Das Sitnikovproblem

G. Lochmann

Institut für Astronomie,
Universität Wien

Bachelorseminar

Mai 2010

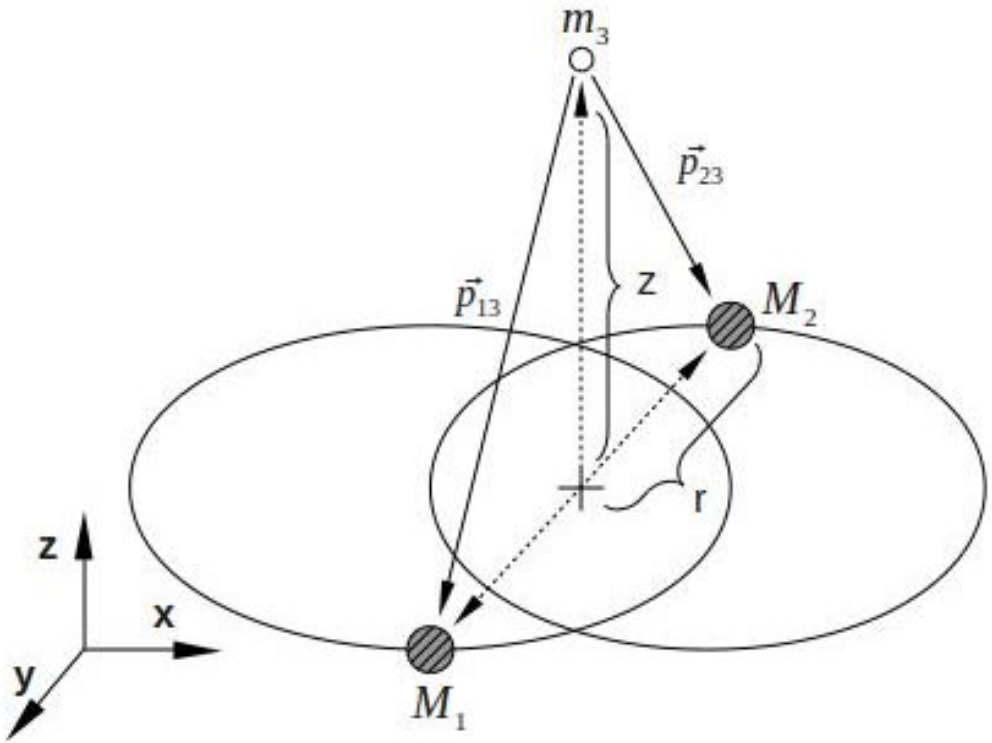
Theorie: Problemstellung

Sitnikov
G.Lochmann
Theorie:
Problem-stellung
Darstellung
DGL
Durchführung
Resultate:
Phasen-diagramm
SOS
Fazit

- Spezialfall des eingeschränkten 3 Körper-Problems:
  - 2 Körper massebehaftet: Primärkörper
  - 1 Körper masselos: Testteilchen
- Die Massen der Primärkörper sind gleich groß
- Die beiden Primärmassen liegen in einer Ebene und das Testteilchen fällt senkrecht auf diese
- Das Teilchen durchstößt die Ebene im Massenmittelpunkt

