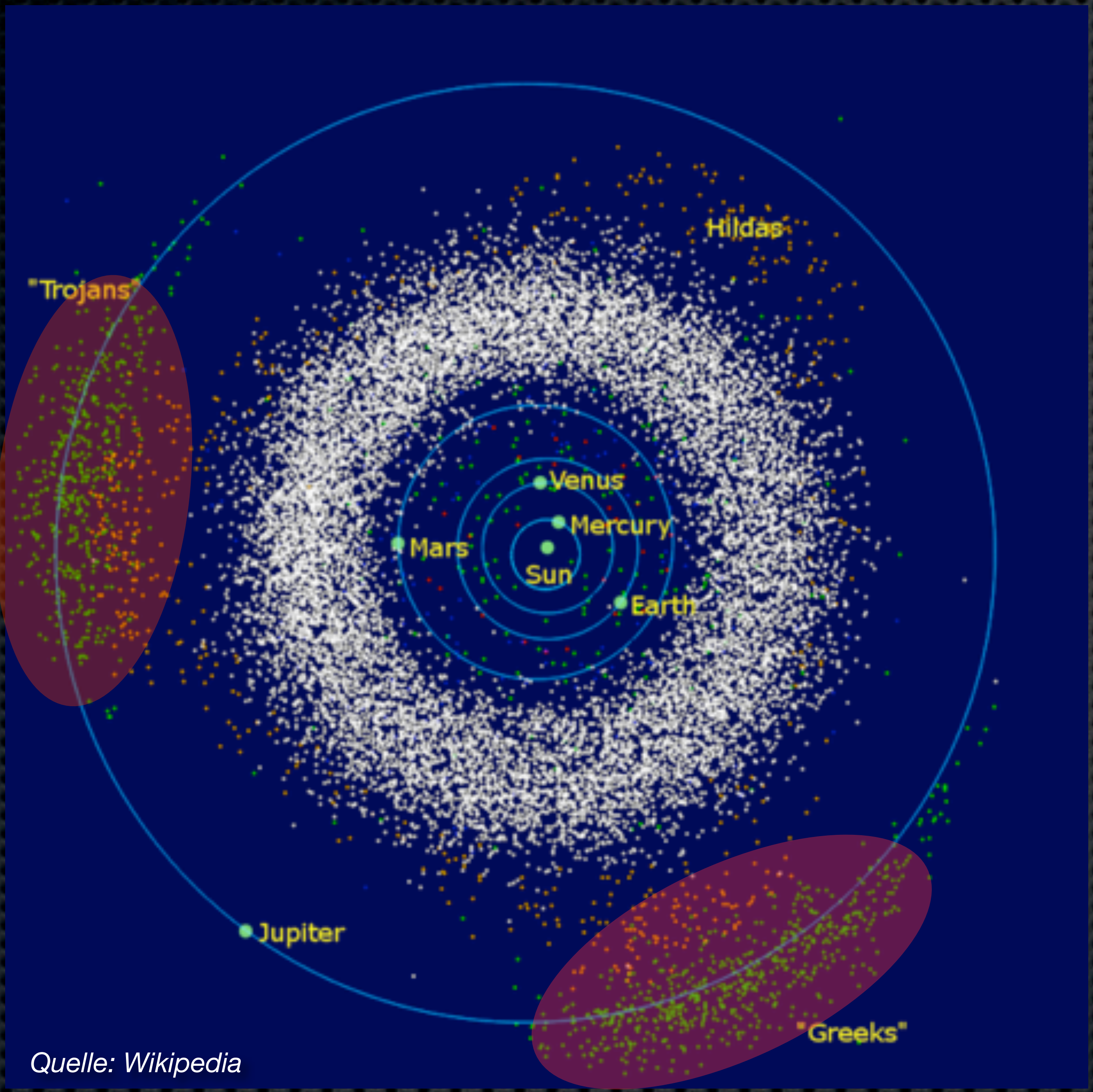
Jumping Trojans

by Florian Ragossnig

Überblick

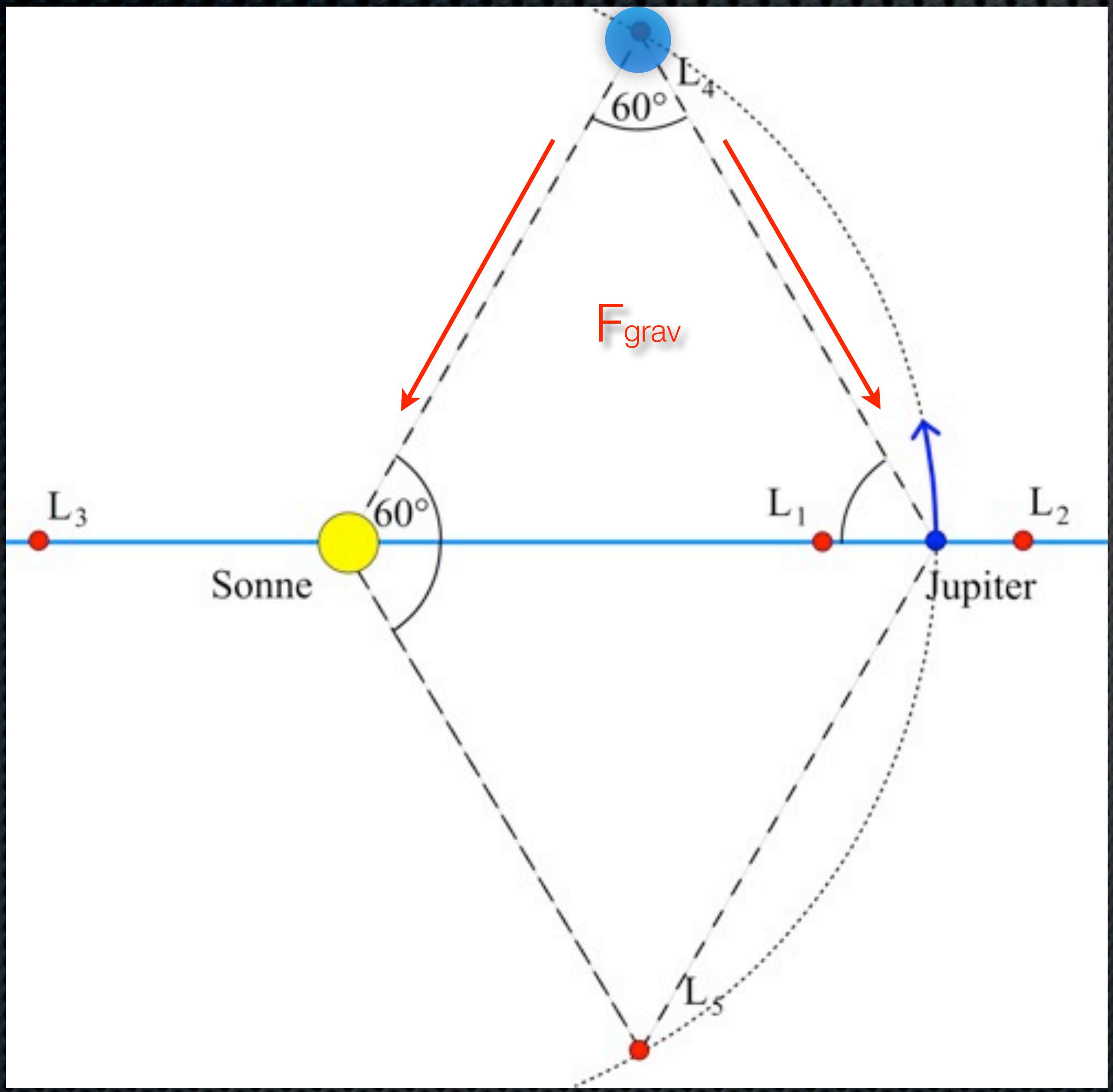
- Was sind Trojaner?
  - Definition
  - Lagrange Punkte
- Das elliptische eingeschränkte 3 Körperproblem
  - Einführung in das 3 Körperproblem
  - Transformation
  - Bewegungsgleichungen für den Trojaner
- Lösung mittels Lie Reihen
- Was sind nun “springende Trojaner”?

Was sind Trojaner?



- Asteroiden, die einem Planeten (Jupiter) auf seiner Bahn um den Stern vorauseilen oder folgen.
- Trojaner befinden sich auf Orbits um die Librationspunkte L_4 und L_5.
- Ester entdeckter Trojaner: Achilles. Entdeckt 1906 von Max Wolf
- Derzeit 1851 (L_4) und 1407 (L_5) Trojaner bekannt (Stand 8.8.2009)

