². **1103.** 7840 cm³, 2744 cm². **1104.** 22 dm³ 447 cm³; 82 cm; 52 dm² 43 cm². **1105.** $x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}\,V}$; $x = 3$ cm. **1106.** 0·1875 m³. **1107.** 768 cm³. **1108.** 99 dm³ 792 cm³. **1109.** $\frac{1}{4}\, b^2\ (1 - \frac{1}{3}\, b)$. **1110.** $O_1 = s^2\ (1 + \sqrt{5})$; $O_2 = \frac{1}{2}\, s^2\ (3 + 2\sqrt{5} + \sqrt{2})$; $O_3 = s^2\ (2 + \sqrt{2})$. **1111.** 216 cm², 216 cm³; 864 cm², 1296 cm³. **1112.** 1296 cm². **1113.** $x = \frac{a\,h}{a + h}$; 30 cm. **1114.** $x = \frac{a\,h}{a + h\sqrt{2}}$; 12·67 cm. **1115.** $\frac{1}{2}$ a. **1116.** 13056 cm², 94208 cm³. **1117.** 11776 cm³, 91 kg 852·8 g. **1118.** $a^3\sqrt{3}$. **1119.** 10272 cm²; 26880 cm³. **1120.** 120 cm², 96 cm³, 1·104 kg. **1121.** 201·6 dm³, 201·6 dm². **1122.** $\frac{1}{6}$ a. **1123.** 424 cm²; 384 cm². **1124.** 1524 cm². **1125.** 2940 cm³; 1596 cm². **1126.** 1440 cm². **1127.** 896 cm²; 81 S 68 g. **1128.** 8672 cm²; 10760 cm². **1129.** 2763 cm²; 7560 cm³. **1130.** 360 cm²; 336 cm³; 96 cm²; 48 cm³. **1131.** 1280 cm², 2800 cm³; 360 cm², 400 cm³. **1132.** 3080 cm², 10976 cm³; 896 cm², 1568 cm³. **1133.** 62640 cm², 931392 cm³; 17424 cm², 133056 cm³. **1134.** 1664 cm³; 1024 cm². **1135.** 4160 cm³; 1728 cm². **1136.** 3456 cm²; 13088 cm³. **1137.** 3792 cm³. **1138.** 36 dm². **1139.** 118·4 dm³; 172·8 dm². **1140.** 10800 cm³; 39200 cm³; 3240 cm²; 7560 cm²; 27 : 98; 3 : 7. **1141.** 439·04 dm³; 840·96 dm³; 392 dm²; 658·88 dm². **1142.** 13 dm³. **1143.** 1 : 7 : 19. **1144.** 9072 cm²; 33488 cm²; 70448 cm²; 47040 cm³, 329280 cm³; 893760 cm³. **1145.** $x = \frac{h}{\sqrt[3]{2}} = h\,\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$. **1147.** $x = \frac{h}{\sqrt[3]{3}} = h\,\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$; $y = h\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = h\,\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$. **1148.** $\frac{7}{12}\, s^3$. **1149.** 2600 cm². **1150.** 14 dm³ 950 cm³ 720 mm³; 47 dm² 94 cm² 48 mm²; 116 kg 616 g; 431·85 S. **1151.** 48 cm und 20 cm; 170 cm; 53 dm³ 760 cm³; $\frac{37}{64} = 0{\cdot}578125$. **1152.** 7600 cm³; 10800 cm³; 3240 cm². **1153.** 5040 cm³; 2052 cm².

1154. 7960 cm²; 42560 cm³. **1155.** 467 dm³ 460 cm³; 7 m² 67 dm² 60 cm². **1156.** 150 cm³; 1050 cm³. **1157.** 35·7 dm³. **1158.** 2·1 dm³. **1159.** 136·8 dm³.

XVII. Der Kegel und der Kegelstumpf.

1172. $3r^2\pi$; $\frac{1}{3}r^3\pi\sqrt{3}$. **1175.** 1231·49 cm³, 703·71 cm². **1176.** 1005·31 cm³, 628·318 cm². **1177.** 8796·4 cm³, 3078·75 cm². **1178.** 8042·4 cm³, 2513·27 cm². **1179.** 16·8891 cm³, 40·714 cm². **1180.** 41469 cm³, 7602·6 cm². **1181.** 63·862 cm³, 101·599 cm². **1182.** 132700 cm³, 18246·3 cm². **1183.** 14·8659 cm³, 40·023 cm². **1184.** 343·06 dm³, 31856 cm². **1185.** 127423 cm³, 15682·7 cm². **1186.** 381·32 cm³, 320·44 cm². **1187.** 0·237202 cm³, 2·33608 cm². **1188.** 2544·69 cm². **1189.** 4002·3 cm². **1190.** 13684·7 cm². **1191.** 36945 cm³, 7125·1 cm². **1192.** 8·4 cm. **1193.** 1005·31 dm³, 628·32 dm². **1194.** 301·592 dm², 301·592 dm³. **1195.** $r = 9$ Längeneinheiten, $h = 6\frac{3}{4}$ Längeneinheiten, $s = 11\frac{1}{4}$ Längeneinheiten; 572·54 Volumeinheiten, 572·54 Flächeneinheiten. **1196.** $\frac{O^2h}{3\,(2\,O + h^2\pi)} = 7602{\cdot}6$ cm³. **1197.** 60 cm, 45 cm. **1198.** 10 cm, 26 cm. **1199.** 29 cm, 20 cm, 21 cm. **1200.** 3534·3 cm³. **1201.** $3\sqrt{3}$. **1202.** 1 : 2; $M = 2G$. **1203.** $V = \frac{r^3 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi}{24} =$ $= 75{\cdot}398$ dm³; $O = \frac{3r^2\pi}{4} = 113{\cdot}097$ dm². **1204.** $V = \frac{r^3 \cdot \sqrt{15} \cdot \pi}{192} =$ $6361{\cdot}7$ cm³; $O = \frac{5r^2\pi}{16} = 2120{\cdot}56$ cm². **1205.** 226·194 cm³, 226·194 cm². **1206.** 0·422. **1207.** 15 kg Quecksilber. **1208.** 18·24 cm. **1209.** 1319·47 cm³. **1210.** 188·495 cm³. **1211.** 232·351 cm³. **1212.** $O_1 : O_2 = M_1 : M_2 = \sqrt[3]{18} : 3$. **1213.** $\sqrt{6} : 2$. **1214.** $O_1 : O_2 = 1 : 1$; $V_1 : V_2 = \sqrt{6} : 2$. **1215.** 2880 cm³; 1357·16 cm³, 10895 cm³. **1216.** 322·56 cm³; 193·019 cm³; 796·39 cm³. **1217.** 7125·1 Flächeneinheiten; 36945 Volumeinheiten. **1218.** 251·327 cm³. **1219.** 41·224 cm³; 74·114 cm². **1220.** Wenn $r = h\sqrt{3}$ ist; $V_1 : V_2 =$ $= 3 : 1$; $O_1 : O_2 = 2\,(\sqrt{3} - 1) : 1$. **1221.** 1206·36 cm², 2412·73 cm³; 1156·10 cm², 3015·92 cm³. **1222.** 9588·1 cm², 65269 cm³; 7125·1 cm², 36945 cm³. **1223.** 377·99 cm², 257·358 cm³. **1224.** $\frac{1}{3}a$. **1225.** 3 cm³; $(9\sqrt{3})$ cm². **1226.** 571·76 cm². **1227.** 1174·95 cm². **1228.** 301·592 cm³, 301·592 cm². **1229.** 46·872 dm². **1230.** 678·58 cm², 1017·87 cm³; 244·29 cm², 293·148 cm³. **1231.** 342·11 cm², 418·14 cm³; 169·65 cm²,