Theorie: Darstellung I

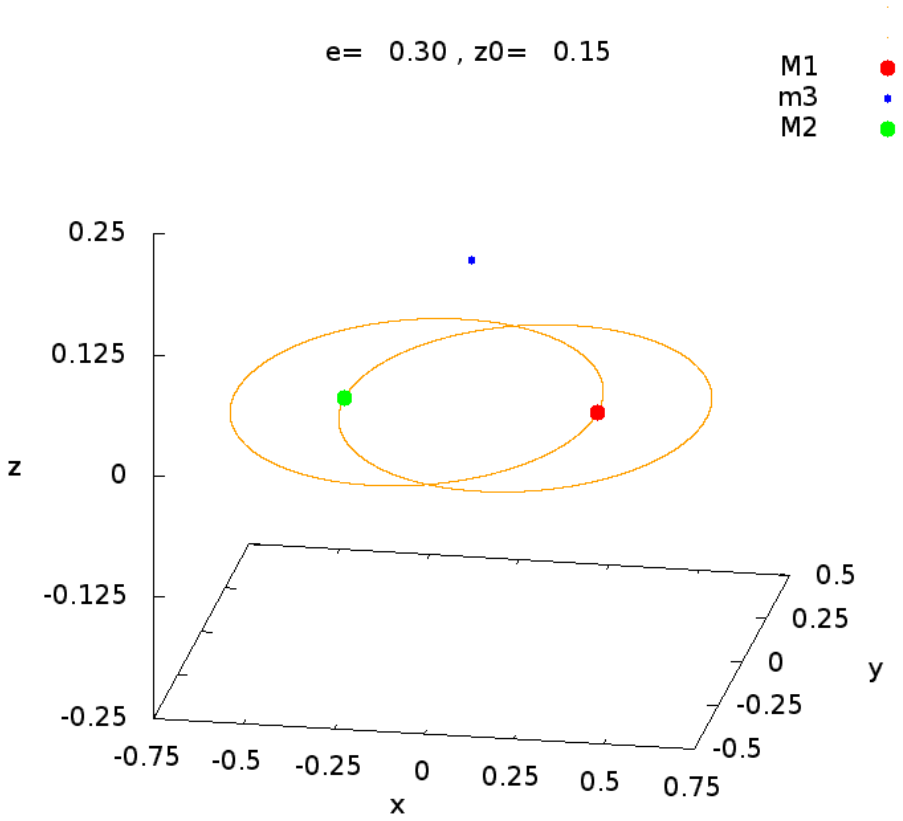
- Graphische Darstellung des Sitnikovproblems:



- M_1, M_2: Primärkörper auf elliptischen Bahnen
- m_3: Testteilchen
- p: Distanzvektoren
- r: Distanz der Primärmassen zum Massenmittelpunkt
- z: Senkrechter Abstand des Testteilchen

Theorie: Darstellung II

- Animation des Sitnikovproblems:

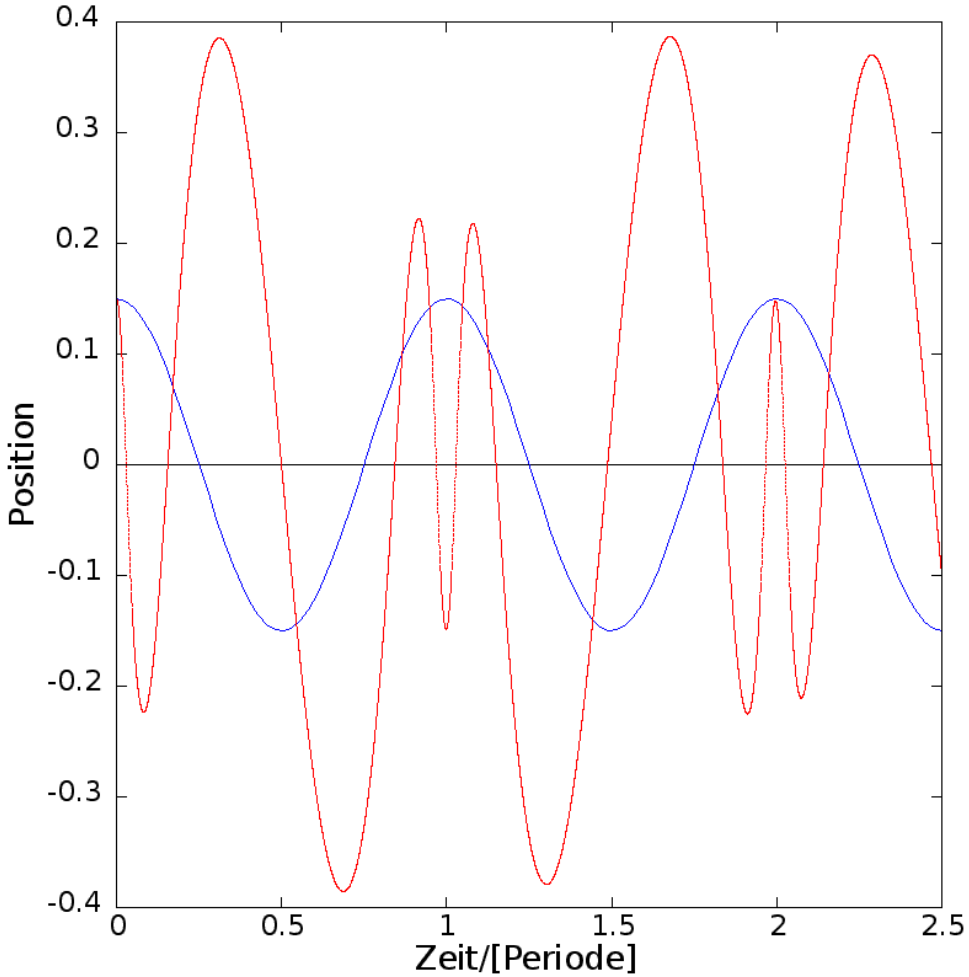


- Rot und Grün: Primärkörper
- Blau: Testteilchen

Theorie: Darstellung III

Sitnikov
G.Lochmann
Theorie:
Problem-stellung
Darstellung
DGL
Durchführung
Resultate:
Phasen-diagramm
SOS
Fazit

- Animation als Diagramm:



- Exzentrizität = 0.6
  Startposition = 0.15
- Vergleich:
  - Rot: Sitnikov
  - Blau: harm. Oszillator
    (Kosinusfunktion)
- Diagramm kann verwendet werden um Resonanzen zu finden

Theorie: Differentialgleichung

- Herleitung über dem Newton' schen Gravitationsgesetz
- Es ergibt sich eine Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{z} = -\frac{z}{\left(r^2 + z^2 \right)^{3/2}}$$

- Sitnikovproblem mit Kreisbahnen:

$$\ddot{z} = -\frac{z}{\left(1/4 + z^2 \right)^{3/2}}$$

- Sitnikovproblem mit Keplerbahnen:

$$\ddot{z} = -\frac{z}{\left\{ 1/4 \cdot \left[1 - e \cdot \cos\left(E \right) \right]^2 + z^2 \right\}^{3/2}}$$

Durchführung

Sitnikov
G.Lochmann
Theorie:
Problem-stellung
Darstellung
DGL
Durchführung
Resultate:
Phasen-diagramm
SOS
Fazit

- Berechnungen wurden auf der Grafikkarte durchgeführt
  - Eingeschränkte Genauigkeit in der Zahlendarstellung
  - Viel schnellere Abarbeitung durch parallele Berechnung
- Benutzes Verfahren: Lie Integration
- DGL 2. Ordnung => 2 DGL 1. Ordnung

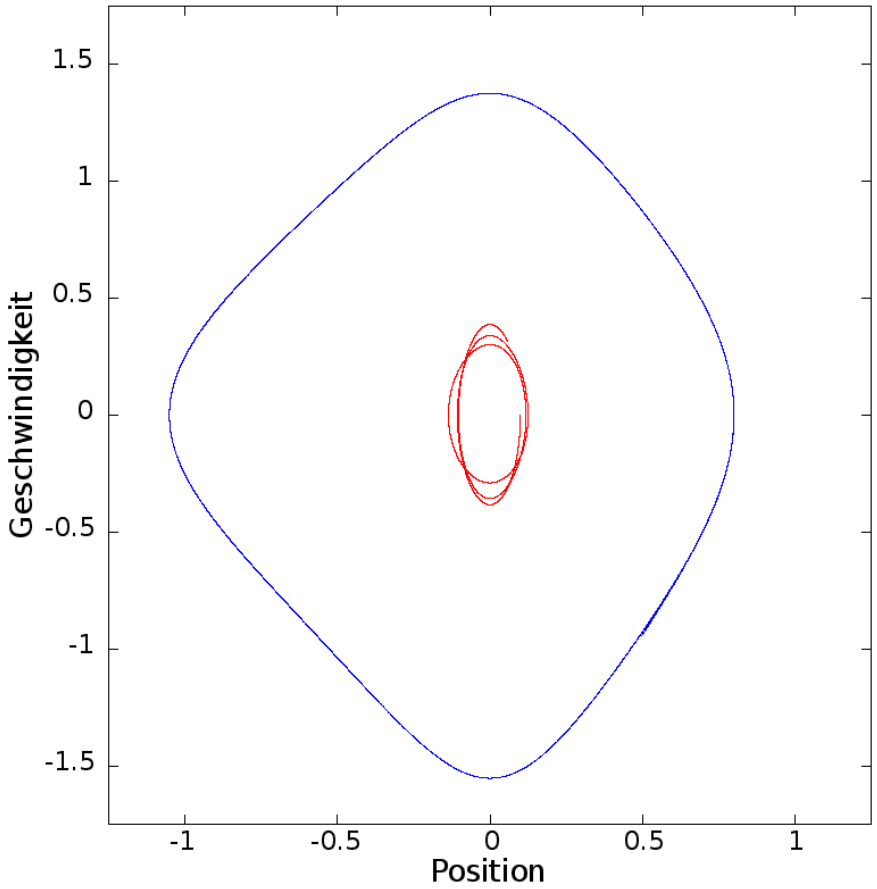
$$\dot{z} = v$$

$$\ddot{z} = \dot{v} = -\frac{z}{\left\{ 1/4 \cdot \left[1 - e \cdot \cos\left(E \right) \right]^2 + z^2 \right\}^{3/2}}$$