Langrange Punkte

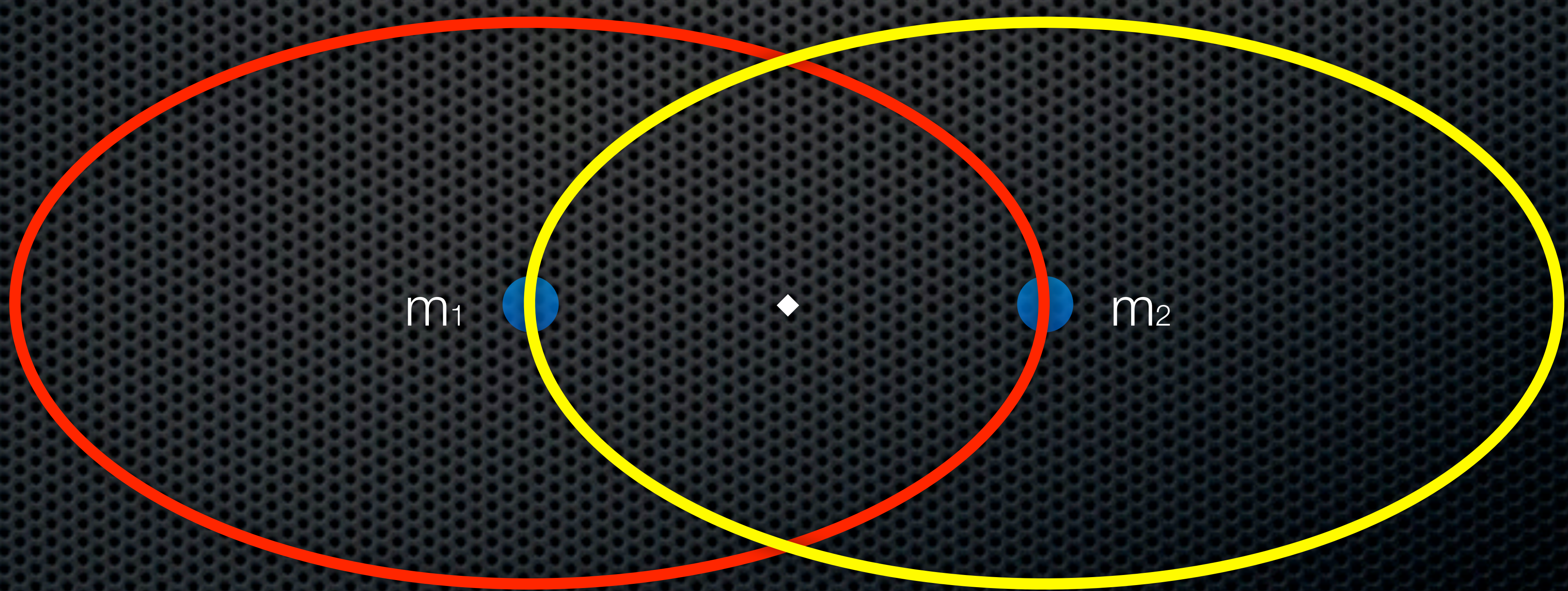


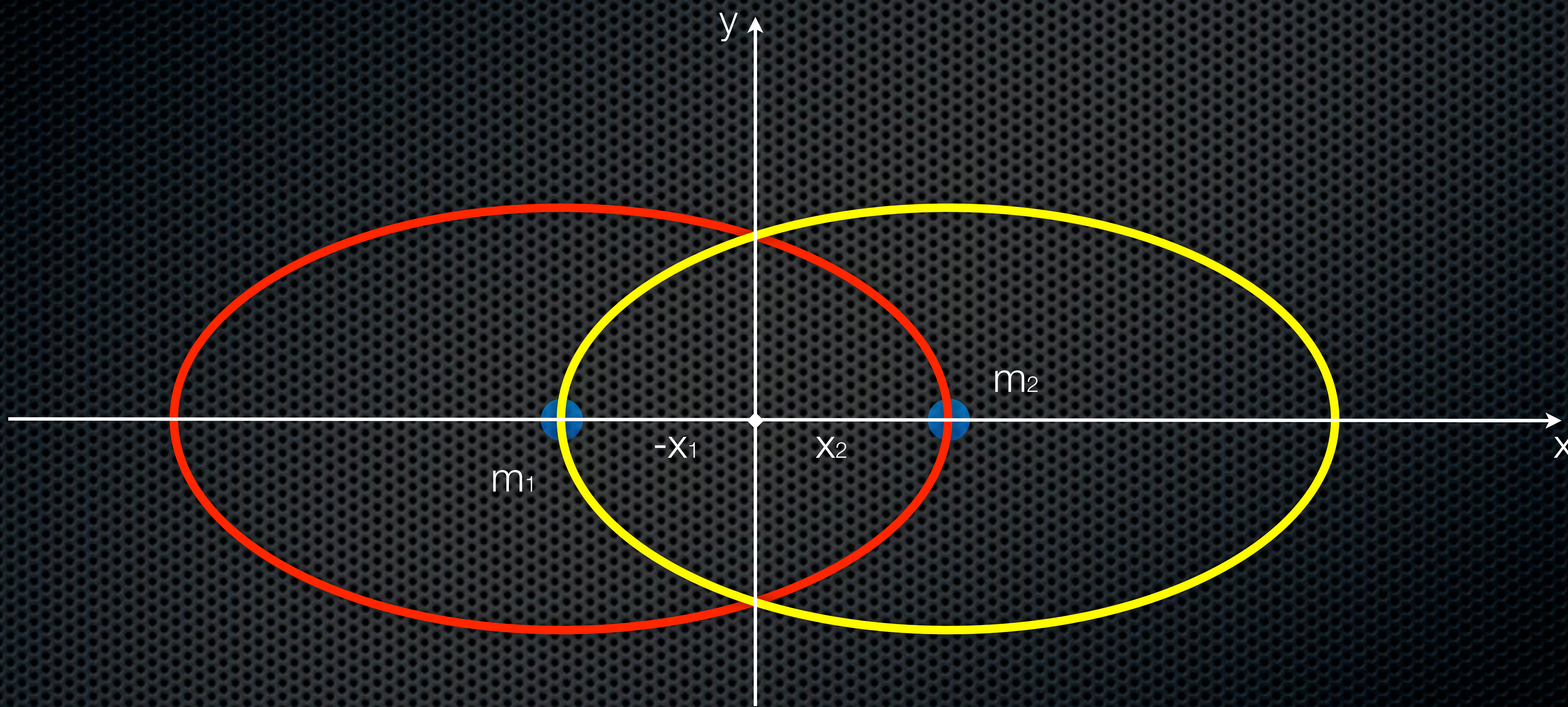
Quelle: Wikipedia

- Kräftegleichgewicht zwischen Anziehungskräften der Hauptmassen und Zentrifugalkraft.
- Librationspunkte L_1, L_2 und L_3 sind instabil -> hier können sich keine Massen für längere Zeit aufhalten.
- L_4, L_5 stabile Punkte (Potentialtopf)

Himmelsmechanik

- 3 Körper Problem nicht geschlossen lösbar
- “eingeschränkt” <=> 3. Masse sehr leicht
- Gleichungen für ungestörtes 2 Körper Problem