169·646 cm³. **1232.** 6038 cm², 29949·1 cm³; 2714·33 cm², 10857·3 cm³. **1233.** 1352·8 cm³; 465·5 cm³, 332·5 cm². **1234.** 5428·6 cm², 26138 cm³. **1235.** 3342·6 cm², 14049·1 cm³. **1236.** 10210·1 cm², 76277 cm³. **1237.** 4750 cm², 19100·8 cm³. **1238.** 8168·1 cm², 4775·2 cm³. **1239.** 21771·1 cm², 220540 cm³. **1240.** 36065 cm², 507·99 dm³. **1241.** 8620·4 cm², 51810 cm³. **1242.** 8620·4 cm³, 2419·02 cm². **1243.** 56296 cm³, 9148·2 cm³. **1244.** 301·592 cm³, 2111·14 cm³, 301·59 cm², 1130·97 cm². **1245.** 1005·31 cm³, 628·32 cm²; 7037·1 cm³; 2287·07 cm²; 19100·8 cm³, 4750 cm²; 27143·3 cm³, 5654·8 cm². **1246.** 8168·1 cm³, 2419·02 cm². **1247.** 21714·6 cm², 213753 cm³. **1248.** 1357·16 cm³, 9500·2 cm³. **1249.** 1306·9 cm³, 804·24 cm². **1250.** 703·71 cm³, 527·78 cm². **1251.** $R = 10$ cm, $r = 5$ cm, $s = 13$ cm; 2199·11 cm³, 1005·31 cm². **1252.** $R = 15$ dm, $r = 6$ dm, $h = 12$ dm; 4410·8 dm³, 1809·55 dm². **1253.** 835·66 cm². **1254.** 36 cm, 20 cm. **1255.** 3179·7 cm³, 1231·49 cm². **1256.** Die angegebene Regel ergibt das Volumen um $[{}^1/_{12} \cdot \pi h\,(R - r)^2]$ Volumeinheiten zu klein. **1257.** 5·655 dm³. **1258.** ${}^7/_8$; ${}^1/_8$. **1259.** $\frac{R}{R-r} \cdot s$. **1260.** $\pi : 4 : 2\pi$. **1261.** 8620·4 cm³, 2155·12 cm³; 2419·02 cm², 923·62 cm². **1262.** 1796·98 cm², 1696·46 cm²; 4963·6 cm³, 5340·6 cm³. **1263.** 3207·3 cm³, 4395·2 cm³; 1399·57 cm², 1516·2 cm²; 3207·3 cm², 1205·18 cm². **1264.** 23712·6 cm², 243·836 dm³; 6710·4 cm², 34833 cm³; 7 : 1 **1265.** 34·833 kg; 557·33 kg. **1266.** 60431 cm³, 1884·95 cm³; 10386·1 cm², 1507·96 cm². **1267.** 2·5 cm. **1268.** 20 cm (genauer 19·993 . . cm). **1269.** 47·5 cm. **1270.** 125 mal. **1271.** 10555·7 cm³, 2789·72 cm²; 1 : 7 : 12; 1 : 3. **1272.** 38 dm³, 6107·1 cm².

XVIII. Rotationskörper.

1274. 237202 cm³, 23360·8 cm². **1275.** 25484·6 cm³; 4982·5 cm². **1276.** 2748·44 dm³; 1099·55 dm². **1277.** 278 dm³ 972 cm³; 278 dm² 97 cm². **1278.** $4s^2\pi$; $s^3\pi$. **1279.** $s^2\sqrt{2}\pi$; $\frac{s^2}{6}\sqrt{2}\pi$. **1280.** $4s^2\sqrt{2}\pi$; $s^3\sqrt{2}\pi$. **1281.** 24950·4 cm³, 14444·9 cm³; 4894·5 cm², 3386·6 cm². **1282.** 4825·4 cm³; 1809·55 cm². **1283.** $3s^2\pi$; $\frac{s^3}{4}\sqrt{3}\pi$. **1284.** $\frac{s^3\pi}{2}$; $2s^2\pi\sqrt{3}$. **1285.** 3592·8 dm³; 1733 dm² 40 cm². **1286.** 64654 cm³; 9424·8 cm². **1287.** 142502 cm³, 15268 cm². **1288.** 678·58 cm²; 1407·42 cm³. **1289.** Die Mantelflächen verhalten sich wie b : a, die Volumina gleichfalls wie b : a. **1290.** $a^3\pi$; $2a^2\sqrt{3}\pi$. **1291.** $\frac{7}{12}a^3\sqrt{3}\pi$;

$\frac{7}{2}a^2\pi$. **1292.** 3769·9 cm³; 1319·47 cm². **1293.** 1407·42 cm³; 678·58 cm². **1294.** 65345 cm³; 11435·3 cm². **1295.** 1431·61 dm³, 818·06 dm² **1296.** 5 : 6; 25 : 33. **1297.** 609 mm, 580 mm, 841 mm; 1766·1 cm²; 155353 cm³, 15688·3 cm². **1298.** 26389·3 cm², 23750·3 cm², 263893 cm³, 246300 cm³; 10 : 9; 15 : 14. **1299.** 350·45 dm³; 394·07 dm². **1300.** 6936·6 cm²; 48254 cm³. **1301.** 17844·1 cm²; 180955 cm³. **1302.** 9349·2 cm³; 2261·94 cm². **1303.** 14476·4 cm³; 3129·01 cm². **1304.** 447·36 cm³; 305·36 cm². **1305.** 45238 cm³; 7539·8 cm². **1306.** 26540·1 cm³; 6735·5 cm². **1307.** 129779 cm³; 19848·5 cm². **1308.** 61881 cm³; 17259·8 cm². **1309.** $V_1 : V_2 = O_1 : O_2 = 8 : 15$. **1310.** $V_1 : V_2 = O_1 : O_2 = 7 : 24$. **1311.** 60318 cm³; 10053·1 cm². **1312.** 679·78 dm³; 85149 cm². **1313.** 3822·6 dm³; 1666·3 dm². **1514.** 21458·2 dm³; 4399·4 dm². **1315.** 11646·4 dm³; 3185·6 dm². **1316.** $2as^2\pi = 282{\cdot}743$ dm³; $8as\pi = 376{\cdot}99$ dm². **1317.** 422·22 dm³; 472·49 dm². **1318.** 368·69 dm²; 244·289 dm³. **1319.** 1020·7 dm², 791·68 dm³. **1320.** 746·43 dm³; 1038·79 dm². **1321.** 1045·01 dm³, 91231 cm². **1322.** Die drei Volumina sind gleich und jedes beträgt 3234·5 dm³; die Oberflächen sind: a) 203304 cm²; b) 221438 cm²; c) 212371 cm². **1323.** 1394·86 dm³; 1394·86 dm². **1324.** 54625 cm³; 12930·8 cm². **1325.** 361·91 dm³; 512·7 dm². **1326.** 950·02 dm³; 799·21 dm².