Resultate: Phasendiagramm I

Sitnikov
G.Lochmann
Theorie:
Problem-stellung
Darstellung
DGL
Durchführung
Resultate:
Phasen-diagramm
SOS
Fazit

- Aus Integration viele Positionen und Geschwindigkeiten zu verschiedenen Zeitpunkten
- Einfachste Darstellung über Phasendiagramm

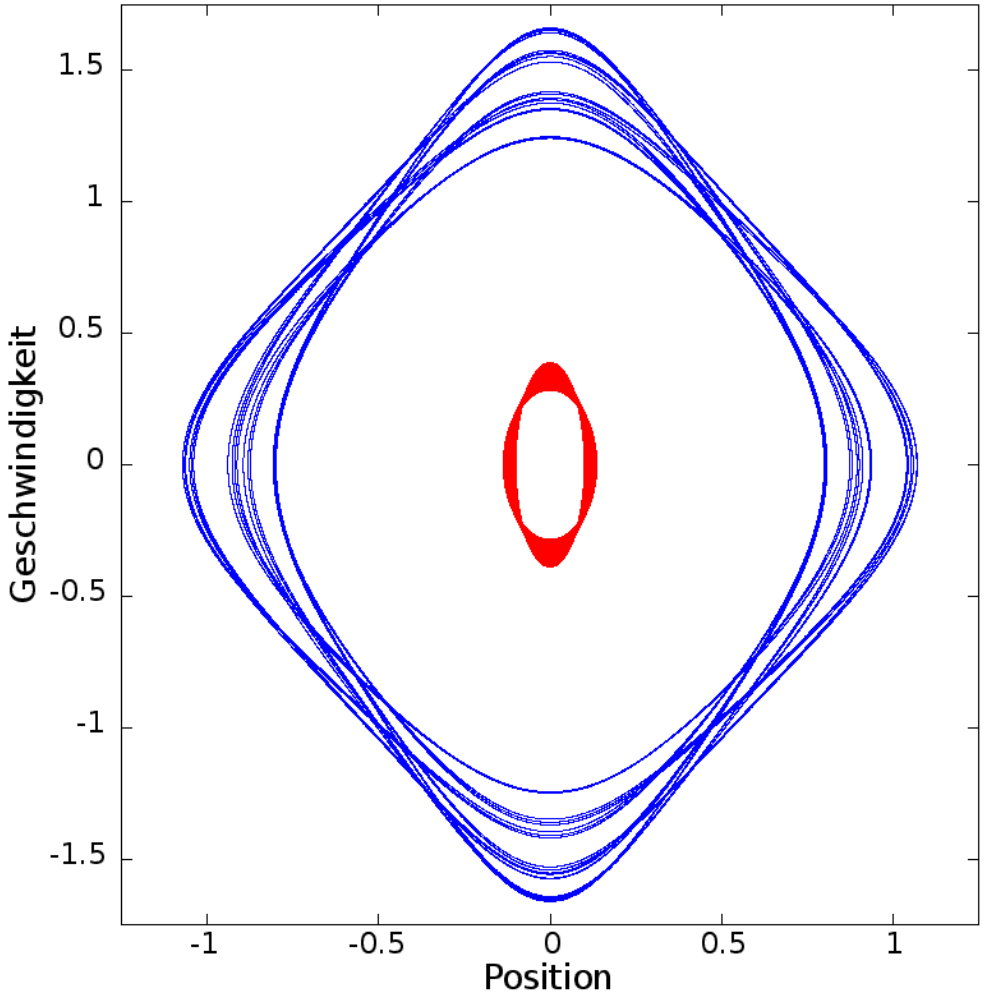


- Exzentrizität e = 0.2
- 2 Anfangsbedingungen:
  - Rot: Position = 0.1
    Geschwindigkeit = 0.0
  - Blau: Position = 0.8
    Geschwindigkeit = 0.0