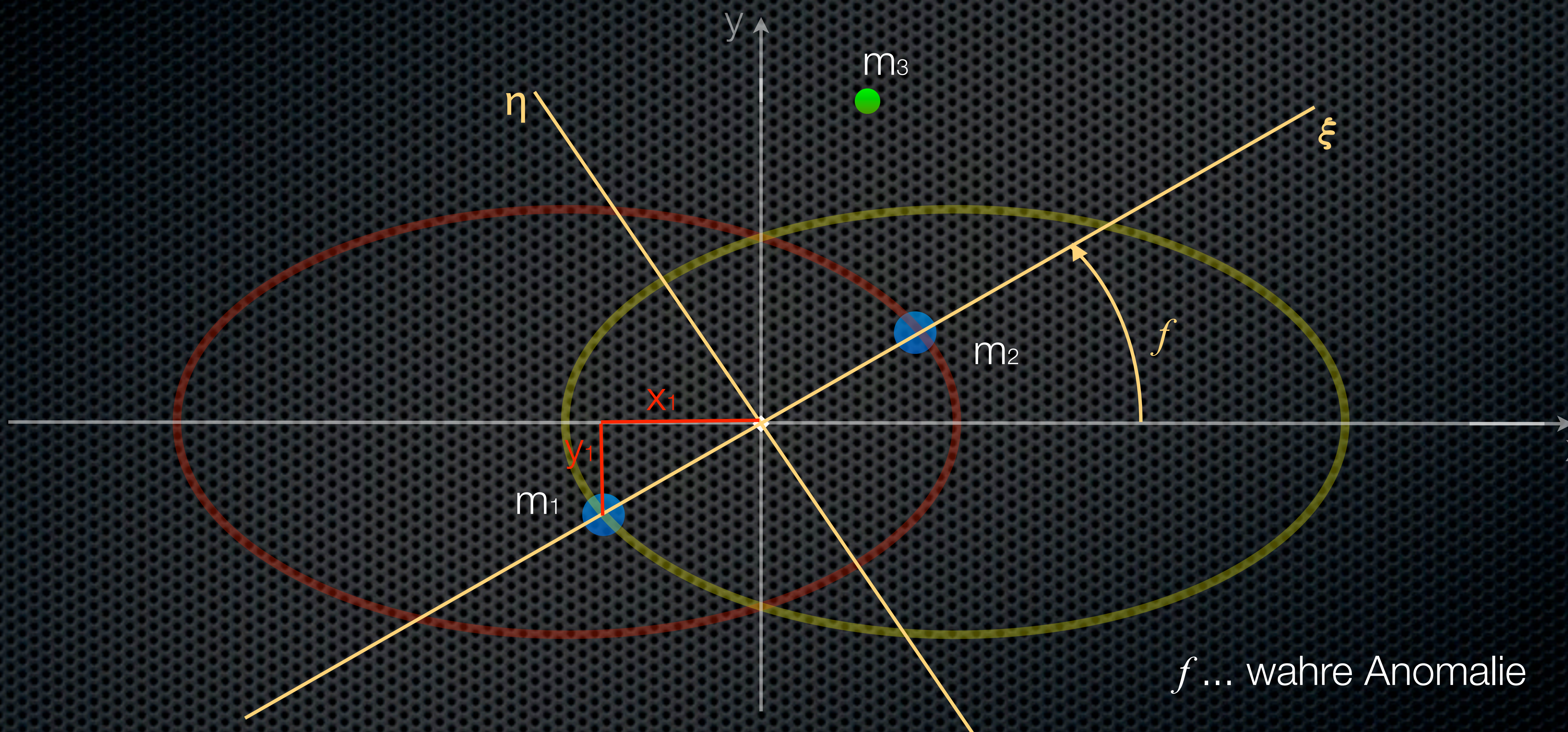



y
m2
-x1
x2
m1
x

$x_1 = -\mu_2 \cdot r \cdot \cos f$
$y_1 = -\mu_2 \cdot r \cdot \sin f$

$x_2 = \mu_1 \cdot r \cdot \cos f$
$y_2 = \mu_1 \cdot r \cdot \sin f$

$x = \xi \cdot \cos f - \eta \cdot \sin f$
$y = \xi \cdot \sin f - \eta \cdot \cos f$



f ... wahre Anomalie

Rotierendes, pulsierendes Koordinatensystem

- Transformation: $\xi = rX$ und $\eta = rY$
- Hauptmassen befinden sich auf “fixen” Pos. (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2)
- Wahre Anomalie als unabhängige Variable definieren

$$\partial t = \frac{1}{h} r^2 \partial f$$

- Damit kann die Potentialfunktion wie folgt definiert werden:

$$\Omega = \frac{1}{1 + e\cos(f)} \left[\frac{1}{2}\left(X^2 + Y^2\right) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} + \frac{1}{2}\mu_1\mu_2 \right]$$

- Und die (transformierten) Bewegungsgleichungen lauten:

$$X'' - 2Y' = \Omega_X \qquad Y'' + 2X' = \Omega_Y$$

Lösung mittels Lie Reihen

Quelle: Wikipedia

- Entwickelt von Marius Sophus Lie (1870)
- Lie Integration -> Verfahren zur numerischen Lösung von DGL's
- Gleichungen werden durch analytische Differentiation anstatt durch analytische Integration gelöst
- Vorteil in der Numerik -> sehr genaues Verfahren

Lie Operator ist linearer Differentialoperator und hat Form:

$$D = \theta_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \theta_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \theta_3 \frac{\partial}{\partial z_3} + \ldots + \theta_n \frac{\partial}{\partial z_n}$$

Angewendet auf Funktion f(z) ergibt sich die Lie Reihe:

$$L(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n f(z) = f(z) + tDf(z) + \frac{t^2}{2!} D^2 f(z) + \ldots$$

Umformung der Potentialfunktion

Ausgehend von Potentialfunktion der Form:

$$\Omega = \frac{1}{1+e\cos(f)}\left[\frac{\mu_1\rho_1^2+\mu_2\rho_2^2}{2}+\frac{\mu_1}{\rho_1}+\frac{\mu_2}{\rho_2}\right]$$