XIX. Die Kugel.

1342. (509×10^4) μm²; (108×10^7) μm³. **1343.** 21991000 μm³; 379600 μm². **1344.** o : O = 1 : 13·4; v : V = 1 : 49·1. **1345.** $(616 \times \times 10^8)$ μm²; (1438×10^{12}) μm³; zirka $45^1/_2$ Billionen Jahre. **1346.** 207·69 kg. **1347.** 217·15 g. **1348.** 53·68 kg. **1349.** 1229 Stück. **1350.** 4027 Stück. **1351.** 2·758 dm. **1352.** 30·1 m; 120 km; dieser Zug würde also von Wien bis über Amstetten hinaus reichen. **1353.** 7·651 m; 457 Waggons. **1354.** Der Ballon kann noch mit 55 kg belastet werden (natürlich im Maximum). **1355.** a) 3499·4 m²; b) 7629 Platten; c) 95362·5 S. **1356.** 1·9 kg. **1357.** 132mal. **1358.** 12 cm, 9 cm. **1359.** 16 kg 116 g. **1360.** 216·94 g. **1361.** 29 mm. **1362.** 37 mm. **1363.** 14·46 kg. **1364.** Um $r(\sqrt{n} - 1)$; um 9 r. **1365.** 9 cm, 6 cm. **1366.** 1152 cm³; 768 cm²; 9202·7 cm³; 2123·7 cm². **1367.** 19·2 dm³. **1368.** 12·41 cm; 1 : 0·806. **1369.** 1 : 2 : 3. **1370.** 8 : 1; 4 : 1. **1371.** 2 r. **1372.** 125 kg 649 g. **1373.** Um $h^2\pi\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt[3]{12}\right) = 20{\cdot}1217$ dm². **1374.**

1·5 cm. **1375.** 3 cm; 113·097 cm³. **1376.** 5 : 2. **1377.** 2 cm; 50·265 cm². **1378.** Um 2 cm. **1379.** Um 7 cm. **1380.** 94·248 cm; 1153·58 g. **1381.** 9 cm; 1017·87 cm²; 3053·62 cm³; 1 : 18. **1382.** 301·592 cm²; 402·12 cm³. **1383.** Die Oberfläche wird halb so groß sein wie früher. **1384.** 9896 cm². **1385.** $r = 16$ cm oder $(8\sqrt{5})$ cm; $h = 24$ cm oder $(8\sqrt{5})$ cm. **1386.** $V_{Zyl.} : V_{Kug.} = (6n - 3m) : 4m = 3 : 2$; $m : n = 6 : 7$. **1387.** 11 : 9. **1388.** 6 : 25. **1389.** 1231·49 cm³. **1390.** 301·59 cm². **1391.** 678·58 cm², 1017·87 cm². **1392.** 2 cm; 12 : 1. **1393.** 7037·1 cm³, 2287·07 cm²; 33·51 cm³, 50·265 cm². **1394.** 2 : 5; 56 : 375. **1395.** 8482·2 cm³, 2544·69 cm²; 4188·78 cm², 1256·64 cm²; 39488 cm³, 5607·8 cm². **1396.** 19301·9 cm³, 4825·4 cm²; 7238·2 cm³, 1809·55 cm²; 65449·9 cm³; 7853·9 cm². **1397.** 27143·3 cm³, 5654·8 cm²; 12507·5 cm³, 2605·75 cm²; 101107 cm³, 10495·5 cm². **1398.** $s = {}^1/_3 r\sqrt{6}$; $O = 4r^2$; $V = {}^2/_9 r^3\sqrt{6}$; 2 cm; 24 cm²; 8 cm³. **1399.** $O_1 : O_2 = 1 : 3$; $V_1 : V_2 = \sqrt{6} : 18$. **1400.** 1 : 2 : 3. **1401.** 1 : 2 : 3; $(1 + \sqrt{5}) : 4 : 6$. **1402.** 4 : 6 : 9. **1403.** 9 : 4 : 3. **1404.** 4 : 9. **1405.** 9 : 4; 9 : 4. **1906.** 9 : 32; 9 : 16. **1407.** 2 : 3. **1408.** 3 : 4; $\sqrt{3} : 4$. **1409.** 2 : 3. **1410.** 3 : 2; 1 : 1. **1411.** 12 : 1. **1412.** $1 : 2\sqrt{3}$. **1413.** $\frac{3\sqrt{10}}{10} . r$ oder $\frac{\sqrt{2}}{2} . r$. **1414.** 11309·7 cm³; 2827·43 cm². **1415.** a) $\frac{2r^3\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$; $r^2\pi\left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\right)$; b) $\frac{2r^3\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$; $r^2\pi\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; c) $\frac{r^3\pi}{3} = \frac{1}{4}$ der ganzen Kugel; $r^2\pi\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **1416.** 35343 cm³; 6361·7 cm². **1417.** $(2 - \sqrt{2}) : 4$. **1418.** 9 : 29. **1419.** $a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) . r$. **1420.** $\frac{r}{2}$. **1421.** ${}^1/_3 r$.*). **1422.** $(\sqrt{2} - 1) . r$. **1423.** $r = d + \sqrt{b^2 + d^2}$; 18 cm. **1424.** ${}^1/_{10}$. **1425.** 3 cm. **1426.** $\frac{1}{2}(c \pm \sqrt{c^2 - 4rc})$; 16 cm oder 9 cm. **1427.** 395·85 cm³; 537·21 cm². **1428.** 480·66 cm³; 650·31 cm². **1429.** 11309·7 cm³; 3251·5 cm². **1430.** 19339·6 cm³; 4636·9 cm². **1431.** 15777·1 cm³; 7096·8 cm². **1432.** 1668·18 cm². **1433.** 6 cm. **1434.** $\frac{1}{4}(7 - \sqrt{17})\, r$ oder r. **1435.** 1 : 2; 5 : 16. **1436.** 3 m, 1 m. **1437.** 7 : 11; 5 : 11. **1438.** 141·371 cm³; 311·017 cm³; 197·92 cm²; 311·017 cm². **1439.** 13 : 112.

*) Man trachte zuerst die Höhe der Kalotte zu bestimmen!