Resultate: Phasendiagramm II

Sitnikov
G.Lochmann
Theorie:
Problem-stellung
Darstellung
DGL
Durchführung
Resultate:
Phasen-diagramm
SOS
Fazit

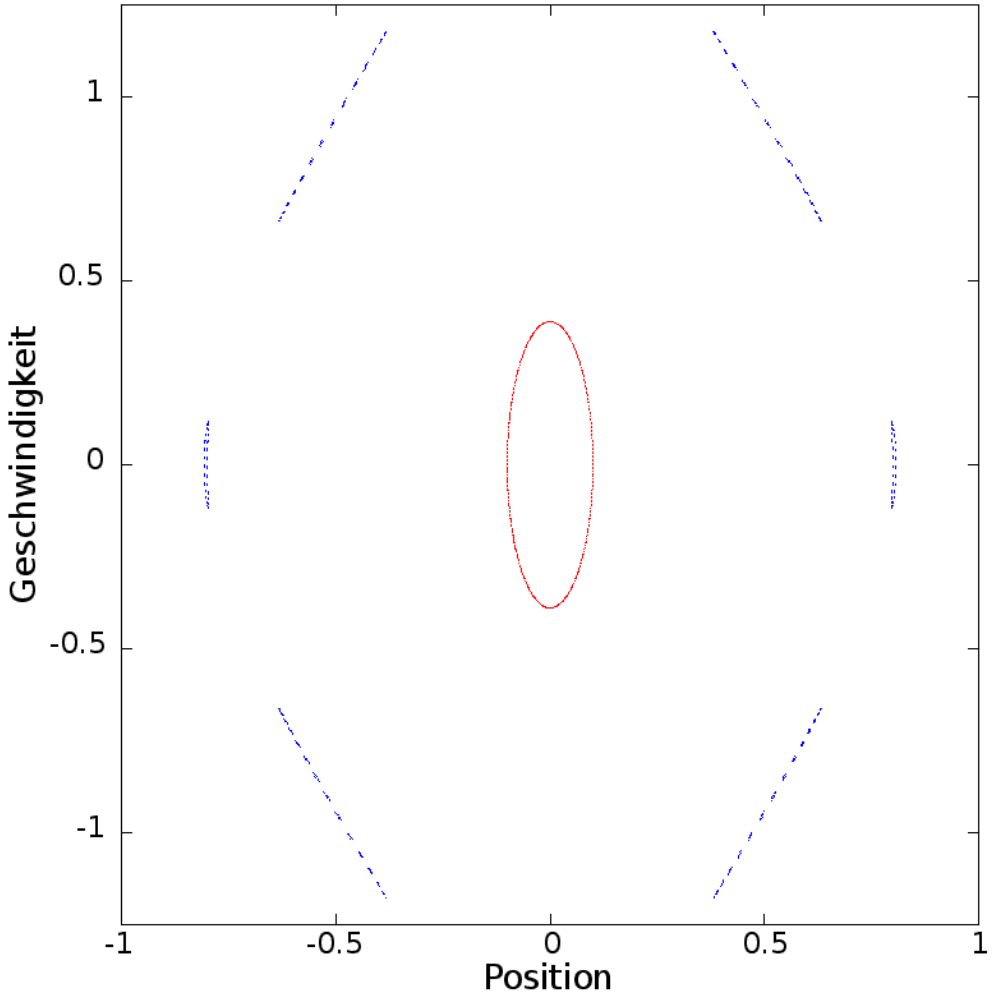
- Phasendiagramm nach 20 Umläufen



- Aussage über stabile oder instabile Bahn
- Mehr Information durch: Surface Of Section

Resultate: Surface Of Section I

- Surface Of Section: Punkte aus dem Phasendiagramm bei denen die Primärmassen einen Umlauf vollendet haben



