

Diss.^{4o}
3725
7

Diss. 7. 3725 (7)
GERLINGIANAE IN DEMONSTRANDIS

QUIBUSDAM

SPHAERICA TRIGONOMETRIAE

THEOREMATIS METHODI CENSURA.

PROGRAMMA

QUO AD ORATIONEM

QUA

PROFESSORIS PHILOSOPHIAE EXTRAORDINARII

MUNUS SIBI DEMANDATUM

D. II FEBR. HOR. XI

IN AUDITORIO ACADEMICO PUBLICE AUSPICABITUR

AUDIENDAM INVITAT

FRIDERICUS GUILIELMUS LUDOVICUS WAHL

PHILOS. D. AA. LL. M.

CUM TABULA AENEA.

IENAE

APUD CROECKERUM BIBLIOPOLAM

MDCCCXXV.



1972545

BLUMIO

ICTO VIMARIENSI MERITISSIMO

AMICO CARISSIMO

HASCE PAGELLAS

D. D. D.

AUCTOR.

B L U M I O

TO THE PRESIDENT OF THE UNITED STATES

AND TO THE SENATE

OF THE UNITED STATES

BY

Gerlingius V. D., apud Marburgenses professor celeberrimus, qui multis suis iisdemque praeclaris astronomicis Incubrationibus honorificentissimam sibi famam comparavit, anno 1815. primas planae et sphaericae trigonometriae lineas *) edidit, quarum magna utilitas ita invaluit apud plerosque, ut et germanicarum et externarum academiarum doctores iis in docendo ducibus utantur.

In demonstrandis autem pluribus sphaericae trigonometriae propositionibus *Gerlingius* novam sibi plane propriam rationem iniit, qua varia vitia, quae, ut doceri sphaerica trigonometria solebat, ex alio in alium doctrinae libellum transierant, bene emendare, singulasque hujus doctrinae partes planiores et certiores reddere egregie ei contigit. At vero in nova illa via nullius ante trita solo V. D. haud sane mediocriter etiam a vero ita aberravit ut plures prorsus falsae propositiones occurrant.

*) *Grundriss der ebenen und sphärischen Trigonometrie, entworfen von Dr. Christ. Ludw. Gerling. Götting. 1815.*

Itaque, quum, si recte meminimus, hi errores a nemine adhuc diligenter perlustrati, refutati emendatique sint*), dum id ipsum hac scriptiuncula facimus, eo minus existimavimus inane nos opus subiisse, quod a maxime spectabili matheseos doctore profecti sunt; immo si in quibus ille rebus deliquerit, accurate absque ullo studio et cupiditate monstraverimus, ipsi Gerlingio observantiae nostrae nos dedisse putabimus documentum.

Ceterum cum ipsi his primis lineis ducibus in docendo utamur, hancce scriptionem auditoribus nostris in manus commodari posse existimavimus. Qua potissimum de caussa partem IV huic libello adiunximus additamentum.

*) Ephemeridibus literariis Jenensis, Lipsiensibus, Halensibus, Heidelbergensibus, Gotttingensibus diligenter perquisitis in Jenensibus tantum (*Jen. Allg. Lit. Z.* 1819. No. 174.) atque Lipsiensibus (*Leipz. Lit. Zeit.* 1817. No. 119.) primas illas Gerlingii lineas diducatas invenimus. Attamen uterque iudex hos errores praetermisit.

I.

Quos supra universe memoravimus errores, eos ex adhibita prorsus falsa propositione ortos esse dico, quam Gerlingius in libri jam laudati praefatione, p. X. tanquam veram protulit simul innuens, argumentum ejus e propositionibus cognitis facile posse repeti. Propositio autem haec est:

„Angulus inclinationis duorum planorum major est quovis angulo a duabus lineis rectis concluso, quae ex aliquo puncto lineae, in qua utrumque planum secatur, profectae, cum altera ejus parte acutos angulos efficiunt.“

Quam propositionem falsam esse, hac, opinamur, demonstratione intelligetur:

(Fig. 1.) Per C, sphaerae centrum, maximus circulus ADBA ponatur, in cujus plano linea CE in C ad perpendicularum erecta sit, usque ad sphaerae superficiem prolongata. Per CE porro planum ponatur, ita ut AEBA, maximi sphaerae circuli dimidiam partem, ad perpendicularum in circulo ADBA erectam habeas. Tum CF, CG ducantur lineae, quas cum EC acutos angulos efficere nemo in dubium vocabit. Quod si linea perpendiculari FH ex F in EC demissa planum ECAE circa EC movetur, sphaerae circulum FFI scribi patet, cujus radius FH in linea CE semper perpendicularis erit, et cujus planum ideo in plano ABEA perpendiculariter consistet. Sin autem ECAE dimidia ex parte rotaveris, F in I erit, et FC lineae CI servabit situm, ita ut lineae FC, CG angulum ICG efficiant.