1440. a) 7 : 20; b) 81 : 175. **1441.** 4 : 23; 11 : 26. **1442.** $h\pi(4R - h)$; $\pi(2r^2 + h^2)$. **1443.** $(r^2 + h^2)\pi$; $\sqrt{r^2 + h^2}$. **1444.** 35 : 11; 25 : 2. **1445.** $2(3r - h) : h$, 14 : 1. **1446.** $\frac{d}{2}(\sqrt{5} - 1)$. **1447.** $\frac{r}{4}$; 81 : 47; 4 : 3. **1448.** $\frac{h^3\pi}{6}$. **1449.** $\frac{2r^2\pi H}{r + H}$. **1450.** 23·94 km; 1800 km². **1451.** Etwa $\frac{1}{1445}$ der Erdoberfläche. **1452.** 496 m (also eine Erhebung, die zwischen der Höhe des Kahlenberges und des Hermannskogels liegt). **1453.** 16917 m (also noch einmal so hoch als der höchste Berg der Erde). **1454.** 2 r. **1555.** 0·5. **1456.** 0·896; 0·104. **1457.** 0·99; 0·00997. **1458.** 1·025. **1459.** 4·74 mm. **1460.** $d = \left(\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}} - \sqrt[3]{\frac{70}{\pi}}\right)$ dm = 6·55 mm. **1461.** $r\left(1 - \sqrt[3]{\frac{16s - 5}{16s}}\right) = 0{\cdot}27$ cm. **1462.** 76·8 kg. **1463.** 3619·1 cm³, 20922·9 cm³; 2912·25 cm², 14448·1 cm². **1464.** $(R^2 - r^2)\pi$. **1465.** 8 : 17. **1466.** 1 m. **1467.** 3958·4 cm²; 8595·3 cm³. **1468.** 502·65 cm². **1469.** 785·39 cm². **1470.** 2287·07 cm². **1471.** $\sqrt{4r_2{}^2h^2 + (r_2{}^2 - r_1{}^2 - h^2)^2} \cdot \pi$. **1472.** 12271 cm³, 2686·05 cm². **1473.** $V_1 = V_6 = 1809{\cdot}55$ cm³; $V_2 = V_5 = 4523{\cdot}8$ cm³; $V_3 = V_4 = 5880{\cdot}9$ cm³; 4 : 10 : 13 : 13 : 10 : 4. **1474.** 13 : 12; 31 : 30. **1475.** 197·92 cm³. **1476.** 2513·27 cm³. **1477.** 21912·5 cm³. **1478.** 1281·76 cm². **1479.** 36 r. **1480.** 4 : 5. **1481.** 9948·4 cm³, 9852 cm³; 4084 cm², 2814·85 cm². **1482.** 904·77 dm³, 540·35 dm²; 162·859 dm², 94·095 dm³. **1483.** 88·498 dm², 32·303 dm³, 137·616 dm³, 149·966 dm². **1484.** 1922·65 cm². **1485.** 3166·7 cm³. **1486.** 7 cm. **1487.** 59375 cm³, 9047·7 cm², 45393 cm³, 6248·5 cm². **1488.** 19339·6 cm³, 5428·6 cm². **1489.** 161163 cm³, 10744·2 cm³, 18378·2 cm², 7200·5 cm². **1490.** 26 cm. **1491.** a) $12\pi = 37{\cdot}699$ cm³; b) $\frac{h^2\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{2R - h}$. **1492.** $(3r - h) : (2r - h) = 12 : 7$. **1493.** 1 : 2; 3 : 5; 1 : 3. **1494.** $O_1 = O_2$; $V_1 : V_2 = 11 : 16$. **1495.** 4 cm; 201·061 cm²; 268·081 cm³. **1496.** $\sqrt{Rr}$; 1671·32 cm³, 835·66 cm²; 904·77 cm³, 452·38 cm². **1497.** 113·097 cm³, 113·097 cm². **1498.** 15 cm; 0·028. **1499.** 78124 cm³. **1500.** 15 cm. **1501.** 2:3; 2 : 3. **1502.** 106·25 dm. **1503.** 240 : 343. **1504.** Beide Körper haben denselben Inhalt. **1505.** 11083·5 cm³, 3845·3 cm²; 48 cm, 12 cm. **1506.** 326·74 dm³, 272·56 dm²; 120 cm, 54 cm. **1507.** 589·04 cm³, 471·23 cm². **1508.** 4 : 1.

1509. $\frac{r^3\pi}{12}\sqrt{3}$; $r^2\pi\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)$; 1 : 4. 1510. 1515 cm³. 1511. 187 dm³ 938 cm³.

XX. Die regulären Polyeder.

1521. $s^2\sqrt{3}$. 1522. $\frac{1}{12}\sqrt{2}\,s^3$. 1524. $r=\frac{1}{12}\sqrt{6}\,s$; $R=\frac{1}{4}\sqrt{6}\,s$; $r:R=1:3$. 1526. $2\sqrt{3}\,s^2$. 1527. $\frac{1}{3}\sqrt{2}\,s^3$. 1529. $r=\frac{1}{6}\sqrt{6}\,s$; $R=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s$. 1530. $\frac{3s^2}{8}\sqrt{3}$. 1532. $5\sqrt{3}\,s^2$. 1534. $R=\frac{s}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. 1535. $r=\frac{s}{12}\sqrt{42+18\sqrt{5}}$. 1536. $\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})\,s^3$. 1538. $6\,s^2$. 1539. s^3. 1540. $r=\frac{s}{2}$; $R=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,s$. 1541. $\frac{3s^2}{4}\sqrt{3}$; $\frac{s^3}{2}, \frac{3}{4}(4+\sqrt{3})\,s^2$. 1542. 1 : 2. 1544. $3s^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$. 1546. $R=\frac{s}{4}\sqrt{6(3+\sqrt{5})}$. 1547. $r=\frac{s}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$. 1548. $\frac{s^3}{4}(15+7\sqrt{5})$. 1549. $\sqrt{2\pi\sqrt{3}}:4:6$. 1550. $\frac{s^3}{3}$; $2s^2\sqrt{3}$; $1:3$; $1:\sqrt{3}$. 1551. $\frac{s^3}{6}$; $s^2\sqrt{3}$. 1552. $\frac{2s^3\sqrt{2}}{27}$; $\frac{4s^2}{3}$. 1553. $3\sqrt{3}:2$; 9 : 2. 1554. 9 : 1; 27 : 1. 1555. $\frac{5}{6}s^3$; $(3+\sqrt{3})\,s^2$. 1556. $\frac{5\sqrt{2}}{24}s^3$; $(3+\sqrt{3})\frac{s^2}{2}$. 1557. $\frac{7}{3}(\sqrt{2}-1)\,s^3$; $2[6(\sqrt{2}-1)+3\sqrt{3}-2\sqrt{6}]\,s^2$. 1558. $\frac{8\sqrt{2}}{27}s^3$; $\frac{2}{3}(1+2\sqrt{3})\,s^2$. 1559. a) $2\,d^3$; b) $\frac{16}{9}\sqrt{3}\,s^3$. 1560. a) $6\sqrt{2}\,d^2$; b) $8s^2\sqrt{2}$.

XXI. Wiederholungsaufgaben.

1561. 9 cm; 8. 1562. 250 kg; 7·37 dm; 1·59 dm. 1563. 8·603 dm; 1564. 4200 cm³; 1886 cm². 1565. 66780 cm³; 10258 cm². 1566. 18 cm, 27 cm, 36 cm; 17496 cm³. 1567. 2 cm. 1568. 9408 cm³. 1569. 8160 cm². 1570. 129 dm³ 24 cm³; 188 dm² 16 cm². 1571. $2(\sqrt{2}-1).s^3$; $12(\sqrt{2}-1)\,s^2$. 1572. 24360 cm³; 5044 cm². 1573. 42 dm²; 18 dm³. 1574. 158·4 dm²; 115·2 dm³. 1575. 18 dm³;