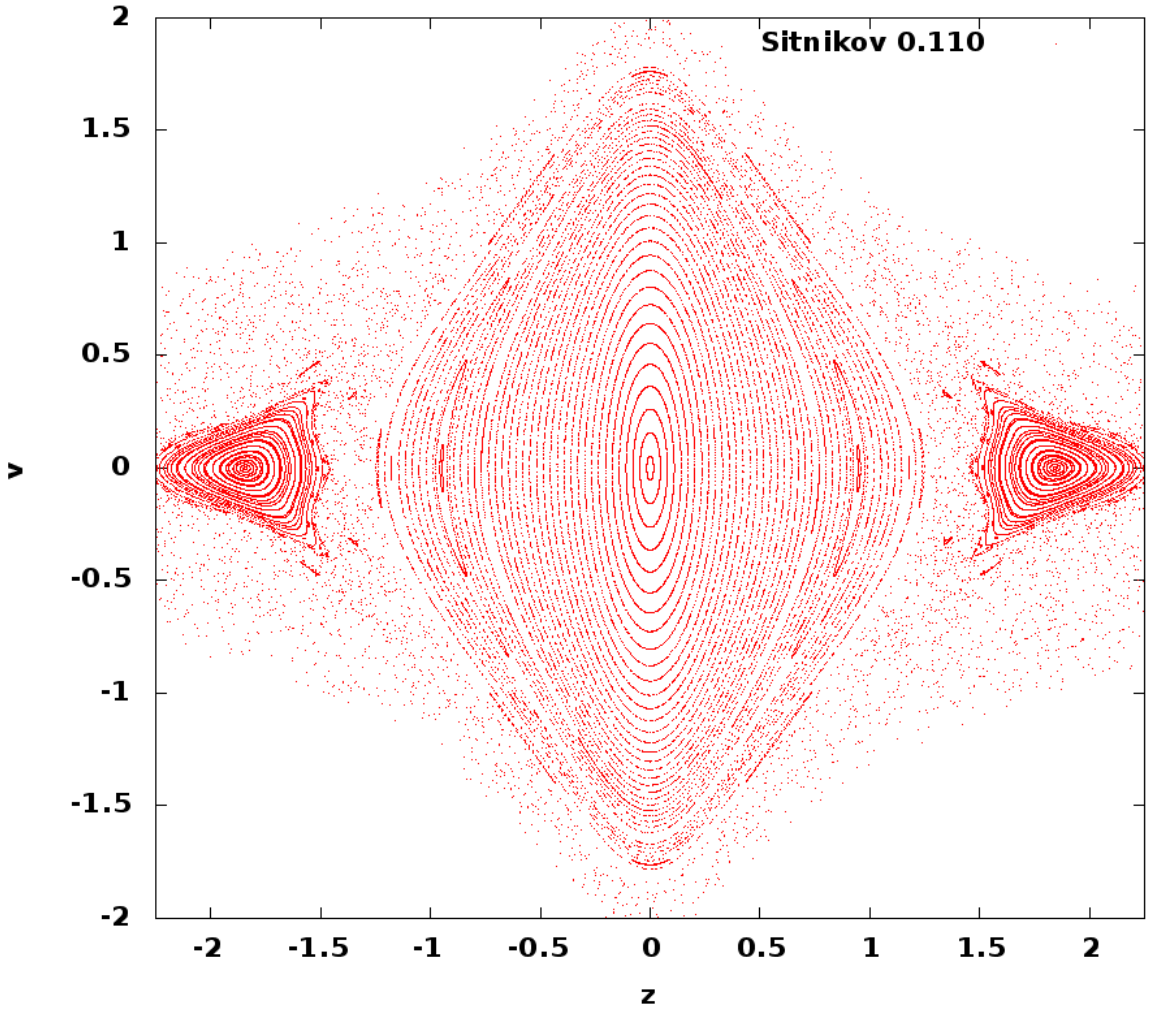
- 800 Umläufe der Primärmassen
- Informationsgewinn:

  gekoppelte Bewegung

Resultate: Surface Of Section II

Sitnikov
G.Lochmann
Theorie:
Problem-stellung
Darstellung
DGL
Durchführung
Resultate:
Phasen-diagramm
SOS
Fazit

- Surface Of Section für viele Anfangsbedingungen



- „Resonanz“ bildet Insel stabiler Bewegung
- Exzentrizität von 0.11 bis 0.7
- Zeigt Resonanzen für verschiedene Systeme

Fazit und Ausblick

Sitnikov
G.Lochmann
Theorie:
Problem-stellung
Darstellung
DGL
Durchführung
Resultate:
Phasen-diagramm
SOS
Fazit

- Fazit:
  - Sitnikovproblem viel diskuttiert
  - Neu: Programmierung der Grafikkarte
  - Trotz eingeschränkter Genauigkeit gute Resultate
- Ausblick:
  - Wie viele Rechenschritte bleiben die Bahnen stabil?
  - Ab wann lösen sich die 2:1 Resonanzen von der Hauptinsel?