Definieren Variablen:

$$\rho_1^2 = \left(X-\mu_2\right)^2 + Y^2 \qquad \rho_2^2 = \left(X+\mu_1\right)^2 + Y^2$$

$$E = e\cos(f) \qquad F = \frac{1}{1+E}$$

$$U_1 = \mu_1\left(X-\mu_2\right) \qquad U_2 = \mu_2\left(X+\mu_1\right)$$

$$R_1 = -\frac{1}{\rho_1^3} \qquad R_2 = -\frac{1}{\rho_2^3}$$

$$A = X + U_1R_1 + U_2R_2$$

Weitere Vereinfachung

Allgemein gilt:

$$DX = X'$$

$$D^2 X = 2Y' + \Omega_x = 2DY + \frac{1}{1+e\cos(f)}\left[X - \frac{\mu_1(X-\mu_2)}{\rho_1^3} - \frac{\mu_2(X+\mu_1)}{\rho_2^3}\right]$$

Mit zuvor definierten Variablen folgt vereinfachte Form:

$$D^2 X = 2Y' + \Omega_x = 2DY + FA$$

Damit ergeben sich für alle höheren Lie Terme (p≥0):

$$D^{p+2} X = 2D^{p+1} Y + \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} D^{p-j} F * D^j A$$

DF und DA werden wiederum in Einzelelemente aufgespalten.

Lösung der Bewegungsgleichungen nach Lie

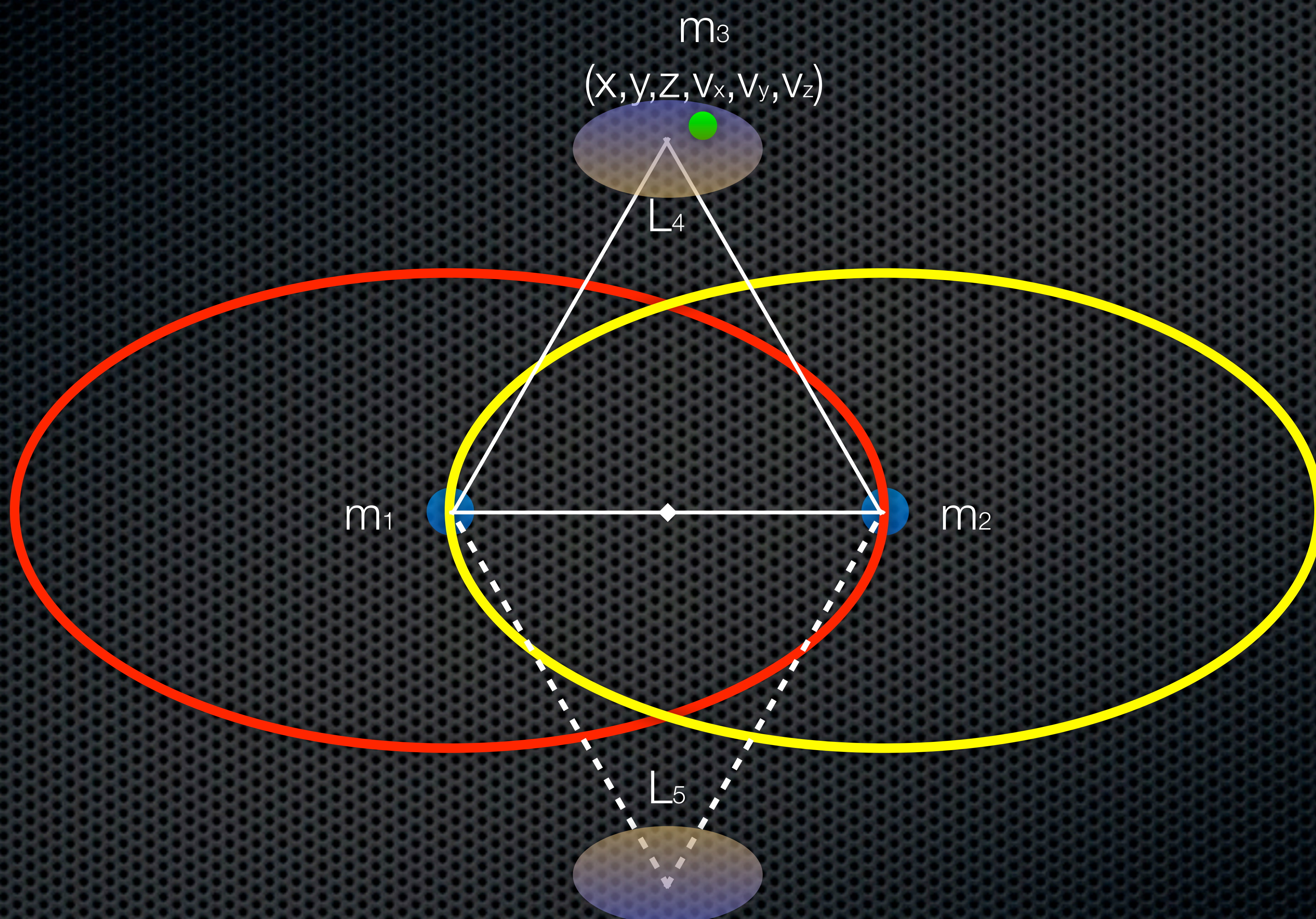
$$X(f) = X_0 + DX_0 * (f - f_0) + \sum_{p=0}^{\infty}\left[2 * D^{p+1}Y_0 + \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j} D^{p-j}F_0 * D^j A_0\right] * \frac{(f - f_0)^{p+2}}{(p+2)!}$$

$$Y(f) = Y_0 + DY_0 * (f - f_0) + \sum_{p=0}^{\infty}\left[-2 * D^{p+1}X_0 + \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j} D^{p-j}F_0 * D^j B_0\right] * \frac{(f - f_0)^{p+2}}{(p+2)!}$$