57·2 dm². **1576.** 59·6 dm². **1577.** 7488 cm³; 3008 cm². **1578.** 1760 m³. **1579.** 10080 cm³, 10080 cm³; 4392 cm², 4056 cm²; 65 cm. **1580.** 2844 m². **1581.** 14476 cm², 86857 cm³. **1582.** 2010·61 cm³. **1583.** 11259·4 cm², 26240·1 cm²; 77207 cm³, 318560 cm³. **1584.** 19352·2 cm², 18472·4 cm², 200119 cm³, 184724 cm³. **1585** 15607·3 cm². **1586.** 736·39 m³; 604 m². **1587.** Um $37\frac{1}{2}\,\%$ **1588.** 45°. **1589.** 4 kg 54 dkg. **1590.** 34560 cm³. **1591.** 9680 cm². **1592.** 4032 cm³; 1824 cm². **1593.** 10 cm, 12 cm; $(4\sqrt{5})$ cm, 15 cm. **1594.** 2 m² 93 dm² 76 cm²; 317 dm³ 952 cm³. **1595.** 25·5 dm³. **1596.** 11520 cm³; 4800 cm². **1597.** 2 : 3. **1598.** $\frac{s^2}{2}\sqrt{3}$, $s^2\left(4+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\frac{5}{6}s^3$. **1599.** $(3+\sqrt{6})\,.\,d$. **1600.** $\sqrt{2} : 4\sqrt{2} : 12$. **1601.** $\sqrt{3} : \sqrt[3]{3} : \sqrt{3}\,.\,\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. **1602.** $1 : \sqrt[4]{3} : \sqrt{2}$. **1603.** $V = \frac{1}{12}\sqrt{2}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)\,(a^2+c^2-b^2)\,(b^2+c^2-a^2)}$. **1604.** 97·2 dm³; 129·6 dm². **1605.** 10·976 dm³; 30·8 dm². **1606.** 7752 cm²; 44640 cm³. **1607.** 3992 cm²; 15680 cm³. **1608.** 96 cm²; 360 cm²; 768 cm²; 864 cm²; 48 cm³; 336 cm³; 912 cm³; 1296 cm³. **1609.** 7·58 dm³. **1610.** $^{28}/_{3}\,r^3 = 252$ cm³; $28\,r^2 = 252$ cm². **1611.** $9\sqrt{2} = 12{\cdot}728$ cm³; $18\sqrt{3} = 31{\cdot}18$ cm². **1612.** 441·78 cm²; 11·86 ..cm. **1613.** 343 dm³ 60 cm³; 318 dm² 56 cm². **1614.** 1231·49 cm³; 703·71 cm²; 100° 48′. **1615.** $\frac{\pi}{3}\cdot\frac{p^2}{q^2-p^2}\cdot h^3 = 27143$ cm³; $\pi\cdot\frac{p}{q-p}\cdot h^2 = 5654{\cdot}8$ cm². **1616.** 12 cm, 15 cm, 1847·25 cm², 5277·9 cm³. **1617.** Um r $(\sqrt{15}-1)$; es muß alſo $h = r\sqrt{15}$ ſein. **1618.** 0·729. **1619.** 678·58 cm². **1620.** 703·71 cm². **1621.** 571·76 cm². **1622.** $^3/_8\,r^3\pi$; $^9/_4\,r^2\pi$. **1623.** 14589·5 cm³; 4354·2 cm². **1624.** 19100·8 cm³; 4750 cm². **1625.** 703·71 cm². **1626.** 452·38 cm², 1187·51 cm²; 904·77 cm³, 2375·03 cm³; 8 : 21, 8 : 21. **1627.** $^{16}/_{125}\,\pi\,(R^3-r^3)$; $^4/_{25}\,\pi\,(9R^2-r^2)$. **1628.** 2031·97 dm³; 1306·27 dm². **1629.** 542·86 dm³; 339·29 dm². **1630.** 9424·8 cm³, 12566·4 cm³; 2356·19 cm², 3141·6 cm²; 7238·2 cm³, 1809·55 cm². **1631.** 517·22 dm², 724·12 dm³. 2463 cm². **1632.** 4976·2 cm²; 19000·3 cm³. **1633.** 50723 cm³, 9372·8 cm². **1634.** 9·26 cm. **1635.** 1005·31 kg, alſo ca. 1 t. **1636.** 5·337 dm. **1637.** 796 g. **1638.** 4·8 cm; 657·23 g. **1639.** Auf $^1/_{100}$.

1640. 3 cm. 1641. $81\,r^2$, $27\,r^3$. 1642. Das Wasser steigt nur um $^1/_2$ cm, kann also nicht ausfließen. 1643. 452·38 cm²; 904·77 cm³; 10·314 kg. 1644. 1206·36 cm²; 2412·73 cm³. 1645. 18·0955 dm²; 9 : 11. 1646. 15 cm; 9 : 10. 1647. 21 cm; 3694·5 cm²; 12930·8 cm³. 1648. 6 cm. 1649. $\frac{2\pi(a+b)}{3ab}(a^4+a^2b^2+b^4)$. 1650. $\frac{bc}{2a}, \frac{ac}{2b}, \frac{ab}{2c}$; 400 mm, 225 mm, 144 mm. 1651. $\frac{r}{3}(3+2\sqrt{6})$. 1652. 4071·4 cm²; 10857·3 cm²; 11762 cm³; 101335 cm³. 1653. 19 : 99; 7 : 243. 1654. $\pi\sqrt{4r_2^2h^2+(r_1^2-r_2^2+h^2)^2}$ oder $\pi\sqrt{4r_1^2h^2+(r_1^2-r_2^2-h^2)^2}$; 1539·38 cm². 1655. r^3. 1656. 1809·55 cm³, 22619·4 cm³; 1244·06 cm², 3958·4 cm². 1657. 723·82 dm², 723·82 dm³. 1658. 0·896; 0·104. 1659. Beide sind flächengleich. 1660. 300 cm³. 1661. $\frac{r^3\pi}{3}$; 1 : 4; $(2+\sqrt{3}) : 8$. 1662. 527·78 cm²; 904·77 cm³. 1663. r $(\sqrt{5}-2)$. 1664. $\frac{rh}{3r-h}$; 15 cm. 1665. Im Abstande 2r vom Kugelmittelpunkte. 1666. $\frac{8r^3\pi}{3}\left(\frac{m^2-1}{m^3}\right)^2$; 9·3248 cm³. 1667. Beide im Verhältnisse 2 : 1. 1668. 2148·84 cm²; 3166·7 cm³; 6 : 1. 1669. 424·11 cm²; 301·59 cm²; 311·017 cm³; 301·592 cm³. 1670. 3 : 4; 27 : 32. 1671. 21·488 cm³. 1672. 2799·15 cm², 2092·29 cm³; 52985 cm², 881·47 dm³; 46199 cm², 576·1 dm³. 1673. $V = (300\pi)$ cm³ = 942·48 cm³; $O = (480\pi)$ cm² = 1507·96 cm².

Dritter Teil.

Ebene Trigonometrie.

XXII. Winkelfunktionen. — Auflösung des rechtwinkligen Dreieckes (I. Teil).

1684. 3·7082 cm. 1685. 15·663 m. 1686. 419·93 cm²; 736·07 cm². 1687. 24 m. 1688. Um 1194 m. 1689. 29·997 m (rund 30 m). 1690. 1910·2 m. 1691. 28° 42′ 22″. 1692. 0° 17′ 11″; 0° 34′ 22″; 1° 25′ 55″. 1693. 10° 41′ 47″. 1694. 5844 km; 2535 km. 1695. 310 m/sek. 1696. 1469·4 km; 979·22 km. 1697. 36 cm, 85 cm, 1386 cm². 1698. 52 cm, 165 cm, 4290 cm². 1699. 39° 57′ 58″, 50° 2′ 2″; 137 cm, 4620 cm². 1700. 34° 12′ 19″, 55° 47′ 41″;