Hic vero angulus ICG minor erit quovis angulo, quem lineae FC, CG quolibet in alio plani ECAE situ continent, ergo minor e. g. angulo fCG.

Ducantur enim lineae fG, IG; ex f in FI linea demittatur perpendicularis fK; porro scribatur KG, et per G linea GL, lineae FI parallela: quo facto IGL acutum et hanc ob causam KIG obtusum habebis angulum, unde $KG > IG$ erit. Sed quum planum FfIF in ABEA perpendiculari modo positum et FI linea sit, in qua ambo plana se mutuo secant, necesse est fKG rectus sit angulus, quare $fG > KG$, ideoque etiam $fG > IG$ *). Est autem $fC = IC$ et $CG = CG$, inde $ICG < fCG$.

Donec igitur ECAE dimidiam rotationem nondum perfecerit, angulus ICG semper minor erit quam angulus, quem FC et CG concludunt.

Lineae autem Ca et CB efficiunt angulum BCa inclinationis planorum ECaE et ECBE, similique ratione in universum hae lineae Ca, CB quovis situ, quem ECAE ante dimidiam rotationem peractam sed inter rotandum habeat, semper planorum ECBE, ECAE angulum inclinationis efficiunt. Quem vero angulum inclinationis continuata rotatione ad libitum diminui posse facile intelligitur, ita ut minor fiat quam ICG. Quod si igitur e. g. $aCB < ICG$ sit, tum aCB quoque $< fCG$ est, h. e. angulus inclinationis duorum planorum minor est angulo, quem duae in iisdem planis ductae lineae continent, quae e puncto lineae, in qua plana secantur, exeunt, et cum altera ejus parte acutos efficiunt angulos, unde illam a Gerlingio allatam propositionem falsam esse sponte colliges.

II.

Hanc autem in antecedentibus memoratam propositionem, cujus prorsus falsam rationem modo exposuimus, Gerlingius primum ad noti

*) Ex hac igitur demonstratione haec in universum liceat obtinere: Si inde ex E in arcibus duorum maximorum sphaerae circulorum EB, Ea pares arcus EI, Ef desecantur, et IG, fG scribuntur, linea GI, quae chorda in altero illorum circulorum exstat, minor est quam fG.

theorematis sibi propriam adhibet demonstrationem: „*Summam trianguli sphaerici angulorum majorem esse duobus rectis angulis.*“

Quod theorema sic demonstravit:

(Fig. 2.) „Triangulum datum sit sphaericum ABC. Sphaerae, cujus superficiei insideat triangulum, centrum sit K. Per tria puncta A, B, C planum pandatur, quo facto lineae rectae, in quibus ab hoc plano plana AKB, CKB, AKC secantur, triangulum planum ABC efficiunt. Quodsi angulum A'BC', qui planorum AKB, BKC inclinationis angulus est, rite construimus, hic (secundum propositionem in I dijudicatam) major est quam planus angulus ABC, quia ABK, KBC acuti sunt anguli, h. e. angulus sphaericus B major est quam planus ABC. Iisdem vero de causis sphaericus etiam angulus A > CAB et sphaericus angulus C > ACB. Jam quum $ABC + CAB + ACB = 2 R$, angulorum sphaericorum $A + B + C$ summa > 2 R erit.“

Quam vero Gerlingii demonstrationem veritate atque evidentia carere luce clarius est, quum falsa in I allata propositione nitatur. Profecto haud erit difficile demonstratu, sententiam: „*Quemque angulum sphaericum, ut B, majorem esse plano angulo ABC, cujus vertex cum modo dicti anguli sphaerici vertice idem sit, et cujus latera chordae sint eorum arcuum, qui eundem illum angulum sphaericum concludant,*“ plane falsam esse. Quod vero ita esse ex sequentibus patescet.