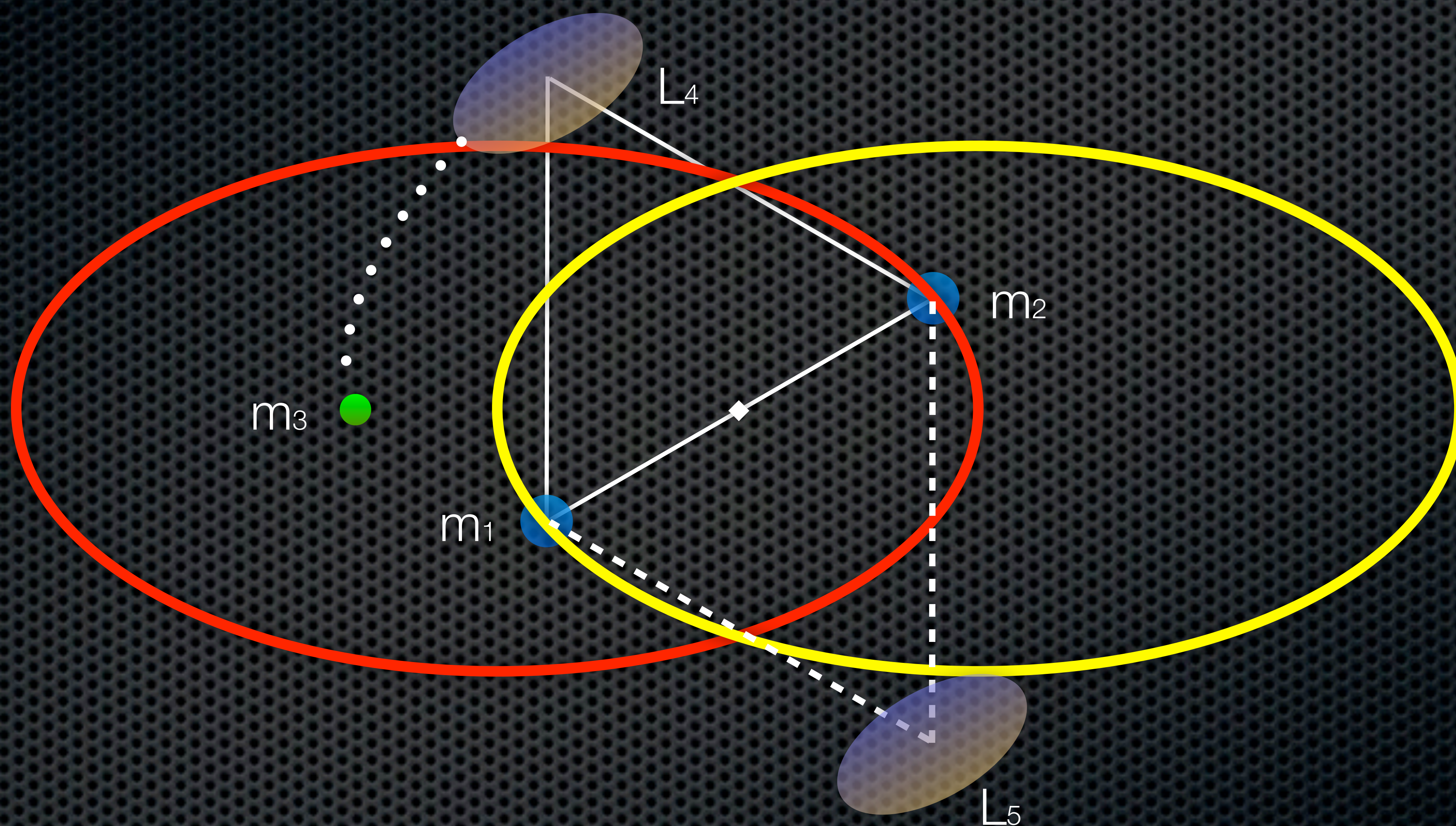
Was sind springende Trojaner?

- Annahme: Trojaner hat ein Set von Anfangsbedinigungen (x,y,z,v_x,v_y,v_z), sodass er den stabilen Bereich (L_4) nach einigen Umdrehungen verlässt.
- Die Bewegung des Trojaners ist nun genau so gerichtet, dass er sich entlang einer äquipotential Linie Richtung L_5 bewegt.
- Verharrt die Masse nun ein paar Umdrehungen im stabilen Bereich um L_5, spricht man von einem “springenden Trojaner”.