153 cm, 7956 cm². **1702.** 4·782 cm. **1703.** 728 kg. **1704.** 53° 34′ 10″. **1705.** 208 cm, 105 cm, 233 cm; 10920 cm². **1706.** 77° 19′ 20″; 3600 cm³, 2160 cm². **1707.** $\frac{a^3}{2}$. tang α; 40881 cm³. **1708.** 3581·4 cm², 15833 cm³. **1709.** 241·71 dm², 530·025 dm³. **1710.** $\frac{nV}{\pi}$. sin $\frac{180°}{n}$ . . cos $\frac{180°}{n}$; 64·446 cm³. **1711.** $\frac{s^2 h\pi}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$; 63165 cm³. **1712.** 11·7 dm; 918·93 dm³. **1713.** $\frac{1}{\sin \alpha} \sqrt[3]{4\,V\pi}$; 143·57 cm. **1714.** $\frac{f\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{f}{2 \tan g\, \alpha}}$; 10343 cm³. **1715.** 146·7 m, 2,594.800 m³. **1716.** 81° 12′ 9″; 5096 cm². **1717.** 70° 31′ 45″. **1718.** 109° 28′ 15″. **1719.** 29671 cm³. **1720.** 4071·5 cm², 16889 cm³. **1721.** Es ist $\sin \alpha = \frac{\beta}{360°}$; für den gleichseitigen Kegel ist $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = 180°$. **1722.** $\tan g \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{g}{h^2 \pi}}$; 28° 30′. **1723.** $\sin \alpha = \frac{G}{M}$; 53° 3′ 54″. **1724.** $\frac{r^2 \pi}{3}$. a sin α. **1725.** $\frac{3\,V}{s \sin \alpha} = 12{\cdot}567$ cm². **1726.** 60 cm, 41532 cm³, 7068·5 cm². **1727.** $\frac{\pi}{3}$ $(R^3 - r^3)$. tang α; 324·11 dm³. **1728.** $\frac{d}{\cos \alpha}$; 50·462 cm². **1729.** 53° 7′ 48″; beide wie 8 : 21. **1730.** 371·96 dm², 560·83 dm³. **1731.** 8 : 3; 73° 44′ 23″. **1732** $\sqrt[3]{\frac{3\,V}{2\pi\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)}}$; $\sqrt[3]{\frac{3\,V}{\pi}}$. **1733.** Beide 2261·9 cm².

XXIII. Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes (I. Teil).

1737. 76° 18′ 52″; 317 cm, 510 cm; 78540 cm². **1738.** 62° 51′ 33″; 565 cm, 445 cm; 39600 cm². **1739.** 69° 59′ 2″, 39° 18′ 28″; 222 cm; 15540 cm². **1740.** 110° 0′ 58″, 39° 18′ 27″; 120 cm, 8400 cm². **1741.** 67° 22′ 48″, 38° 52′ 49″; 17 cm; 204 cm². **1742.** 10° 52′ 50″, 144° 55′ 48″; 624 cm; 26218 cm². **1743.** (Erstes Dreieck) 45° 14′ 20″, 104° 53′ 54″; 328 cm, 19680 cm². (Zweites Dreieck) 104° 53′ 54″, 15° 22′ 34″; 90 cm; 5400 cm².

1744. (Erſtes Dreieck) 81° 11′ 36″, 87° 55′ 34″; 450 cm, 18900 cm². (Zweites Dreieck) 98° 48′ 24″, 70° 18′ 46″; 424 cm, 17807 cm². **1745.** 79° 36′ 42″, 33° 23′ 54″, 66° 59′ 24″; 3060 cm². **1746.** 134° 45′ 36″, 17° 3′ 42″, 28° 10′ 42″; 16320 cm². **1748.** $2\,R\sin\alpha$, $2\,R\sin\beta$, $2\,R\sin\gamma$; $2\,R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$; 36° 52′ 11″; 60 cm, 67·2 cm, 40·8 cm; 1209·6 cm². **1749.** $a=\sqrt{\frac{2f\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}$, $b=\sqrt{\frac{2f\sin\beta}{\sin\gamma\sin\alpha}}$, $c=\sqrt{\frac{2f\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}}$; $a=102$ cm, $b=150$ cm, $c=168$ cm.

* * *

1750. 5089·4 m, 9124 m. **1751.** 1193 m. **1752.** $\frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; 832·16 m. **1753.** $\frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$; 268·81 m. **1754.** 4·648 km. **1755.** 2988 m. **1756.** 153 m; 204 m. **1757.** 70 m.

* * *

1758. $\frac{c^3\pi}{3}\left(\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^2$; 214·89 dm³. **1759.** $\frac{c^3\pi}{3}\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\right)^2$; 8846·6 cm³. **1760.** $\frac{b^3\pi}{3}\sin^2 2\beta$; 7720·8 cm³. **1761.** $\frac{2\,b\,f\sin\alpha}{3}\cdot\pi$; 23645 cm³. **1762.** 237505 cm³; 29028 cm². **1763.** 9801·7 cm³. **1764.** $\frac{2\,r^3\pi}{3}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **1765.** $\frac{2}{3}\pi\,(R^3-r^3)\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; 19205 cm³.

XXIV. Goniometriſche Transformationen.

1776. $\cos 30°=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\operatorname{tang} 30°=\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\operatorname{cotang} 30°=\sqrt{3}$. **1777.** $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\operatorname{tang}\alpha=\frac{4}{3}$, $\operatorname{cotang}\alpha=\frac{3}{4}$. **1778.** $\sin 45°=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\cos 45°$, $\operatorname{cotang} 45°=1$. **1779.** $\sqrt{2}\cdot\cos(\alpha-45°)$. **1780.** $\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha-45°)$. **1781.** $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$. **1782.** $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$. **1783.** $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$. **1784.** $-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$. **1785.** $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$. **1786.** $\frac{2}{\sin 2\alpha}$. **1787.** $2\operatorname{cotang} 2\alpha$.

1788. $\sin(\alpha+\beta)\,.\,\sin(\alpha-\beta)$. 1789. $\frac{\sin(\alpha+\beta)\,.\,\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\,.\,\cos^2\beta}$. 1790. $\operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2}$. 1791. $2\operatorname{tang}\alpha$. 1792. $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$. 1793. $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$. 1794. $\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}$. 1795. $\operatorname{cotang}(45°-\alpha)=\operatorname{tang}(45°+\alpha)$. 1796. $\operatorname{cotang}(45°-\alpha)=\operatorname{tang}(45°+\alpha)$. 1797. $2\sin x\cos 2y$. 1798. Für das obere Vorzeichen: $2\sin 2x\cos x$; für das untere Vorzeichen: $2\cos 2x\sin x$. 1799. $\operatorname{cotang}\beta$. 1800. $-\operatorname{cotang}\alpha$. 1801. $\sin 2\alpha$. 1802. $\operatorname{tang} 2\alpha$. 1803. $\cos 2\alpha$. 1804. $\operatorname{tang} 2\alpha$. 1805. $\cos 2\alpha$. 1806. $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$. 1807. $\operatorname{tang}\alpha\,.\,\operatorname{tang}\beta\,.\,\operatorname{tang}\gamma$. 1808. $\operatorname{cotang}\frac{\alpha}{2}\,.\,\operatorname{cotang}\frac{\beta}{2}\,.\,\operatorname{cotang}\frac{\gamma}{2}$. 1809. 21° 48′ 5′. 1810. 0°, 60°. 1811. 0°, 53° 7′ 48″. 1812. 38° 10′ 23″. 1813. 60°. 1814. 0°, 41° 24′ 33″. 1815. 135°. 1816. 0°, 45°. 1817. 15°. 1818. 0°; 56° 18′ 35″. 1819. $x_1=0°$; $\operatorname{tang} x_{2\text{ und }3}=\pm\frac{b}{a}$. 1820. 54° 44′ 6″, 125° 15′ 54″. 1821. 45°. 1822. $45°-\alpha$. 1823. 45°. 1824. 0°; 53° 7′ 48″. 1825. 36° 52′ 12″; 90°. 1826. 30°; 90°. 1827. 0°, 120°. 1828. 45°; 116° 33′ 55″. 1829. 0°; 135°. 1830. 60°; 180°. 1831. 75° 57′ 50″; 18° 26′ 6″. 1832. 0°; α; $(180°-\alpha)$. 1833. 36° 52′ 12″. 1834. 0°; 90°. 1835. 71° 33′ 54″; 18° 26′ 6″. 1836. 18° 26′ 6″; 135° 1837. 0°; 60°; 120° 1838. 22° 30′, 67° 30′; 157° 30′; 112° 30′. 1839. 10°; 90°. 1840. 0°; 15°. 1841. 0°; 38° 40′ 13″. 1842. 90°. 1843. 0°; 48° 11′ 22″, 90°. 1844. 135°. 1845. 0°; 15°; 45°; 75°; 105°; 135°; 165°. 1846. 0°; 60°; 120°. 1847. 0°, 180°; 60°, 120°; 35° 15′ 52″, 144° 44′ 8″. 1848. 40°; 20°. 1849. 50°; 30°. 1850. 44° 26′ 18″, 62° 58′ 59″, 72° 34′ 43″.