(Fig. 3.) Duo maximi sphaerae circuli DAB, DCB in BD se invicem ita secant, ut acutus inde cujuslibet magnitudinis sphaericus existat angulus B. Quodsi in B lineam tangentem BE ad arcum DAB scripseris, $DBE = R$ erit. Porro in arcu DAB duo ad libitum signentur puncta A, F, quo facto, ductis BA, BF, angulum accipies $ABF < R$. Deinde signatis inter A et D, pari modo inter F et B punctis a, f, ductis etiam aB, fB, $aBf > ABF$ est, aBf vero $< R$. Quodsi simili ratione construere pergimus, vel si inde ab A puncta sumimus, quorum quodque magis vicinum est puncto D, iterumque inde ab F puncta, quorum quodque puncto B propius adjacet, si denique cum omnibus his punctis B rectis lineis jungimus, anguli existunt magis magisque augescentes, recto-

que angulo DBE magis magisque appropinquantes. Qua via tandem angulum assequi poterimus majorem quam acutus angulus sphaericus B est. Ideoque aBf major sit quam sphaericus angulus B.

Jam si arcus BC, Bf exaequaverimus, rectasque scripserimus lineas BC, aC, af, linea aC (conf. not. p. 8.) $>$ af erit. Itaque quum $BC = Bf$ et $aB = aB$, $aBC > aBf$ sit necesse est. Sed aBf major fuit quam angulus sphaericus B, quocirca aBC quoque major est eodem angulo B. Unde sequitur, Gerlingii, quam supra memoravi, opinionem prorsus falsam esse.

Quae cum ita sint, theorema: „*Summam angulorum trianguli sphaerici majorem esse duobus rectis angulis*“ alia quam Gerlingii ratione demonstrandum erit. Quod facillime quidem potest effici, dummodo eam, de qua post locuturi sumus, cognitam a Gerlingio serius demonstratam jam nunc demonstremus propositionem.

(Fig. 4.) Si e punctis A, B, C trianguli sphaerici 90 graduum distantia in sphaerae superficie arcus DE, EF, FD ducuntur, novum efficitur triangulum, triangulum polare vel supplementare, cujus anguli supplementa sunt laterum ex adverso jacentium trianguli ABC, et cujus latera supplementa angulorum ejusdem trianguli ex adverso jacentium erunt.

Demonstratio. Quia arcus EF 90 gradibus a puncto B, et arcus ED tantidem gradibus a puncto A distat, punctum E, quod utrique arcui EF et ED commune est, etiam 90 gradibus a punctis A et B distat. E igitur lateris AB polus est. Similibus de caussis F lateris BC, et D lateris AC polus est.

Ex polis E et D, AB usque G et AC usque H producantur. Quoniam igitur E circuli maximi ABG polus est, E a puncto G 90 gradibus distat, hincque $EG = 90^\circ$. Iisdem vero de caussis etiam $DH = 90^\circ$. Quae cum ita sint, $EG + DH = 180^\circ$. Sunt autem latera $EG + DH = EG + DG + GH = DE + GH$, quamobrem necesse est $DE + GH = 180^\circ$. Cum vero GH anguli A mensura sit, $DE + A = 180$ gradibus est, h. e. DE anguli A ad 180° supplementum est. Simili ratione ostenditur, EF anguli B, et FD anguli C esse supplementum.

E polo E, GA usque L producat, quo facto GL anguli E mensura est. Ut GA, ita etiam (DE ab A et EF a B 90° distantibus) $BL = 90^\circ$ est, quare $GA + BL = 180^\circ = BL + GB + BA = GL + BA$. Quum vero GL anguli E mensura sit, $BA + E$ quoque $= 180^\circ$ est, i. e. E lateris BA est supplementum.

Pari modo demonstrari potest, D lateris CA et F lateris BC esse supplementum..

Atqui cum ex theoremate commodum demonstrato

$$DE + A = 180^\circ$$

$$EF + B = 180^\circ$$

$$FD + C = 180^\circ \text{ sint,}$$

$DE + EF + FD + A + B + C = 540^\circ$ erunt. Sed $DE + EF + FD < 360^\circ$ sunt, quocirca $A + B + C > 180^\circ$ erunt, i. e. *angulorum trianguli sphaerici summa major est duobus rectis angulis**).

III.