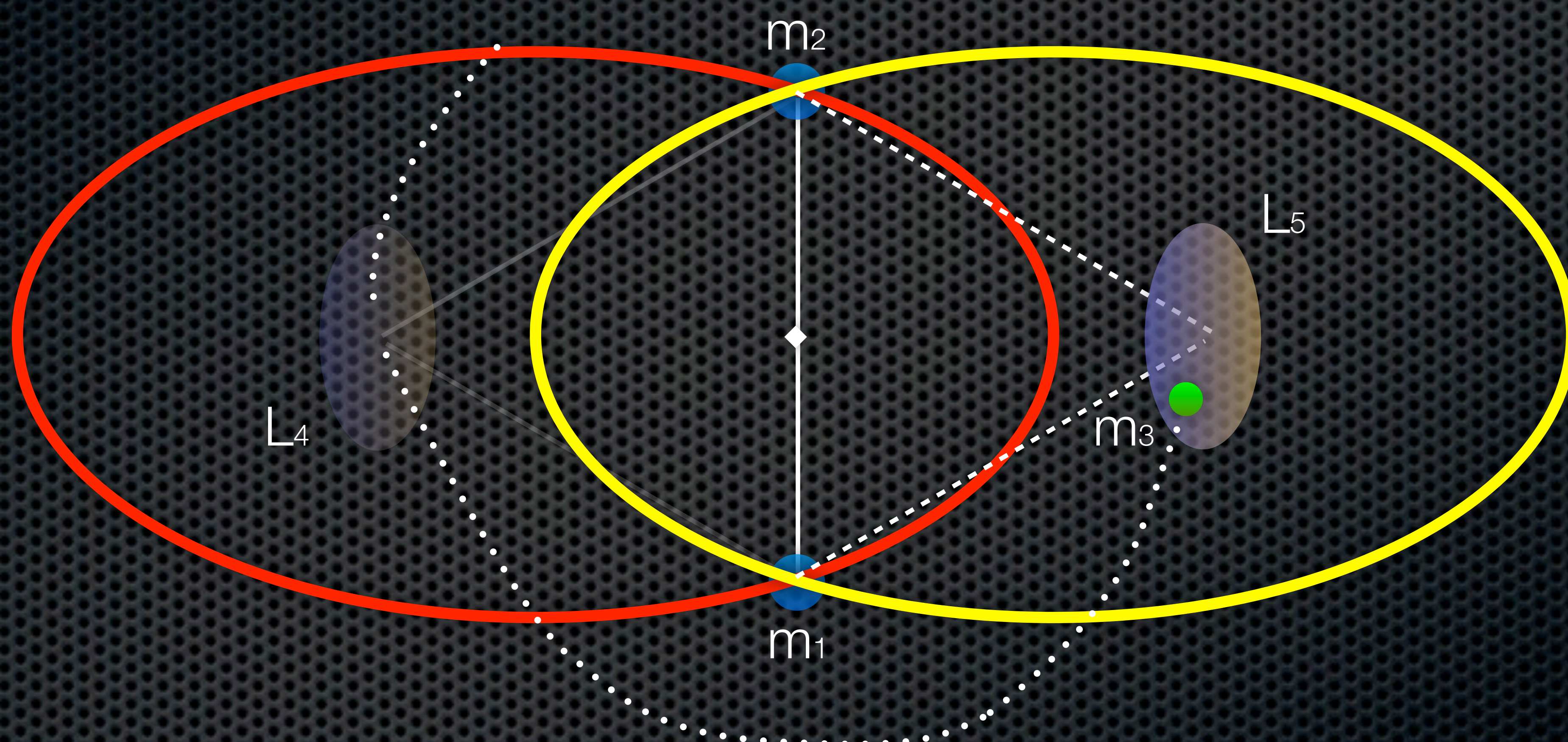
1.) Körper mit Anfangsbedingungen in L_4