XXV. Auflösung des rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreieckes (II. Teil).

1851. 65 cm, 72 cm, 97 cm; 2340 cm² 1852. 44 cm, 117 cm, 125 cm; 2574 cm². 1853. 119 cm, 120 cm, 169 cm; 7140 cm². 1854. 133 cm, 156 cm, 205 cm; 10374 cm². 1855. 75 cm, 308 cm, 317 cm; 11550 cm². 1856. $c=\sqrt{\frac{4f}{\sin 2\alpha}}$, $a=c\sin\alpha$, $b=c\cos\alpha$; 140 cm,

171 cm, 221 cm. **1857.** $s = \frac{2f}{\sin \alpha}$, $g = 2s \sin \frac{\alpha}{2}$; 269 cm, 138 cm.

1858. $a = \frac{u \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}$, $b = \frac{u \sin \frac{\beta}{2}}{2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$, $c = \frac{u \sin \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}$;

$f = \frac{u^2}{4} \cdot \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}$. **1859.** $a = \frac{s \sin \alpha}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$ usw.

$f = \frac{s^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{8 \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}}$. **1860.** $a = \frac{d \sin \alpha}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}$ usw.

1861. Man findet aus $\cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{d \sin \frac{\alpha}{2}}{a}$ die halbe Differenz $\frac{\beta - \gamma}{2}$, somit auch wegen $\frac{\beta + \gamma}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$ die Winkel β und γ, wodurch die Aufgabe auf den ersten Auflösungsfall zurückgeführt erscheint. **1862.** Wie in der vorigen Aufgabe, wobei sich aber diesmal die Formel $\sin \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{d \cos \frac{\alpha}{2}}{a}$ ergibt. **1863.** $c = \frac{r \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}$ usw.; $f = r^2 \operatorname{cotang} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotang} \frac{\beta}{2} \operatorname{cotang} \frac{\gamma}{2}$; 84 cm, 51 cm, 75 cm; 1890 cm². **1866.** $F : f = 1 : 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$; 1 : 0·13302. **1867.** $\operatorname{tang} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{m - n}{m + n} \cdot \operatorname{cotang} \frac{\gamma}{2}$, $a = \frac{h_b}{\sin \gamma}$, $c = \frac{h_b}{\sin \alpha}$, $f = \frac{b\, h_b}{2}$; 73° 44′ 21″, 9° 31′ 39″, 145 cm, 25 cm, 150 cm; 1800 cm². **1868.** $\operatorname{tang} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{m + n}{m - n} \cdot \operatorname{tang} \frac{\delta}{2}$, $a = \frac{h_c}{\sin \beta}$, $b = \frac{n}{m} \cdot a$, $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$, $f = c \cdot \frac{h_c}{2}$; 67° 22′ 51″, 18° 55′ 31″, 93° 41′ 38″; 74 cm, 26 cm, 80 cm; 960 cm². **1869.** Man findet aus $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\delta \sin \frac{\gamma}{2}}{d}$

den Winkel $(\alpha - \beta)$, daher auch α und β. Ferner aus $(a + b) : d = \cot\frac{\gamma}{2} : \tan\frac{\alpha - \beta}{2}$ die Summe der Seiten $a + b$ und daher auch a und b selbst, endlich c aus $c = \frac{a + b}{\delta} . d$; 67° 22′ 50″, 36° 52′ 10″; 60 cm, 39 cm, 63 cm; 1134 cm² 1870. $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$, $a + b = \sqrt{c^2 + 2c\,h_c \cot\frac{\gamma}{2}}$, $a - b = \sqrt{c^2 - 2c\,h_c \tan\frac{\gamma}{2}}$, $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$, $\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$, $f = \frac{c\,h_c}{2}$; 120 cm, 78 cm; 67° 22′ 48″, 36° 52′ 12″, 75° 45′; 4536 cm². 1871. Es ergibt sich $\frac{4}{3} + \frac{56}{33} + \frac{12}{5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{56}{33} \cdot \frac{12}{5}$. 1872. $a : b : c = \sqrt{5} : \sqrt{2} : 1$. 1873. 24 cm; 17·532 cm. 1874. $\tan\alpha = \frac{\rho}{r_1}$, worin $\rho = \sqrt{\frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}}$ usw.; 59° 29′ 23″, 67° 22′ 49″, 53° 7′ 48″. 1875. 6309 cm². 1876. 1489 m. 1877. $h = a \cot\alpha . \tan\gamma$, $l = a . \cot\alpha . \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos\beta \cos\gamma}$; 9·765 m, 56·23 m. 1878. Bezeichnet man den Winkel der Uferrichtung mit der Visierlinie zum mittleren Steine mit γ, so findet man $\tan\gamma = \frac{2 \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$ und die Breite des Flusses mit $d = \frac{2000 \sin(\alpha + \gamma) . \sin(\gamma - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$; $\gamma = 60°$, $d = 500$ m. 1879. $V = \frac{c^2 s}{12} . \sin 2\alpha . \sin\delta$; 4862·2 cm³. 1880. $\sqrt[3]{\frac{6 V^2 . \sqrt{3}}{\sin 2\delta . \sin\delta}}$; 33·876 cm². 1881. $\frac{n a^2}{2} . \cot\frac{180°}{n} . \frac{\cos^2\frac{\delta}{2}}{\cos\delta}$, $\frac{n a^3}{24} . \cot^2\frac{180°}{n} . \tan\delta$; 386·63 dm², 248·22 dm³ 1882. $V_1 : V_2 = 2\cos^2\alpha : \cos 2\alpha$; 3:1. 1883. $2 s^2 \pi . \sin\alpha . \sin^2\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)$; $\frac{s^3 \pi}{6} . \sin 2\alpha . \sin\alpha$. 1884. $V = \frac{O \tan\frac{\alpha}{2}}{3 \cos\frac{\alpha}{2}} . \sqrt{\frac{O . \cos\alpha}{2\pi}}$ 1885. $O = \frac{2 \sin^2\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha} . \sqrt[3]{\frac{9 V^2 \pi}{\tan\alpha}}$. 1886. $\frac{f\pi}{3} \sqrt{f . \tan\frac{\alpha}{2}}$. 1887. $\frac{s^2 \pi}{12} . \frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$. 1888. 30°. 1889. $V = \frac{c^3 \pi}{3} . \sin^2\alpha . \cos\alpha$, $O = 2c^2 \pi .$