Falsam denique demonstrando Gerlingius propositionem huic theoremati adhibet: „*In rectangulo triangulo sphaerico quaeque cathetus ejusdem generis est atque angulus ex adverso jacens, i. e. minor aut major 90° , nempe prout hic angulus minor aut major 90° est.*“ Cujus theorematidis demonstratio, quam Gerlingius obiter tantum significavit, ad verbum translata haec est**):

„Triangulum rectangulum effecturus per axem (Fig. 5.) QQ' quemlibet maximum circulum ponas. Si angulus $RT'S < 90^\circ$ est, mensura quoque ejus, $RS < 90^\circ$ erit. Quisque vero a planis TRT' et TST' abscissus per QQ'

*) Hae posteriores demonstrationes, uti constat, apud plerosque leguntur. Quod nihilo secius eas hic etiam exposuimus, hac nos caussa volumus excusatos esse, hisce, ut supra memoravimus, pagellis primarum Gerlingii linearum supplemento nos in scholis nostris esse usuros.

**) Vide Gerlingium l. l. §. 101. p. 65.

positi alius maximi circuli arcus minor est quam RS , (propterea quod RKS inclinationis utriusque plani angulus, ideoque major est, quam quisque alius ejusdem verticis angulus, cujus utrumque crus in iisdem planis cum KT vel KT' acutus angulos efficit) ideoque etiam minor 90° . Sin autem angulus RTS' major est 90° , mensura quoque ejus RS' major est, et eo magis quivis per QQ' positi alius maximi circuli arcus, quem plana TRT' et $TS'T'$ abscindunt." Haec est Gerlingii demonstratio.

Quae tamen propter falsum fundamentum plane evanescit, nihilque restat quam ut eam emendemus. Qua de causa hoc novum theorema demonstremus necesse est.

(Fig. 6. 7. 8.) *Duo plana AB , AC se invicem secant in AD , utrumque a tertio plano EFG ita secetur, ut hoc in AC perpendiculari modo consistat, unde angulus EFG oritur. Quod si*

1) *utriusque plani AB , AC angulus inclinationis rectus angulus est, EFG hunc inclinationis angulum aequat. Si contra*

2) *angulus inclinationis illorum planorum acutus est, et FG , consequenter etiam FE cum AD obliquos angulos efficit, EFG minor erit angulo inclinationis. Denique si*

3) *saepius dictus inclinationis angulus obtusus est, EFG major erit eodem angulo.*

Demonstratio 1. (Fig. 6.) Sit inclinationis angulus $= R$. Ex puncto E in planum AC perpendicularum demittatur, quod, cum planum EFG perpendiculari modo in AC positum sit, in lineam FG incurrat necesse est. Sed cum AB quoque perpendiculari modo in AC consistat, idem illud perpendicularum etiam in AD incurret. Atqui AD et FG lineis nonnisi punctum F commune est, ergo EF dictum est perpendicularum, et $EFG = R =$ inclinationis angulo planorum AB , AC .

2) (Fig. 7.) Inclinationis angulus HFI planorum AB , AC acutus sit. In FH punctum H ad libitum sumatur, e quo perpendicularum demittatur in AC . Cum planum inclinationis anguli HFI perpendiculari modo in AC consistat, hoc idem perpendicularum in lineam FI necessario incurret. HI sit dictum perpendicularum. Per H et I ducantur lineae HE et IG , lineae

AD parallelae, quo facto FE et FG secantur, et HE, IG parallelae erunt. Quod si ex E in AC demittitur perpendicularum, id ipsum, quia EFG perpendiculari modo in AC positum est, in lineam FG, nec minus, quia planum EHIG perpendiculari modo in AC positum est, in lineam IG incidat necesse est. Lineis vero FG et IG nonnisi punctum G commune est, quamobrem EG illud perpendicularum sit necesse est. EG autem lineae HI, et HE lineae IG parallela est, quare HG parallelogramma, et $EG = HI$; EGF etiam $= R$ est. Cum porro IG parallela sit FD, et $IFD = R$; FIG quoque $= R$ est, consequenter $FG > FI$.

Quodsi triangulum rectangulum HFI triangulo rectangulo EFG ita superimponimus, ut I in G, IH in GE jaceat, H cadit in E, et IF in GF. Tunc autem F, vertex anguli HFI in K, inter F et G cadit. (fig. 9.) Tunc vero $EKG > EFG$, i. e. (fig. 7.) $HFI > EFG$.

3.) (Fig. 8.) Angulus inclinationis HFI planorum AB, AC obtusus sit. Quodsi IF, GF ex F recta ad L, M producis, $HFI + HFL = EFG + EFM$ est. Sed secundum demonstrationem 2, $HFL > EFM$ est, consequenter $HFI < EFG$.