2.) Körper wurde aus dem stabilen Bereich herausgeschleudert

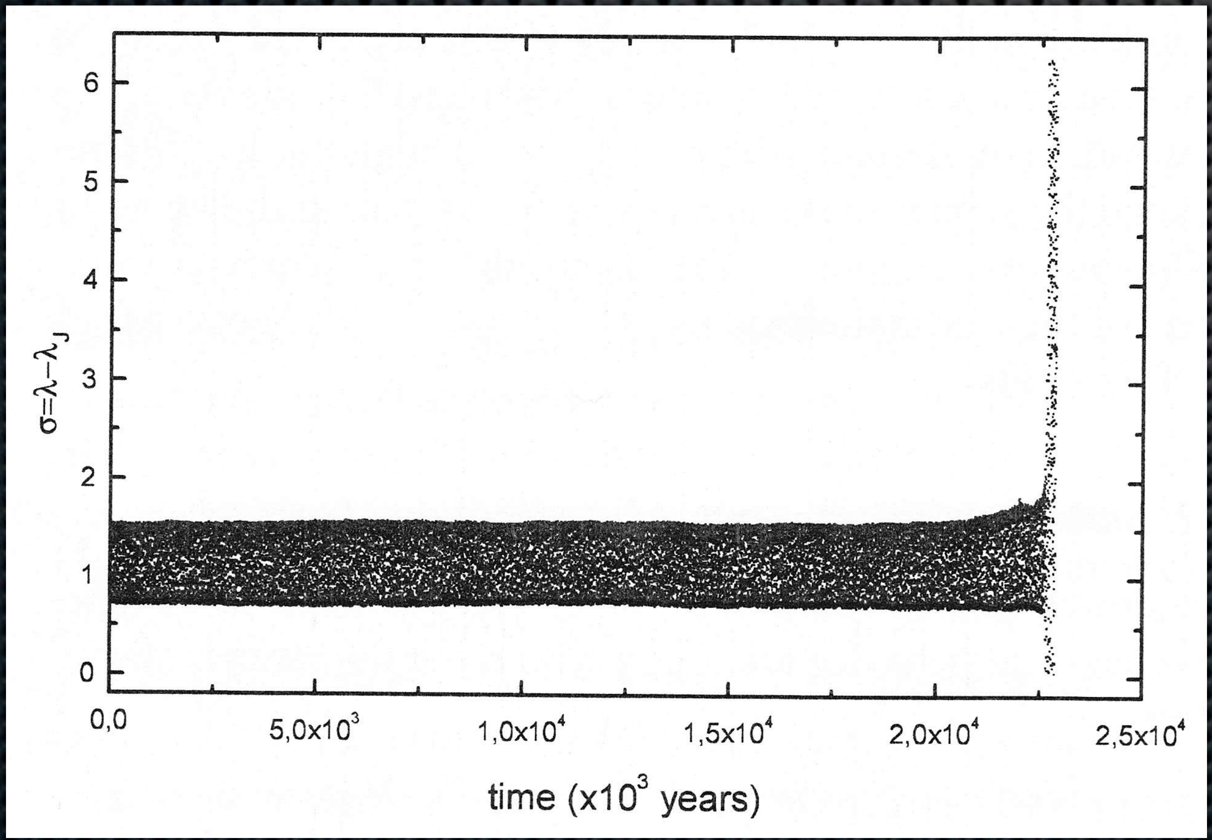


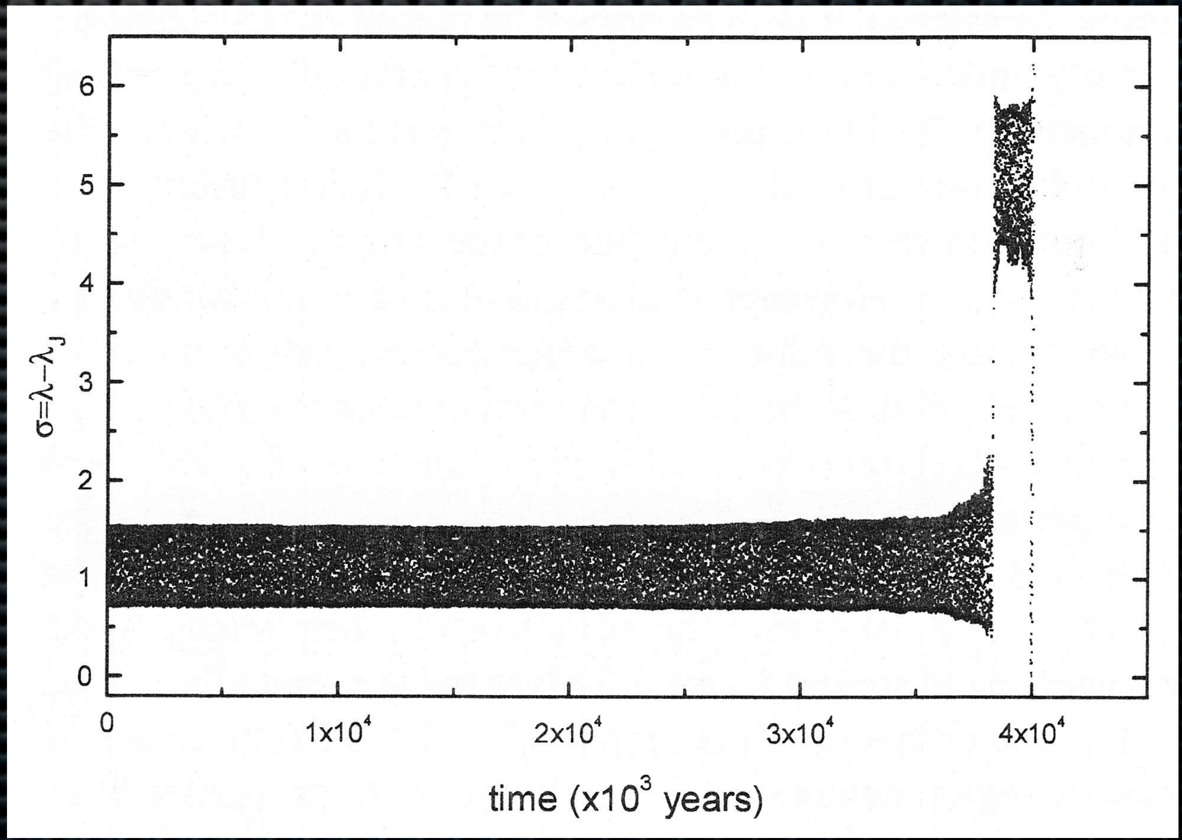
3.) Bahnkurve des Trojaners so, dass er wieder eine Zeit lang im stabilen Bereich verharrt



Resultate

- Resultate beziehen sich auf “Thersites: a jumping Trojan?” von K. Tsiganis, R. Dvorak und E. Pilat-Lohinger; (11 Juni 1999)
- Untersucht wurden 16 Objekte mit ähnlichen Orbits wie Thersites über einen Integrationszeitraum von 50 Mio. Jahre. Hier wurden n- Körper berücksichtigt.
- 20% der Objekte von der Anfangsverteilung verließen den stabielen Bereich innerhalb der Integrationszeit und einer dieser Asteroiden sprang tatsächlich von L_4 nach L_5.





Quelle: Thersites: a “jumping Trojan”, K. Tsiganis, R. Dvorak, E. Pilat-Lohinger

Literaturnachweis

Szebehely, Victor (1967): Theory of Orbits. Academic Press, INC.

Delva, Magda (1984): Integration of the elliptic restricted three-body problem with Lie series. Celestial Mechanics 34 (145 - 154)

Celletti, Alessandra (2009): Stability and Chaos in Celestial Mechanics. Springer Verlag, Berlin

Tsiganis K., Dvorak R., Pilat-Lohinger E. (1999): Thersites: a “jumping Trojan?”. A&A

Vielen Dank

für die Aufmerksamkeit!