$\cdot \sin\alpha \cdot \sin^2\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)$; 5545·6 cm³, 2790·4 cm². **1890.** 464·45 dm³, 624·8 dm². **1891.** $4f\pi$, $\pi\sqrt{f^3 \sin\alpha}$; 2638·9 cm², 8134·5 cm³. **1892.** $V = 2s^3 \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \pi$, $O = 8s^2 \cdot \sin\alpha \cdot \pi$; 14540 cm³, 3809·2 cm². **1893.** $O = \frac{c^2\pi}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $V = \frac{c^3\pi}{3}\left[\frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right]^2$; 575·31 cm², 859·48 cm³. **1894.** $\frac{a^3\pi}{2}\left[\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\right]^2$; $\frac{a^3\pi}{4}$. **1895.** $\sin^2\frac{\beta}{2}$ gibt diesen Bruchteil an. Für den Pol ($\beta = 90°$) ergibt sich $^1/_2$, für den Äquator ($\beta = 0°$) ist die unsichtbare Fläche gleich Null, d. h. man überblickt im Laufe von 24 Sternstunden den ganzen gestirnten Himmel. **1896.** 63° 26′ 6″. **1897.** $\frac{V}{2} \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \cos^2\alpha$; $\frac{3V}{32}$; $\frac{9V}{32}$. **1898.** $V = \frac{4r^3\pi}{3} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$; wie $2 \cdot \tan\frac{\alpha}{2} : 1$. **1899.** $V \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$. **1900.** Es muß $\cos x = \cos^2\frac{\alpha}{2}$ sein; für $\alpha = 90°$ ist $\sphericalangle x = 60°$. **1901.** $V = 4f \cdot \frac{120°}{\alpha} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\frac{360\,f}{\pi}}$; 48158 cm³. **1902.** 106° 15′ 36″. **1903.** $2\alpha = 103°$ 39′ 12″. **1904.** $2\alpha = 137°$ 3′ 30″; im Verhältnis $\sqrt{3} : 1$. **1905.** $2\alpha = 120°$. **1906.** $2\alpha = 85°$ 53′. **1907.** 132,350.000 km². **1908.** 19,425.000 km². **1909.** $\frac{4r^3\pi}{3\sin a} \cdot \sin^4\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)$, $\frac{4r^2\pi}{\sin\alpha} \cdot \sin^4\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)$; $\frac{3r^3\pi}{2}$, $\frac{9r^2\pi}{2}$. **1910.** $\frac{4h^3\pi}{3} \cdot \tan^2\alpha \cdot \sin^4\alpha$, $4h^2\pi \cdot \tan^2\alpha \sin 2\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$; $\frac{h^3\pi}{3}$, $3h^2\pi\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)$.

XXVI. Wiederholungsaufgaben.

1911. $\tan(45° - \alpha)$. **1912.** $\cos 2\alpha$. **1913.** 1. **1914.** $\sin 2\alpha$. **1915.** 0°; 45°; 135°. **1916.** 24° 5′ 41″; 90°; 155° 54′ 19″. **1917.** 28° 13′ 16″. **1918.** 0°; 28° 57′ 18″. **1919.** 15°. **1920.** $x_1 = 0°$, $\cos x_2 = \frac{b}{a}$; 0°. **1921.** $x_1 = 90°$; $\sin 2x_2 = \frac{b}{a}$; 45°. **1922.** 0°; 53°

7′ 48″. **1923.** 17° 6′ 51″; 72° 53′ 14′; **1924.** 75° 31′ 21″. **1925.** 45°, 135°; 65° 54′ 18″, 114° 5′ 42″. **1926.** 0°, 135°; 0°, 45°. **1927.** $x_1 = 0°, x_2 = 90°$. tang $x_3 = \frac{d}{c}$; 0°, 45°, 90°. **1928.** 30°, 150°; 35° 15′ 50″, 144° 44′ 10″. **1929.** 18° 26′ 6″, 135°. **1930.** 45°. **1931.** 0°, 71° 33′ 54″. **1932.** 0°, 38° 40′ 5″ **1933.** 45°, 30° oder 60°, 45°. **1934.** 3·843 cm. **1935.** 332·64 kg. **1936.** 42° 19′ 18″. **1937.** 145 cm, 119 cm, 156 cm. **1938.** $F = 4Rr = \frac{f}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$. **1939.** Das rechtwinklige Dreieck. **1940.** 60° **1941.** 13 : 14 : 15 **1942.** ab sin γ; 24480 cm² **1943.** $a = \frac{d \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. $b = \frac{d \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; 33·887 cm, 47·548 cm **1944.** 10·583 cm; 78° 9′ 35″, 101° 50′ 25″. **1945.** $\frac{a^2 - b^2}{4}$. tang α; 4088 cm² **1946.** $\frac{(a+b)\,.\,c}{2}$. sin α; 120 dm². **1947.** $\frac{ac \sin^2\alpha}{2\,.\,\sin(\alpha-\gamma)} = \frac{a^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2\sin(\alpha-\gamma)}$. **1948.** $\frac{h^2\pi}{4}$. cos x; $\frac{h^2\pi}{8}$. **1949.** $\frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 - 2ab})$, $\frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 2ab})$, $\frac{1}{2}\sqrt{4c^2 - (a+b-c)^2}$ **1950.** 554·77 m **1951.** 1405·9 m **1952.** 1139·7 m **1953.** 132·4 m. **1954.** 2961 m, 3335 m, 5793 m.

* * *

1955. $a^2 s \sin\alpha \sin\delta$; 299·21 dm³. **1956.** 3·6056 dm, 3·1623 dm, 2·2361 dm; 81° 52′ 14″, 60° 15′ 16″, 37° 52′ 30″; 3·5 dm². **1957.** $\sqrt{(f\cos\alpha)^3}$. **1958.** 54° 44′ 8″. **1959.** $2R^3\pi \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}$, $2R^2\pi\left(1 + \frac{2\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)$, $4R^3(\sin\beta\sin\gamma)^2$, $4R^2\sin\beta\sin\gamma\left(\sin\alpha + \frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$; 4823·3 dm³, 1588·9 dm²; 688·5 dm³, 753·3 dm² **1960.** 18364 cm³. **1961.** 188·16 dm², 131·712 dm³, 73° 44′ 23″ **1962.** 10415 cm³, 3822·7 cm². **1963.** $\frac{s^3\pi}{3}$ sin α cos² α; 27482 cm³. **1964.** $\frac{u^2}{4\pi\sin\alpha}$, $\frac{u^3}{24\pi^2\,\mathrm{tang}\,\alpha}$. **1965** $\sqrt[3]{\frac{3V\,.\,\mathrm{tang}\,\alpha}{\pi}}$; 10 cm. **1966.** $\frac{2f\pi}{3}\sqrt{2f\,.\,\mathrm{tang}\,\alpha}$;

$\frac{4\,f\,\pi}{\cos\alpha}\,.\,\sin^2\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$. **1967.** $O=\frac{a^2\sin\beta}{\sin\alpha}\,.\,\pi\,.\,2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $V=\frac{a^3\sin^2\beta\,.\,\pi\,.\,\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\alpha}$; 21991 cm², 197040 cm³. **1968.** $O=$ $=\frac{2r^2\pi}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta}\,.\,\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $V=\frac{r^3\pi}{3}\,.\,\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta}$. **1969.** $\frac{4\,H^3\pi}{2}\,.\,\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^3\alpha}$; 15131 cm³. **1970.** 103° 39′ 12″; der Inhalt jedes Teiles beträgt $\frac{r^3\pi}{6}(3-\sqrt{5})$. **1971.** $R=r\,.\,\text{tang}\,\frac{2\delta+\alpha}{4}\,.\,\text{cotang}\,\frac{2\delta-\alpha}{4}$. **1972.** Wie $\text{tang}\,\alpha:\text{cotang}^5\frac{\alpha}{2}$; **1 : 9.**

Universitäts-bibliothek Wien

UB WIEN
+AM49301203