Qua propositione stabilita theorema initio hujus §. allegatum: „*In rectangulo triangulo sphaerico quamvis cathetum cum angulo ex adverso jacente ejusdem generis esse*,“ via, quam Gerlingius iniit, generatim servata rite poterit demonstrari.

Duo enim maximì sphaerae circuli TST'S' et TRT'R', quorum utriusque centrum K est, in TKT' se invicem secant. Per axes QQ', PP' horum maximorum circulorum ponas circulum QPS'Q'P'S, qui illos maximos circulos in RR' et SS' secabit. TST'S' et TRT'R' tunc perpendiculari modo in circulo QPS'Q'P'S siti erunt. Itaque TT in plano QPS'Q'P'S perpendicularum est ideoque $TKR = R$ et $TKS = TKS' = R$; ita RKS angulus inclinationis planorum TRT', TST' erit, RKS' autem angulus inclinationis planorum TRT', TS'T'.

Porro per QQ' novum maximum circulum NQU ponas, qui circulum TRT'R' in MO, et circulum TST'S' in NU secet. Hic novus maximus circulus perpendicularis est in TST'S', indeque rectangula triangula

sphaerica oriuntur $T'NM$ et $T'UM$, quorum angulos rectos ad N et U conspicaberis.

In triangulo $MT'N$ angulus sphaericus $T' < 90^\circ$ sit, h. e. $RKS = T' =$ arcui RS , minor sit 90° . Quoniam (vide 2 theorematis modo demonstrati) $MKN < RKS$, h. e. quoniam arcus $MN <$ arcu RS est, MN quoque $< 90^\circ$ est.

Quum autem T' , trianguli $MT'N$ angulum sphaericum, $< 90^\circ$ sumserimus, T' in triangulo $T'UM > 90^\circ$ est, h. e. arcus RQS' major est 90° . Ex 3 vero theorematis modo demonstrati sequitur, $MKU > RKS'$ esse, h. e. arcum $MQU >$ esse arcu RQS' , quocirca arcus $MQU > 90^\circ$ est.

Quae vero theorematis: „*quamlibet rectanguli trianguli sphaerici cathetum cum angulo ex adverso jacente ejusdem generis esse*“ demonstratio, qualem nos, Gerlingio summam tantum proponente, uberius hic tractatam, et ubi necesse fuit, emendatam dedimus, longissima et copiosissima est, qua de causa sequentem ceteroquin minime ignotam*) theorematis saepius dicti demonstrationem longe anteferre cogimur.

(Fig. 10. 11.) ABC rectangulum triangulum sphaericum sit, $B = R$. Quodsi

(Fig. 10.) 1) $BC < 90^\circ$ est, $BD = 90^\circ$ reddas. Quia AB , BD arcus sunt maximorum circulorum, et $BD = 90^\circ$ perpendiculari modo in AB positus sit, D polus est arcus AB ; DA , maximi circuli arcu ducto, $DAB = 90^\circ$ est, inde $CAB < 90^\circ$, ergo ejusdem generis ac BC .

2) $BC > 90^\circ$ sit. $BE = 90^\circ$ efficias. Tunc E polus arcus AB erit. Per A , E arcum maximi circuli AE ponas, quo facto $EAB = 90^\circ$ erit, unde $CAB > 90^\circ$ est, ejusdemque generis ac BC .

IV.

In saepius jam commemoratis primis lineis Gerlingius ad formulas planae trigonometriae geometricè demonstrandas partim brevia impertit indicia, partim ad figuras tantum delegat, e quibus illae demonstrationes

*) Conf. Schön: *Lehrbuch der ebenen und sphär. Trigonometrie*. p. 210. §. 102.

facile sint ducendae. Ex illis quidem indiciis ac figuris eruditissimus quisque plurimarum, quas memoravimus formularum accurate repetere poterit demonstrationes. Sed in quibusdam formulis, in 24, 25, 26, 27 nonnullae fortasse difficultates occurrerint, quia figurae ad has formulas demonstrandas necessariae plures eaeque praecipuae subsidiariae lineae desunt. Qua de caussa appendicis instar harum formularum demonstrationes secundum figuram emendatam addere liceat.

Fig. 12. Sit $AG = AE = a$, $AB = b$. Ducta GE et demisso e B in GE perpendiculo BH , $HE = \sin a + \sin b$, $HG = \sin a - \sin b$ est. BC porro usque K producta KE , EB , BG , GK ducas. Tunc autem $BKE = BGH = \frac{1}{2}(a + b)$, et $BKG = BEG = \frac{1}{2}(a - b)$ est. Angulo BCE linea CR , et BCG linea CS dimidiato $BCR = RCE = \frac{1}{2}(a + b)$ erit, $SCG = BCS = \frac{1}{2}(a - b)$, $GS = SB$, $BR = RC$, atque apud R et S recti anguli sunt. Jam vero $\triangle BSC \sim \triangle BEH$, nam $BSC = R = BHE$, $BCS = BEH$, ideoque $SBC = EBH$,

$$\text{ergo } CB : CS = BE : HE$$

$$\text{i. e. } 1 : \cos \frac{1}{2}(a - b) = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b) : (\sin a + \sin b).$$

Inde sequitur, $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \cdot \cos \frac{1}{2}(a - b)$ i. e. 24 esse.

Sed $\triangle CRE$ quoque $\sim \triangle BGH$ est, nam $BHG = R = CRE$, $BGH = RCE$, ideoque $GBH = REC$.

$$\text{Ergo } CE : CR = BG : HG$$

$$\text{i. e. } 1 : \cos \frac{1}{2}(a + b) = 2 \sin \frac{1}{2}(a - b) : (\sin a - \sin b).$$

Inde $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cdot \sin \frac{1}{2}(a - b)$ i. e. 25.

E puncto K in GE perpendiculum KL demittas, et in AM perpendiculum KO . Cum triangula CDB et CKO inter se congruant, $CD = CO$ est, ergo $FO = CD + CF = \cos a + \cos b$, i. e. $KL = \cos a + \cos b$. Neque minus $DF = BH = \cos b - \cos a$ est. Porro $BGH + HGK = R = LKG + HGK$ est, consequenter $LKG = BGH = \frac{1}{2}(a + b)$.

Angulo ECK linea CV bipartito $EV = VK$ est, et apud V anguli recti orti sunt.

Cum vero $LKG = EKB$ sit, $LKE = GKB = \frac{1}{2}(a - b)$ est.

Jam autem $\triangle LKE \sim \triangle BCS$ est, quia $LKE = BCS$, $ELK = R = BSC$, ideoque $CBS = LEK$.

Ergo $CB : CS = EK : KL$,

i. e. $1 : \cos \frac{1}{2} (a - b) = 2 \sin ECV : (\cos a + \cos b)$.

Cum vero $\sin ECV = \sin [90^\circ - \frac{1}{2} (a + b)] = \cos \frac{1}{2} (a + b)$,

etiam $1 : \cos \frac{1}{2} (a - b) = 2 \cos \frac{1}{2} (a + b) : (\cos a + \cos b)$,

ergo $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2} (a + b) \cdot \cos \frac{1}{2} (a - b)$, i. e. 26.

Sed est quoque, quod ex antecedentibus facile sequitur, $\triangle CRB \sim \triangle BHG$,

consequenter $CB : BR = BG : BH$

i. e. $1 : \sin \frac{1}{2} (a + b) = 2 \sin \frac{1}{2} (a - b) : (\cos b - \cos a)$,

ergo $\cos b - \cos a = 2 \sin \frac{1}{2} (a + b) \cdot \sin \frac{1}{2} (a - b)$,

vel $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{1}{2} (a + b) \cdot \sin \frac{1}{2} (a - b)$ i. e. 27.

Jam vero transeundum est ad id, quod hujus scriptiunculæ nobis fecit opportunitatem. Placuit enim SERENISSIMIS Academiae nostrae NUTRITORIBUS, professoris philosophiae extraordinarii munere nos dignari. Quod honorificum munus professorium ex more instituto oratione IV ante Nonas Februar. in auditorio academico publice habenda gratissimo animo sumus auspicaturi. Cui orationi ut ILLUSTRISSIMUS ACADEMIAE CURATOR, MAGNIFICUS ACADEMIAE PRORECTOR, PATRES ACADEMIAE VENERANDI, PROFESSORES ILLUSTRES, EXCELLENTISSIMI, DOCTORES ORNATISSIMI, COMMILITONES HUMANISSIMI, AESTUMATISSIMI benevolo animo velint interesse, etiam atque etiam rogamus.

Scr. pridie Kal. Febr. MDCCCXXV.



